Экзамен по математике (3 семестр)

Оглавление

Двойной интеграл. Доказательство теоремы о вычислении двойного интеграла.

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть задана замкнутая, ограниченная область D на плоскости XOY, а функция z=f(x,y) определена в этой области, в таком случае можно рассмотреть сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i) * \Delta S_i \xrightarrow[n \to \infty]{} \iint_D f(x,y)dxdy$$

Где

- M_i обозначает точку внутри области D
- ΔS_i обозначает площадь малой области вокруг точки M_i
- n обозначает количество точек, взятых в области D

Видно, что при n=1 получим объем цилиндра с основанием D и высотой $f(M_i)$ (если за ΔS_1примем площадь области D). При сколь угодно большом увеличении n получим объем тела, ограниченного плоскостью XOY снизу, функцией f(x,y) сверху и примыми, перпендикулярными плоскости XOY, проходящими по границе области D – по бокам.

Если площадь под графиком функции является геометрической интерпретацией обычного интеграла, то объем вышеописанного тела – геометрическая интерпретация двойного интеграла.

Теорема о вчиислении двойного интеграла имеет вид:

Двойной интеграл от непрерывной функции по правильной области D (по области, границу которой любая прямая, проведенная параллельно оси координат и притом проходящая через хотя бы одну внетреннюю точку этой области, пересекает только дважды) равен двукратному интегралу от этой функции по области D

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ВЫЧИСЛЕНИИ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим двукратный интеграл по области D.

В соответствии с теоремами, справедливыми для двукратных интегралов, последние можно разбивать прямыми, параллельными осям координат, а именно:

Попробуем разбить двукратный интеграл прямой x = c (a<=c<=b) , путем нехитрых преобразований получим:

$$\int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^c \Phi(x)dx + \int_c^b \Phi(x)dx = \int_a^c (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx + \int_c^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

Попробуем разбить двукратный интеграл прямой y = c (пересекает τ(x) в двух точках d и e) , тогда для удобства введем функцию α(x) следующего вида:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \tau(x), x < d \\ c, \quad d \le x \le e \\ \tau(x), x > e \end{cases}$$

В таком случае исходный интеграл может быть записан в виде:

$$\int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\alpha(x)} f(x,y)dy)dx + \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

Где

$$\int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^d (\int_{\tau(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx + \int_d^e (\int_c^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx + \int_e^b (\int_{\tau(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$
$$= \int_d^e (\int_c^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

Соответственно

$$\int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\alpha(x)} f(x,y)dy)dx + \int_d^e (\int_c^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

В обоих случаях интеграл разбивается на два интеграла по двум областям.

В общем случае, если имеется двукратный интеграл I_D, то область можно разбить прямыми, параллельными осям координат на n частей, причем

$I_D = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$

Кроме двух этих теорем потребуется также теорема о среднем, естественным путем к которой можно прийти следующим образом:

Для начала рассмотрим две теоремы об оценке двукратного интеграла:

$$mS \le \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx \le MS$$

Где m и M – минимальное и максимальное значения f(x,y) соответственно на области D

Доказательство тому факту простое:

$$min * (b-a) \le \int_a^b \Phi(x)dx \le max * (b-a)$$

Где min и max – минимальное и максимальное значения $\Phi(x)$ соответственно на области [a;b]

Наконец, теорема о среднем:

$$I_D = \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = f(P_i) * S_D$$

Поскольку f(x,y) непрерывна (т.е принимает весь набор значений от m до M) и

$m \le \frac{I_D}{S} \le M$

Возвращаясь к нашим рассуждениям относительно доказателства главной теоремы, имеем:

$I_D = f(P_1)S_D + f(P_2)S_D + \dots + f(P_n)S_D$

Однако суимма, стоящая справа, при n стремящемся к бесконечности равна двойному интегралу f(x,y) по области D, значит и I_D равен двойному интегралу, что и требовалось доказать.

Свойства двукратных интегралов

СВОЙСТВО АДДИТИВНОСТИ

Если правильную в направлении оси ОХ и ОУ область разбить прямыми x=c и y=h на 2 области D_1 и D_2, то

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$$

Доказательство приведено ранее

ТЕОРЕМА ОБ ОЦЕНКЕ ДВУКРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

Если m и M – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции f на области D, то верно двойное неравенство:

$$mS \le \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f dy \right) dx \le MS$$

Где S – площадь области D, прямая x=a ограничивает область D слева, прямая x=b ограничивает область D справа, а графики функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ограничивают область D сверху и снизу соответственно.

Доказательство приведено ранее

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ДВУКРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

В условиях предыдущего свойства верно равенство:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f dy \right) dx = f(P) * S$$

Где P – некоторая точка в области D

Доказательство приведено ранее

Тройной интеграл и его свойства

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Если при использовании обычного интеграла сумма Римана берется для значений функции в каждой точке отрезка, при использовании двойного интеграла сумма Римана берется для значений функции в каждой точке двумерной области, то в случае тройного интеграла сумма Римана состоит из значений функции в каждой точке какого-либо объема, ограниченного замкнутой поверхностью.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

Для того, чтобы интеграл был определенным, достаточно, чтобы функция была непрерывной.

