MEDIAN IA02 (2014)

MENAGERIE

Soit l'énoncé suivant : « Les chats qui ne fréquentent que les chiens sont des animaux qui ne chassent jamais de souris ».

1) Représenter cette phrase en logique des prédicats du premier ordre en utilisant les prédicats suivants :

CHAT(x)	*x est un chat*
CHIEN(x)	*x est un chien*
ANIMAL(x)	*x est un animal*
FREQUENTER(x,y)	*x fréquente y*
SOURIS(x)	*x est une souris*
CHASSER(x,y)	*x chasse y*

2) Mettre la formule obtenue sous forme clausale.

Question 1 :

Cette question est évidemment archi classique, et compte-tenu de ce qui a été dit et observé en cours ou en TD, le mieux était de procéder avec méthode et découpage en niveaux.

Tout d'abord, on écrit : "Les chats qui vérifient la propriété P sont des animaux qui vérifient la propriété Q", ce qui donne : $\forall x\ (\ (chat(x) \wedge P(x)) \Rightarrow (ani(x) \wedge Q(x))\ )$

Quant à P(x), "x ne fréquente que les chiens" se traduit par :

$\forall y\ (\ fre(x,y) \Rightarrow chien(y)\ )$

Pour Q(x), "x ne chasse jamais de souris" se traduit par :

$\neg\exists z\ (sou(z) \wedge chasser(x,z))$

ou encore :

$\forall z\ (\ (sou(z) \Rightarrow \neg chasser(x,z)\ )$

D'où la formule suivante :

$\forall x\ \mathbf{(}\ (\ chat(x) \wedge \forall y\ (fre(x,y)) \Rightarrow chien(y))\ )\ \Rightarrow\ (\ ani(x) \wedge \neg\exists z\ (sou(z) \wedge chasser(x,z))\ )\ \mathbf{)}$

Il n'y avait donc aucune difficulté particulière.

Question 2 :

Cette question est tout aussi classique : techniquement, on en a traité de plus difficiles en TD, mais aussi de plus faciles ! On prend son mal en patience et on y arrive…..

$\forall x\ \mathbf{(}\ (\ chat(x) \wedge \forall y\ (fre(x,y)) \Rightarrow chien(y))\ )\ \Rightarrow\ (\ ani(x) \wedge \neg\exists z\ (sou(z) \wedge chasser(x,z))\ )\ \mathbf{)}$

Etape 1, élimination du $\Rightarrow$:

$\forall x\ \mathbf{(}\neg\ (\ chat(x) \wedge \forall y\ (\neg fre(x,y)) \vee chien(y))\ )\ \vee\ (\ ani(x) \wedge \neg\exists z\ (sou(z) \wedge chasser(x,z))\ )\ \mathbf{)}$

Etape 2, propagation du ¬ :

$\forall x\ (\ (\ \neg chat(x) \vee \exists y\ (fre(x,y)) \wedge \neg chien(y))\ )\ \vee\ (\ ani(x) \wedge \forall z\ (\neg sou(z) \vee \neg chasser(x,z))\ )\ )$

Etape 4, skolémisation (de type II) :

$\forall x\ (\ (\ \neg chat(x) \vee (fre(x,f(x))) \wedge \neg chien(f(x)))\ )\ \vee\ (\ ani(x) \wedge \forall z\ (\neg sou(z) \vee \neg chasser(x,z))\ )\ )$

Etape 5, suppression des quantifications universelles :

$(\ \neg chat(x) \vee (fre(x,f(x))) \wedge \neg chien(f(x)))\ )\ \vee\ (\ ani(x) \wedge (\neg sou(z) \vee \neg chasser(x,z))\ )$

Etape 6, mise sous forme conjonctive :

Il faut bien avouer qu'elle est un peu "pénible", mais ça se fait ! Il suffit de la faire en deux temps, en considérant d'abord que $(\neg chat(x) \vee (fre(x,f(x))) \wedge \neg chien(f(x))))$ est P, d'où par distributivité :

