

# Simulazione di un Sistema a Code M/M/1 con Arrivi Standard

Passerini Alessio

## 1 Introduzione

Una coda M/M/1 è un processo stocastico in cui lo spazio degli stati possibili corrisponde al numero di clienti o pacchetti nel sistema, inclusi quelli in servizio. La notazione M/M/1 descrive un sistema con:

- Tempi di arrivo secondo una distribuzione di Poisson con media  $1/\lambda$ ,
- Tempi di servizio con distribuzione esponenziale con media  $1/\mu$ ,
- Un singolo server.

I sistemi a code sono il fondamento delle infrastrutture informatiche moderne, e studiarli tramite simulazioni è di grande importanza per la ricerca e sviluppo.

## 2 Obiettivo

L'obiettivo è la simulazione di un sistema a coda M/M/1 con arrivi standard, per valutare graficamente i risultati ottenuti e calcolare gli errori rispetto ai valori teorici attesi. Le principali metriche di interesse sono:

- $L_s$ : Numero medio di pacchetti nel sistema
- $L_q$ : Numero medio di pacchetti in coda
- $W_s$ : Tempo medio di permanenza nel sistema
- $W_q$ : Tempo medio di attesa in coda
- $\rho$ : Fattore di utilizzo del server

## 3 Metodo

La simulazione è stata realizzata in Python, utilizzando programmazione a oggetti (OOP) per creare le classi dei componenti del sistema: generatore di pacchetti, coda, server e statistiche. La funzione principale `experiment_standard(avg_gen_time, avg_ser_time, clock_max, seed)` esegue la simulazione per il sistema M/M/1 con arrivi standard. I pacchetti vengono generati con una distribuzione di Poisson, determinata da `avg_gen_time` (cioè  $1/\lambda$ ), e serviti con un tempo medio di servizio `avg_ser_time` (cioè  $1/\mu$ ).

Per la visualizzazione dei dati è stata utilizzata la libreria `matplotlib` e per l'analisi numerica la libreria `numpy`.

## 4 Funzionamento

La simulazione avanza in cicli di clock discreti. Ogni pacchetto arriva con tempi di interarrivo secondo una distribuzione di Poisson con parametro  $\lambda$ , e viene servito con tempi esponenziali di media  $\mu$ . Se il server è occupato, i pacchetti vengono messi in una coda FIFO (First In, First Out) e serviti in ordine di arrivo.

## 5 Formule Teoriche vs Implementazione nel Codice

Di seguito si presentano le formule teoriche utilizzate e la loro implementazione nel codice, per garantire la correttezza della simulazione.

### 5.1 Fattore di utilizzo del server ( $\rho$ )

La formula teorica per il fattore di utilizzo  $\rho$  è:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Nel codice,  $\rho$  viene calcolato come:

```
lambda_th = 1 / avg_gen_time
mu_th = 1 / avg_ser_time
rho_th = lambda_th / mu_th
```

Entrambe le espressioni risultano equivalenti, poiché  $\lambda$  e  $\mu$  sono calcolate rispettivamente come l'inverso del tempo medio di generazione e di servizio.

### 5.2 Numero medio di pacchetti nel sistema ( $L_s$ )

La formula teorica per il numero medio di pacchetti nel sistema è:

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Nel codice, questo è implementato come:

```
ls_th = rho_th / (1 - rho_th)
```

Anche qui, le due formule sono identiche, confermando la correttezza dell'implementazione.

### 5.3 Numero medio di pacchetti in coda ( $L_q$ )

La formula teorica per il numero medio di pacchetti in coda è:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Nel codice,  $L_q$  è calcolato come:

```
lq_th = (lambda_th * lambda_th) / (mu_th * (mu_th - lambda_th))
```

Anche questa espressione è coerente con la formula teorica.

## 5.4 Tempo medio di permanenza nel sistema ( $W_s$ )

La formula teorica per il tempo medio di permanenza nel sistema è:

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Nel codice,  $W_s$  è calcolato come:

```
ws_th = 1 / (mu_th - lambda_th)
```

L'implementazione rispecchia la formula teorica.

## 5.5 Tempo medio di attesa in coda ( $W_q$ )

La formula teorica per il tempo medio di attesa in coda è:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Nel codice,  $W_q$  è calcolato come:

```
wq_th = lambda_th / (mu_th * (mu_th - lambda_th))
```

Anche qui, le formule sono equivalenti.