Аналогично вычислению двойного интеграла, который необходимо спроектировать на ось OX, а затем заменить двойной интеграл на двукратный, в котором внешнее интегрирование ведется по оси X (от a до b), а внутреннее – по оси Y (от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$ – по мере продвижения вдоль оси OX границы области по оси OY могут меняться), тройной интеграл при попытке его вычисления следует спроектировать на какую-либо из координатных областей, взять внешний интеграл по получившейся области, а внутренний – по исходным функциям, ограничивающим данную область, иными словами, мы должны добиться равенства следующего вида:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

Что нужно сделать для вычисления двойного интеграла уже известно:

$$\iint\limits_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$

Можно заметить, что границы усложняются при движении слева направо

Следует вспомнить, что для успешного вычисления двойного интеграла область должна быть правильной в направлении осей X и Y, а именно, любая прямая, проведенная параллельно каждой из этих осей, проходящая через внутреннюю точку области интегрирования, должна пересекать границу области ровно в двух точках. В случае трехмерной ситуации условие несколько усложняется: по-прежнему область, по которой ведется интегрирование, должна быть правильной, однако теперь необходимо и достаточно выполнения комплекса условий:

- Прямая, параллельная оси Z, проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках
- Область интегрирования проектируется в правильную двумерную область
- Любая часть области интегрирования, отсеченная плоскостью, параллельной координатной плоскости, удовлетворяет предыдущим двум свойствам

Трехмерный интеграл может быть использован при расчете объема тела (для это подынтегральная функция должна быть тождественно равна единице), либо же при расчете массы тела с переменной плотностью.

СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Тройной интеграл обладает всеми свойствами двойного, а именно:

- Свойства линейности

$$\iiint\limits_V \left(\propto f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\right)dxdydz = \propto \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

- Свойство аддитивности

  Если $V = V_1 + V_2$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

Замена переменных в двойных интегралах

ЯКОБИАН ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Сложность, которой было не лишено в том числе и вычисление обыкновенных интегралов – это необходимость при замене переменной вычисления так называемого Якобиана преобразования. Суть его введения заключается в добавке к функции некоего члена, компенсирующего ошибку при преобразовании координат. В одномерном случае все достаточно очевидно, например, если есть простой интеграл вида

$$\int (x+5)\, dx$$

И мы хотим заменить в нем переменную x на t так, что

$$x = \sin t$$

Нам необходимо вычислять дифференциал, таким образом, получим выражение:

$$\int cost(sint+5)\, dt$$

В котором появился косинус – та самая добавка, о которой идет речь. Заметим, что если обозначить

$$x = \ \varphi(t) = \sin t$$

То эта добавка окажется равна

$$I = \frac{d\varphi}{dt} - \text{Якобиан преобразования координат (одномерный случай)}$$

Теперь переходим к двумерному случаю, в котором все чуть менее очевидно. Аналогично тому, как мы заменяли x на $\varphi(t)$, на этот раз выполним замену двух переменных, по которым ведется интегрирование:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}, \text{где } \varphi \text{ и } \psi - \text{непрерывные и однозначные}$$

И если в одномерном случае добавка имела простую и интуитивно понятную форму, то на этот раз она примет вид

$$I = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} - \text{Якобиан преобразования координат (двумерный случай)}$$

Якобиан всегда берется по модулю, то есть, всегда положителен

Преобразование двойного интеграла выглядит так:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} I * f(u,v)dudv$$

Имеется стандартный вид замены, который мы рассмотрим далее

ИЗ ДЕКАРТОВЫХ В ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Такой вид преобразования предполагает замену вида

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}$$

Соответственно, Якобиан преобразования оказывается равен

$$I = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -rsin\varphi \\ sin\varphi & rcos\varphi \end{vmatrix} = rcos^2\varphi + rsin^2\varphi = r$$

Используются также обобщенные полярные координаты

$$\begin{cases} x = arcos\varphi \\ y = brsin\varphi \end{cases}$$

В этом случае Якобиан преобразования

$$I = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} acos\varphi & -arsin\varphi \\ bsin\varphi & brcos\varphi \end{vmatrix} = abrcos^2\varphi + abrsin^2\varphi = abr$$

Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройных интегралах.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Цилиндрические координаты – обобщение полярных координат на трехмерный случай. Соответственно, цилиндрические координаты удобны, когда область интегрирования симметрична относительно какой-либо оси.

При переходе к цилиндрическим координатам от декартовых координаты в цилиндрической системе принимают смысл:

Координата r определяет расстояние от полюса до точки поверхности (длину радиус - вектора)

Координата φ определяет угол между радиус – вектором точки поверхности и осью X

Координата z определяет смещение полюса вдоль оси Z

СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Сферические координаты исключительно удобны в тех случаях, когда область симметрична относительно какой-либо одной точки. В принципе, там, где можно использовать сферические координаты, можно использовать и цилиндрические, и наоборот, однако, в каких-то случаях вычислений при одной замене будет меньше, чем в другой.

При переходе к сферическим координатам от декартовых координаты в сферической системе принимают смысл:

Координата r определяет расстояние от полюса до точки поверхности (длину радиус – вектора)

Координата θ определяет угол между радиус-вектором и осью OZ (зенитный угол)

Координата φ определяет угол между проекцией радиус – вектора на плоскость XOY и осью OX (азимутальный угол)

Положение полюса фиксировано и находится в начале координат

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Ранее был рассмотрен двумерный случай для расчета Якобиана преобразования. Я думаю, вполне можно догадаться, что в трехмерном случае эта величина принимает вид

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta a} & \frac{\delta x}{\delta b} & \frac{\delta x}{\delta c} \\ \frac{\delta y}{\delta a} & \frac{\delta y}{\delta b} & \frac{\delta y}{\delta c} \\ \frac{\delta z}{\delta a} & \frac{\delta z}{\delta b} & \frac{\delta z}{\delta c} \end{vmatrix}$$

В случае перехода от декартовых координат к цилиндрическим:

$$\begin{cases} x = rcos\phi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \varphi} & \frac{\delta x}{\delta z} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} & \frac{\delta y}{\delta z} \\ \frac{\delta z}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} & \frac{\delta z}{\delta z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rcos\varphi & -rsin\varphi & 0 \\ sin\varphi & rcos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = rcos^2\varphi + rsin^2\varphi = r$$

В случае перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\phi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \theta} & \frac{\delta x}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta z}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} & \frac{\delta z}{\delta \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sin\theta cos\varphi & rcos\theta cos\varphi & -rsin\theta sin\varphi \\ sin\theta sin\varphi & rcos\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi \\ cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r^2 sin\theta cos^2\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + r^2 sin^3\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = r^2 sin\theta$$

Криволинейные интегралы второго рода и их вычисление

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

Предположим, что точки, значения функции в которых нам надо знать для составления суммы Римана или вычисления интеграла, не расположены на координатной оси OX, как это было в обычном интеграле, но, тем не менее, расположены на единой прямой.

