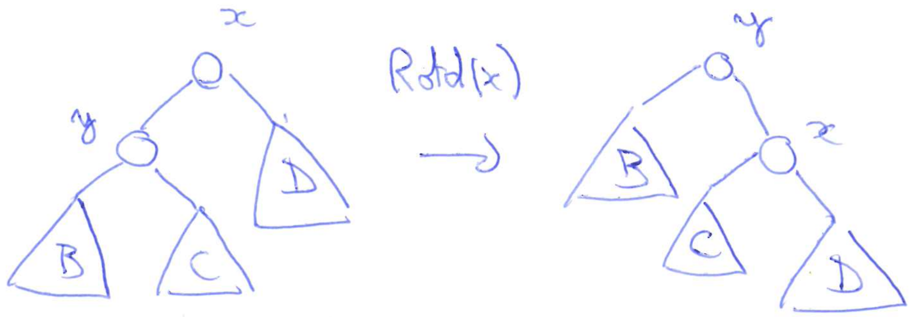
# NF16 - AVL

## Rotation droite




$h(B) > \max(h(C), h(D)) \iff \Delta = -1 \iff eq^m_y \geq 0$

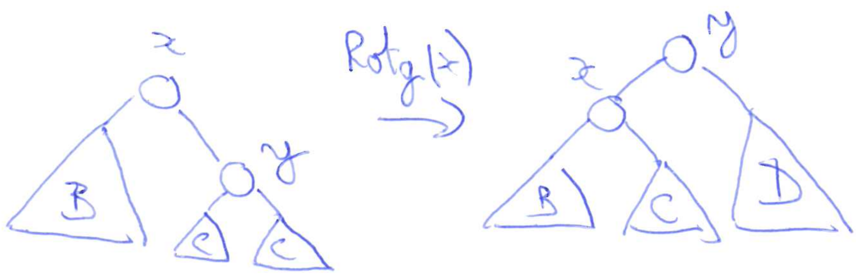
$h(D) > \max(h(B), h(C)) \iff \Delta = 1 \iff eq_x \leq 0$

$eq^m_x = eq_x - 1 - \max(0, eq_y)$

$eq^m_y = eq_y - 1$ si $eq^m_x \geq 0$

$\quad = eq_x - 2 + \min(0, eq_y)$ sinon

## Rotation gauche




$h(B) > \max(h(C), h(D)) \iff \Delta = 1 \iff eq_x \geq 0$

$h(D) > \max(h(B), h(C)) \iff \Delta = -1 \iff eq^m_y \leq 0$

$\Delta = 0$ sinon

$eq^m_x = eq_x + 1 - \min(0, eq_y)$

$eq^m_y = eq_y + 1$ si $eq^m_x \leq 0$

$\quad = eq_x + 2 + \max(0, eq_y)$ sinon

INF16 - AVL - 1

A) Mq $eq_x^m = eq_x - 1 - \max(0, eq_y)$

① $eq_x^m = h(C) - h(D)$

② $eq_y = h(B) - h(C)$

③ $eq_x = 1 + \max(h(B), h(C)) - h(D)$

<u>Si $h(B) \geq h(C)$</u> : $eq_y \geq 0$ d'après ②

$eq_x = 1 + h(B) - h(D)$

① + ② : $eq_x^m + eq_y = h(B) - h(D)$

$eq_x = 1 + eq_x^m + eq_y$

$\Rightarrow eq_x^m = eq_x - 1 - eq_y$

$= eq_x - 1 - \max(0, eq_y)$ car $eq_y \geq 0$

<u>Si $h(B) < h(C)$</u> : $eq_y < 0$ d'après ②

$eq_x = 1 + h(C) - h(D)$

$= 1 + eq_x^m$

$\Rightarrow eq_x^m = eq_x - 1$

$= eq_x - 1 - \max(0, eq_y)$ car $eq_y < 0$

VF16 - AVL - 2

<u>Algorithme Rotd(A, x), $\Delta$)</u>

Si gauche[x] $\neq$ NULL

y := gauche[x]

c := droit[y]

pere[y] := pere[x]