$(P \vee ani(x))\ \wedge\ (P \vee \neg sou(z) \vee \neg chasser(x,z)))$

Soit en fait :

$(\neg chat(x) \vee (fre(x,f(x))) \wedge \neg chien(f(x))) \vee ani(x))\ \wedge$

$(\neg chat(x) \vee (fre(x,f(x))) \wedge \neg chien(f(x))) \vee \neg sou(z) \vee \neg chasser(x,z)))$

Soit encore, par une ultime distributivité :

$(\neg chat(x) \vee fre(x,f(x)) \vee ani(x))\ \wedge\ (\neg chat(x) \vee \neg chien(f(x)) \vee ani(x))\ \wedge$

$(\neg chat(x) \vee fre(x,f(x))) \vee \neg sou(z) \vee \neg chasser(x,z))\ \wedge$

$(\neg chat(x) \vee\ \neg chien(f(x)) \vee \neg sou(z) \vee \neg chasser(x,z)))$

Etape 7, séparation des clauses :

Donc on obtient en définitive 4 clauses. Les voici, après renommage des variables :

C1 : $\{\neg chat(x) \vee fre(x,f(x)) \vee ani(x)\}$

C2 : $\{\neg chat(y) \vee \neg chien(f(y)) \vee ani(y)\}$

C3 : $\{\neg chat(u) \vee fre(u,f(u))) \vee \neg sou(z) \vee \neg chasser(u,z)\}$

C4 : $\{\neg chat(v) \vee\ \neg chien(f(v)) \vee \neg sou(w) \vee \neg chasser(v,w)\}$

En définitive, ce n'était pas évident, mais faisable dès lors qu'on agissait avec rigueur.

Constat sur les copies :

La partie droite de la règle a été en général bien traitée. En revanche, la partie gauche a souvent été mal structurée, avec en particulier un quantificateur mal placé ou des lacunes de parenthésage. De plus, plusieurs d'entre vous ont trouvé le moyen de faire suivre au sein de cette formule un ou des ∀ d'une suite de conjonctions : il semblerait donc qu'en avoir parlé de nombreuses fois en TD et en cours n'était pas suffisant ! J'ajoute que quelle que soit la version proposée, exacte ou pas, la mise sous forme clausale a été examinée.

==

MODELES

Soit les deux formules de L1 suivantes :

$\omega 1 : \forall x \, \exists y \, P(x,y)$

$\omega 2 : \forall x \, \forall y \, (P(x,y) \Rightarrow Q(y))$

Soit D = {1 ; 2 ; 3}. Déterminer un modèle I = < D, ψ > de {ω1 ; ω2} de domaine D. Attention on ne donnera pas de solution triviale où, lors de l'interprétation de P et de Q, tout serait mis à Vrai.

Cette question ne posait a priori aucune difficulté. Nous avons fait en TD quelque chose d'assez approchant, mais il s'avère étonnamment qu'elle a déstabilisé quelques uns d'entre vous.

Le domaine étant D = {1 ; 2 ; 3}, il faut d'abord faire en sorte que ω1 soit vraie. Pour ce faire, il suffit minimalement d'associer à chaque élément de D au moins un élément de D par P.

Donc : $\psi(P) : D^2 \rightarrow \{V ; F\}$.

(1,2) $\rightarrow$ V

(2,1) $\rightarrow$ V

(3,2) $\rightarrow$ V et les autres à F.

On peut bien sûr ajouter d'autres couples à cette liste. Ceci étant acquis, il nous reste à rendre ω2 vraie. Ici, nécessairement et minimalement il faut ajouter :

Donc : $\psi(Q) : D \rightarrow \{V ; F\}$

1 $\rightarrow$ V nécessairement car on a $\psi(P)(2,1)$ à V.

2 $\rightarrow$ V nécessairement car on a $\psi(P)(1,2)$ ou $\psi(P)(3,2)$ à V.

3 $\rightarrow$ F si on ne veut pas que tout soit mis à V.

