RO05 - Rapport de TP

Capucine Martin & Hugo Paigneau

Décembre 2018

Partie I. La chaîne de Markov

(a) On définit le modèle d'Ehrenfest tel que :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{si la boule } d \text{ tiré se trouve dans B} \\ X_n - 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

où X_n représente le nombre de boules dans le compartiment A après le n-ième tirage.
On peut alors écrire la chaîne de Markov sous la forme $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$. Ainsi, on en conclut que X_n est une chaîne de Markov.

(b) On cherche la matrice de transition de la chaîne de Markov du modèle d'Ehrenfest à d particules. Pour cela on doit déterminer $P(i,j)$.

Pour passer d'un état i à un état j, soit $j = i - 1$ soit $j = i + 1$: en effet, comme on déplace une boule à la fois, il n'est pas possible d'avoir un écart entre de plus de un. De plus, il n'est pas possible de conserver le même nombre de boules dans l'urne A. Ainsi, on a : $P(i,j) = 0$ si $j \neq i + 1$ et $j \neq i - 1$.

Si $j = i - 1$, cela signifie que la boule portant le numéro tirée se trouvait dans l'urne A, qui contenait i boules, avant le tirage. Or, parmis d boules, la probabilité de tirer une boule qui est dans l'urne A est de i/d. Ansi, on en déduit : $P(i,j) = i/d$ si $j = i + 1$.

Pour un raisonement similaire, si $j = i + 1$, on peut affirmer que la boule portant le numéro tirée ne se trouvait pas dans l'urne A. Or, parmis d boules, la probabilité de tirer une boule qui n'est pas dans l'urne A (contenant i boules) est de $1 - i/d$. Ansi, on en déduit : $P(i,j) = 1 - i/d$ si $j = i + 1$.

En résumé, on a :

$$P(i,j) = \begin{cases} i/d & \text{si } j = i - 1 \\ 1 - i/d & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

(c) À partir de la question précédente, on peut construire le graphe suivant.

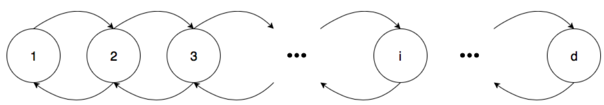

Figure 1: Graphe de la chaîne de Markov X_n

(d) Cette chaîne est irréductible car pour tout i, j, i et j intercommuniquent. En effet, si on part d'un état i, on peut atteindre tous les autre états au bout d'un certain temps. Par exemple, la matrice P nous donne que 0 communique avec 1, mais également que 1 communique avec 0 et 2. Ainsi 0 communique avec lui-même, 1 et 2. Par conséquent, on obtient bien l'irréductibilité de la chaîne.

(e) Pour chaque état i, on peut revenir à celui-ci en deux tirages. La chaîne est donc 2-périodique.

(f) La chaîne est irréductible d'après la question (d). De plus, l'espace d'état E contient d éléments : l'espace d'état est fini. La chaîne est donc définie récurrente positive.

Partie II. Loi stationnaire

(a) i. La matrice de transition de la chaîne de Markov est la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/d & 0 & (d-1)/d & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 2/d & 0 & (d-2)/d & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & (d-1)/d & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

On calcule la loi stationnaire grâce à l'expression suivante : $\pi P = \pi$. On a donc :

$$\begin{cases} \pi_0 = 1/d\ \pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 + 2/d\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_j = (d-(j-1))/d\ \pi_{j-1} + (j+1)/d\ \pi_{j+1} \\ \pi_{j+1} = (d-j)/d\ \pi_j + (j+2)/d\ \pi_{j+2} \\ \vdots \\ \pi_d = 1/d\ \pi_{d-1} \end{cases} \tag{4}$$

On va montrer par récurrence que : $\pi_{j+1} = \frac{d-j}{j+1}\pi_j$, pour $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$

Pour $j = 0$, on a $\pi_0 = 1/d\ \pi_1$ comme vu précédement. On en déduit donc que $\pi_1 = d\ \pi_0$: la relation est vérifiée.

