# Матан экзамен 2 семестр

**1. Первообразная. Неопределенный интеграл; его свойства.**

F(x) – первообразная f(x) на (a,b) => F'(x) = f(x), ∀ x ∈ (a,b)

Свойства неопределенных интегралов:

1) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$
2) $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$
3) $\int dF = F(x) + C$ , где dF = $F_x$'dx
4) $\int f(x)dx = F(x) + C$ тогда $\int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C$, где $\varphi = \varphi(x)$
5) $\int f(x)dx = F(x) + C$ тогда $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$
6) $d\int f(x)dx = f(x)dx$
7) $\int f'(x)dx = f(x) + C$

**2. Таблица основных формул интегрирования**

1) $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2) $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$
3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
4) $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
5) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
6) $\int \frac{dx}{cos^2(x)} = tg(x) + C$
7) $\int \frac{dx}{sin^2(x)} = -ctg(x) + C$
8) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$
9) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+a^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
10) $\int sh(x)dx = ch(x) + C$
11) $\int ch(x)dx = sh(x) + C$
12) $\int \frac{dx}{ch^2(x)} = th(x) + C$
13) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = cth(x) + C$
14) $\int \frac{dx}{-x^2+a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$
15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \lambda}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm \lambda}\right) + C$

**3. Замена переменной интегрирования в неопределенном интеграле**

$$\int f(x)dx, \text{где } x = \varphi(t):$$

1. Непрерывна и дифференцируема
2. Имеет обратную функцию
3. Производная от ф(x) также непрерывна

$$dx = \varphi'(t)dt$$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Часто удобнее сделать замену t = g(x) (и соответственно dt = g'(x)dx) чем x = ϕ(t)

**4. Интегрирование по частям**

$$\int udv = uv - \int vdu \text{ , где } u \text{ и } v - \text{дифференцируемые функции}$$

Интегрирование по частям целесообразно применять в следующих случаях:

I Подынтегральная функция содержит выражение в виде ln(x), ln(f(x)), arcsin(x), arccos(x), arctg(x)

а) $\int lnxdx = \begin{vmatrix} u = lnx & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix}$

б) $\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx & dv = dx \\ du = \frac{dx}{1-x^2} & v = x \end{vmatrix}$

II Подынтегральная функция содержит выражение в виде $P_n(x)$ – многочлен степени n: $P_n(x)\sin(ax)$, $P_n(x)\cos(ax)$, $P_n(x)e^{ax}$. Выполняют замену $u = P_n(x)$, $du = Q_{n-1}(x)dx$

а) $\int(3x^2 - x + 2)e^{-5x}dx = \begin{vmatrix} u = 3x^2 - x + 2 & dv = e^{-5x} \\ du = (6x-1)dx & v = -\frac{1}{5}e^{-5x} \end{vmatrix}$

III Возвратные интегралы : sin(ln(x)), cos(ln(x)), $e^{ax}\cos(\beta x)$, $e^{ax}\sin(\beta x)$

а) $\int \sin(ln(x)) = \begin{vmatrix} u = \sin(\ln(x)) & dv = dx \\ du = \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx & v = x \end{vmatrix}$

IV Другие варианты подынтегральных выражений, применение метода замены переменной к которым приводит к хорошему результату ($\int \sqrt{x^2-1}dx$ , $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$)

**5. Интегрирование рациональных функций**

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx - \text{рациональная дробь}$$

1. deg(P) < deg(Q) => правильная рациональная дробь. Неправильную рацональную дробь необходимо свести к правильной
   R(x) = N(x) + M(x), где N(x) – целая часть, M(x) – правильная дробь
2. Q(x) должно иметь вид $Q(x) = (x-a)^m * \ldots * (x^2+2px+q)^l$
3. Разложение на элементарные дроби
   $$(x-a)^m \to \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$$
   $$(x^2+2px+q)^l \to \frac{M_1+N_1}{(x^2+2px+q)} + \cdots + \frac{M_l+N_l}{(x^2+2px+q)^l}$$
4. Найти коэффициенты разложения
   $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{M_1+N_1}{(x^2+2px+q)} + \cdots + \frac{M_l+N_l}{(x^2+2px+q)^l}$ /*Q(x)

Два основных метода нахождения коэффициентов – метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений

5. Интегрирование элементарных дробей
   5.1. Интегрирование квадратичных трехчленов

I $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q}$$

$T = \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q}$

а) $-\frac{p^2}{4}+q > 0 \Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$

б) $-\frac{p^2}{4}+q = 0 \Rightarrow T = -\frac{1}{x+\frac{p}{2}}$

в) $-\frac{p^2}{4}+q < 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}\ln(\frac{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}})$

II $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+px+q}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+p)+B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{ax^2+px+q}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+px+q)}{\sqrt{ax^2+px+q}} +$
$\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+px+q}} = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+px+q} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a(x+\frac{p}{2a})^2+q-\frac{p^2}{4a}}}$

а) a > 0 –длинный логарифм

б) a < 0 - арксинус : $q-\frac{p^2}{4a} > 0$

в) a < 0 – обыкновенный логарифм: $q-\frac{p^2}{4a} = 0$

III $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+px+q)^k}, p^2-4q<0, k \in \mathrm{N}, \mathrm{k}>1$

$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+z^2-z^2}{(z^2+a^2)^k}dz = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}dz + \int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}dz\right)$

$\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}dz = \left| \begin{matrix} u = z & du = dz \\ dv = \frac{zdz}{(z^2+a^2)^k} & v = \frac{1}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} \end{matrix} \right| = \frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} -$
$\int \frac{dz}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}$ - рекуррентная формула

   5.2. Интегрирование линейных двучленов

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^1}dx = Aln(x-a)$$

**6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции**

$$\int R(sinx, cosx)dx$$

I. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$u = tg\left(\frac{x}{2}\right); sinx = \frac{2u}{1+u^2}; cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

$$arctgx = \frac{x}{2} => dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

Приводит интеграл к интегралу от рациональной функции

Этим способом удобно считать

$$\int \frac{1}{asinx + bcosx + c}$$

В других случаях получаются громоздкие выражения из-за общности подстановки

II. Если интеграл содержит четные степени синуса и косинуса, а также их произведения, то быстрее к цели приводит подстановка

$$u = tgx; sin^2(x) = \frac{u^2}{1+u^2}; cos^2(x) = \frac{1}{1+u^2}$$

$$dx = \frac{du}{1+u^2}$$

Этим способом удобно считать

$$\int sin^n(x)dx; \int cos^m(x)dx; \int sin^n(x)cos^m(x)dx$$

1) Если степени n, m – четные, то можно использовать формулы понижения степени:

   $$sin^2(x) = \frac{1-cos2x}{2} \text{ и } cos^2(x) = \frac{1+cos2x}{2}$$

2) Если n или m – нечетные, то $\int sin^n(x)cos^{2m+1}(x)dx = \int sin^n(x)cos^{2m}(x)dsinx = \int sin^n(x)(1-sin^2(x))^m dsinx$

