Logique des prédicats du premier ordre

Plan

- **Introduction sur la logique**
  - Buts
  - Applications
  - Types, niveaux et branches de la logique
- **Le langage L1**
  - Problématique
  - Syntaxe de L1
  - Variables libres et liées
  - Représentation des connaissances
    - L1 ou L0 ?
    - Quantificateurs, propositions syllogistiques
- **Sémantique de L1**
  - Sémantique et interprétation
  - Evaluation
  - Vocabulaire
  - Équivalences

Introduction sur la Logique

Quelques références

Lectures de base à l'UTC

- Nilsson N.J. : « Principes d'intelligence artificielle » Collection Techniques Avancées de l'Informatique, 1990, Cépadues.
- J-P Delahaye : « *Outils logiques pour l'Intelligence Artificielle* ». Eyrolles, 1986.
- Henri Farreny et M. Ghallab : « *Eléments d'Intelligence Artificielle* », Hermès 1987.

Mots-clés pour Internet

- logique, "histoire de la logique"
- propositions, prédicats
- "démonstration automatique"
- "systèmes formels"

Buts de la logique

- **Période classique**
  - Analyse des raisonnements
  - Science de l'argumentation

- **Période moderne**
  - Mécanisation des raisonnements
  - Fondements des mathématiques
    - Établir leur non-contradiction
    - Axiomatiser leurs diverses branches
  - Formalisation des objets, des concepts informatiques

Applications

En Informatique

- Algorithmique
- Conception de circuits
- Preuve de programmes
- Langages de programmation
- Bases de données
- Ordonnancement, planification
- Optimisation sous contraintes

En Intelligence Artificielle

- Représentation des connaissances
- Démonstration automatique
- Diagnostic, aide à la décision,…
- Robotique
- Analyse de documents
- Traitement du langage naturel

Types de Logique

- **Logiques classiques**

  A deux valeurs de vérité

  Pour les raisonnements valides

  – Logique des Propositions
  – *Logique des Prédicats du Premier Ordre*
  – Logiques d'ordre supérieur……

- **Logiques non classiques**

  Pour les raisonnements non valides

  – Logiques modales
  – Logique temporelles
  – Logiques non monotones
  – Logiques multi-valuées……

Types de Logique

- **Définition commune**
  - Un langage : pour définir les formules bien formées
  - Une sémantique (formelle) : pour définir la valeur de vérité des formules bien formées
  - Un système formel : des axiomes et des règles d'inférence pour faire des preuves
- **Caractères discriminants**
  - Expressivité du langage
  - Axiomatique versus sémantique
  - Faisabilité des preuves

Niveaux de Logique

- **La théorie logique**
  - Encore appelée « théorie objet »
  - Le système logique proprement dit
- **La meta-théorie**
  - Est aussi un système logique !
  - Permet de raisonner sur la théorie-objet
  - Produit des méta-théorèmes parmi lesquels :
    - la non-contradiction
    - l’adéquation
    - la complétude

Le langage L1 de la logique des prédicats du premier ordre

Problématique

« Paul est petit »

objet : Paul

relation : « est petit »

« Paul mange une pomme »

objets : Paul, pomme

relation : « mange »

Pour représenter des propositions :

des objets : ce dont on parle

des relations : ce qu'on en dit

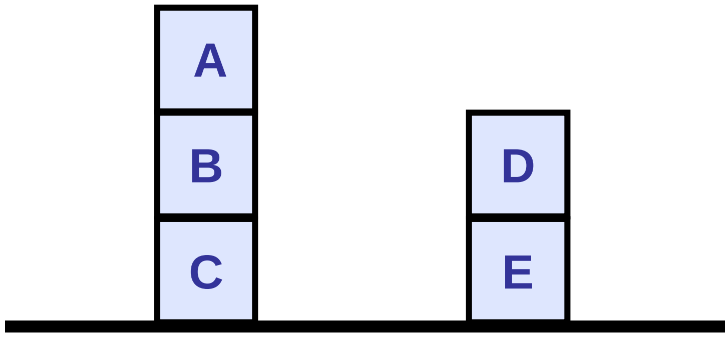
Problématique

sin(90-x) = cos(x)

Identification de :

- constantes : les objets (nombres) dont on dit quelque chose
- variables : des symboles qui représentent un objet quelconque
- fonctions : appliquées à des objets, elles renvoient un objet
- relations : appliquées à des objets, elles renvoient une valeur de vérité
- quantifications (implicites) : une loi est universelle ou existentielle