В качестве примера можно рассмотреть стержень с переменной плотностью : пока он прямой, мы еще можем посчитать его массу (с помощью того же обычного интеграла), однако если его изогнуть, то придется ввести новый вид интегралов – так называемые криволинейные интегралы.

Криволинейные интегралы бывают первого и второго рода, пока рассмотрим второго рода

Пусть D – область на плоскости XOY, кроме того, задано векторное поле:

$$\bar{F}(x,y) = P(x,y)\bar{\imath} + Q(x,y)\bar{\jmath}$$

Возьмем кривую AB лежащую в области D

Осуществим разбиение кривой на мелкие участки, взятие на каждом участке единственной точки, составление суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\Delta y_i$$

Где M_i – точка, взятая на каждом малом промежутке, Δx_i и Δy_i– изменение координаты x и y соответственно при движении от начальной точки каждого малого промежутка к конечной (может быть больше, равна нулю или меньше нуля).

Введем в рассмотрение следующую теорему:

Если при бесконечном увеличении количества фрагментов разбиения модуль приращения координаты x стремится к нулю для каждого фрагмента (разбиение равномерно распределено по всей кривой), то $\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i$ имеет предел, который называется криволинейным интегралом

$$\int_{AB} P(x,y)dx$$

Аналогично и для $\sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\Delta y_i$:

$$\int_{AB} Q(x,y)dy$$

Если собрать все вместе, то:

$$\int_{AB} \bar{F}(x,y)ds = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy$$

Некоторые замечания, касающиеся криволинейного интеграла второго рода:

1. AB должна иметь непрерывно меняющуюся касательную, но допускается конечное число изломов, в которых касательная меняется скачком
2. Если направление интегрирования меняется на противоположное, то вылазит знак «минус». Это происходит потому, что при вычислении криволинейного интеграла можно двигаться либо вдоль оси координат, либо против.
3. Если рассматривается отрезок прямой, перпендикулярной оси OY, то имеем дело с обычным интегралом
4. AB может быть и замкнутой
5. Если AB замкнута, то $\oint_{AB} \bar{F}(x,y)ds$ – циркуляция вектора F по замкнутому контуру
6. Криволинейный интеграл второго рода зависит от
   a. Пути интегрирования
   b. Направления
   c. Вида подынтегральной функции

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

В наиболее общем случае кривая AB задана параметрически, то есть так:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

Где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемы (имеют непрерывную производную)

Для вычисления интеграла требуется выполнить стандартную замену переменной (одномерный случай):

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} \left(P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\frac{d\varphi}{dt} + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\frac{d\psi}{dt}\right)dt$$

Ситуация несколько упрощается, если AB задана в явном виде, то есть:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \alpha \le x \le \beta$$

В таком случае интеграл принимает вид:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} \left(P(x,f(x)) + Q(x,f(x))\frac{df}{dx}\right)dx$$

Но дела, напротив, могут обстоять и хуже, если, например, задана пространственная линия:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

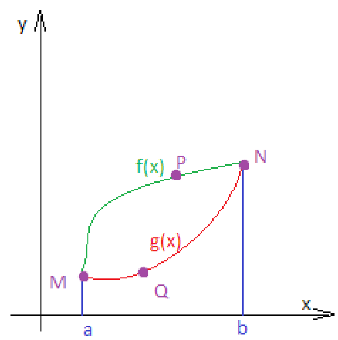
Тогда имеем:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_{AB} \left(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\frac{d\varphi}{dt} + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\frac{d\psi}{dt} + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\frac{d\chi}{dt}\right)dt$$

Что лишь количественно усложняет расчеты

Механический смысл криволинейного интеграла второго рода – работа криволинейной силы

Выражение площади области, ограниченной кривой, через криволинейный интеграл



Площадь области, выраженная через обычный интеграл:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

В соответствии с доводами, приведенными ранее для криволинейного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{MPN} ydx$$

Слева стоит интеграл обычного вида, для его вычисления требуется высчитать разность первообразных, справа – криволинейный интеграл, рассматривающий кривую MPN как задаваемую функцией f(x). Фактически, тут мы считаем сумму произведений f(x)dx для каждого x в диапазоне [a,b].

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{MQN} ydx$$

В таком случае можем записать:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \oint_{MPNQM} ydx$$

Здесь, естественно, подразумевается, что интегрирование ведется по часовой стрелке

Аналогично относительно противоположной оси:

$$S = \oint_{MPNQM} xdy$$

Тут интегрирование идет уже против часовой стрелки

Таким образом, можно сделать вывод, что:

$$S = \frac{1}{2}\oint_{MQNPM} xdy - ydx$$

Получили выражение площади области через криволинейный интеграл

Можно показать, что даже если область не является правильной, её можно разбить на две (или более) правильных областей, посчитать по-отдельности интегралы и сложить. На совместных участках интегрирование ведется в обе стороны, по причине чего криволинейный интеграл на них окажется равным нулю.

