EDDI

Electronic Design
Development Institute

에디로봇아카데미

임베디드 마스터 Lv2 과정

제 1기

2022. 03. 19

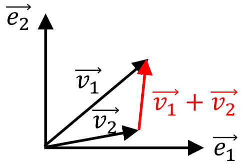
손표훈

CONTENTS

- 벡터 덧셈,뺄셈
  - 벡터 덧셈
  - 벡터 뺄셈
- 단위 벡터
- 벡터 내적(dot product), 외적(cross product)
  - 벡터 내적(dot product)
  - 벡터 외적(cross product)
- 그람-슈미트 정규직교화
  - 정규화? 직교화?
  - 정사영(projection)?
  - 그람-슈미트 정규직교화 과정

벡터 덧셈,뺄셈

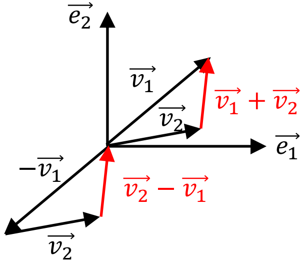
- 벡터 덧셈



→ $\vec{v_1} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}\,, \vec{v_2} = c\vec{e_1} + d\vec{e_2}$

→ $\vec{v_1} + \vec{v_2} = (a + c)\vec{e_1} + (b + d)\vec{e_2}$

- 벡터 뺄셈



→ $-\vec{v_1} = -a\vec{e_1} - b\vec{e_2}\,, \vec{v_2} = c\vec{e_1} + d\vec{e_2}$

→ $\vec{v_2} - \vec{v_1} = (c - a)\vec{e_1} + (d - b)\vec{e_2}$

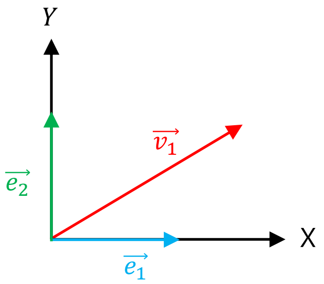
→ 벡터의 덧셈, 뺄셈은 교환법칙이 성립한다

단위 벡터

→ 단위벡터란? 단위벡터는 크기(길이)가 1인 벡터이다.

→ 단위벡터는 다음과 같이 구할 수 있다

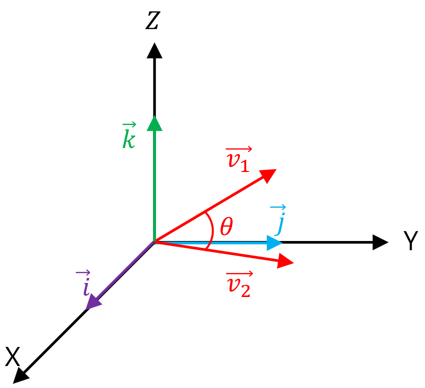
$\overrightarrow{e_{v1}} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_1}|}$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{v_1}$의 X축방향으로의 단위벡터, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{v_1}$의 Y축방향으로의 단위벡터



벡터 내적(dot product), 외적(cross product)

➢ 벡터 내적(dot product)

→ 두 벡터의 내적은 스칼라가 된다



→ $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = |\vec{v_1}||\vec{v_2}| \cos\theta$

→ $\vec{v_1} = (x_1, y_1,\ z_1),\ \vec{v_2} = (x_2, y_2,\ z_2), x_i, x_i,\ x_i$

→ $x_i, y_i,\ z_i$는 각각 $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ 방향벡터의 성분(scale)이다.