# 6 Risultati

I risultati mostrano le statistiche teoriche e sperimentali per  $L_s$ ,  $L_q$ ,  $W_s$ ,  $W_q$  e  $\rho$ , al variare del carico  $\rho$ . Di seguito vengono riportati i grafici di confronto:

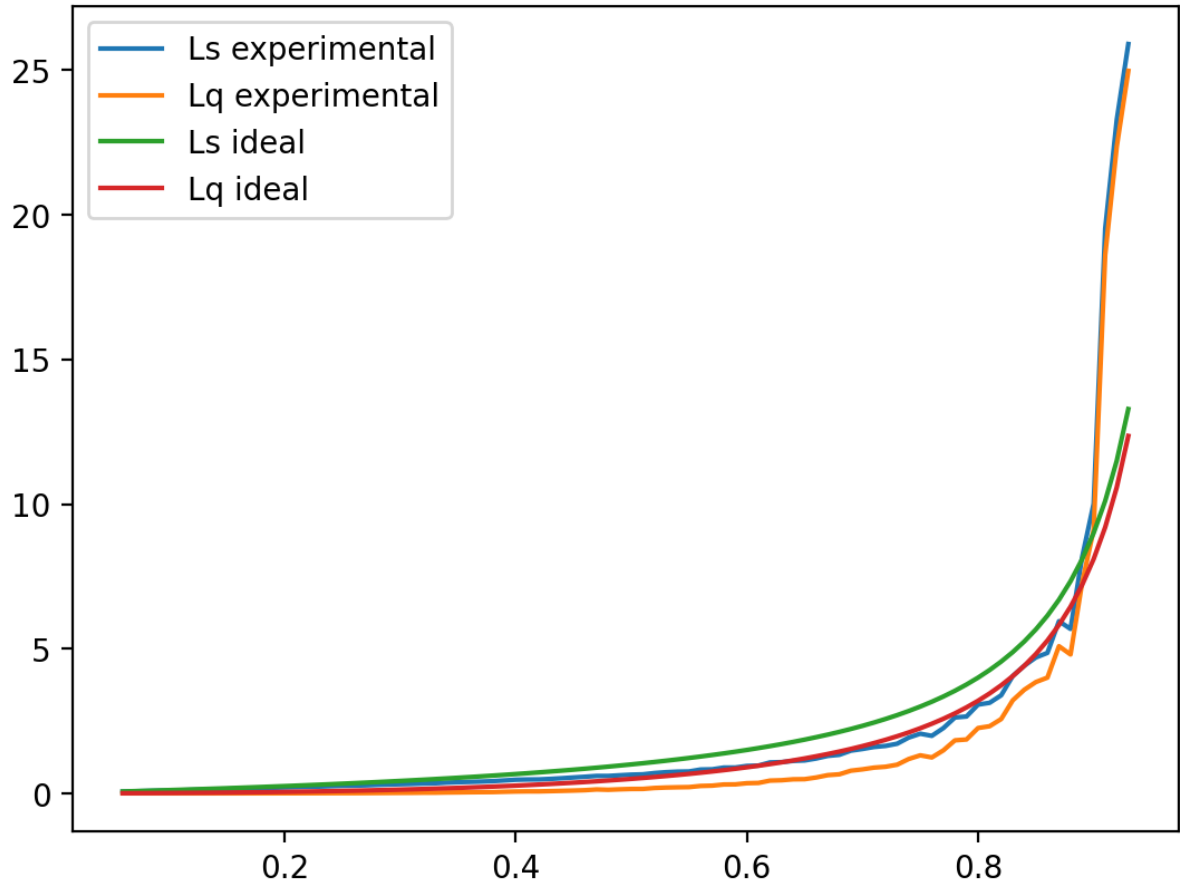


Figure 1: Numero medio di pacchetti nel sistema e in coda al variare di  $\rho$ .

### 6.1 Numero medio di pacchetti nel sistema e in coda ( $L_s$ e $L_q$ )

Il grafico mostra il confronto tra i valori teorici e sperimentali per  $L_s$  e  $L_q$  al variare di  $\rho$ .

**Osservazioni:** - I valori sperimentali per  $L_s$  (blu) e  $L_q$  (arancione) seguono bene l'andamento delle curve teoriche per  $L_s$  (verde) e  $L_q$  (rosso). - Tuttavia, per valori di  $\rho$  più elevati (oltre 0.8), i valori sperimentali iniziano a deviare dai valori teorici, specialmente per  $L_q$ , a causa della maggiore variabilità stocastica. Questo è comune quando il sistema si avvicina alla saturazione ( $\rho \approx 1$ ). - Le fluttuazioni più marcate per  $L_q$  in  $\rho$  alti sono dovute al fatto che le code tendono a crescere rapidamente e a introdurre variabilità nel sistema.