Problématique



- Un univers du discours : l'ensemble des objets auxquels on s’intéresse
  → *{ A ; B ; C ; D ; E }*
- Une fonction à un argument : appliquée à un objet, elle renvoie un objet
  → *sur*
- Des relations à 1, 2… arguments : appliquées à des objets, elles renvoient *V* ou *F*
  → *table, libre, au-dessus,……*
- Plusieurs représentations possibles : (i.e.) fonctions et relations deviennent des objets (par réification)

Problématique

Argument syllogistique

Tout homme est mortel

Socrate est un homme

Socrate est mortel

Problèmes :

– Cet argument ne relève pas du raisonnement propositionnel (langage L0)

– Il associe propositions singulières (relatives à des individus) et générales (au caractère universel)

Syntaxe de L1

L'alphabet strict

- Parenthésage, virgule : ( ) { } [ ] ,
- Ensembles dénombrables de symboles de :
  - variables : $x,y,z,\ldots,x_0,x_1,\ldots.$
  - constantes : $a,b,c,\ldots,a_0,a_1,\ldots$, A, B, C,…
  - fonctions d'arité n : $f,g,h,\ldots f_0,f_1\ldots$
  - prédicats d'arité n : $p,q,r,\ldots p_0,p_1\ldots$, P, Q,…
- Connecteurs logiques :
  - à un argument : $\neg$
  - à deux arguments : $\wedge \; \vee \; \Rightarrow \; \Leftrightarrow$
- Deux quantificateurs : $\forall \; \exists$

Syntaxe de L1

Les termes

- Une constante est un terme
- Une variable est un terme
- Si *f* est une fonction d'arité *n*, et si t_1, t_2, ..., t_n sont des termes, alors $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ est un terme
- Il n'y a pas d'autres termes que ceux ainsi définis

Exemples :

- en notation stricte

  x, a, f(a), *f(a,b,f(x,y,z))*

- en notation étendue

  marie,   père(paul)

Syntaxe de L1

Les atomes

Si p est un prédicat *n-aire* et si t_1, t_2, ..., t_n sont des termes, alors $p(t_1,t_2,....,t_n)$ est un atome

Exemples :

– en notation stricte

p(x,a,f(y))

– en notation étendue

aime(x,y)

aime(paul,fille(jean))

Les littéraux

Un littéral est soit un atome (littéral positif), soit un atome précédé du signe de négation (littéral négatif)

Syntaxe de L1

Formules bien formées (fbf)

- Un littéral est une *fbf*
- Si F_1 et F_2 sont des *fbfs*, alors $\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$ $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Rightarrow F_2$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$ sont des *fbfs*
- Si F est un *fbf*, alors $\exists x \; F$ et $\forall x \; F$ sont des *fbfs*

Exemples :

- en notation stricte

  $\forall x \; \forall y \; (p(x) \Rightarrow (q(y) \Rightarrow \forall z \; r(x,y,z)))$

- en notation étendue

  $\forall x \; \forall y \; aime(x,y)$

  $\forall x \; \exists y \; aime(x,y)$

  $\exists y \; \forall x \; aime(x,y)$

  $\forall x \; aime(x,fils(x))$

  $\forall x \; \forall y \; (fils(x,y) \Rightarrow aime(x,y))$

Grammaire des formules

▪ fbf	::=	disjonction $\Rightarrow$ fbf
		| disjonction
▪ disjonction	::=	conjonction
		disjonction $\vee$ conjonction
▪ conjonction	::=	primaire
		| conjonction $\wedge$ primaire
▪ primaire	::=	atome
		| ¬ primaire
		| ∀ symb-de-variable
		| ∃ symb-de-variable-primaire
		| (fbf) | [fbf] | { fbf }
▪ atome	::=	symb-prédicatif(arguments)
▪ arguments	::=	ε
		| argument queue-arg
		| [fbf]
▪ queue-arg	::=	ε
		| argument queue-arg
▪ argument	::=	symb-d'objet
		| symb-de-variable
		| symb-fonctionnel(arguments)

Variables libres et liées

- ## Portée d'une quantification

Dans les formules $\exists x\ A$ et $\forall y\ A$, la fbf A est la *portée* des quantifications

$\forall x\ (P(x,y) \vee \exists y\ Q(x,y))$

- ## Occurrences liées

L'occurrence d'une variable suivant un quantificateur est “quantifiée”

Toute occurrence d'une variable x apparaissant dans la portée d'une quantification en x est “liée”

- ## Occurrences libres

Une occurrence d'une variable est “libre” dans une formule *(A)* si elle n'est ni quantifiée, ni liée