Формула Грина

ОБЩИЙ ВИД

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе этой области.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{MQNPM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть задана область D, такая что $a \le x \le b$, $g(x) \le y \le \mathrm{f(x)}$ (см картинку выше)

Пусть также в области D заданы две функции от двух переменных X(x,y) и Y(x,y), которые имеют непрерывные частные производные

Рассмотрим интеграл

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dxdy$$

Преобразуем к двукратному и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_g^f \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dy\right) dx = \int_a^b (X(x,f) - X(x,g))dx$$

Далее попытаемся получить отсюда криволинейный интеграл:

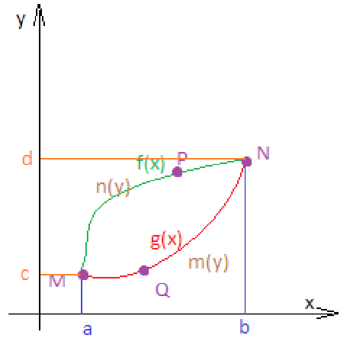
$$\int_a^b (X(x,f) - X(x,g))dx = \int_a^b X(x,f)dx + \int_b^a X(x,g)dx = -\oint_{MQNPM} X(x,y)$$

f и g в данном случае задают область интегрирования, а в подынтегральную функцию подставляется y

Итак,

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dxdy = -\oint_{MQNPM} X(x,y)$$

Попробуем провернуть подобное с другой осью координат:



$$\iint_D \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_c^d \left(\int_n^m \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \big(Y(m,y) - Y(n,y) \big) dy$$
$$= \int_c^d \big(Y(m,y) \big) dy + \int_d^c \big(Y(n,y) \big) dy = \oint_{MQNPM} Y(x,y) dy$$

Итак,

$$\iint_D \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_{MQNPM} Y(x,y) dy$$

Складываем левые и правые части двух получившихся уравнений, получаем формулу Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{MQNPM} Y(x,y)dy + X(x,y)dx$$

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

БАЗОВЫЕ ДОВОДЫ

Пусть в области D определены и непрерывны

$$X(x,y), Y(x,y), \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Требуется сформулировать такие условия, при которых интеграл

$$\int_{MPNQM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Не зависит от пути интегрирования

Разобьем интеграл на два:

$$\int_{MPNQM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_{MPN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy + \int_{NQM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$
$$= \int_{MPN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy - \int_{MQN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Если требуется, чтобы интеграл не зависел от пути интегрирования, очевидно, такой интеграл должен быть равен нулю:

$$\int_{MPN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy - \int_{MQN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$$

Поскольку только в этом случае

$$\int_{MPN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_{MQN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем, что

$$\oint_{MQNPM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$$

Основное условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования:

> *Интеграл не зависит от пути, соединяющего две заданные точки, если интеграл по замкнутому контуру, содержащему эти точки, равен нулю. Верно и обратное утверждение.*

Далее рассматриваются некоторые дополнительные теоремы

ТЕОРЕМА 1

В укороченном формате теорема звучит так:

$$Если\ \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} = 0, \text{то } \oint_{MQNPM} Y(x,y)dy + X(x,y)dx = 0$$

Доказательство:

Пусть область D_1 , включенная в область D, ограничена замкнутой кривой L, содержащей точки M и N, тогда по формуле Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx$$

$$0 = \oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx$$

ТЕОРЕМА 2

В укороченном формате теорема звучит так:

$$Если\ \oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx = 0, то\ \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$$

Доказательство:

Докажем теорему от противного, а именно, предположим, что одновременно с $\oint_L \ Y(x,y)dy + X(x,y)dx = 0 \ \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$

Для определенности считаем, что $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} > \delta > 0$, тогда:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy > \iint_D \delta dxdy = \delta S > 0$$

Но это противоречит формуле Грина, согласно которой

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx = 0$$

То есть сделанное предположение ложно, а значит, $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$

ТЕОРЕМА О ПРИЗНАКЕ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Если верно, что $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$, то $Y(x,y)dy + X(x,y)dx = dF$, причем $Y = \frac{\partial F}{\partial y}$ и $X = \frac{\partial F}{\partial x}$

ТЕОРЕМА 4

Если $Y(x,y)dy + X(x,y)dx = dF$, то $\int_M^N Y(x,y)dy + X(x,y)dx = F(N) - F(M)$

Доказательство:

По условию $X = \frac{\partial F}{\partial x}$ и $Y = \frac{\partial F}{\partial y}$, значит:

$$\int_M^N Y(x,y)dy + X(x,y)dx = \int_M^N \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial x} dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \chi(t) \end{vmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} dF$$
$$= F(t_2) - F(t_1)$$

Криволинейные интегралы первого рода и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Отличие криволинейного интеграла первого рода от криволинейного интеграла второго рода заключается в том, что при введении понятия криволинейного интеграла первого рода мы составляем интегральную сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

Где Δs_i заменяет приращение, получающееся на координатной оси. Величина Δs_i, тем не менее, определяется приращениями по координатным осям следующим образом:

$$\Delta s_i = \sqrt{{\Delta x_i}^2 + {\Delta y_i}^2}$$

Как видно из этого выражения, при изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не меняет свой знак.

