Variables libres et liées

- **Variables liées**

  Une variable est *liée* dans une fbf *(A)* si aucune de ses occurrences dans *(A)* n'est libre. Sinon elle est *libre*

  $\forall x \ (P(x,y) \vee \exists y \ Q(x,y))$

  Renommage: $\forall x \ (P(x,y) \vee \exists z \ Q(x,z))$

- **Formules closes (ou énoncés)**

  Une formule est *close* (ou *fermée*) ssi toutes ses variables sont liées, sinon elle est dite *ouverte*

  Fermeture d'une formule :

  Soit *(A)* une fbf. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les variables libres ayant une occurrence dans *(A)*. Alors la *fermeture universelle* de *(A)* est la formule : $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ (A)$

Représentation

L1 plutôt que L0 ?

- **Rappel :** L0, logique des propositions, est un sous-langage de L1 (par identification entre *P* d'arité 0 et *P*)
- L0 permet de représenter :
  - des propositions non analysées
  - des raisonnements inter-propositionnels
- L1 permet de représenter :
  - des lois générales et des faits relatifs à des individus
  - des raisonnements mathématiques
  - des raisonnements mixtes (inter et intra-propositionnels)
- Quantificateurs n'appartenant pas à L1 : “pour presque tout, il existe beaucoup de,...”

Représentation

- **Quantificateur universel**
  - Utilisation à la place d'une infinité de conjonctions
  - Recommandation : $\forall$ *suivi de* $\Rightarrow$
  - Erreur souvent commise : $\forall$ *suivi de* $\wedge$

- **Quantificateur existentiel**
  - Utilisation à la place d'une infinité de disjonctions
  - Recommandation : $\exists$ *suivi de* $\wedge$
  - Erreur souvent commise : $\exists$ *suivi de* $\Rightarrow$

Le domaine des variables n'est jamais précisé ! C'est à la sémantique de le faire!

Propositions syllogistiques

Affirmative universelle

Tout A est B

$\forall x \ (A(x) \Rightarrow B(x))$

Négative universelle

Aucun A n'est B

$\forall x \ (A(x) \Rightarrow \neg B(x))$

Variante : $\neg \exists x \ (A(x) \wedge B(x))$

Affirmative particulière

Quelque A est B

$\exists x \ (A(x) \wedge B(x))$

Négative particulière

Quelque A n'est pas B

$\exists x \ (A(x) \wedge \neg B(x))$

Sémantique de L1

(ou Théorie des Modèles)

Sémantique d'une fbf

Exemples informels

(A) : $\forall x \ \exists y \ P(y,x)$

- Vraie si elle exprime : « pour tout entier relatif, il existe un entier relatif strictement plus petit que lui »
- Fausse, pour les entiers naturels

(B) : $\forall x \ P(f(x))$

- Vraie si elle exprime : « le carré de tout entier relatif est positif »
- Fausse si on ne considère que les imaginaires purs »

(C) : $\forall x \ (P(x) \Rightarrow P(x))$

- Toujours vraie…

Sémantique d'une fbf

Notion de sémantique

La sémantique d'une fbf est l'ensemble de ses valeurs de vérité pour les différentes interprétations possibles

Symboles stables :

Les règles d'évaluation de la valeur de vérité donnent aux connecteurs et aux quantificateurs un sens fixé et conforme au sens commun

- $\neg$: non (négation)
- $\wedge$: et (conjonction)
- $\vee$: ou (disjonction)
- $\Rightarrow$: implique
- $\exists$: il existe
- $\forall$: pour tout

Symboles variables :

Les symboles variables (fonctions, prédicats,…) doivent être interprétés

Interprétation

Définition

Soient des formules construites sur un vocabulaire *Vc*. Une interprétation I sur *Vc* est la donnée :

- d'un ensemble non vide *D* appelé domaine d'interprétation
- d'une correspondance ψ qui associe :
  - à chaque symbole constant *c* de *Vc* un élément c_I *de D*
  - à chaque symbole fonctionnel n-aire *f* de *Vc* une application f_I de D^n dans *D*
  - à chaque symbole de prédicat n-aire *p* de *Vc* une application p_I de D^n dans *{V;F}*
- d'une assignation* μ qui à chaque variable de *Vc* associe un élément de *D*

Notation : $I = < D, \psi, \mu >$

Evaluation

Évaluation d'un terme

Soit I une interprétation. *L'évaluation* d'un terme est la valeur du domaine calculée par la procédure val_I :

$val_I(x) = \mu(x)$ pour x symbole de variable

$val_I(c) = \psi(c)$ pour c symbole de constante

$val_I(f(t_1,\ldots,t_n)) = \psi(f)(val_I(t_1),\ldots, val_I(t_n))$

Exemple : évaluation de $f(x,c)$ pour I définie par :

- $D = IN$
- $\mu = \{ [x \to 5] ; [z \to 2] \}$
- $\psi(c) = 4$

$$\psi(f) : \begin{array}{rcl} D^2 & \to & D \\ (x,y) & \to & x+y \end{array}$$

Dès lors : $val_I(f(x,c)) = 9$

Evaluation

Évaluation d’un atome

Soit I une interprétation. *L’évaluation* d’un atome est le booléen *V* ou *F* calculé par la procédure val_I :

$$val_I\ (p(t_1,\dots,t_n)) = \psi(p)\ (val_I\ (t_1),\dots,\ val_I\ (t_n))$$

Exemple : évaluation de *p(a,c)* pour *I* définie par :

- $D = \{1;2\}$
- $\psi(a) = 2$

  $\psi(c) = 1$

  $$\begin{array}{llcl} \psi(p) : & D^2 & \rightarrow & \{V;F\} \\ & (1,1) & \rightarrow & F \\ & (1,2) & \rightarrow & V \\ & (2,1) & \rightarrow & V \\ & (2,2) & \rightarrow & F \end{array}$$

Dès lors : $val_I\ (p(a,c)) = V$

Evaluation

Évaluation d'une fbf composite

Soit I une interprétation. L'évaluation d'une fbf avec connecteurs est le booléen *V* ou *F* calculé par la procédure val_I :

$$val_I(\alpha \vee \beta) = (val_I(\alpha) \vee val_I(\beta))$$
$$val_I(\alpha \wedge \beta) = (val_I(\alpha) \wedge val_I(\beta))$$
$$val_I(\alpha \Rightarrow \beta) = (val_I(\alpha) \Rightarrow val_I(\beta))$$
$$val_I(\alpha \Leftrightarrow \beta) = (val_I(\alpha) \Leftrightarrow val_I(\beta))$$
$$val_I(\neg \alpha) = \neg val_I(\alpha)$$

On utilise alors les tables de vérité : les tables de vérité légitiment la lecture des connecteurs usuels : $\vee$ en *'ou'*, $\wedge$ en *'et'*,….

Evaluation

- **D'une fbf quantifiée universellement**

$$val_I\,(\forall x\ \alpha) \;=\; \bigwedge_{e\,\in D} val_{I[x\,\rightarrow\, e]}\,(\alpha)$$

où $I_{[x\ \rightarrow\ e]}$ désigne une interprétation identique à I, à ceci près que l'assignation μ comporte désormais le choix $[x \rightarrow e]$

Autrement dit, $(\forall x\ \alpha)$ est vraie ssi chacune de ses instances est vraie

- **D'une fbf quantifiée existentiellement**

$$val_I\,(\exists x\ \alpha) \;=\; \bigvee_{e\,\in D} val_{I[x\,\rightarrow\, e]}\,(\alpha)$$

Autrement dit, $(\exists x\ \alpha)$ est vraie ssi au moins l'une de ses instances est vraie

Evaluation

Exemple

Soit la formule close (ω) :

$\forall x \quad [P(x) \ \vee \ Q(x)]$

Soit l'interprétation $I = < D, \ \psi, \ \mu > :$

$D = \{1 \ ; 2\}$

$\psi(P) : \quad 1 \text{ -> } V$

$\qquad\qquad 2 \text{ -> } F$

$\psi(Q) : \quad 1 \text{ -> } F$

$\qquad\qquad 2 \text{ -> } V$

alors $val_I \ (\omega) = V$

Vocabulaire

Notion de modèle

Une interprétation I est un *modèle* d'une fbf A ssi $val_I(A) = V$

I est un *modèle* d'un ensemble de fbfs ssi I est un modèle de chaque formule.

Une fbf (un ensemble de fbfs) est *satisfiable* ssi elle (resp. il) admet au moins un modèle

Une fbf (un ensemble de fbfs) est *insatisfiable* ssi elle (resp. il) n'admet pas de modèle

Une fbf *A)* est *falsifiable* s'il existe une interprétation I qui n'en est pas un modèle

Vocabulaire

- **Validité d'une formule**

Une fbf *A* est *valide* (ou *une tautologie*) ssi toute interprétation en est un modèle. On note $\models A$

Conséquence : une fbf est valide, insatis-fiable, ou contingente

- **Conséquence logique (/sémantique)**

Une fbf *G* est *conséquence logique* ou *sémantique* d'un ensemble de fbfs Ω ssi tout modèle de Ω est un modèle de *G*. On note : $\Omega \models G$