On utilise l'hypothèse de récurrence suivante : $\pi_{j+1} = \frac{d-j}{j+1}\pi_j$. Or, on sait que :

$$\pi_{j+1} = \frac{d-j}{d}\ \pi_j + \frac{j+2}{d}\ \pi_{j+2} \tag{5}$$

Or, $\pi_j = \frac{j+1}{d-j}\pi_{j+1}$, on a donc, en substituant : $\Leftrightarrow$

$$\pi_{j+1} = \frac{d-j}{d}\ \frac{j+1}{d-j}\ \pi_{j+1} + \frac{j+2}{d}\ \pi_{j+2} \tag{6}$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi_{j+1} = \frac{j+1}{d}\ \pi_{j+1} + \frac{j+2}{d}\ \pi_{j+2} \tag{7}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d-(j+1)}{d}\ \pi_{j+1} = \frac{j+2}{d}\ \pi_{j+2} \tag{8}$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi_{j+2} = \frac{d-(j+1)}{j+2}\ \pi_{j+1} \tag{9}$$

On a montré que l'expression est valide au rand $n+1$. Elle donc vraie pour tout n.

(a) ii. D'après la question précédente on a :

$$\pi_{j+1} = \frac{d-j}{j+1}\pi_j, j = 0, 1, ..., d-1. \tag{10}$$

On peut en déduire que :

$$\pi_1 = \frac{d}{1}\pi_0 \tag{11}$$

$$\pi_2 = \frac{d-1}{2}\pi_1 \tag{12}$$

(a) iii. On en déduit de la question précédente que :

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_d) \tag{13}$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi = \left(\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}\pi_0, \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}\pi_0, ..., \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\pi_0\right) \tag{14}$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi = \pi_0\left(\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right) \tag{15}$$

(b) On sait que si une chaîne de Markov est irréductible, récurrente positive, d-périodique et de loi stationnaire π, alors on a $P^n(i,j) \to d\pi_j$ avec $n \to +\infty$.

Or, ici, la chaîne de Markov est 2-périodique, il est donc impossible que :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(X_n = j) = \pi_j, (0 \le j \le d) \tag{16}$$

Partie III. Evolution moyenne

(a) On cherche A et B tel que $\sum_{j\in E} jP(i,j) = Ai + B$. On a :

$$\sum_{j\in E} jP(i,j) = (i-1)(i/d) + (i+1)(1-i/d) \tag{17}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j\in E} jP(i,j) = i^2/d - i/d + i - i^2/d + 1 - i/d \tag{18}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j\in E} jP(i,j) = i - 2i/d + 1 \tag{19}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j\in E} jP(i,j) = (1-2/d)i + 1 \tag{20}$$

On trouve donc $A = (1-2/d)$ et $B = 1$

(b) On veut montrer que $\mathbb{E}[X_{n+1}] = A\mathbb{E}[X_n] + B$. On a :

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \sum_{j\in E} j\mathbb{P}(X_{n+1} = j) \tag{21}$$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \sum_{j\in E}\sum_{i\in E} j\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)\mathbb{P}(X_n = i) \tag{22}$$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \sum_{j\in E}\sum_{i\in E} jP(i,j)\mathbb{P}(X_n = i) \tag{23}$$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \sum_{i\in E}(Ai + B)\mathbb{P}(X_n = i) \tag{24}$$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \sum_{i\in E} Ai\mathbb{P}(X_n = i) + \sum_{i\in E} B\mathbb{P}(X_n = i) \tag{25}$$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = A\sum_{i\in E} i\mathbb{P}(X_n = i) + B\sum_{i\in E}\mathbb{P}(X_n = i) \tag{26}$$

Or, $\sum_{i\in E} i\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{E}[X_n]$ et $\sum_{i\in E}\mathbb{P}(X_n = i) = 1$. On a donc finalement :

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = A\mathbb{E}[X_n] + B \tag{27}$$

(c) En utilisant la question précédente, on peut écrire que :

$$\mathbb{E}[X_n] = A\mathbb{E}[X_{n-1}] + B \tag{28}$$

Or, $\mathbb{E}[X_{n-1}] = A\mathbb{E}[X_{n-2}] + B$

$$\mathbb{E}[X_n] = A[A\mathbb{E}[X_{n-2}] + B] + B \tag{29}$$

$$\mathbb{E}[X_n] = A^2\mathbb{E}[X_{n-2}] + B(1+A) \tag{30}$$

Or, $\mathbb{E}[X_{n-2}] = A\mathbb{E}[X_{n-3}] + B$

$$\mathbb{E}[X_n] = A^3\mathbb{E}[X_{n-3}] + B(1+A+A^2) \tag{31}$$

On en déduit que $\mathbb{E}[X_n] = A^n \mathbb{E}[X_0] + B \sum_{i=0}^{n} A^i$. Ainsi, on a :

