УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Двумерное нормальное распределение

Выполнил : студент группы P3217 Плюхин Дмитрий

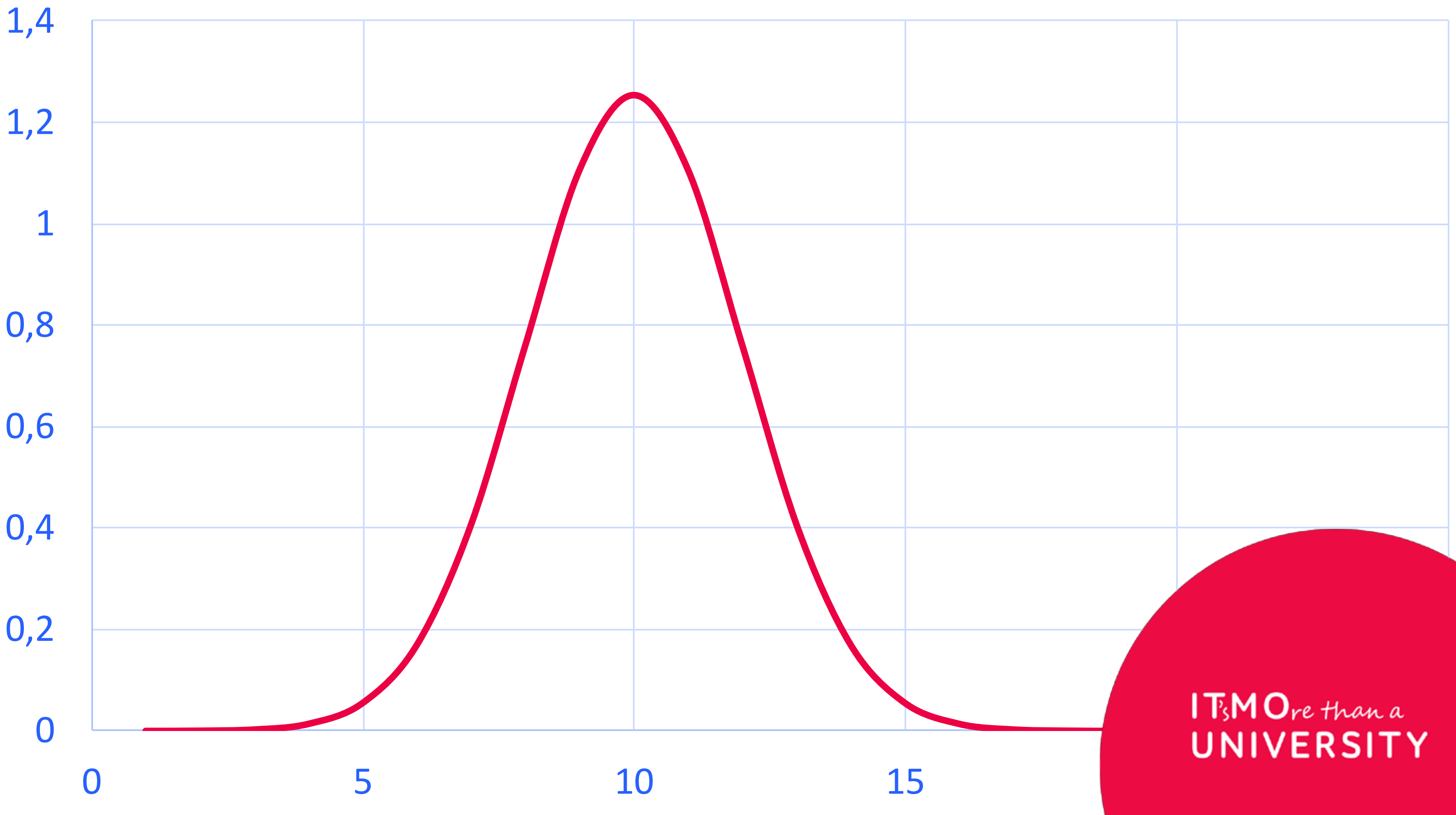
Теория вероятностей и математическая статистика