~~Si gauche[~~

Si pere[x] $\neq$ NULL

| Si gauche[pere[x]] = x

| | gauche[pere[x]] := y

| Sinon

| | droit[pere[x]] := y

droit[y] := x

pere[x] := y

gauche[x] := c

Si c $\neq$ NULL

| pere[c] := x

eqx := eq[x]

eqy := eq[y]

eq[x] := eqx - 1 - max(0, eqy)

Si eq[x] $\geq$ 0

eq[y] := eqy - 1

Sinon

eq[y] := eqx - 2 + min(0, eqy)

$\Delta$ := 0

Si eqx $\leq$ 0

$\Delta$ := 1

Si eq[y] $\geq$ 0

$\Delta$ := -1

NF16-AVL-3

c) D'après TD précédent

① $\Delta = -1 \iff h(B) > \max(h(D), h(C))$

② $\Delta = 1 \iff h(D) > \max(h(B), h(C))$

$\Delta = 0$ sinon

① $\iff h(B) - \max(h(D), h(C)) > 0$

$\iff h(B) - \max(h(D), h(C)) - 1 \geq 0$

$\iff eq_{y}^{m} \geq 0$

② $\iff h(D) - \max(h(B), h(C)) > 0$

$\iff h(D) - \max(h(B), h(C)) - 1 \geq 0$

$\iff eq_x \leq 0$

On ajoute à la fin de l'algorithme les instructions :

$\Delta := 0$

Si $eq.x \leq 0$

$\Delta := 1$

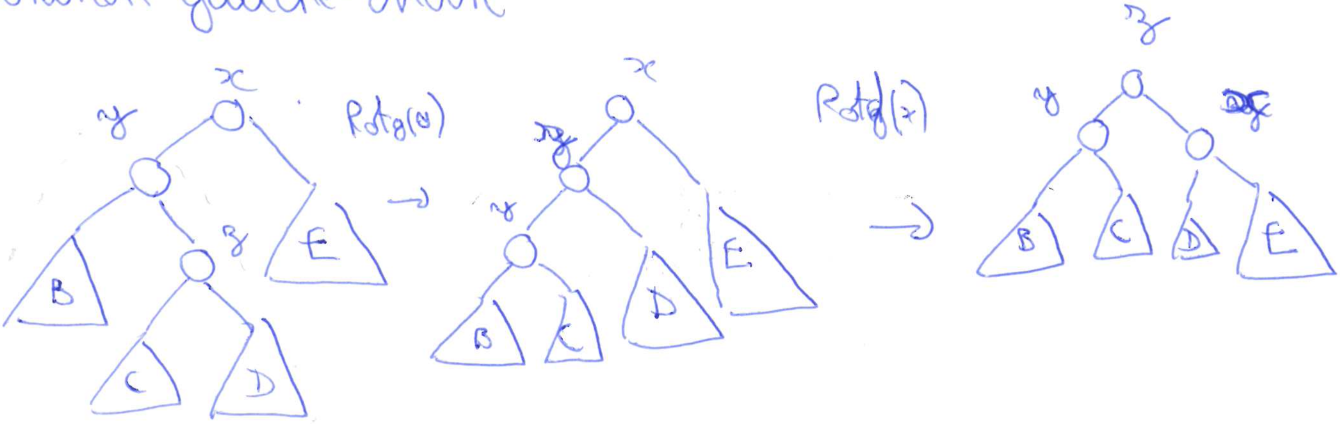
Si $eq[y] \geq 0$

$\Delta := -1$

# NF16 - AVL - 4

D) On suppose qu'on a les fonctions Rotd $(x, \Delta)$ et Rotg $(x, \Delta)$

Rotation gauche-droite




Algorithme RGD$(x, \Delta)$

Si gauche$[x] \neq$ NULL et droit[gauche$[x]$] $\neq$ NULL

eqx := eq$[x]$

gauche$[x]$ := RG (gauche$[x]$, $\Delta 1$)

eq$[x]$ := eq$[x]$ + $\Delta 1$

$\Delta := 0$

Si (eqx > 0) ou (eqx = 0 et $\Delta 1 = 1$)

