ИТМО Кафедра Информатики и прикладной математики

Отчет по лабораторной работе №3 «Аппроксимация и интерполяция» Вариант : аппроксимация методом наименьших квадратов

Выполнил: студент группы P3217

Плюхин Дмитрий

Преподаватель: Калёнова О. В.

2016 год

1. Описание метода

Метод наименьших квадратов (МНК, англ. Ordinary Least Squares, OLS) — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных. Он может использоваться для «решения» переопределенных систем уравнений (когда количество уравнений превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных (не переопределенных) нелинейных систем уравнений, для аппроксимации точечных значений некоторой функции.

Метод наименьших квадратов основан на отыскании такой наиболее подходящей кривой, представленной полиномом заданной степени, что расстояния от точек до этой кривой были бы минимальными.

Математически это можно описать так, что частные производные некоторой функции должны быть равны нулю, при условии, что эта функция представляет собой сумму квадратов разностей между значением искомой функции в точке x_i и истинным значением y_i, которое задано изначально. Иными словами, будем рассматривать функцию вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j - y_i\right)^2$$

Которая представляет собой сумму квадратов отклонений всех заданных точек от искомой кривой (здесь m – количество заданных точек, n – степень многочлена)

Для того, чтобы сумма квадратов была минимальной, очевидно, необходимо найти точку минимума функции f(x). А в этой точке, как известно, будут равны нулю все частные производные функции f(x), то есть в точке экстремума:

$$f'_{a_k}(x) = \sum_{i=1}^{m} 2x_i^k\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j - y_i\right) \; = 0 \text{ где } k - \text{целое число в промежутке от } 0 \text{ до } n \text{ включительно}$$

В частности, для того чтобы теперь найти коэффициенты искомой прямой можно составить СЛАУ и решить её одним из численных методов (например, методом итераций, который уже был рассмотрен в л/р 1). Система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i^{0+0} a_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i^{0+1} a_1 + \sum_{i=1}^{m} x_i^{0+2} a_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} x_i^{0+n} a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^{1+0} a_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i^{1+1} a_1 + \sum_{i=1}^{m} x_i^{1+2} a_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} x_i^{1+n} a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^1 y_i \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \dots \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+0} a_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} a_1 + \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} a_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+n} a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^n y_i \end{cases}$$

Видно, что матрица, которую нужно будет решить, будет состоять из n+1 строк и n+2 столбцов. Коэффициенты можно посчитать, если пройтись в цикле по всем элементам изначально пустой матрицы.

Для большей полноты еще необходимо доказать, что в любом случае достигается именно точка минимума, а не точка максимума. Сделать это можно следующим образом: перенесем сумму произведений x и y обратно влево и продифференцируем полученные производные по каждому из коэффициентов. Получим матрицу, состоящую из вторых производных:

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_0\, \partial a_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_0\, \partial a_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_1\, \partial a_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1\, \partial a_n} \\ & \dots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_n\, \partial a_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n\, \partial a_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n^2} \end{matrix}$$

Если посчитать определители угловых миноров такой матрицы, то они все оказываются больше нуля (в частности, определитель первого углового минора равен m > 0, определитель второго углового минора равен $m*\sum_{i=1}^{m} x_i^2$ - $(\sum_{i=1}^{m} x_i\ )^2 > 0$ и так далее), что говорит о том, что в найденной точке достигается минимум.