$$\mathbb{E}[X_n] = A^n \mathbb{E}[X_0] + B \frac{1 - A^n}{1 - A} \tag{32}$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbb{E}[X_n] = A^n \mathbb{E}[X_0] + \frac{B}{1 - A} - \frac{B * A^n}{1 - A} \tag{33}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{B}{1 - A} + A^n \left(\mathbb{E}[X_0] + \frac{B}{1 - A} \right) \tag{34}$$

(d) L'état d'équilibre du système est $n/2$.

Partie IV. Entropie

(a) L'entropie statistique correspond au logarithme du nombre de façons permettant d'obtenir une situation donnée. Pour obtenir l'état à i boules dans le compartiment A, on "choisit" i boules parmi les d disponibles.
Ansi on a donc :

$$Entropie(X_n = i) = \ln \binom{d}{i} \tag{35}$$

(b) Le modèle d'Ehrenfest possède d états . Il y a donc 2^d situations possibles pour revenir à un état. Si $d = 10$, on a alors :

$$Nombre\_de\_tirages\_avant\_retour = 2^{10} = 1024 \tag{36}$$

On considère qu'un tirage est fait en $10s$, ce qui fait au total $1024 \times 10 = 10240s$ soit $3,247083e^{-6} siècle$.

(c) Plus le nombre d'états est important, plus le temps de retour devient important, et tend vers l'infini. La probabilité de retour diminue, et devient presque nulle. Le phénomène devient alors irréversible.

Partie V. Simulation - Monte Carlo

(a) Code source en R

```
d<-50
n<-100
N<-1000
A<-c(0,0)

for (j in 1:n) {
  A[j]<- c(0)
}

Ehrenfest <- function(A) {
  for (l in 1:d) {
    Y[l]<- c(0)
  }
  for (j in 1:n) {
    A[j]<- c(0)
  }
  for(i in 1:n){
    Z<-floor(runif(1, min=1, max=50))
    if(Y[Z]==0){
      Y[Z]<-1
    }else{
      Y[Z]<-0
    }
    a<-0
    for (k in 1:d) {
      if(Y[k]==1){
        a<-a+1
      }
    }
    A[i]<-a
  }


  return(A)
}

Y<-Ehrenfest(A)
plot(t,Y, xlab='n-ième tirage' ,ylab='Nombre de boules dans A')
```

Pour cette question, nous avons utilsé Rstudio. Pour cela, on commence par déclarer un tableau de taille d où toutes les cases valent 0. En effet, la i-ème case du tableau correspond à la présence ou non de la boule de numéro i dans l'urne A : 0 la boule n'est pas présente et 1 elle y est. Ensuite, nous créons une fonction $Ehrenfest()$, dans laquelle on génère un nombre, Z, aléatoirement entre 1 et d. Puis on teste si la boule qui porte le numéro tiré est dans l'urne

A : si elle l'est on la retire sinon on la met. On fait cela pour 100 tirages, et à chaque tirage on stocke dans le vecteur A le nombre de boules présentes dans l'urne A à chaque tirage. On affiche, à la fin, l'évolution sur un graphique.