III. Если функция нечетная относительно синуса, т.е.

$R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx),$ то применяется подстановка

$$t = cosx; sinx = \sqrt{1-t^2}; dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

IV. Если функция нечетная относительно косинуса, т.е.

$R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx),$ то применяется подстановка

$$t = sinx; cosx = \sqrt{1-t^2}; dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

**7. Интегрирование иррациональных выражений**

I. $\int R\left(x, \sqrt[k1]{x}, \sqrt[k2]{x}, \dots\right)dx = |x = t^n, \text{где } n - \text{наименьшее общее кратное всех радикалов}|$

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}} = \begin{vmatrix} x = t^4 & \sqrt[4]{x} = t \\ \sqrt{x} = t^2 & dx = 4t^3dt \end{vmatrix} = \int \frac{4t^5}{1-t}dt - \text{получили рациональную функцию}$$

II. $\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{mx^2+hx+k}} = |\frac{1}{x+a} = t|$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} = t & dx = -\frac{dt}{t^2} \\ x = \frac{1}{t} & 4-x^2 = 4-\frac{1}{t^2} = \frac{4t^2-1}{t^2} \end{vmatrix}$$

$$= -\int \frac{t^2dt}{t^2\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x} + \sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right| + C$$

III. Подстановки Эйлера

Если интеграл имеет вид $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ то пользуются подстановками Эйлера

1) $a > 0 => \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$ (знак выбирается исходя из удобства вычислений)
   $ax^2+bx+c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2$
   $bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt$
   Пришли к линейному уравнению
   $x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}}$
2) $a > 0 => \sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$
   $ax^2+bx+c = x^2t^2 \pm 2\sqrt{c}xt + c \mid * \frac{1}{x}$
   $ax + b = xt^2 \pm 2\sqrt{c}t$
   Пришли к линейному уравнению
   $x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$
3) Вещественные корни

   $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{(x-\alpha)}};\ t = \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{(x-\alpha)}}$

   $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$

IV. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx = |t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} => t^n(\gamma x+\delta) = \alpha x + \beta => x = \frac{\beta - \delta t^n}{t^n\gamma - \alpha} => dx = \left(\frac{\beta - \delta t^n}{t^n\gamma - \alpha}\right)dt|$

V. Интеграл дифференциального бинома
   $\int R(x, x^m(ax^n+b)^p dx$, где m,n,p – рациональные числа, a b – действительные числа
   1) p – целое число
      $x = t^N, \text{где } N - \text{наибольший знаменатель дробей } m \text{ и } n$
   2) $\frac{m+1}{n} - \text{целое}$

$ax^n + b = t^M$, где $M -$ знаменатель числа $p$

*3)* $\frac{m+1}{n} + p -$ целое

$a + bx^{-n} = t^M$, где $M -$ знаменатель числа $p$

**8. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Геометрический смысл определенного интеграла.**

] y = f(x) − непрерывна на $[a, b], f(x) \ \geq 0$

Задача: найти площадь фигуры, ограниченной f(x), осью x и прямыми x=a и x = b (фигура – криволинейная трапеция)

Разобьем отрезок [a,b] на элементарные отрезки: a=$x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$,..., $x_n$ = b и нарисуем прямоугольники, высота которых будет равна <u>левому</u> значению функции. Если разбиение очень мелкое, то площадь получается достаточно точной.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1,n} -$ шаг разбиения

$\max \Delta x_i \to 0$, тогда $n \to \ \infty$ и разбиение будет носить равномерный характер

$$\int_i \quad = f(x_{i-1}) * \Delta x_i$$

$$\int \quad = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) * \Delta x_i \xrightarrow{def} \text{интегральная сумма}$$

$$\int \quad \to \int_{\text{криволинейной трапеции}} \quad = \int f(x)dx$$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

*Def 1*

$y = f(x)$ задана на $[a, b]$, разбитом на $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i], \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Если при произвольном разбиении отрезка [a,b] когда максимальное значение $\Delta x_i \to 0$ и при произвольном выборе точек $\xi_i$ интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i$ стремится к одному и тому же пределу, то он называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b] и обозначается как

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

*Def 2*

Число S называется пределом интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i$, если ∀ ε>0 ∃ δ >0 : при произвольном разбиении [a,b] $|\max \Delta x_i| < \delta$ и ∀ $\xi_i$ выполняется соотношение $|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i - S| < \ \varepsilon$

Необходимое условие интегрируемости функции:

Для того, чтобы функция y = f(x) была интегрируема на [a,b] необходимо, чтобы она была ограничена.

Достаточное условие интегрируемости функции:

Если y = f(x) непрерывна на [a,b], то она на нем и интегрируема.

**9. Основные свойства определенного интеграла**

1) Значение, которое принимает определенный интеграл зависит только от f(x) и [a,b]
2) $\int_a^b f(x)dx = \ - \int_b^a f(x)dx -$ аксиома (ниоткуда не следует)
3) $\int_a^b \big(af(x) + bg(x)\big)dx = \ a\int_a^b f(x)dx \ + \ b\int_a^b g(x)dx$

4) Если f(x) <= g(x) на [a,b], то
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$
5) Если m – наименьшее значение f(x) на [a,b], а M – наибольшее, то
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
6) ∃ $\xi \in [a,b]$ : $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ – теорема о среднем
7) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

**10. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.**

Лемма Барроу:

Производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на этом пределе.

Proof:

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ – функция верхнего предела определенного интеграла

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

*Ф(x) = F(x) + C*

Теорема Ньютона – Лейбница:

] f(x) – функция, F(x) – её первообразная, тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Proof:

$\Phi = F(x) + C$

$\Phi(a) = F(a) + C$

$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

$F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$

$\Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

**11. Замена переменной интегрирования в определенном интеграле**

Теорема о замене переменной в определенном интеграле:

Если нужно вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где x = ϕ(x) – непрерывная, дифференцируемая функция, то

ϕ(t) = a => t = α

ϕ(t) = b => t = β

ϕ(t) задана на [α,β]

dx = ϕ’(t)dt
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$
Так как определенный интеграл – это число, то при выполнении замены переменной нет необходимости возвращаться к исходной переменной в конце интегрирования.