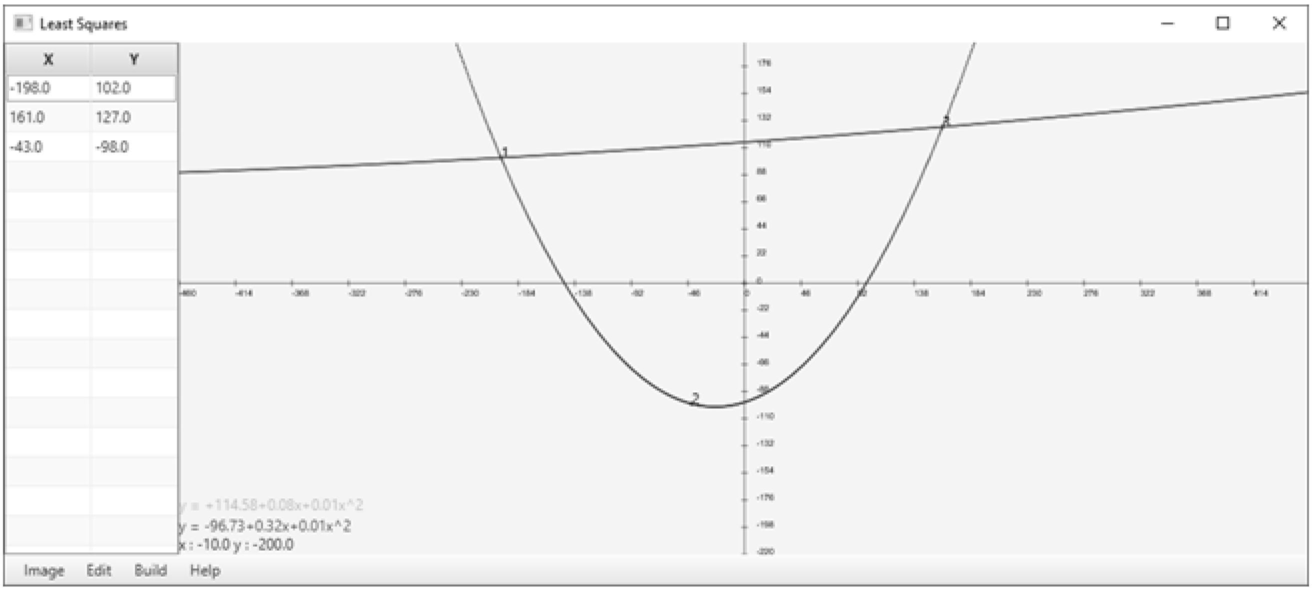
2. Листинг основной части программы

```
public class LeastSquares {
    private static int range = 2;

    public static int getRange(){
        return range;
    }
    public static void setRange(int range){
        LeastSquares.range = range;
    }

    public static double[] getKoefficients(SetPointsContainer pointsContainer){
        double[][] matrix = getMatrix(pointsContainer,range+1);
        double[] solve = solveSystem(matrix,0.0001);

        return solve;
    }

    private static double[][] getMatrix(SetPointsContainer pointsContainer, int numOfMembers){
        double[][] matrix = new double[numOfMembers][numOfMembers + 1];

        for (int i = 0; i < numOfMembers; i++)
        {
            for (int j = 0; j < numOfMembers; j++)
            {
                matrix[i][j] = 0;
            }
        }

        for (int i = 0; i < numOfMembers; i++)
        {
            for (int j = 0; j < numOfMembers; j++)
            {
                double sumA = 0, sumB = 0;
                for (int k = 0; k < pointsContainer.getSet().size(); k++)
                {
                    sumA += Math.pow(pointsContainer.getSet().get(k).getX(), i) *
Math.pow(pointsContainer.getSet().get(k).getX(), j);
                    sumB += pointsContainer.getSet().get(k).getY() *
Math.pow(pointsContainer.getSet().get(k).getX(), i);
                }
                matrix[i][j] = sumA;
                matrix[i][numOfMembers] = sumB;
            }
        }
        return matrix;
    }

    private static double[] solveSystem(double[][] matrix, double eps){
        …
    }
}
```