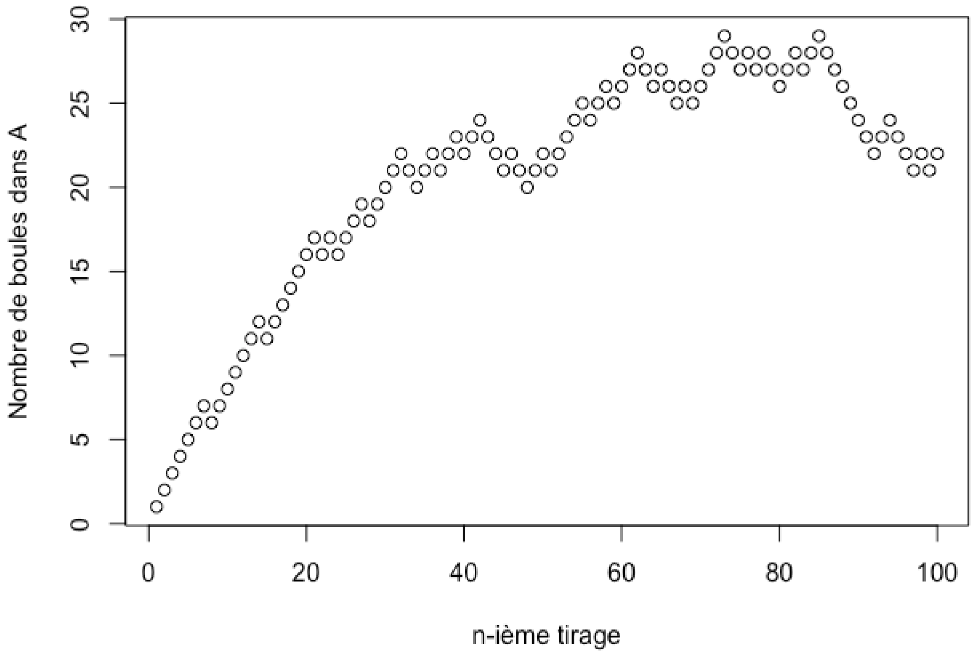

Figure 2: Simulation d'une évolution d'un système d'Ehrenfest avec $d = 50$ et $X_0 = 0$, jusqu'à $n = 100$

(b) Code source en R

```
X <- replicate(N,Ehrenfest(A))
t<-c(1:n)
Xmean <- rowMeans(X)
plot(t,Xmean, xlab='n-ième tirage' ,ylab='Nombre de boules dans A')
```

Pour cette question, nous avons utilsé Rstudio. Nous avons réitéré l'opération de la question précédente 1000 fois (grâce au replicate). Enfin nous avons fait la moyenne des 100 valeurs pour les 1000 tirages, puis nous avons tracé la courbe ci-dessous.

(c) On sait que $Entropie(X_n = i) = \ln \binom{d}{i}$. La fromule de Stirling donne l'approximation suivante : $n! \tilde{} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

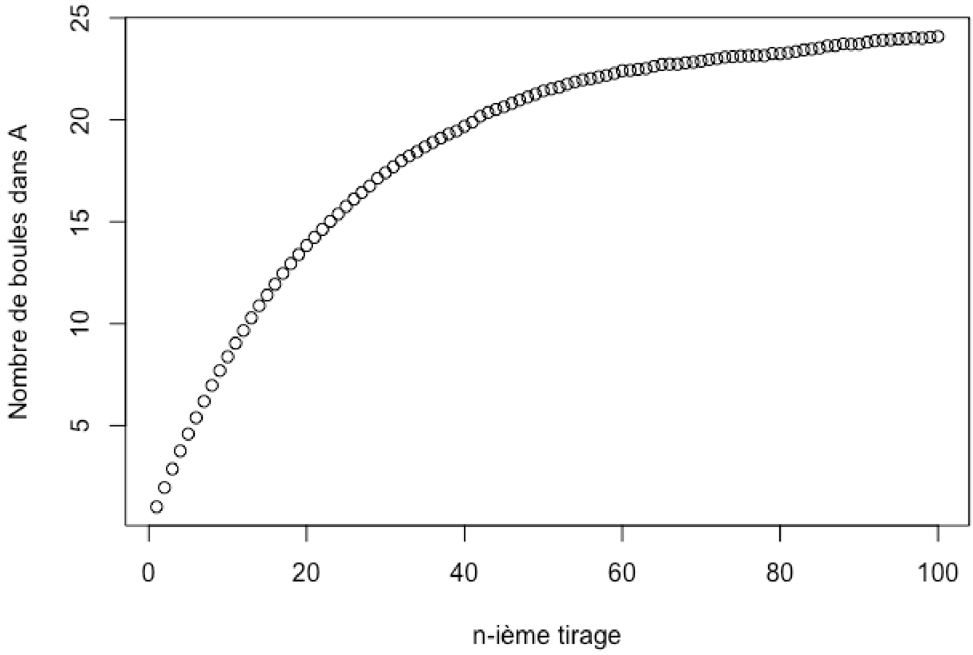

Figure 3: Évolution moyenne en se basant sur 1000 trajectoires

On a donc $Entropie(X_n = i) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(de^1)^n}{(d-i)^n i^n}$