

TRAVAUX DIRIGES SUR LA SEMANTIQUE DE L1

EXERCICE 1 : un exemple de calcul (simplifié) de la valeur de vérité d'une formule dans L1, l'interprétation étant donnée

Soit (ω) la formule : $\forall x \exists y (x = y \vee x = y + 1)$

a) Calculer la valeur de vérité de (ω) dans l'interprétation $\langle D, \psi \rangle$ définie par :

$$D = \{0, 1\}$$

$$\psi : 0 \rightarrow 0 \text{ et } \psi : 1 \rightarrow 1$$

$\psi(+)$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\psi(=)$	0	1
0	t	f
1	f	t

b) Peut-on changer cette valeur de vérité en modifiant uniquement $\psi(+)$?

c) Mêmes questions pour la formule : (ω') : $\forall x \exists y x = y + 1$

EXERCICE 2 : faute de pouvoir calculer, un exemple de raisonnement à caractère sémantique

Montrer que la formule : $[\forall x P(x)] \Rightarrow [\exists x P(x)]$ est vraie pour toutes les interprétations, c'est-à-dire valide.

EXERCICE 3 : un autre exemple de calcul de valeur de vérité

On considère les symboles de prédicats suivants :

- $CUBE(x)$: « x est un cube »
- $SPHERE(x)$: « x est une sphère »
- $GRAND(x)$: « x est petit »
- $ACOTE(x,y)$: « l'objet x est à côté de l'objet y »

et les symboles de constantes a, b, c, d, e, f .

Soit l'interprétation $I = \langle D, \psi \rangle$ définie comme suit :

- Domaine : $\{A ; B ; C ; D ; E\}$
- $\psi : a \rightarrow A, b \rightarrow B, c \rightarrow C, d \rightarrow D, e \rightarrow E, f \rightarrow F$

	$\psi(\text{CUBE})$	$\psi(\text{SPHERE})$	$\psi(\text{GRAND})$	$\psi(\text{PETIT})$
A	Vrai	Faux	Vrai	Faux
B	Vrai	Faux	Faux	Faux
C	Vrai	Faux	Vrai	Faux
D	Faux	Vrai	Vrai	Faux
E	Faux	Vrai	Faux	Vrai
F	Faux	Vrai	Vrai	Faux

x	y	ACOTE(x,y)
A	F	Vrai
F	A	Vrai
A	C	Vrai
C	A	Vrai
C	D	Vrai
D	C	Vrai
D	E	Vrai
E	D	Vrai

Pour toutes les autres paires (x,y), $Acôté(x,y) = \text{Faux}$

1) Donner la valeur de vérité des expressions suivantes, en justifiant brièvement :

- $Cube(d) \Rightarrow Cube(e)$
- $\forall x \forall y (Acôté(x,y) \Rightarrow Acôté(y,x))$
- $\exists x \neg \exists y (Acôté(x,y) \wedge Grand(y))$
- $\forall x (Sphere(x) \Rightarrow \exists y Acôté(x,y))$

2) Modifier l'interprétation des prédicats de façon à rendre vraie l'expression :

$$\forall x (Cube(x) \Rightarrow \exists y Acôté(x,y))$$