$\Delta := \Delta 1$

z := RD$(x, \Delta 2)$

$\Delta := \Delta + \Delta 2$

retourner z

j sous arbre non modifié
i sous arbre modifié

$h'(v) = h(v) + \Delta$ si $h(i) > h(j)$
ou $h(i) = h(j)$ et $\Delta = 1$

NF16 - AVL - S - 1

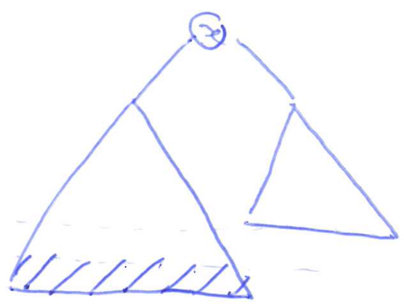
On sait que :

- $A(x)$ est un AVL avant insertion de new_node
  → $|eq(u)| \leq 1 \; \forall u \in A(x)$ avant insertion
- Après insertion :
  → $|eq(x)| = 2$ (equilibr. de la racine)
  → $|eq(z)| \leq 1 \; \forall z \in A(x), z \neq x$

On note $y$ la racine du sous arbre où new_node a été inséré

Montrons que si $eq(x) = 2$ alors

- new_node a été inséré dans ~~SAG~~ Ag $[x]$



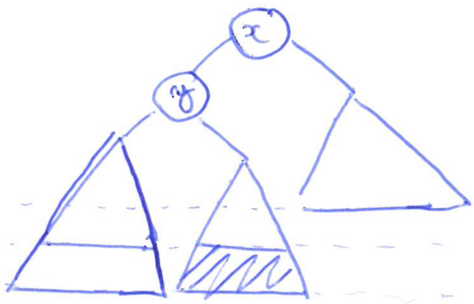
Avant insertion, le ~~graphe~~ sommet $x$ était equilibré

$|eq_{init}[x]| \leq 1$.

Après insertion, $eq[x] = 2$.

L'insertion d'un sommet modifie au plus l'equilibre de 1.
↪ $eq_{init}[x] = 1$ et le sommet est inséré dans $SAG[x]$

Supposons $eq[y] = 0$ : $h(A_g[y]) = h(A_d[y])$



Si new_node est inséré dans $A_d[y]$ :

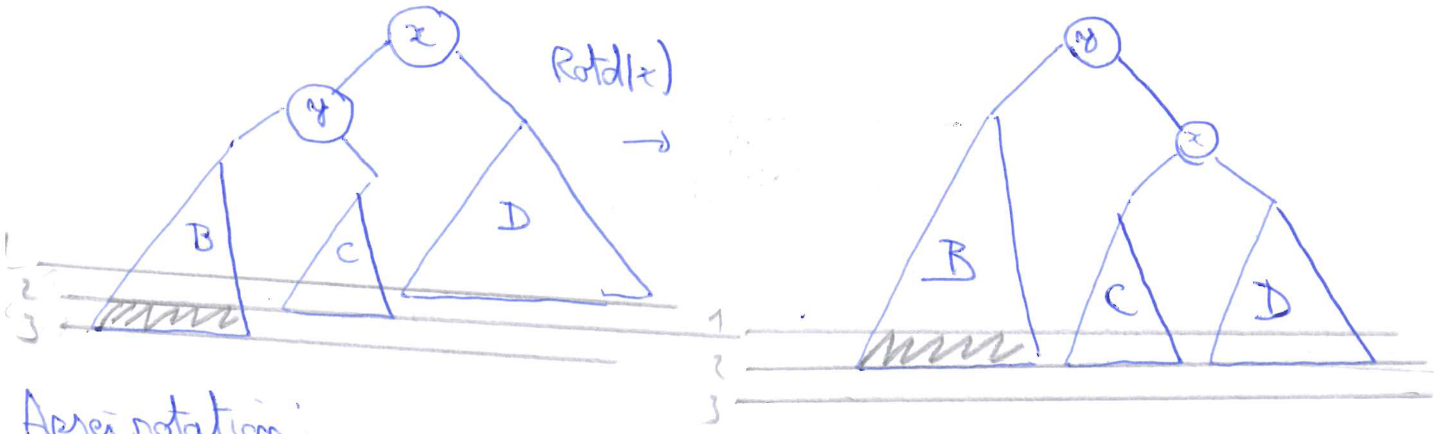
avant insertion, $eq_{init}[y] = 2$ FAUX

Même chose si insertion dans $A_g[y]$.