Constat :

Comme chaque année (!), cet exercice a encore été le plus mal traité des quatre. Il semble que les questions d'ordre sémantique posent davantage de problèmes à beaucoup d'entre vous. On peut s'interroger sur les raisons : un seul TD sur le sujet, un domaine un peu plus théorique et qui demande davantage de compréhension et de réflexion, mais aussi qui réclame plus d'approfondissement…. J'imagine que la correction révèle a posteriori que cette question était effectivement très simple, et de mon point de vue la plus simple de toutes !

==

DIVERTISSANT... ?

On considère les phrases suivantes :

P_1 : Tout ce que quelqu'un regarde sans s'ennuyer est un divertissement.
P_2 : Eric regarde tous les divertissements, sauf les émissions de variété.
P_3 : Tout film est regardé par au moins une personne qu'il n'ennuie pas.
P_4 : "Gravity" est un film.

1) Représenter ces phrases en logique des prédicats du premier ordre. On utilisera les prédicats suivants :

   REGARDE(x,y) : *x regarde y*
   ENNUIE (y,x) : *y ennuie x*
   DIVERTISSEMENT (x) : *x est un divertissement*
   FILM (x) : *x est un film*
   VARIETE (x) : *x est une émission de variété*
   Et les constantes suivantes :
   GRAVITY, ERIC

2) On veut répondre à la question : "que regarde Eric ?". A l'issue d'un bref raisonnement, vous devez constater que celui-ci ne peut être mené tout à fait à son terme. Quelle unique formule de L1 faut-il ajouter, minimalement, pour que cette question ait une réponse ? Deux versions sont possibles : l'une, générale, avec variable et portant sur films et variétés ; à défaut l'autre plus spécifique, avec constante, et portant sur le film "Gravity".

3) Après ajout de cette formule, répondre à la question précédente par la méthode de réfutation. Aucune stratégie n'est imposée.

Question 1 :

Représentation de P_1 :

Peu de commentaires ici, tant cette structure est parmi les plus simples qui soient.

$$\forall x\ \forall y\ (\ (reg(x,y) \wedge \neg enn(y,x)) \Rightarrow div(y))$$

Représentation de P_2 :

Encore plus simple.

$$\forall x\ (\ (div(x) \wedge \neg var(x)) \Rightarrow reg(E,x))$$

Représentation de P_3 :

Structure classique, s'il en est.

$$\forall x\ (\ film(x) \Rightarrow \exists y\ (reg(y,x) \wedge \neg enn(x,y))\ )$$

Représentation de P_4 :

$$film(G)$$

Constat :

A ma surprise, la première phrase est celle qui vous a posé le plus de difficultés, avec parfois l'apparition de la structure $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R)$, hautement improbable, ou pire encore la présence dès le début d'un $\exists x$ voire d'un $\exists y$!!!! Comment peut-on voir derrière une telle l'affirmation de l'existence d'un "objet" vérifiant une certaine propriété ? Une faute assez récurrente a été la suivante : $\forall x\ \exists y\ ((reg(x,y) \wedge \neg enn(y,x)) \ \Rightarrow\ div(x))$, où le $\exists y$ est terriblement mal placé ; il aurait fallu écrire : $\forall x\ (\ (\exists y\ (reg(x,y) \wedge \neg enn(y,x)) \ \Rightarrow\ div(x))$, ce $\exists y$ étant désormais intégré à la partie gauche de l'implication et à elle seule.

Question 2 :

Si l'on fait un raisonnement à blanc, compte-tenu de la question posée qui vise à connaître ce que regarde Eric, on voit bien que c'est la règle P_2 qui permettra en dernier lieu de le savoir. Mais pour que cette règle se déclenche, il faut aussi que l'on sache que la constante par laquelle x sera substituée n'est pas une variété.

