RO05 - Rapport de TP

Capucine Martin & Hugo Paigneau

Octobre 2018

Question 1

On a :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{1/2} S_n \xi_n$$

$\iff$

$$S_M = S_{M-1} + \mu h S_{M-1} + \sigma h^{1/2} S_{M-1} \xi_{M-1}$$

$\iff$

$$\frac{S_M}{S_{M-1}} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1}$$

De plus on sait que :

$$\frac{S_M}{S_0} = \frac{S_M}{S_{M-1}} \times \frac{S_{M-1}}{S_{M-2}} \times ... \times \frac{S_1}{S_0}$$

Donc

$$\frac{S_M}{S_0} = (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1}) \times ... \times (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0))$$

$\iff$

$$\frac{S_M}{S_0} = \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)$$

$\iff$

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)$$

Si on reprend l'équation précédente et on applique le logarithme, on a :

$$\ln \frac{S_M}{S_0} = \ln(\prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n))$$

$\iff$

$$\ln \frac{S_M}{S_0} = \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1}) \times ... \times \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0))$$

On peut en conclure que

$$\ln \frac{S_M}{S_0} = \sum_{n=0}^{M-1} (\ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n))$$

Question 2

On a :

$$\ln \frac{S_M}{S_0} = \sum_{n=0}^{M-1} (\ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n))$$

On pose $\alpha_n = ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)$. On a alors : $\ln \frac{S_M}{S_0} = \sum_{n=0}^{M-1} \alpha_n$ On remarque que lorsque $h \to 0$ on a $\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n \to 0$. En utilisant l'approximation $\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}$ pour $\epsilon \to 0$ on simplifie notre expression et on obtient :

$$\ln\left(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n\right) \approx \mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{(\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)^2}{2}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\ln\left(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n\right) \approx \mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\mu^2 h^2}{2} - h^{3/2}\sigma\mu\xi_n - \frac{\sigma^2 h\xi_n^2}{2}$$

On simplifie car lorsque $h \to 0$ on a $h^\beta \to 0$ avec $\beta > 1$. Donc on peut simplifier les termes $h^{3/2}\sigma\mu\xi_n$ et $\frac{\mu^2h^2}{2}$

$$\ln\left(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n\right) \approx \mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\sigma^2 h\xi_n^2}{2}$$

D'après la Loi forte des grands nombres on a $\sum_{n=0}^{M-1}\alpha_n = ME\left[\alpha_n\right]$. On calcule donc l'espérance :

$$E\left[\alpha_n\right] \approx E\left[\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\sigma^2 h\xi_n^2}{2}\right]$$

$\Longleftrightarrow$

$$E\left[\alpha_n\right] \approx \mu h+\sigma h^{1/2}E\left[\xi_n\right] - \frac{\sigma^2 h}{2}E\left[\xi_n^2\right]$$

Or $\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, on déduit que $E\left[\xi_n\right]=0$ et $E\left[\xi_n^2\right] = Var(\xi_n) = 1$. Ainsi on peut simplifier notre expression.

$$E\left[\alpha_n\right] \approx \mu h - \frac{\sigma^2 h}{2}$$

$\Longleftrightarrow$

$$E\left[\alpha_n\right] \approx h\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

On a vu que $\sum_{n=0}^{M-1}\alpha_n = ME\left[\alpha_n\right]$, on peut donc en déduire que :

$$\sum_{n=0}^{M-1}\alpha_n \approx Mh\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{M-1}\alpha_n \approx T\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\ln\frac{S_M}{S_0} \approx T\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Ansi on a :

$$\ln\frac{S(t)}{S_0} \approx t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Question 3

D'après le TCL, on a :

$$\frac{\ln \frac{S(t)}{S_0} - E\left[\ln \frac{S(t)}{S_0}\right]}{\sqrt{Var\left[\ln \frac{S(t)}{S_0}\right]}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On en déduit que :

$$\ln \frac{S(t)}{S_0} \sim \mathcal{N}\left(t\mu, \sigma^2\sqrt{t}\right)$$

D'après les questions précédentes, on sait que $E\left[\ln \frac{S(t)}{S_0}\right] = E\left[t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] = t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$. On calcule donc la variance :

$$Var\left(\ln \frac{S_M}{S_0}\right) \approx Var\left(\sum_{n=0}^{M-1} \alpha_n\right)$$

D'après les questions pécédentes on peut simplifier tel que :

$$Var\left(\ln \frac{S_M}{S_0}\right) \approx Var\left(\sum_{n=0}^{M-1}\left(\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\sigma^2 h \xi_n^2}{2}\right)\right)$$

