Экзамен по математике (3 семестр)

Оглавление

Двойной интеграл. Доказательство теоремы о вычислении двойного интеграла.

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть задана замкнутая, ограниченная область D на плоскости XOY, а функция z=f(x,y) определена в этой области, в таком случае можно рассмотреть сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i) * \Delta S_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \iint_D f(x,y)dxdy$$

Где

- M_i обозначает точку внутри области D
- ΔS_i обозначает площадь малой области вокруг точки M_i

- n обозначает количество точек, взятых в области D

Видно, что при n=1 получим объем цилиндра с основанием D и высотой f(M_i) (если за ΔS_1 примем площадь области D). При сколь угодно большом увеличении n получим объем тела, ограниченного плоскостью XOY снизу, функцией f(x,y) сверху и примыми, перпендикулярными плоскости XOY, проходящими по границе области D – по бокам.

Если площадь под графиком функции является геометрической интерпретацией обычного интеграла, то объем вышеописанного тела – геометрическая интерпретация двойного интеграла.

Теорема о вчиислении двойного интеграла имеет вид:

Двойной интеграл от непрерывной функции по правильной области D (по области, границу которой любая прямая, проведенная параллельно оси координат и притом проходящая через хотя бы одну внетреннюю точку этой области, пересекает только дважды) равен двукратному интегралу от этой функции по области D

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ВЫЧИСЛЕНИИ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим двукратный интеграл по области D.

В соответствии с теоремами, справедливыми для двукратных интегралов, последние можно разбивать прямыми, параллельными осям координат, а именно:

Попробуем разбить двукратный интеграл прямой x = c (a<=c<=b) , путем нехитрых преобразований получим:

$$\int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^c \Phi(x)dx + \int_c^b \Phi(x)dx = \int_a^c (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx + \int_c^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

Попробуем разбить двукратный интеграл прямой y = c (пересекает τ(x) в двух точках d и e) , тогда для удобства введем функцию α(x) следующего вида:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \tau(x), x < d \\ c, \quad d \le x \le e \\ \tau(x), x > e \end{cases}$$

В таком случае исходный интеграл может быть записан в виде:

$$\int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\alpha(x)} f(x,y)dy)dx + \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

Где

$$\int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^d (\int_{\tau(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx + \int_d^e (\int_c^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx + \int_e^b (\int_{\tau(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$
$$= \int_d^e (\int_c^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

Соответственно

$$\int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\alpha(x)} f(x,y)dy)dx + \int_d^e (\int_c^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx$$

В обоих случаях интеграл разбивается на два интеграла по двум областям.

В общем случае, если имеется двукратный интеграл I_D, то область можно разбить прямыми, параллельными осям координат на n частей, причем

$I_D = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$

Кроме двух этих теорем потребуется также теорема о среднем, естественным путем к которой можно прийти следующим образом:

Для начала рассмотрим две теоремы об оценке двукратного интеграла:

$mS \le \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx \le MS$

Где m и M – минимальное и максимальное значения f(x,y) соответственно на области D

Доказательство тому факту простое:

$$min * (b-a) \le \int_a^b \Phi(x)dx \le max * (b-a)$$

Где min и max – минимальное и максимальное значения $\Phi(x)$ соответственно на области [a;b]

Наконец, теорема о среднем:

$$I_D = \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\tau(x)} f(x,y)dy)dx = f(P_i) * S_D$$

Поскольку f(x,y) непрерывна (т.е принимает весь набор значений от m до M) и

$m \le \frac{I_D}{S} \le M$

Возвращаясь к нашим рассуждениям относительно доказателства главной теоремы, имеем:

$I_D = f(P_1)S_D + f(P_2)S_D + \ldots + f(P_n)S_D$

Однако суимма, стоящая справа, при n стремящемся к бесконечности равна двойному интегралу f(x,y) по области D, значит и I_D равен двойному интегралу, что и требовалось доказать.

Свойства двукратных интегралов

СВОЙСТВО АДДИТИВНОСТИ

Если правильную в направлении оси OX и OY область разбить прямыми x=c и y=h на 2 области D_1 и D_2, то

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$$

Доказательство приведено ранее

ТЕОРЕМА ОБ ОЦЕНКЕ ДВУКРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

Если m и M – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции f на области D, то верно двойное неравенство:

$$mS \le \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f dy \right) dx \le MS$$

Где S – площадь области D, прямая x=a ограничивает область D слева, прямая x=b ограничивает область D справа, а графики функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ограничивают область D сверху и снизу соответственно.

Доказательство приведено ранее

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ДВУКРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

В условиях предыдущего свойства верно равенство:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f dy \right) dx = f(P) * S$$

Где P – некоторая точка в области D

Доказательство приведено ранее

Тройной интеграл и его свойства

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Если при использовании обычного интеграла сумма Римана берется для значений функции в каждой точке отрезка, при использовании двойного интеграла сумма Римана берется для значений функции в каждой точке двумерной области, то в случае тройного интеграла сумма Римана состоит из значений функции в каждой точке какого-либо объема, ограниченного замкнутой поверхностью.

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz$$

Для того, чтобы интеграл был определенным, достаточно, чтобы функция была непрерывной.

Аналогично вычислению двойного интеграла, который необходимо спроектировать на ось OX, а затем заменить двойной интеграл на двукратный, в котором внешнее интегрирование ведется по оси X (от a до b), а внутреннее – по оси Y (от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$ – по мере продвижения вдоль оси OX границы области по оси OY могут меняться), тройной интеграл при попытке его вычисления следует спроектировать на какую-либо из координатных областей, взять внешний интеграл по получившейся области, а внутренний – по исходным функциям, ограничивающим данную область, иными словами, мы должны добиться равенства следующего вида:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy$$

Что нужно сделать для вычисления двойного интеграла уже известно:

$$\iint\limits_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx$$

Можно заметить, что границы усложняются при движении слева направо

Следует вспомнить, что для успешного вычисления двойного интеграла область должна быть правильной в направлении осей X и Y, а именно, любая прямая, проведенная параллельно каждой из этих осей, проходящая через внутреннюю точку области интегрирования, должна пересекать границу области ровно в двух точках. В случае трехмерной ситуации условие несколько усложняется: по-прежнему область, по которой ведется интегрирование, должна быть правильной, однако теперь необходимо и достаточно выполнения комплекса условий:

- Прямая, параллельная оси Z, проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках
- Область интегрирования проектируется в правильную двумерную область
- Любая часть области интегрирования, отсеченная плоскостью, параллельной координатной плоскости, удовлетворяет предыдущим двум свойствам

Трехмерный интеграл может быть использован при расчете объема тела (для это подынтегральная функция должна быть тождественно равна единице), либо же при расчете массы тела с переменной плотностью.

СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Тройной интеграл обладает всеми свойствами двойного, а именно:

- Свойства линейности

$$\iiint\limits_V \big(\propto f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\big)dxdydz = \propto \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

- Свойство аддитивности
  Если V = V_1 + V_2, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

Замена переменных в двойных интегралах

ЯКОБИАН ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Сложность, которой было не лишено в том числе и вычисление обыкновенных интегралов – это необходимость при замене переменной вычисления так называемого Якобиана преобразования. Суть его введения заключается в добавке к функции некоего члена, компенсирующего ошибку при преобразовании координат. В одномерном случае все достаточно очевидно, например, если есть простой интеграл вида

$$\int (x+5)\,dx$$

И мы хотим заменить в нем переменную x на t так, что

$$x = \sin t$$

Нам необходимо вычислять дифференциал, таким образом, получим выражение:

$$\int cost(sint + 5)\, dt$$

В котором появился косинус – та самая добавка, о которой идет речь. Заметим, что если обозначить

$$x = \ \varphi(t) = \sin t$$

То эта добавка окажется равна

$$I = \frac{d\varphi}{dt} - \text{Якобиан преобразования координат (одномерный случай)}$$

Теперь переходим к двумерному случаю, в котором все чуть менее очевидно. Аналогично тому, как мы заменяли x на $\varphi(t)$, на этот раз выполним замену двух переменных, по которым ведется интегрирование:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}, \text{где } \varphi \text{ и } \psi - \text{непрерывные и однозначные}$$

И если в одномерном случае добавка имела простую и интуитивно понятную форму, то на этот раз она примет вид

$$I = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} - \text{Якобиан преобразования координат (двумерный случай)}$$

Якобиан всегда берется по модулю, то есть, всегда положителен

Преобразование двойного интеграла выглядит так:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} I * f(u, v)dudv$$

Имеется стандартный вид замены, который мы рассмотрим далее

ИЗ ДЕКАРТОВЫХ В ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Такой вид преобразования предполагает замену вида

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}$$

Соответственно, Якобиан преобразования оказывается равен

$$I = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -rsin\varphi \\ sin\varphi & rcos\varphi \end{vmatrix} = rcos^2\varphi + rsin^2\varphi = r$$

Используются также обобщенные полярные координаты

$$\begin{cases} x = arcos\varphi \\ y = brsin\varphi \end{cases}$$

В этом случае Якобиан преобразования

$$I = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} acos\varphi & -arsin\varphi \\ bsin\varphi & brcos\varphi \end{vmatrix} = abrcos^2\varphi + abrsin^2\varphi = abr$$

Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройных интегралах.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Цилиндрические координаты – обобщение полярных координат на трехмерный случай. Соответственно, цилиндрические координаты удобны, когда область интегрирования симметрична относительно какой-либо оси.

При переходе к цилиндрическим координатам от декартовых координаты в цилиндрической системе принимают смысл:

Координата r определяет расстояние от полюса до точки поверхности (длину радиус - вектора)

Координата φ определяет угол между радиус – вектором точки поверхности и осью X

Координата z определяет смещение полюса вдоль оси Z

СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Сферические координаты исключительно удобны в тех случаях, когда область симметрична относительно какой-либо одной точки. В принципе, там, где можно использовать сферические координаты, можно использовать и цилиндрические, и наоборот, однако, в каких-то случаях вычислений при одной замене будет меньше, чем в другой.

При переходе к сферическим координатам от декартовых координаты в сферической системе принимают смысл:

Координата r определяет расстояние от полюса до точки поверхности (длину радиус – вектора)

Координата θ определяет угол между радиус-вектором и осью OZ (зенитный угол)

Координата φ определяет угол между проекцией радиус – вектора на плоскость XOY и осью OX (азимутальный угол)

Положение полюса фиксировано и находится в начале координат

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Ранее был рассмотрен двумерный случай для расчета Якобиана преобразования. Я думаю, вполне можно догадаться, что в трехмерном случае эта величина принимает вид

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta a} & \frac{\delta x}{\delta b} & \frac{\delta x}{\delta c} \\ \frac{\delta y}{\delta a} & \frac{\delta y}{\delta b} & \frac{\delta y}{\delta c} \\ \frac{\delta z}{\delta a} & \frac{\delta z}{\delta b} & \frac{\delta z}{\delta c} \end{vmatrix}$$

В случае перехода от декартовых координат к цилиндрическим:

$$\begin{cases} x = rcos\phi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \varphi} & \frac{\delta x}{\delta z} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} & \frac{\delta y}{\delta z} \\ \frac{\delta z}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} & \frac{\delta z}{\delta z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rcos\varphi & -rsin\varphi & 0 \\ sin\varphi & rcos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = rcos^2\varphi + rsin^2\varphi = r$$

В случае перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\phi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \theta} & \frac{\delta x}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta z}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} & \frac{\delta z}{\delta \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sin\theta cos\varphi & rcos\theta cos\varphi & -rsin\theta sin\varphi \\ sin\theta sin\varphi & rcos\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi \\ cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r^2 sin\theta cos^2\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + r^2 sin^3\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = r^2 sin\theta$$

Криволинейные интегралы второго рода и их вычисление

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

Предположим, что точки, значения функции в которых нам надо знать для составления суммы Римана или вычисления интеграла, не расположены на координатной оси OX, как это было в обычном интеграле, но, тем не менее, расположены на единой прямой.

В качестве примера можно рассмотреть стержень с переменной плотностью : пока он прямой, мы еще можем посчитать его массу (с помощью того же обычного интеграла), однако если его изогнуть, то придется ввести новый вид интегралов – так называемые криволинейные интегралы.

Криволинейные интегралы бывают первого и второго рода, пока рассмотрим второго рода

Пусть D – область на плоскости XOY, кроме того, задано векторное поле:

$$\bar{F}(x, y) = P(x, y)\bar{\imath} + Q(x, y)\bar{\jmath}$$

Возьмем кривую АВ лежащую в области D

Осуществим разбиение кривой на мелкие участки, взятие на каждом участке единственной точки, составление суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\Delta y_i$$

Где M_i – точка, взятая на каждом малом промежутке, Δx_i и Δy_i– изменение координаты x и y соответственно при движении от начальной точки каждого малого промежутка к конечной (может быть больше, равна нулю или меньше нуля).