A propos des films en général ou de Gravity en particulier, il existe au moins deux façons d'exprimer cela :

- Version générale :

  "Les films ne sont pas des variétés". Ce qui donne :

  $\forall x\ (film(x) \Rightarrow \neg var(x))$ ou $\forall x\ (var(x) \Rightarrow \neg film(x))$

- Version spécifique : "Gravity n'est pas une variété". Ce qui donne :

  $\neg var(G)$

Pour la suite, nous prendrons de préférence la première version, pour d'évidentes raisons de généralité. Nous la notons P_5, et nous l'ajoutons au corpus de connaissances. Quant à la question, on obtient bien sûr :

$$Q : \exists x\ \ reg(E,x)$$

Constat :

Question assez bien traitée (il est vrai que le texte était assez explicite…), à quelques rares exceptions près.

Question 3 :

Recherche des clauses :

Il faut d'abord chercher les clauses issues de P_1, P_2 , P_3, P_4, P_5 et de $\neg Q$. Voici ce qu'on obtient, sans toujours en donner les étapes intermédiaires :

- P_1 donne : $C_1 = \{\neg reg(x,y) \ \vee\ enn(y,x) \ \vee\ div(y)\}$
- P_2 donne : $C_2 = \{\neg div(z) \ \vee\ var(z) \ \vee\ reg(E,z)\}$
- Pour P_3, plus en détails :

  $\forall x\ (\neg film(x) \vee\ \exists y\ (reg(y,x) \ \wedge\ \neg enn(x,y))\ )$

  $\forall x\ (\neg film(x) \vee\ (reg(f(x),x) \ \wedge\ \neg enn(x,(f(x)))\ )$ après skolémisation de type (II)

  $\neg film(x) \ \vee\ (reg(f(x),x) \wedge \neg enn(x,(f(x)))$

  $(\neg film(x) \ \vee\ reg(f(x),x)) \ \wedge (\neg film(x) \vee \neg enn(x,(f(x)))$ après distributivité

  On obtient donc deux clauses :

$C_3 = \{\neg film(u) \vee reg(f(u),u)\}$

$C_4 = \{\neg film(v) \vee \neg enn(v,(f(v))\}$

- P_4 donne : $C_5 = \{film(G)\}$
- P_5 donne : $C_6 = \{\neg film(w) \vee \neg var(w)\}$
- Et enfin : $\neg Q = \{\neg reg(E,s)\}$

Ainsi, au total, on aura à traiter 7 clauses, et donc pour parvenir à la clause vide, à supposer que toutes soient utiles, au moins 6 inférences seront nécessaires. Récapitulons :

$C_1 = \{\neg reg(x,y)\ ) \vee enn(y,x) \vee div(y)\}$

$C_2 = \{\neg div(z)\ ) \vee var(z) \vee reg(E,z)\}$

$C_3 = \{\neg film(u) \vee reg(f(u),u)\}$

$C_4 = \{\neg film(v) \vee \neg enn(v,(f(v))\}$

$C_5 = \{film(G)\}$

$C_6 = \{\neg film(w) \vee \neg var(w)\}$

$\neg Q = \{\neg reg(E,s)\}$

Constat :

Question bien traitée également, à ceci près que certains décidemment font une sorte de blocage sur la skolémisation de type 2.

Obtention d'un graphe de réfutation :