**12. Интегрирование по частям в определенном интеграле**

(uv)’ = u’v + uv’ => uv – первообразная для u’v + uv’
$$\int_a^b (u'v + uv') = uv\Big|_a^b$$

$$\int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$$

**13. Приложения определенного интеграла: вычисление площади плоской фигуры**

Если какая-либо фигура ограничена функцией f(x) и функциями x=a и x=b, то ее площадь можно найти:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Если необходимо найти площадь между двумя функциями, то она находится как

$$S = \left|\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right|$$

Где функция f(x) должна быть выше функции g(x)

Если функция задана в полярной системе координат как $r = r(\varphi)$ и принимает неотрицательные значения $[\alpha, \beta]$, то площадь можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

Если необходимо найти площадь между двумя функциями, то она находится как разность соответствующих площадей

Если функция задана параметрически, то необходимо пересчитать пределы и выполнить подстановку, т.е.

$y(t_1) = a$

$y(t_2) = b$

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_{t1}^{t2} y(t)x'(t)dt\right|$$

**14. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой**

Вычисление длины дуги кривой в декартовой системе координат осуществляется по формуле

$$L = \int_a^b dl$$

Однако эта формула не очень удобна для практического применения. Известно, что

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Получаем более удобную формулу для вычисления дуги кривой, заданной параметрически:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Где $t \in [\alpha,\beta]$

Если прямая задана как f(x), то формула имеет следующий вид:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Где $t \in [a,b]$

Если прямая задана в полярной системе координат, то формула имеет следующий вид:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi$$

Где $\phi \in [\alpha,\beta]$

**15. Приложения определенного интеграла: вычисление площади поверхности тела вращения**

Формула для расчета площади поверхности тела вращения имеет вид

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Если линия задана параметрически:

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Если линия задана в полярных координатах:

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi$$

16. **Приложения определенного интеграла: вычисление объема тела вращения**

Объем тела вращения, если вращение производится вокруг оси OX, вычисляется по формуле

$$V = \pi\left|\int_a^b f^2(x)dx\right|$$

Аналогичная формула используется, если вращение происходит вокруг осу OY:

$$V = \pi\left|\int_a^b f^2(x)dx\right|$$

17. **Несобственные интегралы по неограниченному промежутку**

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ – несобственный интеграл от функции f(x) по неограниченному промежутку [a;+∞) по определению

Если предел существует и конечен, то интеграл называется сходящимся, если не существует или бесконечен, то расходящимся

$$\int_0^{+\infty}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty}\sin b$$

Этот предел не существует, значит интеграл расходится

При этом стоит обращать внимание на то, что узнать, сходится интеграл или расходится можно, не

Вычисляя его. Так, если интеграл от большей функции сходится, то сходится и интеграл от меньшей функции

Критерий Коши:

Для того, чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε > 0 существовало такое η€ (a,b) что для всех η' и η'' удовлетворяющих условию η < η' < b и η < η'' < b выполнялось неравенство $\left|\int_{n'}^{n''} f(x)dx\right| < \varepsilon$

18. **Несобственные интегралы от неограниченных функций**

Пусть функция f(x) задана на конечном промежутке [a,b] но не ограничена на нем. Более определенно, в любом промежутке [a,b-η] функция ограничена и интегрируема, но оказывается неограниченной на любом промежутке [b-η,b] слева от точки b. В таком случае точка b называется особой точкой.

$\lim\limits_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ – по определению несобственный интеграл от неограниченной функции

В случае, если предел конечен, то говорят, что интеграл сходится, если же предел бесконечен или его вовсе не существует, то интеграл расходится.

Пример:

$$\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\,\Big|_0^{1-\eta}=\arcsin\,(1-\eta).\quad \int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta}=\frac{\pi}{2}.$$

С другой стороны, подобное можно записать и относительно точки a:

$\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)dx$ – по определению несобственный интеграл от неограниченной функции, если функция f(x) задана на конечном промежутке [a,b] но не ограничена на нем. Более определенно, в любом промежутке [a+η,b] функция ограничена и интегрируема, но оказывается неограниченной на любом промежутке [a,a+η] справа от точки a. В таком случае точка a называется особой точкой.

Точек особенности может быть несколько, в таком случае

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \cdots\\ \eta_4\to 0}}\left\{\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2}+\int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4}\right\}.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^d f(x)\,dx+\int_d^c f(x)\,dx+\int_c^e f(x)\,dx+\int_e^b f(x)\,dx,$$

Здесь a,c,b – точки особенности

Предполагается, что все интегралы из суммы существуют, причем выбор точек d и e не должен влиять на результат.

## 19. Признаки сходимости несобственных интегралов

1. Первый признак сходимости был дан ранее: если есть две функции f(x) <= g(x), то если интеграл от g(x) на промежутке [a,+∞) сходится, то и от f(x) тоже сходится, соответственно, если интеграл g(x) расходится, то расходится и интеграл f(x).
2. Пусть даны две функции f(x)>= 0 и g(x) >0 тогда если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K\ \neq 0$ то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся
3. Эталонные несобственные интегралы:
   a. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ (1<= x < ∞) – сходится при p > 1 и расходится при p <= 1
   b. $\int_0^{1}\frac{dx}{x^p}$ (1<= x < ∞) – сходится при 0 < p < 1 и расходится при p >= 1

## 20. Предел и непрерывность функций нескольких переменных. Свойства функций, заданных на замкнутом неограниченном множестве.

Число A называется пределом функции $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0,y_0)$ если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое что при выполнении условий $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$ верно что $|f(x,y) - A| < \varepsilon$

Формы записи:

$$A = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{P\to P_0} f(x,y)$$

При определении предела функции в точке $P_0$ предполагается что функция может быть и неопределена в этой точке.

Аналогичное определение можно дать и для функций более чем двух переменных.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в точке $M_0(x_0,y_0)$, тогда функция является непрерывной в этой точке, если выполняется условие:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Причем точка M стремится к точке $M_0$ произвольным образом (значение предела не должно зависеть от того, каким именно). Если функция не непрерывна (условие непрерывности не выполняется), то данная точка является точкой разрыва.