Введем в рассмотрение следующую теорему:

Если при бесконечном увеличении количества фрагментов разбиения модуль приращения координаты x стремится к нулю для каждого фрагмента (разбиение равномерно распределено по всей кривой), то $\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i$ имеет предел, который называется криволинейным интегралом

$$\int_{AB} P(x,y)dx$$

Аналогично и для $\sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\Delta y_i$:

$$\int_{AB} Q(x,y)dy$$

Если собрать все вместе, то:

$$\int_{AB} \bar{F}(x,y)ds = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy$$

Некоторые замечания, касающиеся криволинейного интеграла второго рода:

1. AB должна иметь непрерывно меняющуюся касательную, но допускается конечное число изломов, в которых касательная меняется скачком
2. Если направление интегрирования меняется на противоположное, то вылазит знак «минус». Это происходит потому, что при вычислении криволинейного интеграла можно двигаться либо вдоль оси координат, либо против.
3. Если рассматривается отрезок прямой, перпендикулярной оси OY, то имеем дело с обычным интегралом
4. AB может быть и замкнутой
5. Если AB замкнута, то $\oint_{AB} \bar{F}(x,y)ds$ – циркуляция вектора F по замкнутому контуру
6. Криволинейный интеграл второго рода зависит от
    a. Пути интегрирования
    b. Направления
    c. Вида подынтегральной функции

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

В наиболее общем случае кривая AB задана параметрически, то есть так:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

Где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемы (имеют непрерывную производную)

Для вычисления интеграла требуется выполнить стандартную замену переменной (одномерный случай):

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} \left(P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\frac{d\varphi}{dt} + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\frac{d\psi}{dt} \right) dt$$

Ситуация несколько упрощается, если AB задана в явном виде, то есть:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \alpha \le x \le \beta$$

В таком случае интеграл принимает вид:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} \left(P(x,f(x)) + Q(x,f(x))\frac{df}{dx} \right) dx$$

Но дела, напротив, могут обстоять и хуже, если, например, задана пространственная линия:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

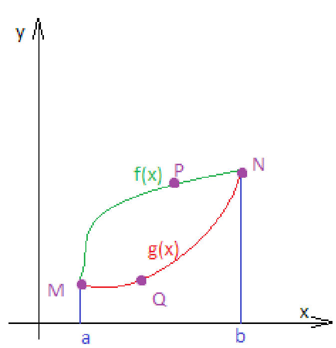
Тогда имеем:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_{AB} \left(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\frac{d\varphi}{dt} + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\frac{d\psi}{dt} + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\frac{d\chi}{dt} \right) dt$$

Что лишь количественно усложняет расчеты

Механический смысл криволинейного интеграла второго рода – работа криволинейной силы

Выражение площади области, ограниченной кривой, через криволинейный интеграл



Площадь области, выраженная через обычный интеграл:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

В соответствии с доводами, приведенными ранее для криволинейного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{MPN} ydx$$

Слева стоит интеграл обычного вида, для его вычисления требуется высчитать разность первообразных, справа – криволинейный интеграл, рассматривающий кривую MPN как задаваемую функцией f(x). Фактически, тут мы считаем сумму произведений f(x)dx для каждого x в диапазоне [a,b].

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{MQN} ydx$$

В таком случае можем записать:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \oint_{MPNQM} ydx$$

Здесь, естественно, подразумевается, что интегрирование ведется по часовой стрелке

Аналогично относительно противоположной оси:

$$S = \oint_{MPNQM} xdy$$

Тут интегрирование идет уже против часовой стрелки

Таким образом, можно сделать вывод, что:

$$S = \frac{1}{2}\oint_{MQNPM} xdy - ydx$$

Получили выражение площади области через криволинейный интеграл

Можно показать, что даже если область не является правильной, её можно разбить на две (или более) правильных областей, посчитать по-отдельности интегралы и сложить. На совместных участках интегрирование ведется в обе стороны, по причине чего криволинейный интеграл на них окажется равным нулю.

Формула Грина

ОБЩИЙ ВИД

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе этой области.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{MQNPM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть задана область D, такая что $a \le x \le b, \quad g(x) \le y \le \text{f(x)}$ (см картинку выше)

Пусть также в области D заданы две функции от двух переменных X(x,y) и Y(x,y), которые имеют непрерывные частные производные

Рассмотрим интеграл

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dxdy$$

Преобразуем к двукратному и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_g^f \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (X(x,f) - X(x,g))dx$$

Далее попытаемся получить отсюда криволинейный интеграл:

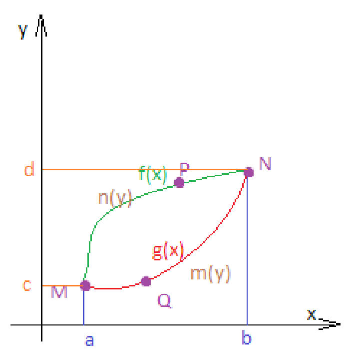
$$\int_a^b (X(x,f) - X(x,g))dx = \int_a^b X(x,f)dx + \int_b^a X(x,g)dx = -\oint_{MQNPM} X(x,y)$$

f и g в данном случае задают область интегрирования, а в подынтегральную функцию подставляется y

Итак,

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dxdy = -\oint_{MQNPM} X(x,y)$$

Попробуем провернуть подобное с другой осью координат:



$$\iint_D \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_c^d \left(\int_n^m \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \big(Y(m,y) - Y(n,y)\big)dy$$
$$= \int_c^d \big(Y(m,y)\big)dy + \int_d^c \big(Y(n,y)\big)dy = \oint_{MQNPM} Y(x,y)dy$$

Итак,

$$\iint_D \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_{MQNPM} Y(x,y)dy$$

Складываем левые и правые части двух получившихся уравнений, получаем формулу Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{MQNPM} Y(x,y)dy + X(x,y)dx$$

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

БАЗОВЫЕ ДОВОДЫ

Пусть в области D определены и непрерывны

$$X(x,y), Y(x,y), \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Требуется сформулировать такие условия, при которых интеграл

$$\int_{MPNQM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Не зависит от пути интегрирования

Разобьем интеграл на два:

$$\int_{MPNQM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_{MPN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy + \int_{NQM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$
$$= \int_{MPN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy - \int_{MQN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Если требуется, чтобы интеграл не зависел от пути интегрирования, очевидно, такой интеграл должен быть равен нулю:

$$\int_{MPN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy - \int_{MQN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$$

Поскольку только в этом случае

$$\int_{MPN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_{MQN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем, что

$$\oint_{MQNPM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$$

Основное условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования:

Интеграл не зависит от пути, соединяющего две заданные точки, если интеграл по замкнутому контуру, содержащему эти точки, равен нулю. Верно и обратное утверждение.