Нормальное распределение

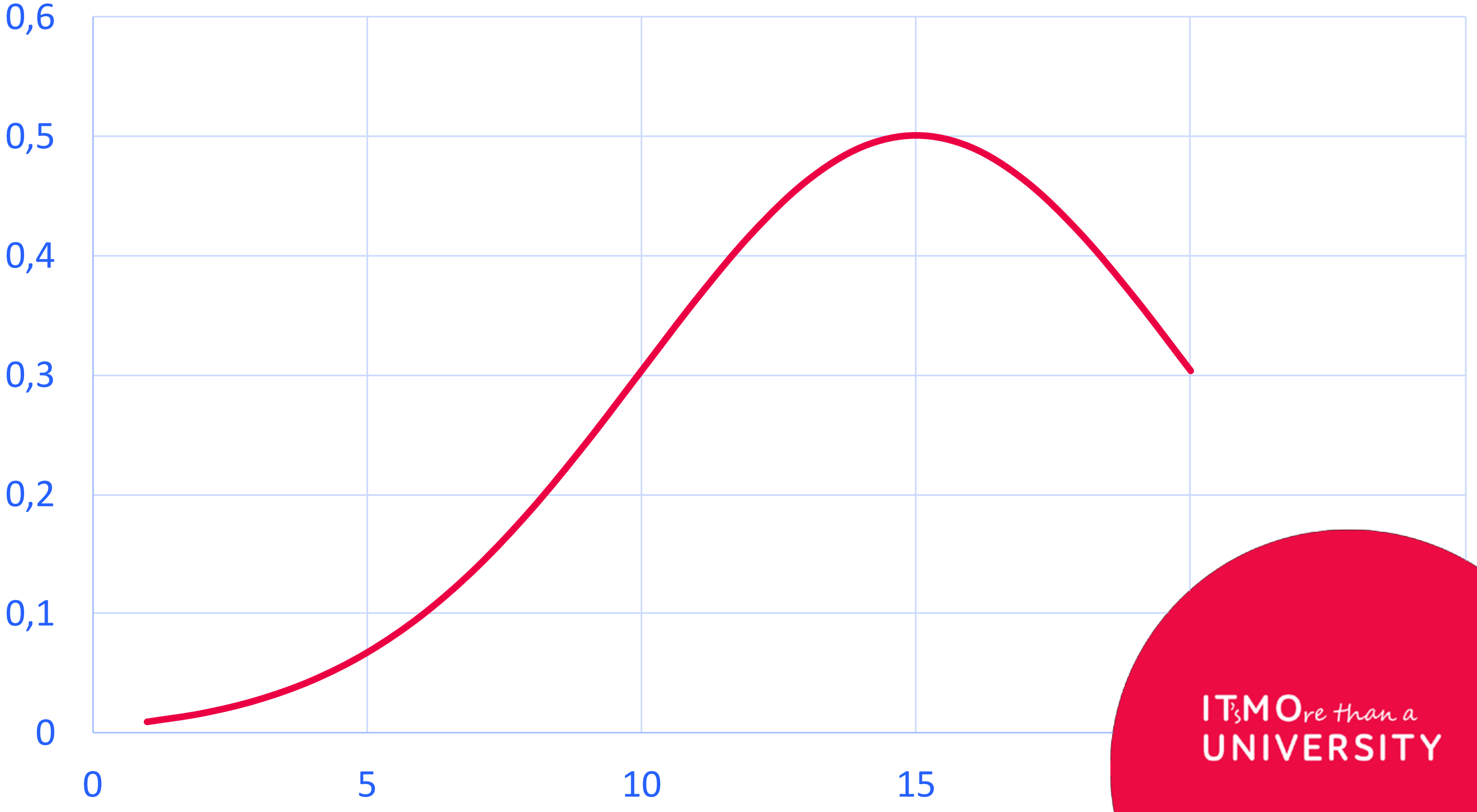
распределение вероятностей, которое в одномерном случае задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Одномерное нормальное распределение



Одномерное нормальное распределение



Многомерный нормальный закон

Если каждая случайная величина системы подчиняется нормальному закону и они совместно независимы, то система подчиняется многомерному нормальному закону

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x{}^2}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_y{}^2}}$$

Плотность нормального распределения

- Каноническая форма
- Величины независимы
- Величины центрированы

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}$$

Вывод формулы плотности нормального распределения

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x{}^2}+\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma_y{}^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma_x{}^2}+\frac{(y-\mu)^2}{\sigma_y{}^2}\right)\right)} = \left|\begin{matrix} \xi_1 = x-\mu \\ \xi_2 = y-\mu \\ \sigma_1 = \sigma_x \\ \sigma_2 = \sigma_y \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1{}^2}{\sigma_x{}^2}+\frac{\xi_1{}^2}{\sigma_y{}^2}\right)\right)}$$

Фиксированность плотности нормального распределения

- При $\xi_{1i} = \xi_{1j}$ и $\xi_{2i} = \xi_{2j}$
- При $\left(\frac{\xi_{1i}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_{2i}^2}{\sigma_2^2}\right) = \left(\frac{\xi_{1j}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_{2j}^2}{\sigma_2^2}\right)$