Так вот, перейдем наконец от интегральной суммы непосредственно к интегралу. Для этого требуется, чтобы выполнялось условие $\max\limits_i|\Delta s_i| \to 0$, а f(x,y) можно было бы считать непрерывной в D. В таком случае существует предел данной интегральной суммы и называется криволинейным интегралом первого рода:

$$\lim_{|\Delta s_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \int_{AB} f ds$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Вычисление производится аналогично вычислению интеграла второго рода, с той лишь оговоркой, что дифференциал заменяется несколько по-другому:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

Тогда имеем:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}\, dt$$

Если же AB – пространственная линия, то есть:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

То криволинейный интеграл первого рода примет вид:

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2}\, dt$$

Наконец, посмотрим, что будет, если функция задана явно:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \alpha \le x \le \beta$$

Тогда ситуация заметно упрощается:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,f(x))\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dt$$

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА

1. Интеграл зависит от :
   a. Вида кривой интегрирования
   b. Подынтегральной функции

   и не зависит от направления пути интегрирования

2. Обладает свойством линейности

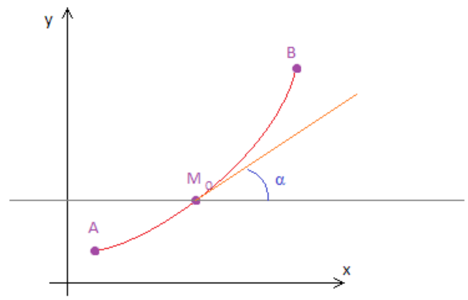
3. Обладает свойством аддитивности, то есть если М- точка на АВ, то:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{AM} f(x,y)ds + \int_{MB} f(x,y)ds$$

4. $\int_{AB} ds$ – длина дуги АВ

Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

Пусть АВ – направленная линия (направление из А в В). Проведем касательную в точке M_0. Эта касательная образует с осью ОХ угол α:



Если прямая АВ задана функцией $y = \varphi(x)$, то производная этой функции есть не что иное, как тангенс угла α, то есть:

$$\varphi'(x) = tg\alpha$$

Попробуем связать косинус угла α с производной функции, задающей кривую АВ, то есть, с тангенсом того же угла. Вспоминается основное тригонометрическое тождество, из которого нетрудно получить искомое соотношение:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Разделим обе части на квадрат косинуса:

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Теперь отсюда:

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}$$

Или, что то же самое:

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{(\varphi'(x))^2 + 1}}$$

В выражении $\sqrt{(\varphi'(x))^2 + 1}$ узнается уже знакомая комбинация, уже встречавшаяся при определении криволинейного интеграла первого рода. Используем же ее для того, чтобы перейти от одного вида интеграла к другому:

$$\int_{AB} Pdx = \int_{AB} P\frac{\sqrt{(\varphi'(x))^2+1}}{\sqrt{(\varphi'(x))^2+1}}dx = \int_{AB} P\sqrt{(\varphi'(x))^2+1}cos\alpha dx = \int_{AB} Pcos\alpha ds$$

Так, делаем вывод о том, что компонента криволинейного интеграла второго рода выражается через криволинейный интеграл первого рода при помощи домножения на косинус угла между касательной к кривой в данной точке и соответстующей координатной осью, иными словами:

$$\int_{AB} Pdx\ + Qdy + Rdz = \int_{AB} (Pcos\alpha\ + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds$$

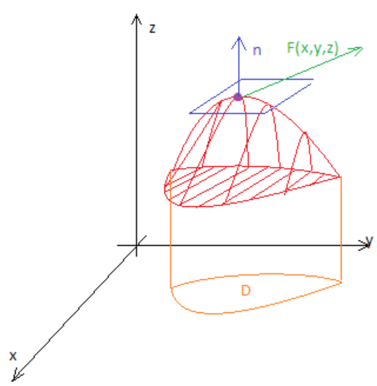
В приведенной формуле согласование такое: слева интегрирование идет от A к B, а справа углы надо выбирать для касательной, направление которой совпадает с направлением AB.

Поверхностный интеграл первого рода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой обобщение двойного интеграла на произвольную поверхность в k-мерном пространстве подобно тому, как криволинейный интеграл представляет собой обобщение обычного интеграла на произвольную кривую в k-мерном пространстве.

Рассмотрим в качестве примера частный случай – задана область V в трехмерном пространстве, S – её поверхность, на поверхности S определена функция F(x,y,z), кроме того, предполагается, что S можно считать квадрируемой (имеющей площадь).



Как и в случае с двойным интегралом, разобьем поверхность S на элементарные площадки произвольным образом. Возьмем на этих площадках точки M_i. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} F(M_i)\Delta S_i$$

Если для этой интегральной суммы выполняется условие

$$diam\Delta S_i \to 0$$

То есть, наибольшее расстояние между точками границы площадок стремится к нулю, то поверхностный интеграл первого рода можно определить как

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F(M_i)\Delta S_i$$

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть поверхность задана в явном виде, то есть, как непрерывная дифференцируемая функция

$$z = f(x,y)$$

Введем в рассмотрение две дополнительные функции:

$$p(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

F(x,y,z) должна быть задана и непрерывна на S

Тогда существует предел интегральной суммы, называемый поверхностным интегралом первого рода, причем

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Посчитать поверхностный интеграл не так просто, как двойной интеграл, или. Ранее при переходе от обычного к криволинейному интегралу первого рода мы вводили некую добавку, которая появлялась естественным образом при выражении дифференциала, она была равна

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}$$

Было относительно очевидно, откуда берется это выражение, однако когда мы осуществляем переход не от двумерного пространства к одномерному (переход от криволинейного интеграла первого рода к обычному интегралу), а от трехмерного к двумерному (переход от поверхностного интеграла первого рода к двойному интегралу), ситуация несколько усугубляется. Итак, изначально мы имеем интеграл

$$\iint_S F(x,y,z)ds$$

Сначала выполняется замена переменных для перехода в двумерное пространство:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

Добавка, аналогичная таковой в более простом случае, описанном ранее, выглядит следующим образом:

$$|r_u \times r_v|$$

Где

$$\begin{cases} r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \\ r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \end{cases}$$

Таким образом

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_{D_{uv}} F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))|r_u \times r_v|dudv$$

Покажем, что отсюда вытекает простейший случай, разобранный ранее, когда поверхность задана явно, то есть, когда z=f(x,y), в таком случае:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

Посчитаем добавку:

$$|r_u \times r_v| = \left|\left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right| = \left|\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left|\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\right|$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Результат:

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Поверхностный интеграл обладает свойствами:

- Линейности
- Аддитивности
- Верна теорема о среднем
- Независимость от стороны поверхности

Кстати говоря, что касается стороны поверхности – чтобы понять, что это такое, выберем на поверхности S любой контур MPNQM и будем перемещать по нему нормаль к поверхности. В точке M нормаль может принять исходное положение или развернуться. Так вот, стороной поверхности называется совокупность точек поверхности, таких что перемещение нормали по любому контуру возвращает нормаль в исходное положение. Поверхность, у которой существуют контуры, разворачивают нормаль, называются односторонними (например – лист Мебиуса, бутылка Клейна).