Далее рассматриваются некоторые дополнительные теоремы

ТЕОРЕМА 1

В укороченном формате теорема звучит так:

$$Если\ \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} = 0, \text{то} \oint_{MQNPM} Y(x,y)dy + X(x,y)dx = 0$$

Доказательство:

Пусть область D_1 , включенная в область D, ограничена замкнутой кривой L, содержащей точки M и N, тогда по формуле Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx$$

$$0 = \oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx$$

ТЕОРЕМА 2

В укороченном формате теорема звучит так:

$$Если \oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx = 0,\ то\ \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$$

Доказательство:

Докажем теорему от противного, а именно, предположим, что одновременно с $\oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx = 0$ $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$

Для определенности считаем, что $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} > \delta > 0$, тогда:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy > \iint_D \delta dxdy = \delta S > 0$$

Но это противоречит формуле Грина, согласно которой

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Y(x,y)dy + X(x,y)dx = 0$$

То есть сделанное предположение ложно, а значит, $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$

ТЕОРЕМА О ПРИЗНАКЕ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Если верно, что $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$, то $Y(x,y)dy + X(x,y)dx = dF$, причем $Y = \frac{\partial F}{\partial y}$ и $X = \frac{\partial F}{\partial x}$

ТЕОРЕМА 4

Если $Y(x,y)dy + X(x,y)dx = dF$, то $\int_M^N Y(x,y)dy + X(x,y)dx = F(N) - F(M)$

Доказательство:

По условию $X = \frac{\partial F}{\partial x}$ и $Y = \frac{\partial F}{\partial y}$, значит:

$$\int_M^N Y(x,y)dy + X(x,y)dx = \int_M^N \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \chi(t) \end{vmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} dF$$
$$= F(t_2) - F(t_1)$$

Криволинейные интегралы первого рода и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Отличие криволинейного интеграла первого рода от криволинейного интеграла второго рода заключается в том, что при введении понятия криволинейного интеграла первого рода мы составляем интегральную сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

Где Δs_i заменяет приращение, получающееся на координатной оси. Величина Δs_i, тем не менее, определяется приращениями по координатным осям следующим образом:

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta {x_i}^2 + \Delta {y_i}^2}$$

Как видно из этого выражения, при изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не меняет свой знак.

Так вот, перейдем наконец от интегральной суммы непосредственно к интегралу. Для этого требуется, чтобы выполнялось условие $\max\limits_i|\Delta s_i| \to 0$, а f(x,y) можно было бы считать непрерывной в D. В таком случае существует предел данной интегральной суммы и называется криволинейным интегралом первого рода:

$$\lim_{|\Delta s_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \int_{AB} f ds$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Вычисление производится аналогично вычислению интеграла второго рода, с той лишь оговоркой, что дифференциал заменяется несколько по-другому:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

Тогда имеем:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}\,dt$$

Если же AB – пространственная линия, то есть:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)\,, \alpha \le t \le \beta \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

То криволинейный интеграл первого рода примет вид:

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2}\,dt$$

Наконец, посмотрим, что будет, если функция задана явно:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \alpha \le x \le \beta$$

Тогда ситуация заметно упрощается:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,f(x))\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dt$$

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА

1. Интеграл зависит от :
    a. Вида кривой интегрирования
    b. Подынтегральной функции

    и не зависит от направления пути интегрирования

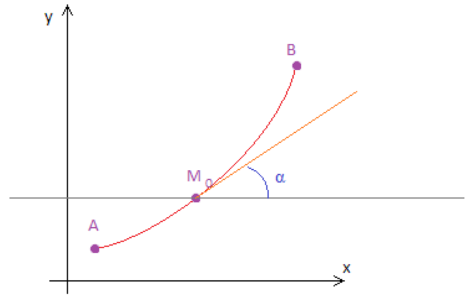
2. Обладает свойством линейности
3. Обладает свойством аддитивности, то есть если M- точка на AB, то:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{AM} f(x,y)ds + \int_{MB} f(x,y)ds$$

4. $\int_{AB} ds$ – длина дуги AB

Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

Пусть AB – направленная линия (направление из A в B). Проведем касательную в точке M_0. Эта касательная образует с осью OX угол α:



Если прямая АВ задана функцией $y = \varphi(x)$, то производная этой функции есть не что иное, как тангенс угла α, то есть:

$$\varphi'(x) = tg\alpha$$

Попробуем связать косинус угла α с производной функции, задающей кривую АВ, то есть, с тангенсом того же угла. Вспоминается основное тригонометрическое тождество, из которого нетрудно получить искомое соотношение:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Разделим обе части на квадрат косинуса:

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Теперь отсюда:

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}$$

Или, что то же самое:

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{(\varphi'(x))^2 + 1}}$$

В выражении $\sqrt{(\varphi'(x))^2 + 1}$ узнается уже знакомая комбинация, уже встречавшаяся при определении криволинейного интеграла первого рода. Используем же ее для того, чтобы перейти от одного вида интеграла к другому:

$$\int_{AB} Pdx = \int_{AB} P\frac{\sqrt{(\varphi'(x))^2 + 1}}{\sqrt{(\varphi'(x))^2 + 1}}dx = \int_{AB} P\sqrt{(\varphi'(x))^2 + 1}cos\alpha dx = \int_{AB} Pcos\alpha ds$$

Так, делаем вывод о том, что компонента криволинейного интеграла второго рода выражается через криволинейный интеграл первого рода при помощи домножения на косинус угла между касательной к кривой в данной точке и соответстующей координатной осью, иными словами:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds$$

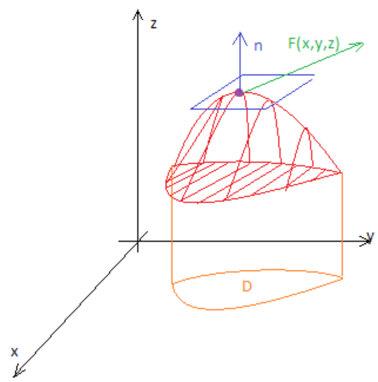
В приведенной формуле согласование такое: слева интегрирование идет от А к В, а справа углы надо выбирать для касательной, направление которой совпадает с направлением АВ.