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}$$

Фиксированность плотности нормального распределения

$$\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right) = k^2 = const$$

Каноническое уравнение эллипса

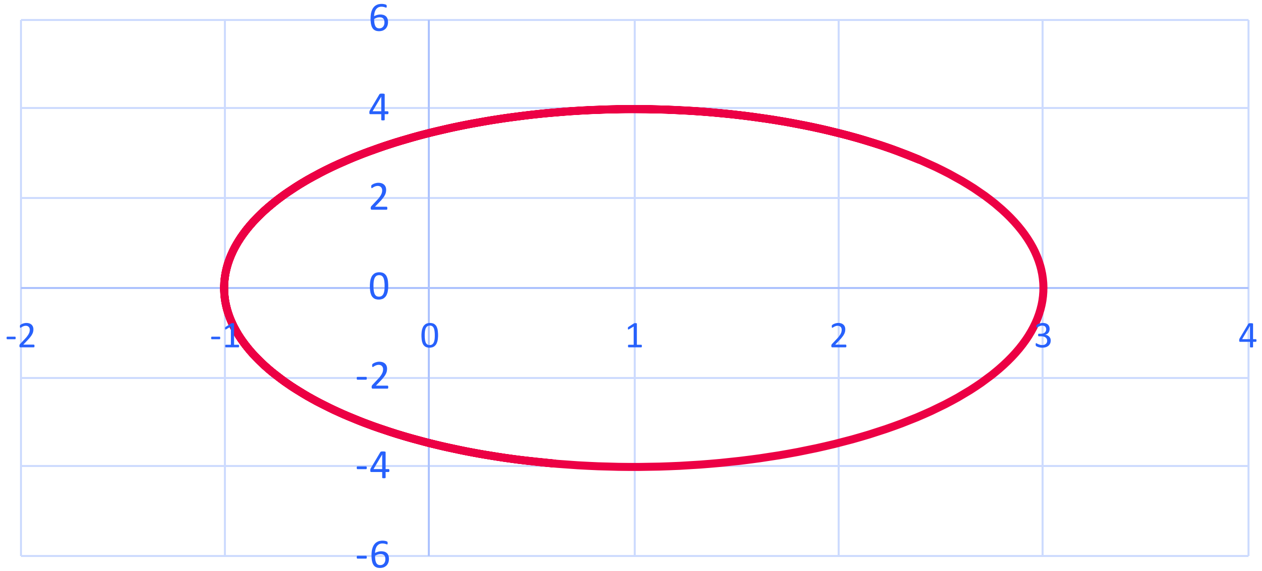
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 1$$

Можно добиться полного соответствия:

$$\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2 k^2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2 k^2}\right) = 1$$

Эллипс рассеивания

- Линия уровня – эллипс равной плотности
- Область, ограниченная линией – эллипс рассеивания
- Центр эллипса – центр рассеивания



Эллипс рассеивания

- Альтернативный способ задания

$$B_k = \{\bar{\xi}: \bar{\xi}\bar{\xi}^T D^{-1} = k^2\}$$

$$\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & \sigma_2^{-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} * \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} \end{pmatrix}$$

$$= \bar{\xi}\bar{\xi}^T D^{-1}$$

Вывод многомерного нормального закона

$$\bar{\xi} = C\bar{x}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Вывод многомерного нормального закона

$$\bar{\xi} = C\bar{x}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \ C = \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 cos\alpha + x_2 sin\alpha \\ -x_1 sin\alpha + x_2 cos\alpha \end{bmatrix}$$

Вывод многомерного нормального закона

$$D = CKC^T$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {\sigma_2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & {\sigma_3}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & {\sigma_n}^2 \end{bmatrix}$$

K – матрица корреляционных моментов

Вывод многомерного нормального закона

$$\mathrm{D} = CKC^T$$

$$B_k = \{\bar{\xi}: \bar{\xi}\bar{\xi}^T D^{-1} = k^2\} = \{\bar{x}: (C\bar{x})(C\bar{x})^T D^{-1} = k^2\}$$

$$= \{\bar{x}: \bar{x}\bar{x}^T C D^{-1} C^T = k^2\} = \left\{\bar{x}: \bar{x}\bar{x}^T \quad \mathrm{K}^{-1} = k^2\right\}$$

$$D^{-1} = C^{-1} K^{-1} C^{T^{-1}}$$

$$K^{-1} = C \quad D^{-1} C^T$$

Вывод многомерного нормального закона

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{detD}} e^{\left(-\frac{1}{2}\bar{\xi}\bar{\xi}^T D^{-1}\right)}$$

$$\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right) = \begin{pmatrix}\xi_1^2\\ \xi_2^2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\sigma_1^{-2} & \sigma_2^{-2}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} * \begin{pmatrix}\sigma_1^{-2} & 0\\ 0 & \sigma_2^{-2}\end{pmatrix} = \bar{\xi}\bar{\xi}^T D^{-1}$$