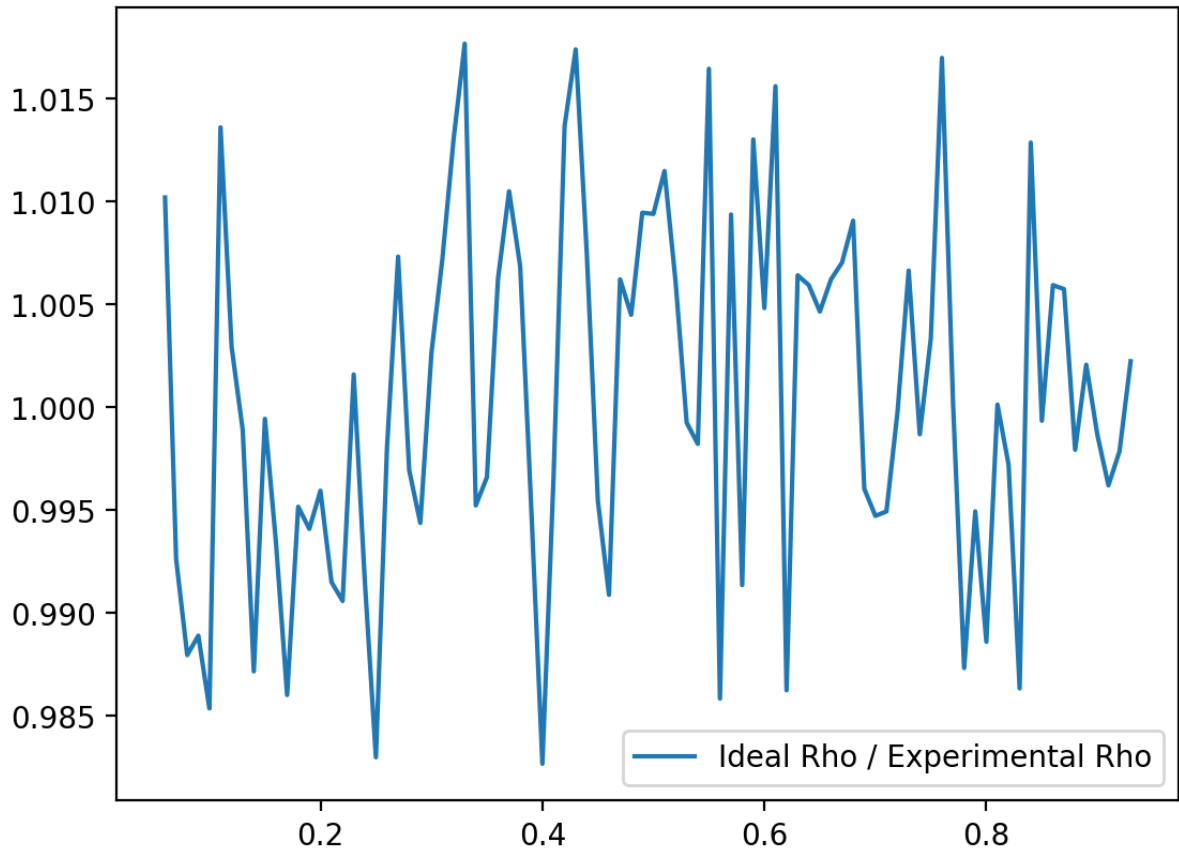


Figure 2: Confronto tra il fattore di utilizzo teorico e sperimentale al variare di  $\rho$ .

## 6.2 Fattore di utilizzo ( $\rho$ )

Il fattore di utilizzo sperimentale si avvicina molto a quello teorico, con una leggera variazione dovuta alla natura casuale del processo.

**Osservazioni:** - Il rapporto tra il fattore di utilizzo teorico e sperimentale oscilla attorno al valore 1, indicando che  $\rho$  sperimentale segue molto da vicino  $\rho$  teorico. - Le oscillazioni aumentano con l'aumentare di  $\rho$ , soprattutto a valori elevati di  $\rho$ , dove il sistema è più vicino alla saturazione e presenta maggiore variabilità nei risultati.