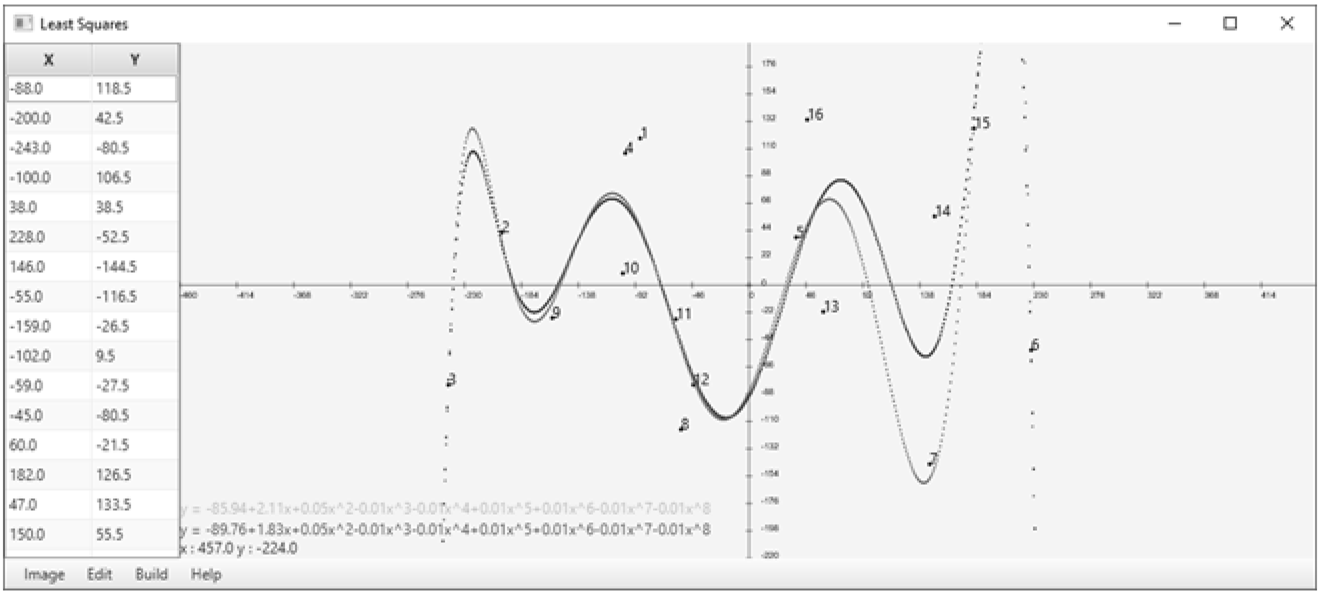
Код функции solveSystem не приведен

3. Примеры и результаты работы программы

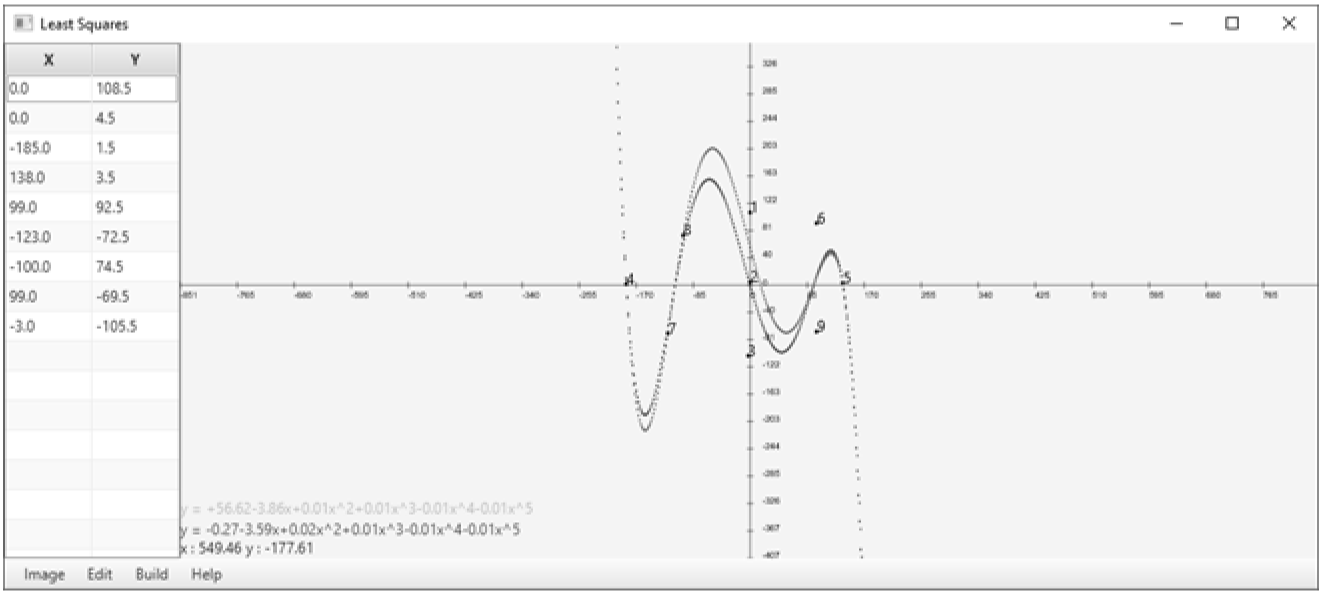
Пример 1.