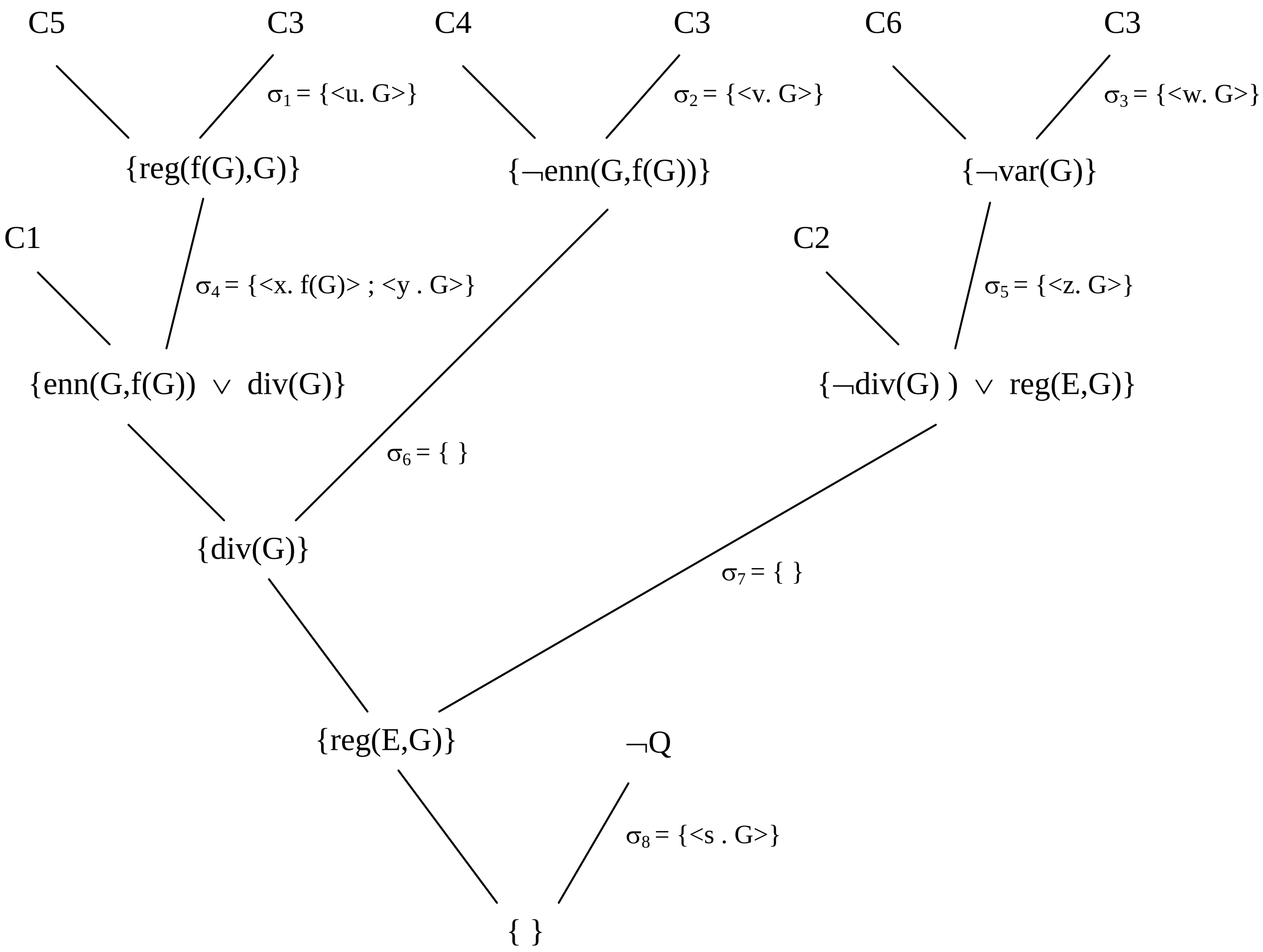
Rappelons que Q est conséquence logique de $\{P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5\}$ si et seulement si on peut montrer que l'ensemble $\{C_1; C_2 ; C_3 ; C_4 ; C_5 ; C_6 ; \neg Q\}$ est insatisfiable, donc ssi encore il existe un graphe de réfutation issu de cet ensemble de clauses.

En fait, il en existe beaucoup. Voici l'un d'entre eux, parmi les plus simples : aucune stratégie n'étant imposée, on peut se laisser guider par les constantes, ce qui permet de limiter les renommages. On n'oublie pas, bien sûr, de donner, à chaque étape, les substitutions associées à l'application de la règle de résolution. Enfin, on ne cherche pas à trouver la solution impliquant un nombre minimum d'inférences, cet objectif étant sans réelle importance.
Comme vous le voyez, celui-ci était vraiment très aisé à développer, je suis même pas loin de penser que c'était un peu trop facile…………

Constat :

RAS en général. Toutefois, on a pu voir des liaisons du genre < f(x) . G> par exemple ou des clauses comportant à la fois un signe $\vee$ mais aussi un signe $\wedge$, fallait le faire !!! Un étonnement : le fait que vous ayez rarement construit un graphe privilégiant les constantes, et donc une obligation de renommages qui fut loin d'être totalement respectée.