Поверхностный интеграл первого рода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой обобщение двойного интеграла на произвольную поверхность в k-мерном пространстве подобно тому, как криволинейный интеграл представляет собой обобщение обычного интеграла на произвольную кривую в k-мерном пространстве.

Рассмотрим в качестве примера частный случай – задана область V в трехмерном пространстве, S – её поверхность, на поверхности S определена функция F(x,y,z), кроме того, предполагается, что S можно считать квадрируемой (имеющей площадь).



Как и в случае с двойным интегралом, разобьем поверхность S на элементарные площадки произвольным образом. Возьмем на этих площадках точки M_i. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} F(M_i)\Delta S_i$$

Если для этой интегральной суммы выполняется условие

$$diam\Delta S_i \to 0$$

То есть, наибольшее расстояние между точками границы площадок стремится к нулю, то поверхностный интеграл первого рода можно определить как

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F(M_i)\Delta S_i$$

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть поверхность задана в явном виде, то есть, как непрерывная дифференцируемая функция

$$z = f(x,y)$$

Введем в рассмотрение две дополнительные функции:

$$p(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

F(x,y,z) должна быть задана и непрерывна на S

Тогда существует предел интегральной суммы, называемый поверхностным интегралом первого рода, причем

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Посчитать поверхностный интеграл не так просто, как двойной интеграл, или. Ранее при переходе от обычного к криволинейному интегралу первого рода мы вводили некую добавку, которая появлялась естественным образом при выражении дифференциала, она была равна

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}$$

Было относительно очевидно, откуда берется это выражение, однако когда мы осуществляем переход не от двумерного пространства к одномерному (переход от криволинейного интеграла первого рода к обычному интегралу), а от трехмерного к двумерному (переход от поверхностного интеграла первого рода к двойному интегралу), ситуация несколько усугубляется. Итак, изначально мы имеем интеграл

$$\iint_S F(x,y,z)ds$$

Сначала выполняется замена переменных для перехода в двумерное пространство:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

Добавка, аналогичная таковой в более простом случае, описанном ранее, выглядит следующим образом:

$$|r_u \times r_v|$$

Где

$$\begin{cases} r_u = \dfrac{\partial r}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right) \\ r_v = \dfrac{\partial r}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right) \end{cases}$$

Таким образом

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_{D_{uv}} F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))|r_u \times r_v|dudv$$

Покажем, что отсюда вытекает простейший случай, разобранный ранее, когда поверхность задана явно, то есть, когда z=f(x,y), в таком случае:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

Посчитаем добавку:

$$|r_u \times r_v| = \left|\left(\frac{\partial x}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial y},\frac{\partial y}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right| = \left|\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right)\times\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left|\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)\right|$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Результат:

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Поверхностный интеграл обладает свойствами:

- Линейности
- Аддитивности
- Верна теорема о среднем
- Независимость от стороны поверхности

Кстати говоря, что касается стороны поверхности – чтобы понять, что это такое, выберем на поверхности S любой контур MPNQM и будем перемещать по нему нормаль к поверхности. В точке M нормаль может принять исходное положение или развернуться. Так вот, стороной поверхности называется совокупность точек поверхности, таких что перемещение нормали по любому контуру возвращает нормаль в исходное положение. Поверхность, у которой существуют контуры, разворачивают нормаль, называются односторонними (например – лист Мебиуса, бутылка Клейна).

Для двусторонней поверхности внешняя сторона определяется по направлению нормали, которая образует острый угол с осью OZ. Для внутренней стороны этот угол будет тупым.

Поверхностный интеграл второго рода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

Как и в случае с криволинейным интегралом, поверхностный интеграл второго рода отличается от поверхностного интеграла первого рода тем, что производится проектирование на координатные плоскости, а именно, ΔS_i проектируем на плоскость XOY, на плоскость XOZ и на плоскость YOZ. Если подынтегральная функция имеет вид

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{\imath} + Q(x,y,z)\bar{\jmath} + R(x,y,z)\bar{k}$$

То поверхностный интеграл второго рода принимает вид

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

С учетом вышеприведенных условий для непрерывных функций P,Q,R вычисление поверхностного интеграла производится по формуле

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$
$$= \iint_D P(x,y,f(x,y))dydz + Q(x,y,f(x,y))dxdz + R(x,y,f(x,y))dxdy$$

D – проекция S на плоскость XOY (для внешней стороны, для внутренней появляется знак «-»).

Вычисление поверхностного интеграла второго рода в общем случае довольно трудоемко и здесь не приводится

Связь поверхностных интегралов первого и второго рода

Вполне можно догадаться, что связь поверхностных интегралов первого и второго рода во многом напоминает связь криволинейных интегралов первого и второго рода, в частности, тем, что она тоже осуществляется через косинус.

Пусть поверхность S задана уравнением z=f(x,y) (простейший случай), кроме того, введем обозначения

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, \bar{n} - \text{нормаль к поверхности } S \text{ (имеет координаты } (cos\lambda, cos\mu, cosv))$$

$$\bar{n} = \frac{-p\bar{\imath} - q\bar{\jmath} + \bar{k}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

Аналогично тому, как связывали криволинейный интеграл первого и второго рода, свяжем поверхностные интегралы первого и второго рода, получим результат:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$
$$= \iint_D (P(x,y,z)cos\lambda + Q(x,y,z)cos\mu + R(x,y,z)cosv)ds$$

В приведенной формуле справа углы берутся между касательной плоскостью и соответствующей координатной плоскостью.

Формула Остроградского-Гаусса

ОБЩИЙ ВИД

Формула Остроградского – Гаусса позволяет связать тройные и поверхностные интегралы, что особенно полезно при вычислении потока векторного поля через поверхность:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Видно, что формула Остроградского-Гаусса – это трехмерный вариант формулы Грина, связывающей двойной интеграл с криволинейным

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим правильную область V, пусть D – проекция этой области на плоскость XOY.