$\iff$

$$Var\left(\ln \frac{S_M}{S_0}\right) \approx \sum_{n=0}^{M-1}\left((\sigma h^{1/2})^2 Var\left(\xi_n\right)\right) + \sum_{n=0}^{M-1}\left(\left(\frac{\sigma^2 h}{2}\right)^2 Var\left(\xi_n^2\right)\right)$$

$\iff$

$$Var\left(\ln \frac{S_M}{S_0}\right) \approx \sum_{n=0}^{M-1}\left(\sigma^2 h Var\left(\xi_n\right)\right) + \sum_{n=0}^{M-1}\left(\frac{\sigma^4 h^2}{4} Var\left(\xi_n^2\right)\right)$$

On simplifie car lorsque $h \to 0$ on a $h^\beta \to 0$ avec $\beta > 1$. Donc on peut simplifier le terme $\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\sigma^4 h^2}{4} Var\left(\xi_n^2\right)$

$$Var\left(\ln \frac{S_M}{S_0}\right) \approx \sum_{n=0}^{M-1}\left(\sigma^2 h Var\left(\xi_n\right)\right)$$

$\iff$

$$Var\left(\ln \frac{S_M}{S_0}\right) \approx \left(\sigma^2 T Var\left(\xi_n\right)\right)$$

$\iff$

$$Var\left(\ln \frac{S_M}{S_0}\right) \approx \left(\sigma^2 T\right)$$

$\iff$

$$Var\left(\ln \frac{S(t)}{S_0}\right) \approx t\sigma^2$$

On peut conclure que :

$$\ln \frac{S(t)}{S_0} \sim \mathcal{N}\left(t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \sigma^2 t\right)$$

Question 4

D'après le TCL, on a : $\frac{\ln \frac{S(t)}{S_0} - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\sigma^2 t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On peut alors écrire :

$$\frac{\ln \frac{S(t)}{S_0} - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\sigma^2 t}} = Z$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{\ln \frac{S(t)}{S_0} - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}} = Z$$

$\Longleftrightarrow$

$$\ln \frac{S(t)}{S_0} - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) = Z\sigma\sqrt{t}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\ln \frac{S(t)}{S_0} = Z\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{S(t)}{S_0} = exp\left(Z\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$$

En conclusion $S(t) = S_0 exp\left(Z\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Question 5

$X \sim log - normal$ si $Y = \ln(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
On note $X = \frac{S(t)}{S_0}$ et $S(t) = S_0 exp\left(Z\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = \ln X$ d'où: $Y = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$. On a alors :

$$Y = \ln\left(\frac{S_0 exp\left(Z\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}{S_0}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y = \ln\left(exp\left(Z\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y = Z\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) = Z\sigma\sqrt{t}$$

$\iff$

$$\frac{Y - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}} = Z$$

On peut en déduire que:

$$\frac{Y - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

D'où :

$$Y \sim \mathcal{N}\left(t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{t}, \sigma^2 t\right)$$

Ainsi, on en conclut que :

$$X \sim Log - \mathcal{N}\left(t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{t}, \sigma^2 t\right)$$

Question 6

Soit $Y \sim \mathcal{N}\left(t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{t}, \sigma^2 t\right)$, on cherche un intervalle de confiance pour $S(t)$ au niveau α. Pour cela, on cherche $S(t)$ tel que $P\left(-u \leq \frac{Y - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}} \leq u\right) = 1 - \alpha$ avec u fractile d'ordre $1 - \alpha/2$

Ainsi on a :

$$P\left(-u\sigma\sqrt{t} \leq Y - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \leq u\sigma\sqrt{t}\right) = 1 - \alpha$$

$\iff$

$$P\left(-u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \leq Y \leq u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$

$\iff$

$$P\left(-u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \leq \ln\frac{S(t)}{S_0} \leq u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$

$\iff$

$$P\left(exp\left(-u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) \leq \frac{S(t)}{S_0} \leq exp\left(u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\right) = 1 - \alpha$$

$\iff$

$$P\left(S_0 exp\left(-u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) \leq S(t) \leq S_0 exp\left(u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\right) = 1 - \alpha$$

On en déduit l'intervalle de confiance au niveau α de $S(t)$, avec u fractile d'ordre $1 - \alpha/2$

$$IC = \left[S_0 exp\left(-u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right); S_0 exp\left(u\sigma\sqrt{t} + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\right]$$