Для двусторонней поверхности внешняя сторона определяется по направлению нормали, которая образует острый угол с осью OZ. Для внутренней стороны этот угол будет тупым.

by zeionara

Поверхностный интеграл второго рода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

Как и в случае с криволинейным интегралом, поверхностный интеграл второго рода отличается от поверхностного интеграла первого рода тем, что производится проектирование на координатные плоскости, а именно, ΔS_i проектируем на плоскость XOY, на плоскость XOZ и на плоскость YOZ. Если подынтегральная функция имеет вид

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{\imath} + Q(x,y,z)\bar{\jmath} + R(x,y,z)\bar{k}$$

То поверхностный интеграл второго рода принимает вид

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

С учетом вышеприведенных условий для непрерывных функций P,Q,R вычисление поверхностного интеграла производится по формуле

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$
$$= \iint_D P(x,y,f(x,y))dydz + Q(x,y,f(x,y))dxdz + R(x,y,f(x,y))dxdy$$

D – проекция S на плоскость XOY (для внешней стороны, для внутренней появляется знак «-»).

Вычисление поверхностного интеграла второго рода в общем случае довольно трудоемко и здесь не приводится

Связь поверхностных интегралов первого и второго рода

Вполне можно догадаться, что связь поверхностных интегралов первого и второго рода во многом напоминает связь криволинейных интегралов первого и второго рода, в частности, тем, что она тоже осуществляется через косинус.

Пусть поверхность S задана уравнением z=f(x,y) (простейший случай), кроме того, введем обозначения

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, \bar{n} - \text{нормаль к поверхности } S \text{ (имеет координаты } (cos\lambda, cos\mu, cosv))$$

$$\bar{n} = \frac{-p\bar{\imath} - q\bar{\jmath} + \bar{k}}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

Аналогично тому, как связывали криволинейный интеграл первого и второго рода, свяжем поверхностные интегралы первого и второго рода, получим результат:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$
$$= \iint_D (P(x,y,z)cos\lambda + Q(x,y,z)cos\mu + R(x,y,z)cosv)ds$$

В приведенной формуле справа углы берутся между касательной плоскостью и соответствующей координатной плоскостью.

Формула Остроградского-Гаусса

ОБЩИЙ ВИД

Формула Остроградского – Гаусса позволяет связать тройные и поверхностные интегралы, что особенно полезно при вычислении потока векторного поля через поверхность:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oint\!\!\!\!\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Видно, что формула Остроградского-Гаусса – это трехмерный вариант формулы Грина, связывающей двойной интеграл с криволинейным

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим правильную область V, пусть D – проекция этой области на плоскость XOY.

Возьмем V такую, что снизу ее ограничивает поверхность $z=\varphi(x,y)$, а сверху – $z=\chi(x,y)$, причем обе функции непрерывны и непрерывно дифференцируемы.

Рассмотрим функцию $R(x,y,z)$ заданную на V, которая является неперерывной и в то же время непрерывно дифференцируемой по переменной z. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

Перейдем к двойному интегралу уже знакомым способом:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D \left(\iint_{\varphi(x,y)}^{\chi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right) dxdy = \iint\limits_D \Big(R\big(x,y,\chi(x,y)\big) - R\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\Big) dxdy$$
$$= \oint\!\!\!\!\iint\limits_S R(x,y,z) dxdy$$

Получили так называемую «малую» формулу теоремы Гаусса:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oint\!\!\!\!\iint\limits_S R(x,y,z) dxdy$$

Если проделаем аналогичный комплекс действий для каждой компоненты, то получим полную формулу Гаусса:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oint\!\!\!\!\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Формула Стокса и её приложения

ОБЩИЙ ВИД

Формула Стокса связывает криволинейный интеграл второго рода и поверхностный интеграл второго рода:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Согласование: интегрирование ведется по внешней стороне поверхности, а направление обхода по контуру L выбирается так, чтобы для наблюдателя, у которого нормаль к поверхности проходит от ног к голове, при движении по контуру поверхность остается слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Продолжим работу с тем же телом, что и было при доказательстве формулы Остроградского-Гаусса, но теперь возьмем три проекции тела на плоскости XOY, XOZ и YOZ соответственно : D_1 , D_2, D_3.

Будем далее полагать, что L – контур соединения поверхностей, ограничивающих тело (известных как φ и χ).

Попробуем определить связь поверхностного интеграла по телу V с криволинейным интегралом по контуру L.