Свойства функций, заданных на замкнутой ограниченной области:

1. Если функция f определена и непрерывна на замкнутой и ограниченной области, то найдется по крайней мере одна точка, в которой функция примет наибольшее значение в области ($f(x,y) <= f(x_0,y_0)$) и по крайней мере одна точка, в которой функция принимает наименьшее значение в области ($f(x,y) >= f(x'_0,y'_0)$)
2. Если M и m – наибольшее и наименьшее значения функции, определенной и непрерывной на замкнутой ограниченной области D, то для каждого значения $m < n < M$ найдется в области такая точка, в которой $f(x_0,y_0) = n$.
3. Если функция определена и непрерывна на замкнутой и ограниченной области, и принимает как положительные, так и отрицательные значения, то есть по крайней мере одна точка в этой области, в которой функция равна 0.

## 21. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных.

Частной производной функции нескольких переменных по x называется предел отношения частного приращения функции к приращению аргумента при стремлении аргумента к нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}$$

Аналогично для другого аргумента:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}$$

С другой стороны, можно говорит о том, что частная производная от функции $f(x,y)$ по переменной x – производная функции $f(x,y)$, вычисленная с предположением, что y – постоянная.

Функцию $f(x,y)$ называют дифференцируемой в точке $M(x,y)$ если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y$$

Где A, B – числа, не зависящие от приращений аргументов, а α и β – бесконечно малые величины при стремлении приращений аргументов к нулю.

Полным дифференциалом dz функции дифференцируемой в данной точке называют линейную относительно приращений аргументов часть приращения функции

$$dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$$

Дифференциалами независимых переменных будем называть приращения этих переменных

$$dx = \Delta x\ ,\ dy = \Delta y$$

Дифференциал функции двух переменных:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

## 22. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Дифференцирование функций, заданных неявно.

Пусть задана функция f(x,y) причем x=x(t) y=y(t) – тоже функции. Тогда получается что f – сложная функция от одной переменной t. Будем предполагать, что функции x и y в данной точке t дифференцируемы, а функция f дифференцируема в точке (x,y).

Предположим, что t получает приращение, тогда x и y, а так же z = f(x,y) тоже получают некоторые приращения. Поскольку функция z дифференцируема, то по определению полного приращения

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \omega(\Delta x,\ \Delta y),$$

Если разделим обе части на Δt и перейдем к пределу, то получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega}{\Delta t}.$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Уравнение F(x,y,z) = 0 задает функцию z как неявно заданную функцию от двух переменных x,y. Для нахождения полного дифференциала необходимо найти полный дифференциал левой части и приравнять его к нулю, после чего разрешить уравнение относительно dz. В результате получим полный дифференциал функции z, а коэффициенты при dx и dy будут производными по соответствующим переменным.

## 23. Производная по направлению. Градиент и его свойства.

Пусть задана дифференцируемая функция скалярного поля u = F(x,y,z), а также луч l, выходящий из точки P(x,y,z) в направлении единичного вектора.

$$\mathbf{l} = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \cos\beta\cdot\mathbf{j} + \cos\gamma\cdot\mathbf{k},$$

Пусть $P_l(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ – какая – либо другая точка этого луча. Назовем разность значений $P_l$ – P приращением функции в направлении l : $\Delta_l u$. Также обозначим $\Delta_l$ длину $PP_l$.

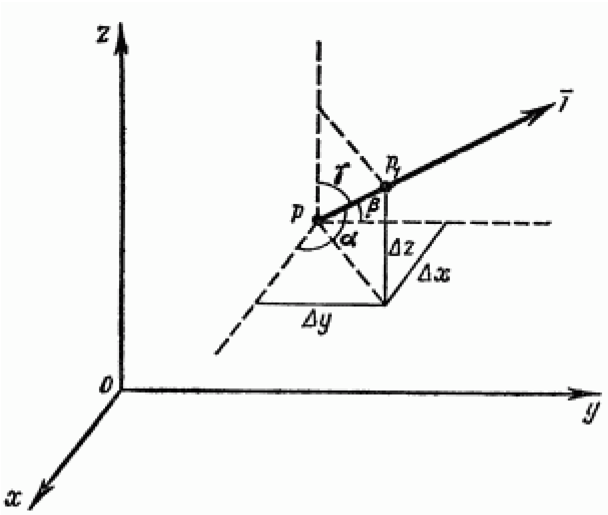
Тогда производная u по направлению:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Обозначение производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Если в точке P(x,y,z) производная по данному направлению положительна, то функция в данном направлении возрастает, в противном случае – убывает.




$$\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x, y, z)\cos\alpha + F'_y(x, y, z)\cos\beta + F'_z(x, y, z)\cos\gamma.$$

Если дана функция F(x,y,z), определенная и непрерывная на некоторой области D, то градиентом этой функции называют вектор, проекции которого на оси координат являются соответствующими частными производными.

$$grad\ F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k$$

1. Производная функции по направлению градиента имеет максимальное значение
2. Производная функции по направлению, ортогональному направлению градиенту, равна 0
3. Градиент ортогонален линиям уровня

Линии уровня – линии, на которых функция принимает одно и то же значение

## 24. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частной производной n – ого порядка называется частная производная первого порядка от частной производной n-1 – ого порядка исходной функции.

Если частные производные непрерывны, то можно переставлять порядок дифференцирования по отдельным аргументам.

*Пример.* Вычислить $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = x^3 y + e^{x+2y}$.

Последовательно находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + e^{x+2y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy + e^{x+2y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 6x + 2e^{x+2y}$$

Понятие частного дифференциала высших порядков вводится с помощью понятия частной производной высших порядков.

Дифференциал n-ого порядка функции f(x,y) можно записать в общем виде:

$$d^n f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \Delta x^k \Delta y^{n-k}$$

При этом предполагается, что функция имеет непрерывные частные производные до n-ого порядка включительно.

Наиболее часто, тем не менее, используется только дифференциал второго порядка, который имеет вид

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2$$

## 25. Необходимые и достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.

Необходимое условие:

Если дифференцируемая функция f(x,y) имеет в точке $M_0$ экстремум, то обе производные первого порядка от этой функции равны нулю: $z_x'(M_0)=z_y'(M_0)=0$

Достаточное условие:

Нужно посчитать вторые производные функции f(x,y), пусть $A=z_{xx}''(M_0)$, $B=z_{xy}''(M_0)$, $C=z_{yy}''(M_0)$. Составляем матрицу:

$$\begin{matrix} A & B \\ B & C \end{matrix}$$

1) Если определитель матрицы $(AC - B^2) < 0$ то экстремума нет
2) Если определитель матрицы $(AC - B^2) > 0$ и $A > 0$ то точка минимума
3) Если определитель матрицы $(AC - B^2) > 0$ и $A < 0$ то точка максимума
4) Если определитель матрицы $(AC - B^2) = 0$ то условие не работает, необходимо проведение дополнительных исследований

## 26. Понятие условного экстремума функции двух переменных. Метод Лагранжа.

Пусть имеется функция z = f(x,y), аргументы которой должны удовлетворять уравнению связи g(x,y)=C

Точка $(x_0,y_0)$ называется точкой условного минимума (максимума) функции, если существует такая окрестность, что для всех точек из этой окрестности, удовлетворяющих условию g(x,y) = C верно, что $f(x_0,y_0) <= f(x,y)$ $(f(x_0,y_0) >= f(x,y))$.