→ Si $eq(x) = 2$ alors le sommet est inséré dans $Ag(x)$, de racine $y$ augmente de 1 la hauteur et est tel que $eq[y] \neq 0$. Même raisonnement ~~pour~~ $eq(x) = -2$ SAD
→ 4 cas

NF16 - AVL - S - 2 4 cas à traiter

E) Mq $eq[x] = 2$ Alors Rotd(x) reequilibre l'arbre
$eq[y] = 1$



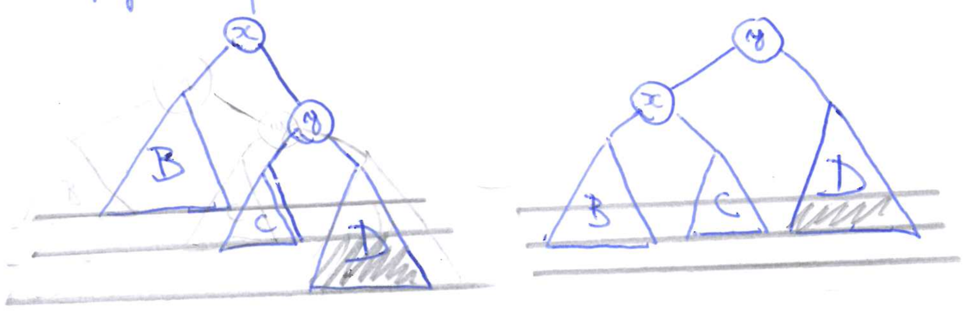

Apres rotation :

$$eq_x^m = eq_x - 1 - \max(0, eq_y)$$
$$= 2 - 1 - 1 = 0$$

$eq_y^m \geq 0$ donc $\Delta = -1$
(cf : question c)

$$eq_y^m = eq_y - 1 \text{ si } eq_x^m \geq 0$$
$$= 0$$

Mq $eq[x] = -2$ Alors Rotg(x) reequilibre l'arbre
$eq_y = -1$



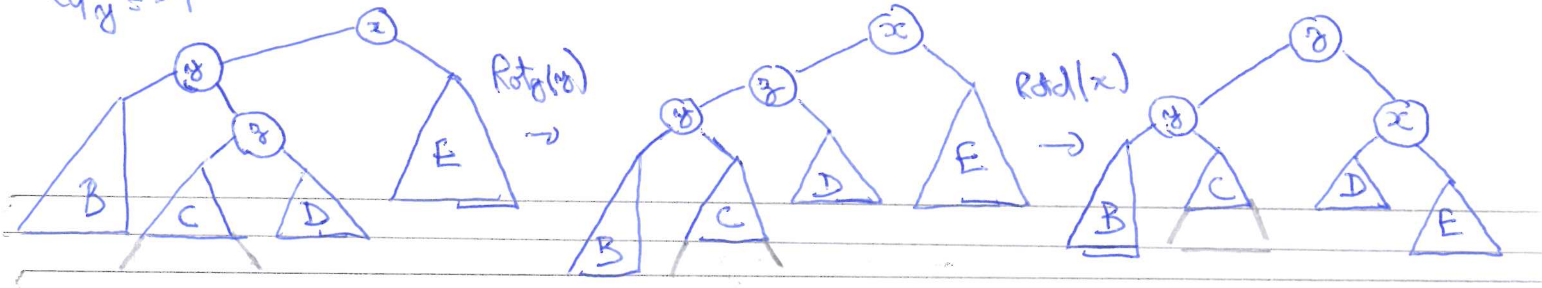

Apres rotation

$$eq_x^m = eq_x + 1 - \min(0, eq_y)$$
$$= 0$$

$eq_y^m \leq 0$ donc $\Delta = -1$
(cf : question c)