Возьмем V такую, что снизу ее ограничивает поверхность z=φ(x,y), а сверху – z=χ(x,y), причем обе функции непрерывны и непрерывно дифференцируемы.

Рассмотрим функцию R(x,y,z) заданную на V, которая является неперерывной и в то же время непрерывно дифференцируемой по переменной z. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

Перейдем к двойному интегралу уже знакомым способом:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D \left(\iint_{\varphi(x,y)}^{\chi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right) dxdy = \iint\limits_D \Big(R\big(x,y,\chi(x,y)\big) - R\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\Big) dxdy$$
$$= \oiint\limits_S R(x,y,z) dxdy$$

Получили так называемую «малую» формулу теоремы Гаусса:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_S R(x,y,z) dxdy$$

Если проделаем аналогичный комплекс действий для каждой компоненты, то получим полную формулу Гаусса:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Формула Стокса и её приложения

ОБЩИЙ ВИД

Формула Стокса связывает криволинейный интеграл второго рода и поверхностный интеграл второго рода:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Согласование: интегрирование ведется по внешней стороне поверхности, а направление обхода по контуру L выбирается так, чтобы для наблюдателя, у которого нормаль к поверхности проходит от ног к голове, при движении по контуру поверхность остается слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Продолжим работу с тем же телом, что и было при доказательстве формулы Остроградского-Гаусса, но теперь возьмем три проекции тела на плоскости XOY, XOZ и YOZ соответственно : D_1 , D_2, D_3.

Будем далее полагать, что L – контур соединения поверхностей, ограничивающих тело (известных как φ и χ).

Попробуем определить связь поверхностного интеграла по телу V с криволинейным интегралом по контуру L.

Полное доказательство достаточно сложно для того, чтобы приводить его полностью, здесь же, однако, покажем способ, которым удобно запоминать формулу. Слева стоит криволинейный интеграл:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

А для восстановления вида правой части удобно использовать матрицу:

$$\begin{matrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ P & Q & R \end{matrix}$$

Вычеркиваем первую строку и первый столбец, на главной диагонали видим R и dy, на противоположной – Q и dz, соответственно, первое слагаемое в поверхностном интеграле будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz$$

Вычеркиваем первую строку и второй столбец, на главной диагонали видим R и dx, на противоположной – P и dz, соответственно, с учетом дополнительного минуса второе слагаемое в поверхностном интеграле будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz$$

Вычеркиваем первую строку и третий столбец, на главной диагонали видим Q и dx, на противоположной – P и dy, соответственно, третье слагаемое в поверхностном интеграле будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Теперь можем написать поверхностный интеграл, стоящий справа, целиком:

$$\oint\!\!\!\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Приравнивая два выведенных интеграла, получаем формулу Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint\!\!\!\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ СТОКСА

Формула Стокса позволяет установить необходимые и достаточные условия для того чтобы:

1. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой, лежащей внутри V, обращался в ноль
2. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой не зависел от пути интегрирования
3. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой являлся полным дифференциалом некоторой функции

Условия имеют вид:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Следует заметить, что формула Грина – частный случай формулы Стокса

Векторное поле: векторная линия, поток векторного поля через поверхность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Векторное поле определено, если с каждой точкой некоторой области T связано значение некоторой величины $\bar{a}(x, y, z)$, причем

$$\bar{a} = a_x \bar{\imath} + a_y \bar{\jmath} + a_z \bar{k}$$

Отсюда вытекает, что задание векторного поля равносильно заданию трех скалярных полей:

$$a_x(x, y, z, t), a_y(x, y, z, t), a_z(x, y, z, t)$$

Если t тождественно равно нулю, то поле стационарное

ВЕКТОРНАЯ ЛИНИЯ

Зададим в векторном поле линию L, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением поля, тогда L – по определению – **векторная линия**

Возьмем в области T линию, в каждой точке которой проходит векторная линия. Тогда множество этих векторных линий образует **векторную поверхность**. Замкнутую векторную поверхность, как правило, называют **векторной трубкой**.

Если векторная линия L задана пересечением двух поверхностей, то есть задана следующим образом:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

То при условии, что вектор $\bar{\tau}(dx, dy, dz)$ – вектор касательной к линии, то, поскольку можно говорить о том, что L параллельна заданному векторному полю, верно двойное равенство:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

Из полученной системы дифференциальных уравнений можно найти систему линий заданного поля.

Для нахождения векторной линии, проходящей через заданную точку, надо будет решить задачу Коши.

ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

Пусть в области T находится двусторонняя поверхность, на которой выбрана элементарная площадка, считающаяся плоской за счет ее размера, причем ΔS – площадь площадки, а $\bar{n}$ – нормаль к этой площадке.

Обозначим $a_n =$ проекция вектора $\bar{a}$ на направление $\bar{n}$

Элементарным потоком векторного поля через площадку ΔS называется величина $Q=a_n*\Delta S$.

Если всю поверхность разбить на площадки, устремить количество этих площадок к бесконечности, а площадь каждой – к нулю, то получим поток вектора через поверхность S (в выбранную сторону) :

$$Q = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\Delta S_k$$

Механический смысл потока Q:

$$Q = \iint\limits_S a_n ds - \text{криволинейный интеграл первого рода}$$

$$Q = \iint\limits_S a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy - \text{криволинейный интеграл второго рода}$$

Так, если a – поле скоростей текущей жидкости, то Q – количество жидкости, протекающей через поверхность в единицу времени.

S – замкнутая поверхность (по внешней стороне), тогда Q – разность между вытекающей и втекающей жидкостью

Q > 0 – внутри тела источник жидкости

Q < 0 – внутри тела сток жидкости

Q = 0 – вытекает и втекает равное количество жидкости

Дивергенция и ее свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Дивергенция – расходимость векторного поля

Будем рассматривать все то же самое векторное поле

$$\bar{a} = a_x(x,y,z)\bar{\imath} + a_y(x,y,z)\bar{\jmath} + a_z(x,y,z)\bar{k}$$

Его дивергенция определяется как скалярная характеристика векторного поля:

$$div\bar{a} = \nabla\bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\left(a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}\right) = \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}$$

В соответствии с формулой Остроградского-Гаусса, которая имеет вид:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_S a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy$$

Можем записать:

$$\iiint\limits_V div\bar{a}dxdydz = \oiint\limits_S a_n ds$$

То есть, мы убедились в том, что поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу дивергенции векторного поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