→ $\vec{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{v_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

→ 벡터 내적은 각 성분들의 곱과 벡터로 표현할 수 있다

→ $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$

→ $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = x_1x_2(\vec{i}\cdot\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i}\cdot\vec{j}) + x_1z_2\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right) + y_1x_2(\vec{j}\cdot\vec{i}) + y_1y_2(\vec{j}\cdot\vec{j}) + y_1z_2\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)$
$+z_1x_2\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right) + z_1y_2\left(\vec{k}\cdot\vec{j}\right) + z_1z_2\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)$

→ 여기서 $(\vec{i}\cdot\vec{j}), \left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right), \left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)$는 모두 수직하는 벡터의 내적이므로 $\cos(90^\circ) = 0$이고,

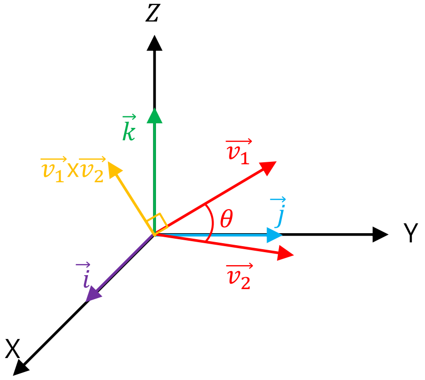
→ 여기서 $(\vec{i}\cdot\vec{i}), (\vec{j}\cdot\vec{j}), \left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)$는 모두 평행하는 벡터의 내적이므로 $\cos(0^\circ) = 1$이 되므로 식을 다시 정리하면

→ $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

벡터 내적(dot product), 외적(cross product)

- 벡터 외적(dot product)

  → 두 벡터의 외적은 두 벡터에 수직인 벡터가 된다



→ $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = |\vec{v_1}||\vec{v_2}| \sin\theta$

→ $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2), x_i, x_i, x_i$

→ x_i, y_i, z_i는 각각 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 방향벡터의 성분(scale)이다.

→ $\vec{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \ \vec{v_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

→ 벡터 내적은 각 성분들의 곱과 벡터로 표현할 수 있다

→ $\vec{v_2} \times \vec{v_1} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \times (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$

→ $\vec{v_2} \times \vec{v_1} = x_2x_1(\vec{i} \times \vec{i}) + x_2y_1(\vec{i} \times \vec{j}) + x_2z_1\left(\vec{i} \times \vec{k}\right) + y_2x_1(\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_2y_1(\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_2z_1\left(\vec{j} \cdot \vec{k}\right)$
$+z_2x_1\left(\vec{k} \cdot \vec{i}\right) + z_2y_1\left(\vec{k} \cdot \vec{j}\right) + z_2z_1\left(\vec{k} \cdot \vec{k}\right)$

→ 여기서 $(\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{k}$, $\left(\vec{i} \times \vec{k}\right) = \vec{j}$, $\left(\vec{j} \times \vec{k}\right) = \vec{i}$이고, $(\vec{j} \times \vec{i}) = -\vec{k}$, $\left(\vec{k} \times \vec{i}\right) = -\vec{j}$, $\left(\vec{k} \times \vec{j}\right) = -\vec{i}$

→ 여기서 $(\vec{i} \times \vec{i})$, $(\vec{j} \times \vec{j})$, $\left(\vec{k} \times \vec{k}\right)$는 모두 평행하는 벡터의 내적이므로 $\sin(0^\circ) = 0$이 되므로 식을 다시 정리하면

→ $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = x_2y_1\vec{k} + x_2z_1\vec{j} + y_2x_1(-\vec{k}) + y_2z_1\vec{i} + z_2x_1(-\vec{j}) + z_2y_1(-\vec{i})$
$= (y_2z_1 - z_2y_1)\vec{i} + (x_2y_1 - y_2x_1)\vec{k} + (x_2z_1 - z_2x_1)\vec{j}$

→ 성분 벡터만 보면 $(y_2z_1 - z_2y_1) + (x_2y_1 - y_2x_1) + (x_2z_1 - z_2x_1)$

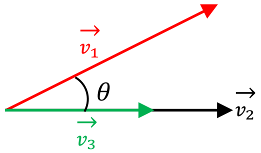
그람-슈미트 정규직교화

→ 그람-슈미트 정규직교화란? 주어진 일차독립 벡터를 부터 단위 직교 벡터로 변환로 변환하는 것이다.