$$eq_y^m = eq_y + 1 \text{ si } eq_x^m \leq 0$$
$$= 0$$

Mq $eq_x = 2$ Alors Rotgd$(x)$ rééquilibre l'arbre
$eq_y = -1$




## Cas 1 : Le sommet est ajouté à C $\quad eq_z = 1$

### Après rotation 1 Rotg(y)

$$eq^m_y = eq_y + 1 - \min(0, eq\,z)$$
$$= -1 + 1 - \min(0, 1) = 0$$

$$eq^m_z = eq_z + 1 \text{ si } eq^m_y \leq 0$$
$$= 2$$

$eq^m_z > 0$ donc $\Delta_1 = 0$ et $eq^m_x = eq_x = 2$

### Après rotation 2 Rotd(x)

$$eq^m_x = eq_x - 1 - \max(0, eq\,z)$$
$$= 2 - 1 - \max(0, 2) = -1$$

$$eq^m_z = eq_x - 2 + \min(0, eq\,z) \text{ si } eq^m_x < 0$$
$$= 2 - 2 + \min(0, 2) = 0$$

$eq^m_z \geq 0$ donc $\Delta_2 = -1$

## Cas 2 : Le sommet est ajouté à D $\quad eq\,z = -1$

### Après rotation 1

$$eq^m_y = eq_y + 1 - \min(0, eq_z)$$
$$= -1 + 1 - \min(0, -1) = 1$$

$$eq^m_z = 2 + eq_y + \max(0, eq_z) \text{ si } eq^m_y > 0$$
$$= 2 - 1 + \max(0, -1) = 1$$

$eq^m_z > 0$ donc $\Delta_1 = 0$ et $eq^m_x = eq_x = 2$

### Après rotation 2

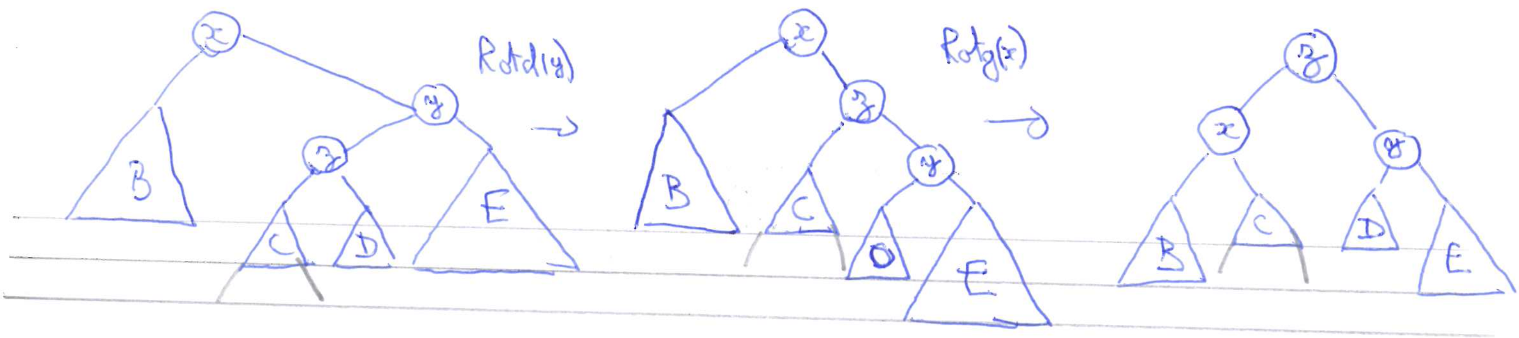
$$eq^m_x = eq_x - 1 - \max(0, eq\,z)$$
$$= 2 - 1 - \max(0, 1) = 0$$