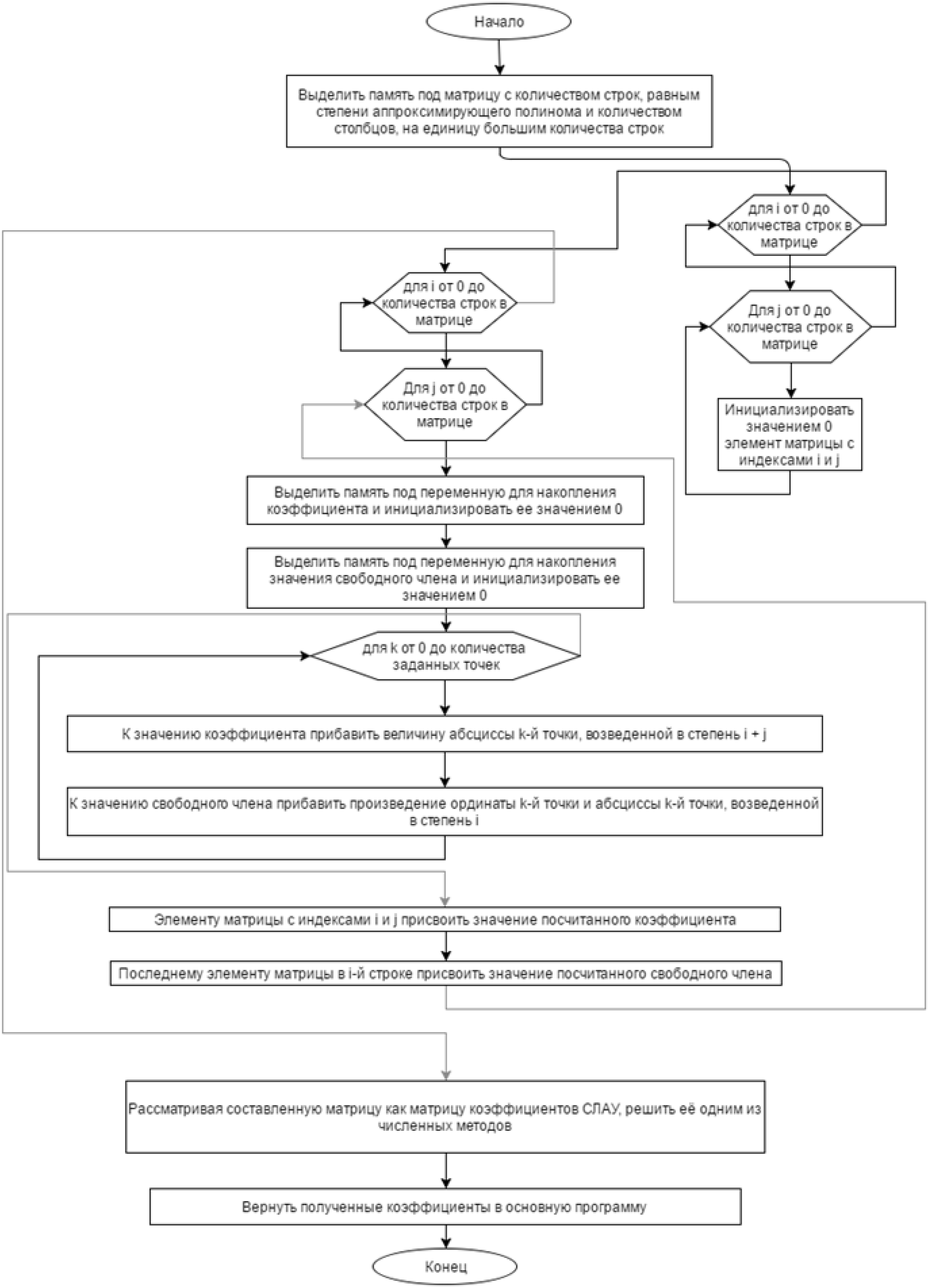
Пример 2.



Пример 3.



4. Блок – схема численного метода



5. Вывод

Так, изученная в ходе лабораторной работы аппроксимация методом наименьших квадратов имеет свои преимущества и недостатки по сравнению с альтернативными способами: прежде всего, метод наименьших квадратов обеспечивает простоту выбора коэффициентов для того, чтобы ошибка была минимальной, однако с другой стороны, результат, получаемый при использовании метода наименьших квадратов далеко не всегда соответствует требованиям (например, реальные экспериментальные данные могут на одном участке близиться к прямой, на другом – к параболе, а на третьем – к многочлену 12 степени – в таком случае вместо МНК лучше использовать сплайны). Полученные знания можно широко использовать во многих областях практической деятельности, например, на основе МНК можно организовать систему поиска по картинкам, чертежам, картам и даже по лицам людей.