Механический смысл дивергенции:

Выберем в теле V элементарный объем V_n, ограниченный поверхностью S_n, тогда поток

$$Q_n = \iiint\limits_{V_n} div\bar{a}dxdydz$$

По теореме о среднем:

$$Q_n = div\bar{a}(M)V_n, \text{тогда } div\bar{a}(M) = \frac{Q_n}{V_n} \xrightarrow[V_n\to 0]{} A - \text{мощность источника (стока) внутри тела}$$

СВОЙСТВА ДИВЕРГЕНЦИИ

1. Линейность:
$$div(c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2) = c_1 div\bar{a}_1 + c_2 div\bar{a}_2$$
2. Если u(x,y,z) – скалярное поле, то:
$$div(u\bar{a}) = udiv(\bar{a}) + \bar{a}grad(u)$$
Доказательство:
$$u\bar{a} = ua_x\bar{\imath} + ua_y\bar{\jmath} + ua_z\bar{k}$$
$$div(u\bar{a}) = \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} + \nabla\nabla\nabla\frac{\partial(ua_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \bar{a}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right)$$

3. Дивергенция градиента скалярного поля:
$$divgradu = \nabla\nabla\mathrm{u} = \Delta\mathrm{u} = div\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z}$$
4. Градиент дивергенции векторного поля:
$$graddiv\bar{a} = grad\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bar{k}$$

Циркуляция и ротор векторного поля

РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Ротор (вихрь) поля – вектор

$$\bar{\nabla}\times\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = rot\bar{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}$$

Подобная запись уже встречалась в правой части формулы Стокса

Пусть в векторном поле лежит замкнутая кривая L, в каждой точке которой проведена касательная, направление которой задается вектором $\bar{\tau}$. Пусть также есть поверхность S, натянутая на контур L, тогда можно воспользоваться теоремой Стокса следующим образом:

$$\oint_L a_\tau dl = \oiint_S rot\bar{a}\bar{n}ds$$

То есть, циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку вихря поля через поверхность, натянутую на этот контур.

Если ротор тождественно равен нулю, то поле потенциально, иначе поле называют вихревым

ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть в векторном поле лежит некоторая линия L. Тогда, если L замкнута, то:

$$\oint_L a_\tau ds - \text{циркуляция векторного поля } \bar{a} \text{ по замкнутой кривой } L$$

В записи выше под a_τ подразумевается проекция вектора $\bar{a}$ на направление касательной к кривой

ТЕОРЕМА О ВИХРЕВОМ ПОЛЕ

Если поле вихревое (rot не нулевой), то оно соленоидально (div нулевая).

Доказать это утверждение достаточно просто, достаточно показать, что дивергенция ротора такого поля будет равна нулю:

$$
\begin{aligned}
div rot\bar{a} &= div\left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{\imath}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{\jmath}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\\
&=\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y\partial z}\\
&=\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial z}\right)=0
\end{aligned}
$$

ТЕОРЕМА О ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

Если векторное поле потенциально (rot нулевой), то $\bar{a}$ представляет собой градиент некоторого скалярного поля u.

Доказательство:

1) Предположим, что $\bar{a}$ – действительно градиент некоторой скалярной функции u:

$$\bar{a}=gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

$$
\begin{aligned}
rot\bar{a}=rotgradu&=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{\imath}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{\jmath}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}\\
&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\bar{\imath}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)\bar{\jmath}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\bar{k}=0
\end{aligned}
$$

2) Предположим теперь, что ротор нулевой, тогда равна нулю и циркуляция поля, однако, в соответствии с теоремой стокса, циркуляция равна

$$Ц=\oint_L a_\tau dl=0$$

Значит, $a_\tau dl$ – дифференциал некоторой функции, а $\bar{a}=gradu$

Операторы Гамильтона и Лапласа

ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам:

$$gradu=\bar{\nabla}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)u(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

Дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций, эквивалентный последовательному взятию градиента и дивергенции:

$$divgradu=\bar{\nabla}\bar{\nabla}u=\Delta u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(x,y,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

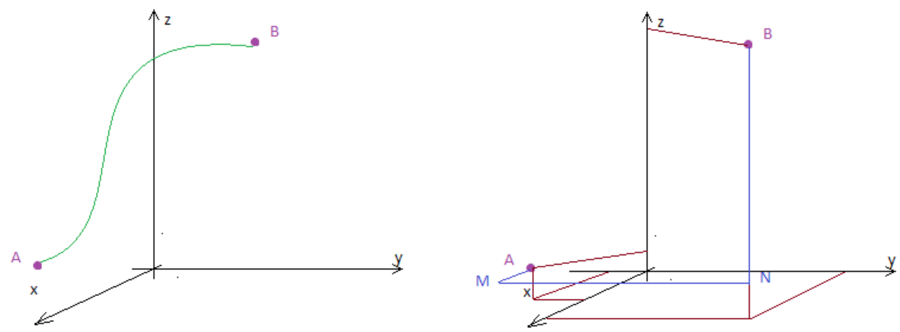
by zeionara

Потенциальное векторное поле. Соленоидальное векторное поле.

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле потенциально, если его ротор равен нулю (иначе – вихревое, а значит, и соленоидальное)

При расчете криволинейного интеграла потенциального поля, поскольку величина интеграла зависит только от конечных точек кривой, вычисления могут быть упрощены следующим образом:



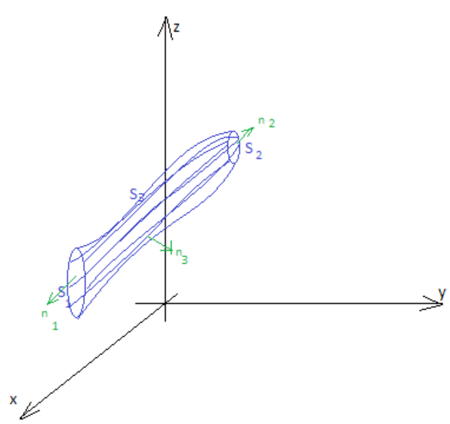
$$\int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{AM} a_x dx + \int_{MN} a_y dy + \int_{MB} a_z dz$$

Если векторное поле потенциально, то оно является градиентом некоторой скалярной функции, в таком случае при интегрировании получается, что интеграл зависит только от начальной и конечной точек.

СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле называется соленоидальным, если его дивергенция равна нулю.