$$eq^m_z = eq_z - 1 \quad \text{si } eq^m_x \geq 0$$
$$= 1 - 1 = 0$$

$eq^m_z \geq 0$ donc $\Delta_2 = -1$

VF16 - AVL - 7

Mq $eq_x = -2$ Alors $Rotdg(x)$ rééquilibre l'arbre
$eq_y = 1$




Cas 1. Le sommet est ajouté à C $\quad eq_z = 1$

Après rotation 1 $Rotd(y)$

$eq^m_y = eq_y - 1 - \max(0, eq_z)$
$= 1 - 1 - \max(0,1)$
$= -1$

$eq^m_z = eq_y - 2 + \min(0, eq_z)$ si $eq^m_y < 0$
$= 1 - 2 + \min(0, 1) = -1$

$eq^m_z < 0$ donc $\Delta_1 = 0$ et $eq^m_x = eq_x = -2$

Après rotation 2 $Rotg(x)$

$eq^m_x = eq_x + 1 - \min(0, eq_z)$
$= -2 + 1 - \min(0, -1)$
$= 0$

$eq^m_z = eq_z + 1$ si $eq^m_x \leq 0$
$= -1 + 1 = 0$

$eq^m_z \leq 0$ donc $\Delta_2 = -1$

Cas 2 : Le sommet est ajouté à D $\quad eq_z = -1$

Après rotation 1 $Rotd(y)$

$eq^m_y = eq_y - 1 - \max(0, eq_z)$
$= 1 - 1 - \max(0, -1) = 0$

$eq^m_z = eq_z - 1$ si $eq^m_y \geq 0$
$= -2$

$eq^m_z < 0$ donc $\Delta_1 = 0$ et $eq^m_x = eq_x = -2$

Après rotation 2 $Rotg(x)$

$eq^m_x = eq_x + 1 - \min(0, eq_z)$
$= -2 + 1 - \min(0, -2)$
$= 1$

$eq^m_z = eq_x + 2 + \max(0, eq_z)$
$= -2 + 2 + \max(0, -2) = 0$

$eq^m_z \leq 0$ donc $\Delta_2 = -1$

NF16 - AVL - 8

F) Tous les cas de figure ont été traités à la question précédente

Algorithme Reequilibre_AVL($x$, $\Delta$)

Si eq[$x$] = 2
- $y$ := gauche[$x$]
- Si eq[$y$] = 1
  - retourner rotd($x$, $\Delta$)
- Sinon
  - retourner rotgd($x$, $\Delta$)

Si eq[$x$] = -2
- $y$ := droit[$x$]
- Si eq[$y$] = -1
  - retourner rotg($x$, $\Delta$)
- Sinon
  - retourner rotdg($x$, $\Delta$)

$\Delta$ := 0

retourner $x$

G) $\Theta(1)$

VF16 - AVL - 9

H) Insere_AVL (A : AVL, x : noeud, Δ : entier)

Si A = NULL
| Δ := 1
| retourner x

Si cle[x] ≤ cle[A]

| gauche[A] := Insere_AVL (gauche[A], x, Δ1) // Insertion dans SAG
| Si (eq[A] > 0) ou (eq[A] = 0 et Δ1 = 1) // Maj equilibre noeud père du SAG
| | ~~Δ := Δ1~~ eq[A] := eq[A] + Δ1
| ~~Sin~~

Le SAG est equilibré

Si cle[x] > cle[A]
| droit[A] := Insere_AVL (droit[A], x, Δ1) // Insertion SAD
| Si (eq[A] < 0) ou (eq[A] = 0 et Δ1 = 1) // Maj equilibre père du SAD
| | eq[A] := eq[A] - Δ1

eq A diminue si SAD ↗
eq A ↗ si SAD ↘

Si |eq[A]| = 2
| A := reequilibre_AVL (A, Δ2) // Reequilibrage si (eq[A] = 2)
Sinon Δ2 := 0
Δ := Δ1 + Δ2
retourner A

Si |eq[A]| = 2
| A := reequilibre_AVL(A, Δ2)
Sinon
| Δ2 := 0
Δ := Δ1 + Δ2
retourner A

I) Les cas où |eq[A]| = 2 ont déjà été identifiés

- L'insertion du nouveau sommet dans A a provoqué une variation de hauteur de A de Δ1 = 1

- Le reéquilibrage de A provoque une variation de hauteur de A de Δ2 = -1
⇒ Après une seul reequilibrage, Δ = 0 et les sommets parents ne nécessitent pas de reéquilibrage → Un unique appel à reequilibre

J) Insertion du sommet / phase de descente : $\Theta(h)$ $h < 1,44 \log_2(n)$
Recherche du sommet tq |eq[A]| = 2 : $\Theta(h)$ si il faut remonter jusqu'à racine
Equilibrage : $\Theta(1)$ : Réalisé une seule fois