Наиболее простой способ отыскания точки условного экстремума – разрешение уравнения связи относительно переменной y и подстановка в исходную функцию полученного выражения. Далее точка экстремума находится как точка экстремума функции от одной переменной.

В общем случае используется метод множителей Лагранжа. Задается функция от трех переменных

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - C)$, где $\lambda$ называется множителем Лагранжа

Так, если точка $(x_0,y_0)$ является точкой условного экстремума функции f(x,y) при условии g(x,y) = C, то существует такое значение $\lambda_0$ что точка $(x_0,y_0,\lambda_0)$ является точкой экстремума функции Лагранжа.

При нахождении точки условного экстремума, таким образом, решается система уравнений:

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0, \\ F'_y = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0, \\ F'_\lambda = g(x,y) - C = 0. \end{cases}$$

В котором последнее уравнение представляет собой уравнение связи.

Данная система предоставляет необходимые условия существования точки условного экстремума. Решая данную систему, находят критические точки (точки, в которых первая производная равна нулю).

Для выявления точек экстремума из множества критических точек составляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$$

1) Если $\Delta < 0$ то точка максимума
2) Если $\Delta > 0$ то точка минимума

Алгоритм решения задачи нахождения условного экстремума методом Лагранжа:

1) Записываем функцию Лагранжа
2) Находим частные производные 1-го порядка, приравниваем их к нулю, находим критические точки
3) Находим производные для составления определителя
4) Вычисляем определитель в критических точках
5) С помощью достаточного условия делаем вывод о существовании точек экстремума
6) Считаем значения функции в точках экстремума

### 27. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Общее решение и общий интеграл.

<u>Дифференциальное уравнение</u> – уравнение, связывающее аргумент, функцию и ее производные.

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

n – порядок ДУ (порядок старшей производной)

<u>Решение дифференциального уравнения</u> (y = φ(x)) при подстановке в уравнение обращает его в тождество

<u>Интегрирование</u> ДУ – процесс решения ДУ

Если решение ДУ – функция одного аргумента (y = φ(x)), то ДУ – <u>обыкновенное</u>.

Если решение ДУ – функция двух или более аргументов, то ДУ – <u>уравнение в частных производных</u>.

<u>Общий вид обыкновенного ДУ первого порядка:</u>

$$\Phi(x, y, y') = 0$$

Если ДУ задано в виде

$$y' = \varphi(x, y)$$

То говорят, что оно задано в нормальной форме

Если задано $y|_{x=x_0} = y(x_0) = \ y_0$, то говорят, что поставлена начальная задача (Задача Коши)

Общим решением обыкновенного ДУ первого порядка называется функция y = φ(x,C), где C – произвольная постоянная:

a) $\varphi(x, C) \to \Phi(x, y, y') = 0$ обращает в тождество при любой C
b) если $\exists y(x_0) = y_0$ — задача Коши, то $\exists C_0 : y = \varphi(x, C_0)$ — решение задачи Коши

Общим интегралом обыкновенного ДУ первого порядка называется решение, заданное в неявном виде, т.е. в виде ψ(x,y,C) = 0

## 28. Задача Коши для обыкновенного ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения ДУ.

Что представляет собой задача Коши было рассмотрено в предыдущем пункте.

Будем говорить, что задача Коши имеет единственное решение, если можно указать такую $O_\varepsilon(x_0)$, что в этой окрестности определено решение $y_1=(x,x_0,y_0)$ и не существует другого решения $y_2=(x,x_0,y_0)$ в той же окрестности, значение которого отличается от значения $y_1$ хотя бы в одной точке, отличной от $x_0$.

Геометрически это означает, что через точку $x_0$ проходит только одна интегральная кривая

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (теорема Пикара)

Если в ДУ y'=f(x,y) f(x,y) и $\frac{\partial f}{\partial y}$ – непрерывны в области Д, содержащей точку $(x_0,y_0)$, то задача Коши имеет единственное решение.

Если y'=f(x,y) и существует точка $(x_1,y_1)$, не принадлежащая области определения функции f(x,y), то эта точка называется особой точкой ДУ.

Решение ДУ, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым решением задачи Коши (оно не получается из общего решения ни при каком значении C)

Решить ДУ – значит

a) Найти общее решение (или общий интеграл)
b) Найти общее решение задачи Коши
c) Найти все особые решения

## 29. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными имеют вид

$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

Решение производится следующим образом:

$$M1(x)N1(y)dx \ + \ M2(x)N2(y)dy \ = \ 0 \,|* \ \frac{1}{N_1(y)M_2(x)}$$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = \ -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$$

При $M_2(x) = 0$ или $N_1(y) = 0$ может получиться особое решение

Кроме того, к уравнениям с разделяющимися переменными сводятся уравнения вида

y' = f(ax+by+c), где a,b,c – числа

Производится замена переменной z = ax+by+c, откуда выражается y и y':

$$y = \frac{z - ax - c}{b} \qquad y' = \frac{z'_x - a}{b}$$

Тогда получаем, подставляя в исходное уравнение, что

$$\frac{z'_x - a}{b} = f(z)$$

$$z'_x = bf(z) + a$$

$$\int \frac{dz}{bf(z) + a} = x + C$$

## 30. Однородные относительно аргумента и неизвестной функции ДУ первого порядка и приводимые к ним.

Функция f(x,y) называется однородной n-ого измерения относительно аргумента и неизвестной функции, если $f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n f(x,y)$, в частности, $f(\lambda x,\lambda y) = f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.

M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 называется однородным относительно аргумента и неизвестной функции ДУ 1-го порядка, если M(x,y) и N(x,y) – однородные функции одного и того же измерения.