Un arbre de réfutation :



Conséquences :

- On a donc : $\{P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5\} \models Q$. Donc, si les hypothèses sont vraies, il existe bien un film qu'Eric regarde.
- De plus, que regarde Eric ? On fait : $\sigma_8 \circ \sigma_7 \circ \sigma_6 \circ \sigma_5 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$. Dès lors : $< s \,.\, G >$. Autrement dit, Eric regarde Gravity, on s'en doutait….

Constat :

Les deux conséquences ne sont pas toujours données, votre préférence allant clairement pour la seconde.

==

GENEA-LOGIQUE

On considère les prédicats suivants :

Ancêtre(x,y) : "x est ancêtre de *y*"

Parent(x,y) : "*x* est parent de *y*"

1) Traduire en langage des prédicats le texte suivant :

   R1 : *si une personne est ancêtre d'une seconde personne elle-même ancêtre d'une tierce personne, alors la première est ancêtre de la troisième.*

   R2 : tout parent d'une personne quelconque est ancêtre de cette personne.

   R3 : *toute personne a un parent.*

2) Déterminer les clauses correspondantes.

3) Supposons que l'on suive la stratégie de résolution de Prolog pour répondre à la question suivante : « *Alain a-t-il un ancêtre ?* ». Peu après le début de la réfutation, vous devez constater un problème bien connu : lequel ? Proposez un moyen très simple pour y remédier portant sur l'ordre des règles.

4) Cette modification ayant été effectuée, répondez à la question ci-dessus, en appliquant à la lettre une stratégie Prolog et en arrêtant la réfutation dès l'obtention d'une deuxième solution. A cet égard, on rappelle que Prolog, dès l'obtention d'une clause vide c'est-à-dire d'une solution, cherche la solution suivante en faisant des retours-arrière chronologiques.

5) Montrez qu'il est possible de définir la notion de *parent* en n'utilisant que le seul prédicat *ancêtre* ! $\forall y \ \forall y$ (*parent(x,y)* $\Leftrightarrow$ ……………

Question 1 :

R1 : $\forall x \ \forall y \ \forall z \ ((anc(x,y) \wedge anc(y,z)) \Rightarrow anc(x,z))$

R2 : $\forall x \ \forall y \ (par(x,y) \Rightarrow anc(x,y))$

R3 : $\forall x \ \exists y \ par(y,x)$

Constat :

De nouveau et de façon très surprenante, des fautes sur la première phrase, avec parfois la présence simultanée d'un $\exists y$ certes possible, mais à condition de l'intégrer clairement et seulement à la partie gauche de l'implication, mais aussi ce qui est sidérant, d'un $\exists z$. Aucune explication à ce contre-sens logique.

Question 2 :

C1 : $\{\neg anc(x,y) \vee \neg anc(y,z) \vee anc(x,z)\}$

C2 : {¬par(u,v) ∨ anc(u,v)}
C3 : {par(f(w),w)}

<u>Constat</u> :

RAS.

<u>Question 3 :</u>

Le problème posé a été évoqué en cours et en TD. On sait qu'en Prolog l'ordre des règles est extrêmement important. Pour savoir si Alain a un ancêtre, pour l'ordre de départ, la règle R1 va être nécessairement appliquée en premier : elle va alors décomposer ce but en deux sous-buts de type ancêtre : le principe du "plus à gauche" s'appliquant, le premier d'entre eux, par une nouvelle application de la règle R1, est alors décomposé à son tour en deux-sous buts de type ancêtre, et ainsi de suite…. sans que jamais une autre règle que R1 puisse s'appliquer. A l'évidence, on tombe alors dans le développement d'une branche infinie dont on ne peut sortir ! Le programme Prolog, sous cette forme, ne peut donc répondre à la question posée.