- 직교화? 정규화?

  → 그람-슈미트 정규직교화는 두 가지 단계로 정리할 수 있다
  (1) 직교화 : 주어진 벡터들로 부터 직교벡터(서로 수직인 벡터)를 구한다
  (2) 정규화 : 직교화 벡터들로 부터 단위벡터(크기(길이)가 1인 벡터)를 구한다

- 정사영(projection)?



→ 벡터 $\vec{v_3}$ 는 $\vec{v_1}$ 을 $\vec{v_2}$ 에 투영시킨 벡터이다

→ $\vec{v_3}$ 의 크기 $|\vec{v_3}|$ = $|\vec{v_1}|\cos\theta$ 이고, $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = |\vec{v_1}||\vec{v_2}|\cos\theta$, $\cos\theta = \frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}$ $\therefore$ $|\vec{v_3}| = \frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|}$

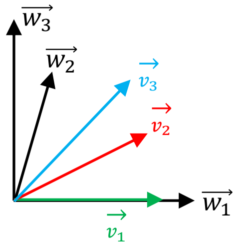
→ $\vec{v_3}$ 의 방향성분(단위벡터) = $\frac{\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|}$

→ $\vec{v_3}$ 벡터$proj_{\vec{v_2}}(\vec{v_1})$는 다음과 같다

  → 크기x벡터이므로 $\vec{v_3} = \frac{\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|}\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|} = \frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|^2}\vec{v_2}$

그람-슈미트 정규직교화

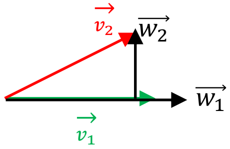
➢ 그람-슈미트 정규직교화 과정



→ 주어진 벡터 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$에 대해 이 벡터들을 생성 할 수 있는 직교벡터 $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$는 다음과 같이 구할 수 있다

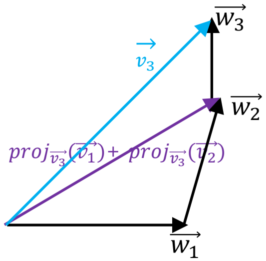
→ $\vec{w_1} = \vec{v_1}$ 주어진 벡터 중 하나를 기준으로 잡는다

→ $\vec{w_1}$의 정규화 벡터 $\vec{e_1}$ 는 $\frac{\vec{w_1}}{|\vec{w_1}|}$



→ $\vec{v_2} = \vec{w_2} + proj_{\vec{w_1}}(\vec{v_2})$ ∴ $\vec{w_2} = \vec{v_2} - proj_{\vec{w_1}}(\vec{v_2})$ 여기서 $proj_{\vec{w_1}}(\vec{v_2}) = \frac{\vec{w_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{w_1}|^2}\vec{w_1}$

→ $\vec{w_2}$의 정규화 벡터 $\vec{e_2}$ 는 $\frac{\vec{w_2}}{|\vec{w_2}|}$



→ $\vec{v_3} = \vec{w_3} + proj_{\vec{w_1}}(\vec{v_3}) + proj_{\vec{w_2}}(\vec{v_3})$

∴ $\vec{w_3} = \vec{v_3} - proj_{\vec{w_1}}(\vec{v_3}) - proj_{\vec{w_2}}(\vec{v_3})$, 여기서 $proj_{\vec{w_1}}(\vec{v_3}) = \frac{\vec{w_1}\cdot\vec{v_3}}{|\vec{w_1}|^2}\vec{w_1}$, $proj_{\vec{w_2}}(\vec{v_3}) = \frac{\vec{w_2}\cdot\vec{v_3}}{|\vec{w_2}|^2}\vec{w_2}$

→ $\vec{w_3}$의 정규화 벡터 $\vec{e_3}$ 는 $\frac{\vec{w_3}}{|\vec{w_3}|}$

→ 직교화의 일반화 식은 다음과 같다

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} proj_{\vec{w_i}}(\vec{v_k})$$