Вывод многомерного нормального закона

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{detD}} e^{\left(-\frac{1}{2}\bar{\xi}\,\bar{\xi}^T D^{-1}\right)} = f(\bar{\xi})$$

Вывод многомерного нормального закона

$$f(\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detD}} e^{\left(-\frac{1}{2}\bar{\xi}\bar{\xi}^T D^{-1}\right)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{detK}} e^{\left(-\frac{1}{2}\bar{x}\bar{x}^T \quad K^{-1}\right)}$$

$$= f(\bar{x})$$

Многомерный нормальный закон

Для двух величин:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detK}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{m})(\bar{x}-\bar{m})^T \quad K^{-1}\right)}$$

Для k величин:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k detK}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{m})\left(\bar{x}-\bar{m}\right)^T \quad K^{-1}\right)}$$

Корреляционная матрица

- Корреляционный момент (ковариация, ковариационный момент) — в теории вероятностей и математической статистике мера линейной зависимости двух случайных величин.
- Равна математическому ожиданию произведения разностей случайных величин и их математических ожиданий

$$cov(X, Y) = M[(X - MX)(Y - MY)]$$

Корреляционная матрица

- Коэффициент корреляции Пирсона - нормированный момент корреляции случайных величин

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Корреляционная матрица

- Матрица, составленная из попарных ковариаций элементов случайного вектора
- Квадратная
- Симметрическая
- Неотрицательно определенная
- На диагонали дисперсии компонент вектора
- Внедиагональные элементы — ковариации между компонентами.

Корреляционная матрица

- Пример для двумерного вектора

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & r\sigma_x\sigma_y \\ r\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

$$detK = \sigma_x^2\sigma_y^2 - r^2\sigma_x^2\sigma_y^2 = (1 - r^2)\sigma_x^2\sigma_y^2$$

$$K^{-1} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r^2}} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -r\sigma_x\sigma_y \\ -r\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

Корреляционная матрица

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detK}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{m})(\bar{x}-\bar{m})^T \quad K^{-1}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x \ \sigma_y \sqrt{1-r^2}} e^{\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-m_x) \quad (y-m_y)}{\sigma_x \ \sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right)}$$

$$= f(x,y)$$

Корреляционная матрица

$$f_X(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\ \sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{(x-m_x)\ \ (y-m_y)}{\sigma_x\ \sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right)} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\ \sigma_y\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{(x-m_x)\ \ (y-m_y)}{\sigma_x\ \sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right)} dy$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \dfrac{x-m_x}{\sigma_x} \\ v = \dfrac{y-m_y}{\sigma_y} \\ dy = \sigma_y dv \end{matrix} \right| = I$$

ITMOre than a UNIVERSITY

Корреляционная матрица

$$I = \frac{1}{2\pi\sigma_x \sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right)} dv$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right)} dv = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{v^2-2ruv+(ru)^2-(r^2-1)u^2}{2(1-r^2)}\right)} dv$$

$$= e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{(v\ \ -ru)^2}{2(1-r^2)}\right)} dy = \left| \begin{matrix} z = \dfrac{(v-ru)}{\sqrt{1-r^2}} \\ dv = \sqrt{1-r^2}dz \end{matrix} \right| =$$