Que faire ? La parade est simple : changer l'ordre des règles, enfin plutôt des règles concernées, c'est-à-dire de celles qui concluent sur le prédicat ancêtre. On échange donc la règle R1 et la règle R2 ; en revanche, il est inutile de déplacer la règle R3. Cela dit, si on le fait, ceci ne change rien au développement du graphe de réfutation.

Finalement, nous prendrons les clauses dans l'ordre suivant :

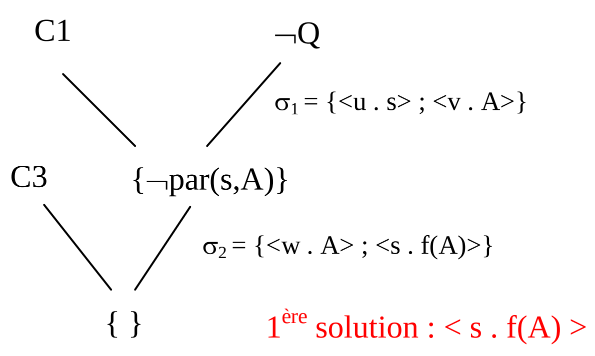
C1 : {¬par(u,v) ∨ anc(u,v)}
C2 : {¬anc(x,y) ∨ ¬anc(y,z) ∨ anc(x,z)}
C3 : {par(f(w),w)}
Ajoutons à cela la clause but :
¬Q : {¬anc(s,A)}

<u>Constat</u> :

Bien compris la plupart du temps..

<u>Question 4 :</u>

On part bien sûr de ¬Q.



<u>Constat</u> :

Quelquefois une erreur d'unification sur σ_2.

Backtracking chronologique : on remonte au nœud précédent {¬par(s,A)} auquel nul autre clause que C3 ne peut être associée. Par conséquent, on remonte encore au nœud précédent, à savoir ¬Q.

C2 ¬Q

σ_1 = {<x . s> ; <z . A>}

C1 {¬anc(s,y) ∨ ¬anc(y,A) }

σ_2 = {<u . s> ; <v . y>}

C3 {¬par(s,y) ∨ ¬anc(y,A) }

σ_3 = {<s . f(w)> ; <y . w>}

C1 {¬anc(w,A) }

σ_4 = {<u1 . w> ; <v1 . A>}

C3 {¬par(w,A) }

σ_5 = {<w . f(A)> ; <w1 . A>}

{ } 2ème solution : < s . f(f(A)) > car s $\xrightarrow{\sigma_3}$ f(w) $\xrightarrow{\sigma_5}$ f(f(A))

On anticipe évidemment quelles pourraient être les solutions suivantes, on ne peut plus logiques : f(f(f(A))), f(f(f(f(A)))), etc…., qui seraient obtenues par Prolog tant qu'on le laisse agir.

Constat :

La faute la plus fréquente et qui témoigne peut-être d'une préparation insuffisante due à la précocité du médian (c'est la version diplomatique…) est celle qui ignore la règle impérative de toujours choisir le littéral le plus à gauche pour effectuer une unification.

Question 5 :

Il est en effet possible de définir le prédicat *parent* avec le seul prédicat *ancêtre*. A priori on se dit que ce ne devrait pas être possible, et pourtant ça l'est ! Voici la solution :

(ω) : $\forall x\ \forall y\ (par(x,y) \Leftrightarrow [anc(x,y) \wedge \neg\exists z\ (anc(x,z) \wedge anc(z,y)])$

Pas mal, non ?

Constat :

Cette question a été traitée correctement bien plus souvent que je ne l'espérais. Dont acte. On a aussi souvent une autre version tout à fait acceptable :
$\forall x\ \forall y\ (par(x,y) \Leftrightarrow [anc(x,y) \wedge \forall z\ (anc(z,y) \Rightarrow anc(z,x)])$, avec toutefois une petite difficulté car il n'est pas mentionné que $z \neq x$.