На основании того, что M(x,y) и N(x,y) – однородные функции одного и того же измерения можно сделать вывод, что $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ – однородная функция нулевого измерения. Поэтому далее будем рассматривать решение ДУ следующего вида:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$ где f(x,y) – однородная функция нулевого измерения

$f(\lambda x,\lambda y) = f(x,y)$ – по определению однородной функции нулевого измерения

Пусть $\lambda = \frac{1}{x}$, тогда $f(x,y) = f(1, \frac{y}{x})$

Пусть $t = \frac{y}{x}$

Тогда y = tx

Тогда y’ = t’x + t

Подставляем в исходное уравнение:

t’x + t = f(1,t)

И получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\int \frac{dt}{f(1,t) - t} = \ln|x| + C$$

Остается только проинтегрировать левую часть, после чего выполнить обратную замену и проверить на наличие особого решения при f(1,t) = t

К однородным уравнениям также приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

a) Наиболее благоприятный вариант, если $c_1=c_2=0$, в таком случае

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}$$

Где можно выполнить замену $t = \frac{y}{x}$ и получить однородное уравнение

*b)* В противном случае алгоритм действий следующий:
Выполним замены
$\begin{cases} dx_1 = dx \\ dy_1 = dy \end{cases}$ *и* $\begin{cases} x_1 = x + g \\ y_1 = y + h \end{cases}$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1x_1 - a_1g + b_1y_1 - b_1h + c_1}{a_2x_1 - a_2g + b_2y_1 - b_2h + c_2}$$

Идея такая:
$\begin{cases} -a_1g - b_1h + c_1 = 0 \\ -a_2g - b_2h + c_2 = 0 \end{cases}$ то есть $\begin{cases} a_1g + b_1h = c_1 \\ a_2g + b_2h = c_2 \end{cases}$

Составляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$
Если он не равен нулю, то существует единственное решение g и h
Если он равен нулю, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{\lambda}$ в таком случае

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}$$

Выполняем очевидную замену z = $a_1x + b_1y$
dz = $a_1dx + b_1dy$
$dy = \frac{1}{b_1}(dz - a_1dx)$

$$\frac{dz - a_1dx}{b_1dx} = \frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}$$

Получили однородное уравнение
Замечание:
$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ – две прямые

Пересекаются в случае Δ не равного 0, нужно сдвинуть систему координат и перейти к однородному
Параллельны в случае Δ = 0
Уравнение сводится к однородному только в случае если функция, стоящая в правой части уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

непрерывна.

## 31. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

y' + f(x)y = g(x) – линейное ДУ первого порядка

f(x),g(x) – непрерывные функции

Существует несколько методов решения подобных ДУ:

1) Метод Бернулли
   y = u(x)*v(x)
   y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)
   u'v + uv' + f(x)uv = g(x)
   Положим uv' + f(x)uv = 0
   v' = - f(x)v
   $\ln|v| = -\int f(x)dx$
   $v = e^{-\int f(x)dx}$

Подставим в исходное уравнение:

$u'e^{-\int f(x)dx} = g(x)$

$u = \int g(x)\, e^{-\int f(x)dx} dx + C$

Собираем все в кучу:

$y = vu = e^{-\int f(x)dx}(\int g(x)\, e^{-\int f(x)dx} dx + C)$

Причем подставлять сразу не принято, решают согласно алгоритму

2) Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Сначала рассматривается однородное ДУ

$y' + f(x)y = 0$

$\ln|y| = -\int f(x)dx + C$

$y = Ce^{-\int f(x)dx}$

Теперь константа считается функцией и ищется решение исходного уравнения

$Ce^{-\int f(x)dx}\big(-f(x)\big) + C'e^{-\int f(x)dx} + f(x)Ce^{-\int f(x)dx} = g(x)$

$C'e^{-\int f(x)dx} = g(x)$

$C = \int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx + C_1$

$y = (\int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx + C_1)e^{-\int f(x)dx}$

3) Метод интегрирующего множителя

$y' + f(x)y = g(x) \mid * e^{\int f(x)dx}$

$y'e^{\int f(x)dx} + f(x)ye^{\int f(x)dx} = g(x)\, e^{\int f(x)dx}$

$(ye^{\int f(x)dx})' = g(x)\, e^{\int f(x)dx}$

$ye^{\int f(x)dx} = \int g(x)\, e^{\int f(x)dx}dx + C$

$y = (\int g(x)\, e^{\int f(x)dx}dx + C)\, e^{-\int f(x)dx}$

В приложениях часто встречаются случаи когда f(x) и h(x) являются константами, в таких случаях лучше рассматривать уравнение как уравнение с разделяющимися переменными, а не как линейное уравнение первого порядка.

Существуют уравнения, которые становятся линейными, если в них x считать функцией, а y – аргументом

$$A(y) + \big(B(y)x - C(y)\big)\frac{dy}{dx} = 0 \;/{:}\; A(y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{B(y)}{A(y)}x - \frac{C(y)}{A(y)} = 0$$

$$x' + xf(y) = g(y)$$

Обобщением линейного уравнения является уравнение Бернулли

$y' + f(x)y = g(x)y^n$, где n не равно 0 (линейное) и n не равно 1 (с разделяющимися переменными)

Уравнение Бернулли сводится к линейному по следующему алгоритму:

$y' + f(x)y = g(x)y^n \mid : y^n$

$y'y^{-n} + f(x)y^{1-n} = g(x)$

Далее выполняют замену $z = y^{1-n}$ ; $z' = (1-n)y^{-n}y'$

$\frac{z}{1-n} + f(x)z = g(x)$

На практике решаются методом Бернулли

Уравнение Риккати, в отличие от уравнения Бернулли, имеет вид

$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$

и не имеет общего способа решения, однако если найдено любое решение $y_1$, то подстановка $y = y_1 + z$ сводит уравнение к уравнению Бернулли

### 32. ДУ в полных дифференциалах

Уравнение в полных дифференциалах:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Если левая часть уравнения – дифференциал некоторой функции

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \text{ значит } \begin{cases} M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \\ N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Теорема: если $\begin{cases} M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \\ N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$ то уравнение – уравнение в полных дифференциалах

Доказательство:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Пример

$$(xchy + shx)dy + (ychx + shy)dx = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = chy + chx \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = chx + chy$$

$$u(x,y) = \int M dx = \int (ychx + shy)dx = yshx + xshy + C$$

Общий интеграл:

$$yshx + xshy + C = 0$$

ДУ, не разрешенные относительно производных:

$y = f(x,y')$

Решается методом параметризации, т.е. $y' = p(x)$

$y = f(x,p)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = p$

$\begin{cases} x = \Phi(p,C) \\ y = f(\Phi(p,C),p) \end{cases}$

### 33. Обыкновенные ДУ высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Обыкновенные ДУ высших порядков имеют вид

$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$

n – порядок ДУ

Задача Коши имеет вид

$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, … , $y^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}_0$

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

Если $f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ – непрерывна и $f_y', f_{y'}', \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ – непрерывны в окрестности точки $(y_0, y_0', \dots, y^{(n-1)}_0)$ то задача Коши имеет единственное решение.