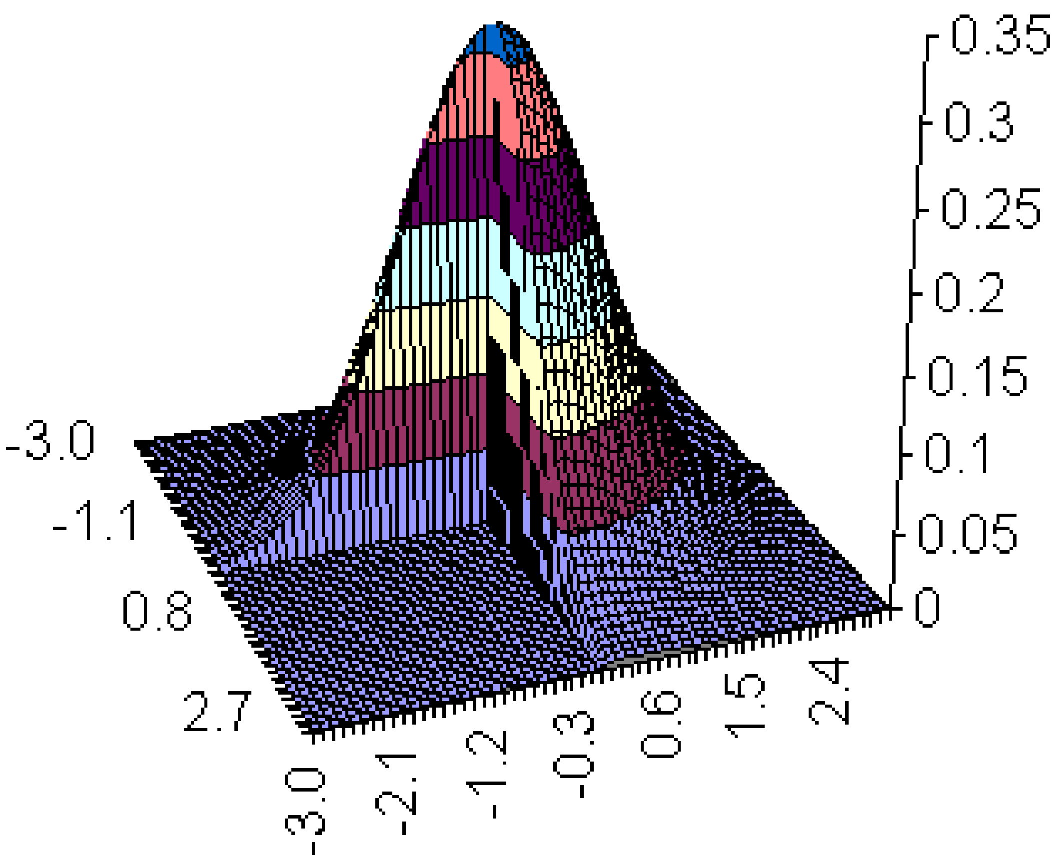
Корреляционная матрица

$$= e^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{1-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)}dz = e^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\right)^2}\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Визуализация двумерного нормального распределения



Задача на двумерное нормальное распределение

Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону. Известно, что $m_x = a, m_y = b$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Найти радиус R круга с центром в точке

(a, b), вероятность попадания в который случайной точки (X, Y) равна 0,997.

Решение задачи на двумерное нормальное распределение

Случайные величины независимы, поэтому

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x{}^2} + \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma_y{}^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Решение задачи на двумерное нормальное распределение

Вероятность попадания точки в круг

$$P(D) = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(x-a)^2+(x-b)^2\le R^2} f(x,y)dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint\limits_{(x-a)^2+(x-b)^2\le R^2} e^{-\left(\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}\right)}dxdy = \left| \begin{matrix} u = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ v = \dfrac{y-b}{\sigma} \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{u^2+v^2\le\left(\frac{R}{\sigma}\right)^2} e^{-\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)}dudv = \left| \begin{matrix} u = rcos\varphi \\ v = rsin\varphi \end{matrix} \right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{R}{\sigma}}\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}}d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^{\frac{R}{\sigma}} e^{-\frac{r^2}{2}} d\left(\frac{r^2}{2}\right) = \left| t = \frac{r^2}{2} \right| = \int_0^{\frac{R^2}{2\sigma^2}} e^{-t}d(t) = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$$

ITMOre than a UNIVERSITY

Решение задачи на двумерное нормальное распределение

Условие касающееся величины вероятности

$$1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} = 0{,}997$$

$$-\frac{R^2}{2\sigma^2} = \ln 0{,}003$$

$$R = \sqrt{-2\sigma^2 \ln 0{,}003} \approx 3{,}41\sigma$$

Ответ : $3{,}41\sigma$

Условные распределения нормального закона

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{\sigma_x\sqrt{2\pi}}{2\pi\sigma_x\ \sigma_y\ \sqrt{1-r^2}} e^{\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-m_x)\ \ (y-m_y)}{\sigma_x\ \sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right] * \left(\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\ \sqrt{1-r^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\left[m_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right]}{\sigma_x\sqrt{1-r^2}}\right)^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y|x}} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m_{y|x}}{\sigma_{y|x}}\right)^2\right)}$$

Условные распределения нормального закона

$$f_{Y|x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y|x}} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m_{y|x}}{\sigma_{y|x}}\right)^2\right)}$$

- СКО условного распределения

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}$$

- Мат ожидание условного распределения

$$m_{y/x} = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$$

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание