파이썬 - HW1

임베디드스쿨1기
Lv1과정
2020. 07. 28
박성환

1. Keyword 정의

1) 평균변화율

평균변화율

$y=f(x)$위의 두점이 $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$이 있을 때

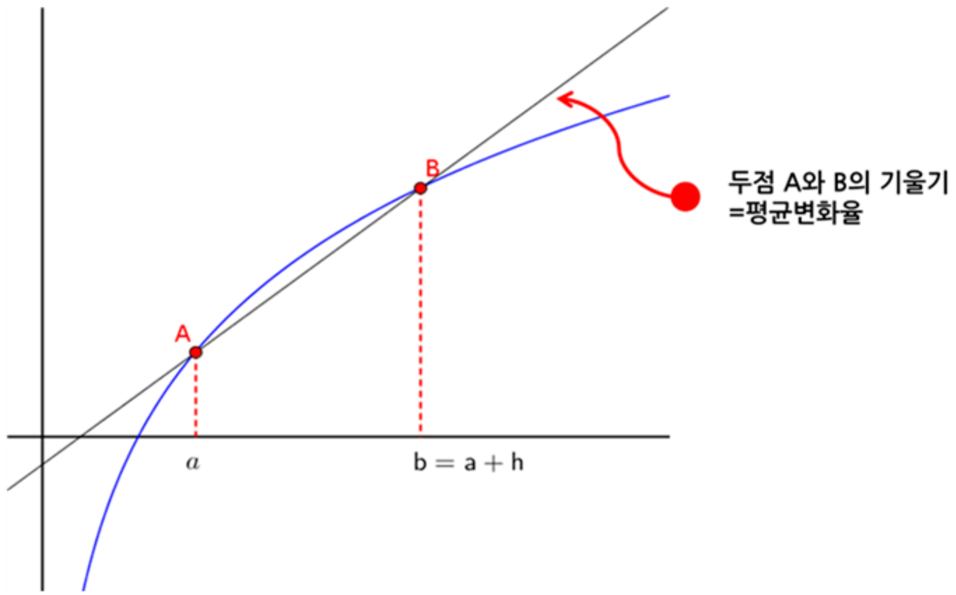
평균변화율 ⇨ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

여기서 $b=a+h$ 라고 두면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

즉 곡선 위의 두 점의 기울기를 의미함

평균변화율을 그래프로 보면



1. Keyword 정의

2) 미분계수

미분계수 : 평균변화율의 극한값

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{or} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

① **평균변화율의 극한값을** $f'(a)$**로 약속함**

⇨ $x = a$**에서 미분계수라고 읽음**

② **그래프에서 보면** $f'(a)$**는**

$(a, f(a))$**에서 접선의 기울기를 의미함**

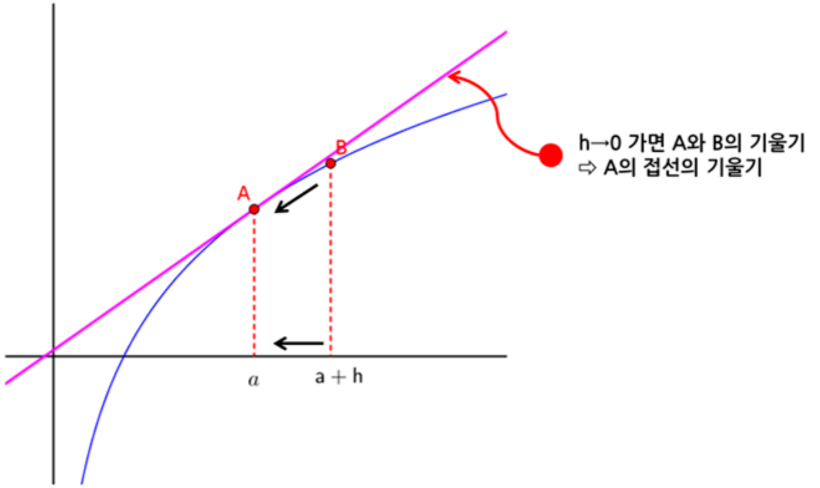
주로 미분계수 문제는 평균변화율의 극한 개념을 이용하여 문제를 풀면 쉽게 풀리는 경우가 많이 있습니다.