Функция $y = g(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$ называется общим решением, если выполняются 2 условия:

1) Для любого набора $C_1, C_2, \dots, C_n$ y обращает уравнение в тождество
2) Для любой задачи Коши найдется такой набор констант, что y = g удовлетворит уравнению и условию задачи Коши

**34. Обыкновенные ДУ высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.**

I. $y^{(n)} = f(x)$

$x_0$ из ООФ f(x)

$$y^{n-1} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

$$y^{n-2} = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right) dx + \int_{x_0}^{x} C_1 dx + C_2$$

И так далее

В результате получим некоторое уравнение, в котором функция f(x) будет стоять под n интегралами

Для задачи Коши

$C_1 = y_0^{(n-1)}$

$C_2 = y_0^{(n-2)}$

$C_n = y_0$

Потому что при подстановке $x_0$ вместо x все выражения с интегралами обращаются в нуль

II. Уравнения второго порядка, приводимые к уравнениям первого порядка

A) $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ – уравнение, явно не содержащее функцию

Можно выполнить замену $p(x) = \frac{dy}{dx}$, $p'(x) = y''$

$p'(x) = f(x,p)$ – уравнение первого порядка, решение которого выглядит как $p = \varphi(x,C_1)$

$$y(x) = \int p(x, C_1)dx + C_2$$

Этот подход применим ко всем ситуациям вида $y^{(n)}(x) = f(x,y^{(n-1)}(x))$, причем всегда выполняется замена $p(x) = y^{(n-1)}(x)$

B) $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$– уравнение, явно не содержащее аргумента

Можно выполнить замену $p(x) = \frac{dy}{dx}$, $p_y'(x)p(x) = y''$

$p'_y p = f(y,p)$ – уравнение первого порядка, решение которого выглядит как $p = \varphi(y, C_1)$

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)}$$

C) Может быть что нибудь типа y''' + y'' = 0, тогда замена простая:

p = y'' и поэтому p' + p =0

$\ln|p| = -x + C_1$

$p = C_1 e^{-x}$

Потом находим y, дважды интегрируя p по dx

35. **Однородные линейные ДУ второго порядка. Общее решение ДУ второго порядка. Определитель Вронского.**

Линейное ДУ n-ого порядка в общем виде выглядит так:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

ООУ: $a_0(x) \neq 0, a_i(x)$ непрерывна на ООУ, $i = \overline{0, n}$

Уравнение в нормальной (каноническоц форме) получается, если разделить на $a_0(x)$:

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_n(x)y = f_1(x)$$

$f_1(x) \equiv 0$ — уравнение однородное, в противном случае — неоднородное

Таким образом, однородное линейное ДУ второго порядка имеет вид:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (1)$$

Теоремы о решениях $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1):

1) Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения (1), то их сумма – тоже решение (следует из того, что сумма производных – производная суммы)
2) Пусть C – константа, тогда если $y_1(x)$ – решение, то $Cy_1(x)$ – тоже решение (опять же, следует из свойства производной)

Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми, если $\frac{y1(x)}{y2(x)} \neq const$, иначе – линейно зависимые

Определитель Вронского (Вронскиан) составляется из двух линейно независимых решений однородного ДУ второго порядка, а также из их производных:

$W(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 \quad (2)$

Теорема:

Если $y_1$ и $y_2$ линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$

Доказательство:

] $y_1 * \frac{1}{y_2} = \lambda, \lambda - const$

$y_1 = \lambda y_2$

$W(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y'_2 & y'_2 \end{vmatrix} = 0$

Теорема:

Если $y_1$ и $y_2$ линейно независимы, то $W(x) \neq 0$ ни в одной точке ООУ

Доказательство:

$$\begin{cases} y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение домножаем на $-y_2$, второе домножаем на $y_1$, полученные уравнения складываем, получаем выражение:

$$-y_2y_1'' - y_2a_1(x)y_1' - y_2a_2(x)y_1 + y_1y_2'' + y_1a_1(x)y_2' + y_1a_2(x)y_2 = 0$$

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + a_1(x)(-y_2y_1' + y_1y_2') + a_2(x)(-y_2y_1 + y_1y_2) = 0$$

$$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$$

$$W = Ce^{-\int a_1(x)dx} \text{ (3) – формула Леовилля}$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} W_1 + a_1W = 0 \\ W(x_0) = C_0 \end{cases}$$

$$C_0 = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx} \Rightarrow C_0 = C$$

$$W(x) = C_0e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}$$

Так как определитель Вронского задается показательной функцией, он не обращается в ноль ни в одной точке.

Пусть $y_1 \neq 0$ в ООУ

W(x) = 0 => $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = 0 = \frac{y_1y'_2 - y_2y'_1}{{y_1}^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = const \Rightarrow$ решения линейно зависимы

Однако нужно обратить внимание на то, что $y_1$ может быть = 0 в отдельных точках

Теорема

Если $y_1$ и $y_2$ – линейно независимые решения уравнения (1) то $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где $C_1$ и $C_2$ произвольные постоянные, является общим решением (1).

Доказательство

1) То, что y – действительно решение (1) доказывается подстановкой
2) Пусть задана задача Коши $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$ и требуется найти коэффициенты $C_1$ и $C_2$

$$\begin{cases} y_0 = C_1y_{10} + C_2y_{20} \\ y'_0 = C_1y'_{10} + C_2y'_{20} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ как определитель Вронского} \Rightarrow \exists! \text{ решение системы C1 и C2}$$

Теорема

Если в (1) известно $y_1$ то $y_2$ можно найти интегрированием известных функций

Доказательство:

$$y_1y'_2 - y_2y'_1 = Ce^{-\int a_1(x)dx}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C}{{y_1}^2}e^{-\int a_1(x)dx}$$

$$y_2 = y_1\int \frac{C}{{y_1}^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx$$

## 36. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Теорема о структуре общего решения неоднородного дифференциального уравнения.