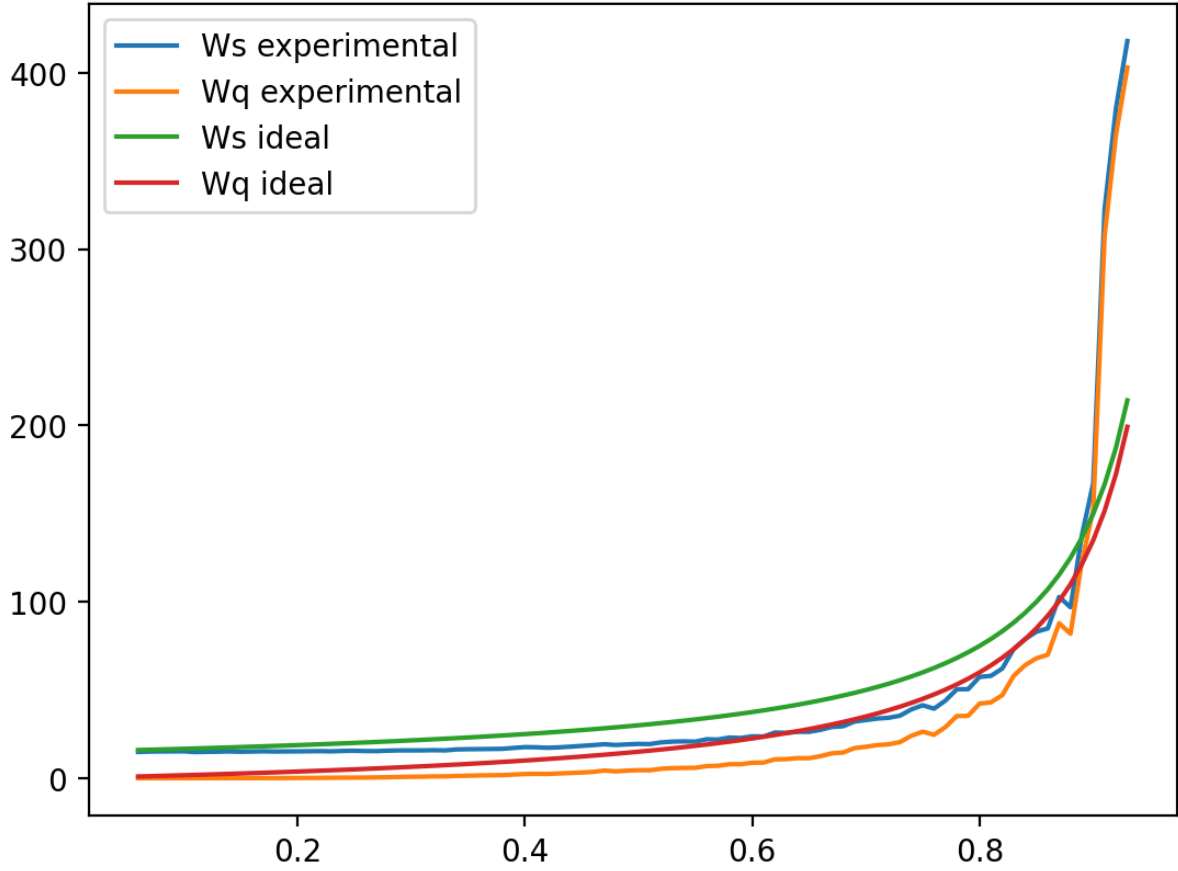


Figure 3: Tempo medio di permanenza e di attesa in coda al variare di  $\rho$ .

### 6.3 Tempo medio di permanenza nel sistema e di attesa in coda ( $W_s$ e $W_q$ )

Anche per queste metriche, il grafico mostra un allineamento stretto tra risultati teorici e sperimentali.

**Osservazioni:** - Similmente ai risultati per  $L_s$  e  $L_q$ , i valori sperimentali per  $W_s$  e  $W_q$  seguono da vicino quelli teorici, con qualche deviazione crescente per  $\rho > 0.8$ . - Per  $\rho$  elevati, il tempo medio di attesa in coda aumenta in modo significativo, creando maggiore variabilità nel comportamento sperimentale. - In generale, i risultati sperimentali rimangono vicini ai valori attesi, a conferma della correttezza del modello.

## 7 Conclusioni

I risultati ottenuti dalla simulazione del sistema M/M/1 con arrivi standard confermano le previsioni teoriche. Le metriche sperimentali  $L_s$ ,  $L_q$ ,  $W_s$ ,  $W_q$  e  $\rho$  sono tutte vicine ai valori attesi, con piccole variazioni dovute alla casualità del processo, in particolare per valori elevati di  $\rho$ , dove la saturazione del sistema genera maggiore variabilità. Questa simulazione dimostra l'efficacia del modello teorico nel rappresentare un sistema a coda M/M/1 in condizioni standard.