1. Keyword 정의

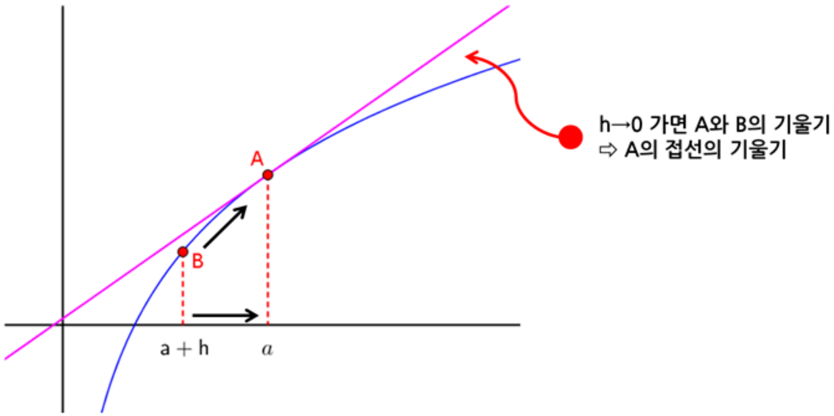
2) 미분계수

$x=a$ 에서 미분계수 $f'(a)$ 를 그래프로 보면

h > 0 일때



h < 0 일때



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{(a+h)-(a-h)}=f'(a)$$

두점은 $(a+h, f(a+h))$, $(a-h, f(a-h))$에서 기울기인데 이 두점 다
$(a, f(a))$로 가까이 가고 있기 때문에
결과적으로 $(a, f(a))$에서 접선의 기울기 $f'(a)$가 됩니다.

이런 방법을 이용하면 유사한 형태의 문제들을 쉽게 풀이가 가능합니다.

예를들어

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$의 극한값을 구하여라.

① 평균변화율이 나오게 변형합니다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h} ⇨ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{(a+2h)-(a-h)}\times\frac{3h}{h}$$

② 어떤 점을 향해서 가는지 확인 ⇨ 미분계수 파악

두점이 $(a, f(a))$를 가까이 접근하므로 평균변화율의 극한은 $f'(a)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h} ⇨ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{(a+2h)-(a-h)}\times\frac{3h}{h}=f'(a)\times 3$$

1. Keyword 정의

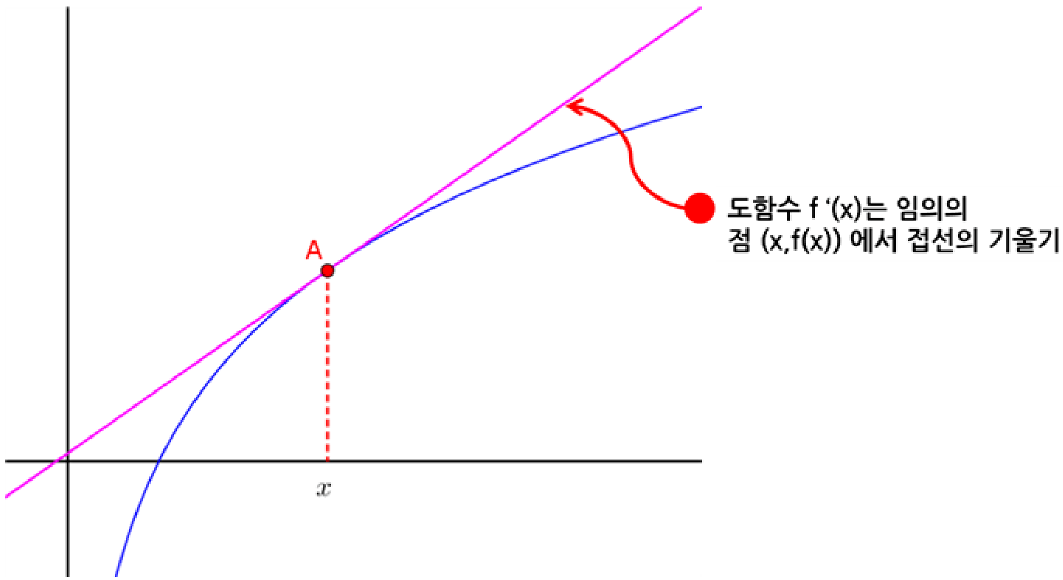
3) 도함수

도함수 : 미분계수의 일반화

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

① 평균변화율의 극한값을 $f'(x)$로 정의함
② 그래프에서 보면 $f'(x)$는
임의의 점 $(x, f(x))$에서 접선의 기울기

도함수를 $f'(x)$를 그래프로 보면



1. Keyword 정의

3) 도함수

여기서 보면 미분계수는 특정한 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기를 의미하고
도함수는 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기를 의미합니다.

예를들면
$f'(1) = 5$ ($x = 1$에서 미분계수)
$f'(x) = 2x + 3$ ($f(x)$의 도함수)
즉 도함수에 특정한 값이 들어가면 미분계수를 구할 수 있습니다.