Полное доказательство достаточно сложно для того, чтобы приводить его полностью, здесь же, однако, покажем способ, которым удобно запоминать формулу. Слева стоит криволинейный интеграл:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

А для восстановления вида правой части удобно использовать матрицу:

$$\begin{matrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ P & Q & R \end{matrix}$$

Вычеркиваем первую строку и первый столбец, на главной диагонали видим R и dy, на противоположной – Q и dz, соответственно, первое слагаемое в поверхностном интеграле будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz$$

Вычеркиваем первую строку и второй столбец, на главной диагонали видим R и dx, на противоположной – P и dz, соответственно, с учетом дополнительного минуса второе слагаемое в поверхностном интеграле будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz$$

Вычеркиваем первую строку и третий столбец, на главной диагонали видим Q и dx, на противоположной – P и dy, соответственно, третье слагаемое в поверхностном интеграле будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Теперь можем написать поверхностный интеграл, стоящий справа, целиком:

$$\oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Приравнивая два выведенных интеграла, получаем формулу Стокса:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ СТОКСА

Формула Стокса позволяет установить необходимые и достаточные условия для того чтобы:

1. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой, лежащей внутри V, обращался в ноль
2. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой не зависел от пути интегрирования
3. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой являлся полным дифференциалом некоторой функции

Условия имеют вид:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

Следует заметить, что формула Грина – частный случай формулы Стокса

Векторное поле: векторная линия, поток векторного поля через поверхность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Векторное поле определено, если с каждой точкой некоторой области T связано значение некоторой величины $\bar{a}(x,y,z)$, причем

$$\bar{a}=a_x\bar{\imath}+a_y\bar{\jmath}+a_z\bar{k}$$

Отсюда вытекает, что задание векторного поля равносильно заданию трех скалярных полей:

$$a_x(x,y,z,t),a_y(x,y,z,t),a_z(x,y,z,t)$$

Если t тождественно равно нулю, то поле стационарное

ВЕКТОРНАЯ ЛИНИЯ

Зададим в векторном поле линию L, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением поля, тогда L – по определению – **векторная линия**

Возьмем в области T линию, в каждой точке которой проходит векторная линия. Тогда множество этих векторных линий образует **векторную поверхность**. Замкнутую векторную поверхность, как правило, называют **векторной трубкой**.

Если векторная линия L задана пересечением двух поверхностей, то есть задана следующим образом:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

То при условии, что вектор $\bar{\tau}(dx, dy, dz)$ – вектор касательной к линии, то, поскольку можно говорить о том, что L параллельна заданному векторному полю, верно двойное равенство:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

Из полученной системы дифференциальных уравнений можно найти систему линий заданного поля.

Для нахождения векторной линии, проходящей через заданную точку, надо будет решить задачу Коши.

ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

Пусть в области T находится двусторонняя поверхность, на которой выбрана элементарная площадка, считающаяся плоской за счет ее размера, причем ΔS – площадь площадки, а $\bar{n}$ – нормаль к этой площадке.

Обозначим $a_n =$ проекция вектора $\bar{a}$ на направление $\bar{n}$

Элементарным потоком векторного поля через площадку ΔS называется величина $Q=a_n* \Delta S$.

Если всю поверхность разбить на площадки, устремить количество этих площадок к бесконечности, а площадь каждой – к нулю, то получим поток вектора через поверхность S (в выбранную сторону) :

$$Q = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \Delta S_k$$

Механический смысл потока Q:

$$Q = \iint_S a_n ds - \text{криволинейный интеграл первого рода}$$

$$Q = \iint_S a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy - \text{криволинейный интеграл второго рода}$$

Так, если a – поле скоростей текущей жидкости, то Q – количество жидкости, протекающей через поверхность в единицу времени.

S – замкнутая поверхность (по внешней стороне), тогда Q – разность между вытекающей и втекающей жидкостью

Q > 0 – внутри тела источник жидкости

Q < 0 – внутри тела сток жидкости

Q = 0 – вытекает и втекает равное количество жидкости

Дивергенция и ее свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Дивергенция – расходимость векторного поля

Будем рассматривать все то же самое векторное поле

$$\bar{a} = a_x(x,y,z)\bar{\imath} + a_y(x,y,z)\bar{\jmath} + a_z(x,y,z)\bar{k}$$

Его дивергенция определяется как скалярная характеристика векторного поля:

$$div\bar{a} = \nabla\bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\left(a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}\right) = \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}$$

В соответствии с формулой Остроградского-Гаусса, которая имеет вид:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_S a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy$$

Можем записать:

$$\iiint\limits_V div\bar{a}dxdydz = \oiint\limits_S a_n ds$$

То есть, мы убедились в том, что поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу дивергенции векторного поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

Механический смысл дивергенции:

Выберем в теле V элементарный объем V_n, ограниченный поверхностью S_n, тогда поток

$$Q_n = \iiint\limits_{V_n} div\bar{a}dxdydz$$

По теореме о среднем:

$$Q_n = div\bar{a}(M)V_n, \text{тогда } div\bar{a}(M) = \frac{Q_n}{V_n} \xrightarrow[V_n \to 0]{} A - \text{мощность источника (стока) внутри тела}$$

by zeionara

СВОЙСТВА ДИВЕРГЕНЦИИ

1. Линейность:
$$div(c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2) = c_1 div\bar{a}_1 + c_2 div\bar{a}_2$$
2. Если u(x,y,z) – скалярное поле, то:
$$div(u\bar{a}) = udiv(\bar{a}) + \bar{a}grad(u)$$
Доказательство:
$$u\bar{a} = ua_x\bar{\imath} + ua_y\bar{\jmath} + ua_z\bar{k}$$
$$div(u\bar{a}) = \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} + \nabla\nabla\nabla\frac{\partial(ua_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \bar{a}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right)$$
3. Дивергенция градиента скалярного поля:
$$divgradu = \nabla\nabla u = \Delta u = div\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z}$$
4. Градиент дивергенции векторного поля:
$$graddiv\bar{a} = grad\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bar{k}$$

Циркуляция и ротор векторного поля

РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Ротор (вихрь) поля – вектор

$$\bar{\nabla}\times\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = rot\bar{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}$$

Подобная запись уже встречалась в правой части формулы Стокса

Пусть в векторном поле лежит замкнутая кривая L, в каждой точке которой проведена касательная, направление которой задается вектором $\bar{\tau}$. Пусть также есть поверхность S, натянутая на контур L, тогда можно воспользоваться теоремой Стокса следующим образом:

$$\oint_L a_\tau dl = \oiint_S rot\bar{a}\bar{n}ds$$

То есть, циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку вихря поля через поверхность, натянутую на этот контур.

Если ротор тождественно равен нулю, то поле потенциально, иначе поле называют вихревым

ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть в векторном поле лежит некоторая линия L. Тогда, если L замкнута, то:

$$\oint_L a_\tau ds - \text{циркуляция векторного поля } \bar{a} \text{ по замкнутой кривой } L$$

В записи выше под a_τ подразумевается проекция вектора $\overline{a}$ на направление касательной к кривой

ТЕОРЕМА О ВИХРЕВОМ ПОЛЕ

Если поле вихревое (rot не нулевой), то оно соленоидально (div нулевая).

Доказать это утверждение достаточно просто, достаточно показать, что дивергенция ротора такого поля будет равна нулю:

$$\begin{aligned} divrot\overline{a} &= div\left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{\imath} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{\jmath} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} \\ &= \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z}\right) = 0 \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА О ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

Если векторное поле потенциально (rot нулевой), то $\overline{a}$ представляет собой градиент некоторого скалярного поля u.

Доказательство:

1) Предположим, что $\overline{a}$ – действительно градиент некоторой скалярной функции u:
$$\overline{a} = gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$$
$$\begin{aligned} rot\overline{a} = rotgradu &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{\imath} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{\jmath} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\overline{\imath} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\overline{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\overline{k} = 0 \end{aligned}$$
2) Предположим теперь, что ротор нулевой, тогда равна нулю и циркуляция поля, однако, в соответствии с теоремой стокса, циркуляция равна
$$Ц = \oint_L a_\tau dl = 0$$
Значит, $a_\tau dl$ – дифференциал некоторой функции, а $\overline{a} = gradu$

Операторы Гамильтона и Лапласа

ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам:

$$gradu = \overline{\nabla} u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)u(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$$

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

Дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций, эквивалентный последовательному взятию градиента и дивергенции:

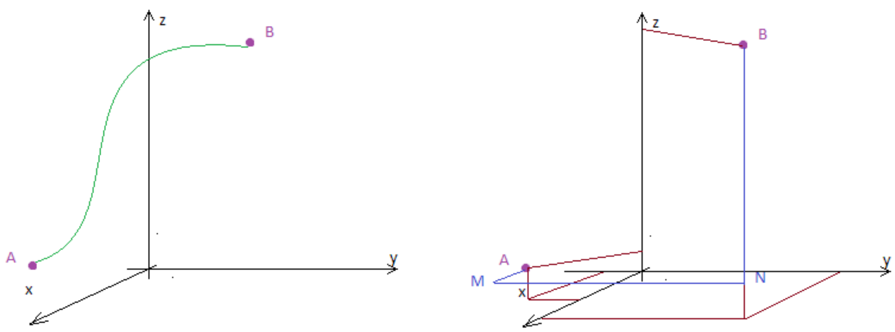
$$divgradu = \overline{\nabla}\nabla u = \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Потенциальное векторное поле. Соленоидальное векторное поле.

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле потенциально, если его ротор равен нулю (иначе – вихревое, а значит, и соленоидальное)

При расчете криволинейного интеграла потенциального поля, поскольку величина интеграла зависит только от конечных точек кривой, вычисления могут быть упрощены следующим образом:



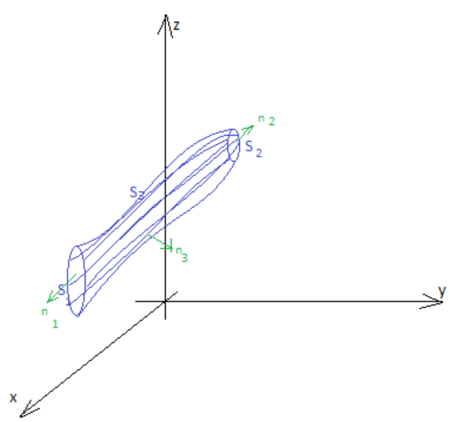
$$\int\limits_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int\limits_{AM} a_x dx + \int\limits_{MN} a_y dy + \int\limits_{MB} a_z dz$$

Если векторное поле потенциально, то оно является градиентом некоторой скалярной функции, в таком случае при интегрировании получается, что интеграл зависит только от начальной и конечной точек.

СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле называется соленоидальным, если его дивергенция равна нулю.

Рассмотрим подробнее векторную трубку в соленоидальном поле:



Пусть $\bar{a}$ – соленоидальное поле, S_3 – векторная поверхность (замкнутая), S_1 и S_2 – её сечения. Касательная к векторной трубке параллельна полю, значит, проекция векторного поля на нормаль n_3 равна нулю. Поток векторного поля через поверхность:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1 + Q_2 = \iiint\limits_V div\bar{a}\, dxdydz = 0$$

Отсюда следует, что

$$\iint\limits_{S_1} \bar{a}_{-\bar{n}_1} ds = \iint\limits_{S_2} \bar{a}_{\bar{n}_2} ds$$

То есть, поток вектора через векторную трубку не зависит от сечения и является величиной постоянной. Эта величина – напряжение векторной трубки.

Теперь пусть $\bar{a} = \bar{v} = v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath} + v_z\bar{k}$, поскольку $\bar{v}$ – соленоидальное поле, то :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 - \text{уравнение неразрывности}$$

Пусть u(x,y,z) – скалярное поле

Для того, чтобы поле градиента скалярной функции было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы скалярная функция была гармонической.

Если u-гармоническая функция, то $\nabla u = 0$