Будем рассматривать ДУ второго порядка:

$y'' + ay' + by = f(x)$ (2)

Теорема

Общее решение уравнения (2) есть сумма общего решения однородного ДУ типа (2) и частного решения ДУ (2)

$y = y_0 + y_ч$

Доказательство:

1) Для того, чтобы показать что $y = y_0 + y_ч$ является решением (2), необходимо выполнить подстановку и перегруппировку слагаемых
2) Доказательство того, что $y = y_0 + y_ч$ позволяет однозначно определить коэффициенты, аналогично доказательству общего вида решения линейного однородного ДУ второго порядка (необходимо выполнить подстановку в систему условий задачи Коши, а далее воспользоваться свойством определителя Вронского)

## 37. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения высших порядков: метод Лагранжа вариаций произвольных постоянных

Теорема о частном решении (2)

Если $y0 = C1y1 + C2y2$ – общее решение однородного ДУ, то частное решение можно получить вариацией произвольных постоянных.

Доказательство:

Пусть $y_ч = C1(x)y1 + C2(x)y2$ (5)

$y'_ч = C1'(x)y1 + C1(x)y'1 + C2'(x)y2 + C2(x)y'2$ (6)

Пусть $\mathbf{C1'(x)y1 + C2'(x)y2 = 0}$

$y''_ч = C1(x)y''1 + C1'(x)y'1+ C2'(x)y'2 + C2(x)y''2$ (6)

5,6,7 -> 2

$C1(x)y''1 + C1'(x)y'1+ C2'(x)y'2 + C2(x)y''2 + a(C1(x)y'1 + C2(x)y'2) + b(C1(x)y1 + C2(x)y2) = f(x)$

$C1(x)( y''1 +a y'1 + b y1) + C2(x)( y''2 + a y'2 + b y2) + C1'(x)y'1+ C2'(x)y'2 = f(x)$

$\mathbf{C1'(x)y'1+ C2'(x)y'2 = f(x)}$

Получили систему для нахождения коэффициентов частного решения:

$$\begin{cases} C1'(x)y1 + C2'(x)y2 = 0 \\ C1'(x)y'1 + C2'(x)y'2 = f(x) \end{cases}$$

## 38. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами второго порядка (аналогично решаются и ДУ высших порядков):

$y'' + py' + qy = 0$ (4)

Будем искать решение в виде $y = e^{kx}$

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0 \ (5) - \text{характеристическое уравнение (по определению)}$$

*I.* Д>0 : $\exists\, k, l$

y1 = $e^{kx}$, y2 = $e^{lx}$ $\frac{y1}{y2} = e^{(k-l)x} \neq const$ значит y1 и y2 линейно независимы

y = $C1e^{kx}+C2e^{lx}$ – общее решение уравнения (4)

*II.* Д=0 : $\exists\, k = l$ (т.е. k кратности 2)

y1 = $e^{kx}$

y2 = $u(x)e^{kx}$ : y1 и y2 линейно независимы

Выполним подстановку y2 в уравнение (4):

$$u''(x)e^{kx} + e^{kx}2ku' + k^2ue^{kx} + e^{kx}pu' + pkue^{kx} + que^{kx} = 0$$

$$u''(x) + 2ku' + k^2u + pu' + pku + qu = 0$$

$$u''(x) + u'(2k + p) + u(k^2 + pk + q) = 0$$

$$u'' = 0$$

$$u = C1x + C2$$

Для простоты пусть u = x тогда

y = $C1e^{kx}+C2xe^{kx}$ – общее решение уравнения (4)

*III.* Д<0 : $\exists\, k, l$ = α ± iβ

k,l = $-\frac{p}{2} \pm i\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$

y = $C1e^{\alpha x+i\beta x}+C2\, e^{\alpha x-i\beta x}$

$C1e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$

$u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$

y = $e^{\alpha x}(C1\cos\beta x+C2\sin\beta x)$ поскольку u и v линейно независимы

y = $e^{\alpha x}(C1\cos\beta x+C2\sin\beta x)$ - общее решение уравнения (4)

**39. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью**

Принцип наложения решения

Если y'' + ay' + by = f(x) + g(x) то $y_ч = y_{ч1} + y_{ч2}$

Доказательство осуществляется подстановкой и использованием свойства производной суммы

Существует два специальных вида правой части:

I. $y'' + ay' + by = P_n(x)e^{mx}$

$k^2+ak+b = 0$

k, l – корни

1) k и l не совпадают с m, тогда $y_ч = Q_n(x)e^{mx}$
2) либо k либо l совпадают с m тогда $y_ч = xQ_n(x)e^{mx}$ доказательство производится подстановкой
3) и k и l совпадают с m тогда $y_ч = x^2Q_n(x)e^{mx}$ доказательство производится подстановкой

II. $y'' + ay' + by = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}$

$\sin\beta x = \frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}$

$P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(e^{i\beta x}(\frac{P_n(x)}{2} + \frac{Q_m(x)}{2i}) + e^{-i\beta x}(\frac{P_n(x)}{2} + \frac{Q_m(x)}{2i}))$

$y_ч = e^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x)$

**40. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод исключения.**

Простейшая система ДУ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k \cdot x(t) + l \cdot y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = m \cdot x(t) + n \cdot y(t) \end{cases}$$

Здесь k,l,m,n – числа, x, y – функции

Решить систему ДУ значит найти такие функции x и y которые при подстановке в систему обращали бы ее в тождество

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$$

Задача Коши обычно задается в виде $x(0) = 3$, $y(0) = 0$

Для того, чтобы решение задачи Коши существовало и было при том единственным, необходимо и достаточно, чтобы функции $k \cdot x(t) + l \cdot y(t)$, $m \cdot x(t) + n \cdot y(t)$ а так же их производные по x и y были непрерывны в области Д, включающем заданную точку.

Рассмотрим решение системы методом исключения

1) Берем второе уравнение и выражаем x:
$$x = \frac{1}{m}\left(\frac{dy}{dt} - ny(t)\right)$$
2) Дифференцируем по x полученное выражение
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - n\frac{dy}{dt}\right)$$
3) Подставляем полученные выражения в первое уравнение системы:
$$\frac{1}{m}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - n\frac{dy}{dt}\right) = \frac{k}{m}\left(\frac{dy}{dt} - ny(t)\right) + ly$$
4) Проводим максимальные упрощения, получаем ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, решаем и находим функцию y(t)
5) Ищем производную y'(t), подставляем в выражение для x и находим функцию x(t)
6) Записываем общее решение системы
7) В соответствии с начальными условиями находим частное решение системы

Если система неоднородная и есть дополнительная функция, то есть

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k \cdot x(t) + l \cdot y(t) + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = m \cdot x(t) + n \cdot y(t) + g(t) \end{cases}$$

То алгоритм полностью сохраняется, единственное только, что на 2-м шаге мы получим неоднородное уравнение вместо однородного и решение станет несколько длиннее