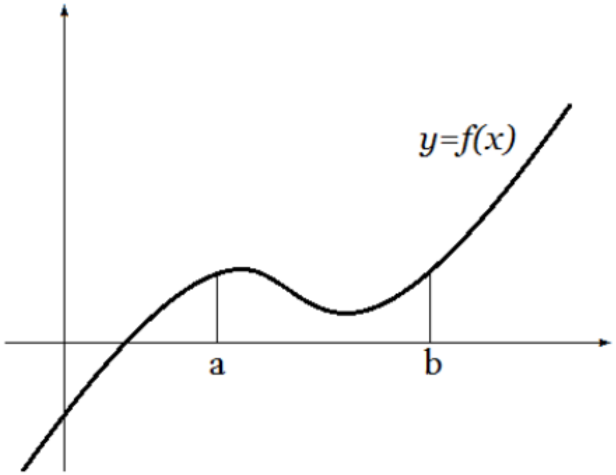
수열처럼 생각해보면

몇 번째 항의 값 ⇨ 미분계수
일반항 ⇨ 도함수
와 비슷한 개념이라고 생각하면 됩니다.

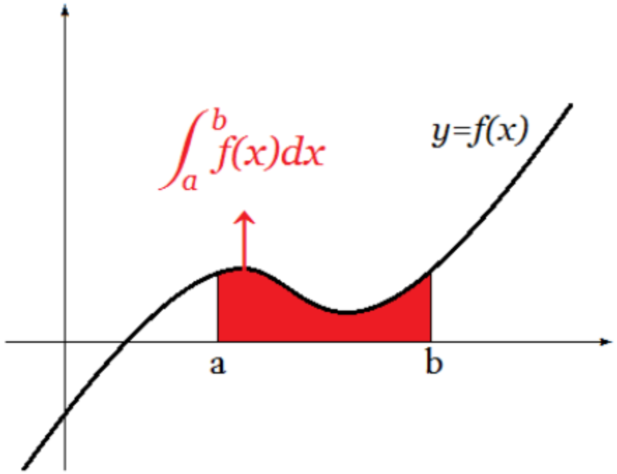
2. 정적분

1) 정적분 정의

정적분은 구간이 정해진 적분이라는 뜻으로 원론적으로 정해진 구간에서의 넓이를 의미합니다.
3차함수 f(x)에 관하여 그래프가 아래와 같을 때



x=a부터 x=b까지 정적분한다면 그 값은 아래의 도형의 넓이가 됩니다.
즉, y=f(x)와 x=a, x=b,y=0(x축)이 만드는 도형의 넓이를 의미하죠.



2. 정적분

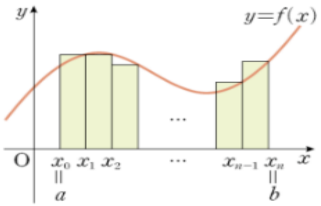
2) 정적분 증명

구간 [a,b]를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로

$$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n(=b)$$

이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하면 다음과 같습니다.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$



이 때, 위의 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함수값이 세로의 길이인 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)\Delta x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x.$$

여기서,

n→∞ 이면 S_n 은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워집니다.

따라서

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\ .$$

일반적으로 함수 y=f(x)가 구간 [a,b]에서 연속이면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 항상 존재합니다.

이 때, 이 극한값을 함수 f(x)의 a에서 b까지의 **정적분**이라 하고, 기호로는 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

2. 정적분

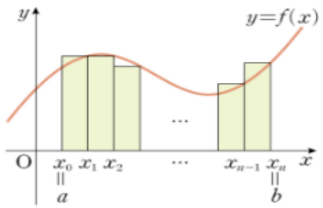
2) 정적분 증명

구간 [a,b]를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로

$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n(=b)$

이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하면 다음과 같습니다.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$



이 때, 위의 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함수값이 세로의 길이인 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)\Delta x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x.$$

여기서,

n→∞ 이면 S_n 은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워집니다.

따라서

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

일반적으로 함수 y=f(x)가 구간 [a,b]에서 연속이면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 항상 존재합니다.

이 때, 이 극한값을 함수 f(x)의 a에서 b까지의 **정적분**이라 하고, 기호로는 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

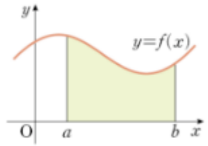
$$\int_a^b f(x)dx.$$

그리고 위의 적분값을 구하는 것을 함수 f(x)를 a에서 b까지 적분한다고 하고, a를 이 정적분의 **아래끝**, b를 **위끝**이라고 합니다.

이때,

y=f(x)가 구간 [a,b]에서 연속이고 f(x)≥0 이면

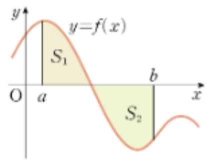
정적분은 곡선 y=f(x), 직선 x=a, x=b 그리고 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 나타냅니다.



그리고

아래 그림과 같이 y=f(x)가 구간[a,b]에서 연속이고, 양의 값, 음의 값 모두 가지면

정적분은 x축 위쪽의 넓이 S_1에서 x축 아래쪽의 넓이 S_2 를 뺀 값을 나타냅니다.



참조

- https://j1w2k3.tistory.com/989
- https://m.blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=junhyuk7272&logNo=220959300813&proxyReferer=https:%2F%2Fwww.google.com%2F

감사합니다.