Vocabulaire

- **Équivalence logique**

Deux fbfs *(A)* et *(B)* sont *logiquement équivalentes* ssi elles ont les mêmes modèles. On note : $A \equiv B$

- **Extension d'un prédicat**

Soit P un prédicat. L'ensemble des n-uplets $(t_1,\ldots, t_n)$ tels que $val_I(P(t_1,\ldots, t_n)) = V$ est *l'extension de P*

Exemple : l'extension du prédicat "homme" est l'ensemble des êtres humains

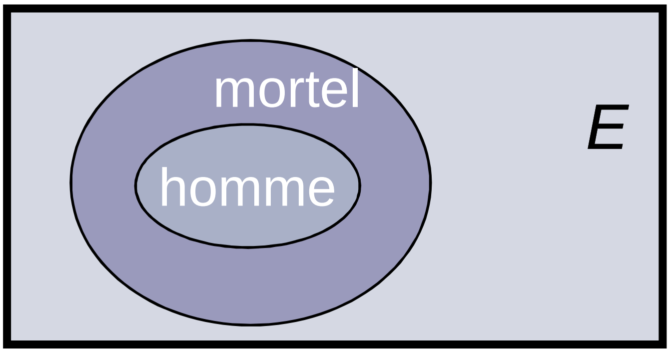
Extensions

Représentation ensembliste

Affirmative universelle

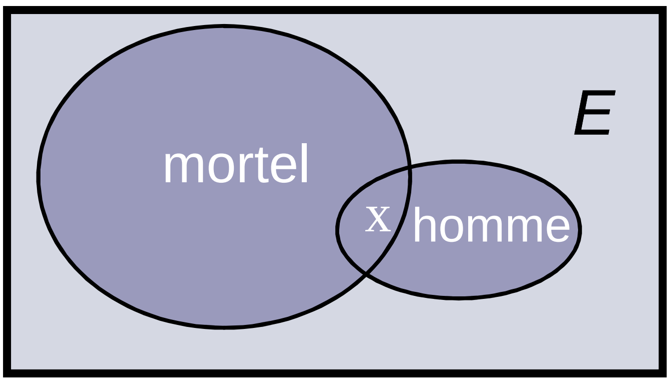
$\forall x \ (homme(x) \ \Rightarrow \ mortel(x))$

- inclusion entre extensions



Affirmative existentielle

$\exists x \ (homme(x) \ \wedge mortel(x))$



Équivalences logiques

Sur la négation :

$p \equiv \neg\neg p$	involution
$p \vee \neg p \equiv V$	tiers-exclus
$p \wedge \neg p \equiv F$	non-contradiction

Connecteurs isolés :

$p \equiv (p \wedge p)$	idempotence
$p \equiv (p \vee p)$	
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	commutativité
$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	associativité
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	

Rapports entre connecteurs :

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	lois de Morgan
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$	
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	

Implication :

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$	
$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$	contraposition
$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	

Équivalences logiques

Portant sur la quantification universelle :

$$(\forall x\, A \wedge \forall y\, B) \equiv \forall x\, (A \wedge B)$$
$$(\forall x\, A \vee \forall y\, B) \models \forall x\, (A \vee B)$$
$$\forall x\, (A \Rightarrow B) \models (\forall x\, A \Rightarrow \forall y\, B)$$
$$\forall x\, \forall y\, A \equiv \forall y\, \forall x\, A$$

Portant sur la quantification existentielle :

$$\exists x\, (A \wedge B) \models (\exists x\, A \wedge \exists y\, B)$$
$$\exists x\, (A \vee B) \equiv (\exists x\, A \vee \exists y\, B)$$
$$\exists x\, (A \Rightarrow B) \equiv (\exists x\, A \Rightarrow \exists x\, B)$$
$$\exists x\, \exists y\, A \equiv \exists y\, \exists x\, A$$

Portant sur les quantifications :

$$\forall x\, \neg A \equiv \neg \exists x\, A$$
$$\exists x\, \neg A \equiv \neg \forall x\, A$$
$$\exists x\, \forall y\, A \models \forall y\, \exists x\, A$$
$$\forall x\, A \models \exists y\, A$$

Vocabulaire (compléments)

Théorie

On appelle souvent *théorie du premier ordre* un ensemble de formules closes de L1 (axiomes non logiques)

Equivalence de deux théories :

Deux théories sont *équivalentes* ssi elles ont les mêmes modèles

Exemples de théories :

- Théorie des relations d'équivalence
- Théorie de l'ordre partiel
- Théorie du Calcul des Prédicats du premier ordre avec égalité