Рассмотрим подробнее векторную трубку в соленоидальном поле:



Пусть $\bar{a}$ – соленоидальное поле, S_3 – векторная поверхность (замкнутая), S_1 и S_2 – её сечения. Касательная к векторной трубке параллельна полю, значит, проекция векторного поля на нормаль n_3 равна нулю. Поток векторного поля через поверхность:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1 + Q_2 = \iiint\limits_V div\bar{a}\, dxdydz = 0$$

Отсюда следует, что

$$\iint\limits_{S_1} \bar{a}_{-\bar{n}_1} ds = \iint\limits_{S_2} \bar{a}_{\bar{n}_2} ds$$

То есть, поток вектора через векторную трубку не зависит от сечения и является величиной постоянной. Эта величина – напряжение векторной трубки.

Теперь пусть $\bar{a} = \bar{v} = v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath} + v_z\bar{k}$, поскольку $\bar{v}$ – соленоидальное поле, то :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 - \text{уравнение неразрывности}$$

Пусть u(x,y,z) – скалярное поле

Для того, чтобы поле градиента скалярной функции было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы скалярная функция была гармонической.

Если u-гармоническая функция, то $\nabla u = 0$

Числовые ряды. Необходимый признак сходимости. Свойства сходящихся рядов.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Ряды – новая форма изучения последовательностей. Допустим, у нас есть бесконечная последовательность чисел:

$$a_1, a_2, a_3, \dots , a_n, \dots$$

Будем ставить в соответствие этой последовательности сумму:

$$a_1, a_2, a_3, \dots , a_n, \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \text{ряд, по определению}$$

Теперь введем в рассмотрение еще одну последовательность, связанную с предыдущей следующим образом:

$$A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots , A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i , \dots$$

Такая последовательность, которая ставится в соответствие некоему ряду, называется последовательностью частичных сумм.

Конечный или бесконечный предел последовательности частичных сумм называется суммой ряда, а именно, если A – сумма ряда, то

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Причем если модуль суммы ряда меньше бесконечности, то считается, что ряд сходится, в противном случае считается, что ряд расходится.
По виду последовательности частичных сумм можно установить исходную последовательность, то есть, если мы имеем последовательность частичных сумм

$$A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \dots$$

То члены ряда выражаются через последовательные частичные суммы следующим образом:

$$\begin{gathered} a_1 = A_1 \\ a_2 = A_2 - A_1 \\ a_3 = A_3 - A_2 \\ \dots \\ a_n = A_n - A_{n-1} \\ \dots \end{gathered}$$

Если в сумме ряда отбросить m первых слагаемых, то получится остаток ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{m+i}$$

ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ ОСТАТКА РЯДА

Если ряд сходится, то сходится и любой его остаток (и наоборот), при этом сумма остатка не совпадает с суммой ряда. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, но влияет на сумму.

Доказательство:

Возьмем сходящийся ряд и введем обозначение его суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{m+i} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{k=1}^{m} a_k = A - \sum_{k=1}^{m} a_k < \infty$$

ТЕОРЕМА О СТРЕМЛЕНИИ К НУЛЮ ОСТАТКА РЯДА

Если исходный ряд сходится, то его остаток стремится к нулю с возрастание количества отброшенных членов.

Доказательство:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{m+i} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{k=1}^{m} a_k \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0$$

ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ СУММЫ ДВУХ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходятся, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – тоже сходится

Причем, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$

ТЕОРЕМА О ЛИНЕЙНОСТИ СХОДИМОСТИ

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ тоже сходится, причем $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \text{c}A$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ КАК ЧИСЛОВОЙ РЯД

Известно, что геометрическая прогрессия имеет вид

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$$

Будем пока рассматривать только ситуацию, когда q > 0

Найдем частичную сумму введенного ряда:

$$A_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$A_n + aq^n = a + (a + aq + \cdots + aq^{n-1})q$$

$$A_n + aq^n = a + A_n q$$

Откуда получаем, что

$$A_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

1) $q < 1 => q^n \to 0 => A_n \to \frac{a}{1-q}$
   Получается, что тогда $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
2) $q \geq 1$:
   a. $q = 1 => A_n = an \to \infty$
   b. $q > 1 => q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty => A_n \to \infty$

Делаем отсюда вывод:

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \left[\begin{array}{l} \text{сх}, 0 < q < 1 \\ \text{расх}, q \geq 1 \end{array}\right.$$

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

Общий член ряда стремится к нулю при стремлении n к бесконечности

Доказательство:

Рассмотрим две частичных суммы:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} A_{n-1} = A \end{cases}$$

Выходит, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = 0 = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

То есть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Итак, если

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

То ряд расходится, а если

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

То ряд либо сходится, либо расходится (необходимым условием для сходимости ряда является стремление к нулю его общего члена, если это условие не выполнено, то ряд сходиться не может).

Основная теорема о сходимости положительных рядов. Гармонический ряд.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Положительным рядом называется такой ряд:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{, в котором } a_i \geq 0$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \text{, } A_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \text{, причем } A_n \leq A_{n+1}$$

$$\{A_n\}_{n=\overline{1,\infty}} - \text{неубывающая последовательность}$$

Собственно, сама теорема:

Положительный ряд сходится, если $\{A_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ ограничена сверху, то есть если

$$\exists\, c : \ A_n \leq c \ \forall\, n \in N$$

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

Имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Видно, что общий член ряда стремится к нулю (необходимое условие сходимости выполнено, поэтому надо исследовать дальше, если бы не было выполнено – то ряд бы расходился)

Рассмотрим частичную сумму такого вида:

$$A_{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

Здесь 2n-1 слагаемых, каждое из которых больше, чем $\frac{1}{2n}$, поэтому можем записать, что

$$A_{2n-1} > \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n \to \infty} A_{2n-1} = 1$$

С другой стороны:

$$A_{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

Слева от $\frac{1}{n}$ n-1 слагаемых, а справа (включая само $\frac{1}{n}$) – n слагаемых. Можно показать, что правая часть этой частичной суммы больше чем $\frac{1}{2}$: как уже было сказано, там n слагаемых, каждое из которых больше чем $\frac{1}{2n}$, поэтому:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Теперь возвращаемся к нашему ряду и рассмотрим его более внимательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \cdots$$
$$= (1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}\right) + \cdots$$

Каждая из скобок больше $\frac{1}{2}$, что было показано выше, то есть, такой ряд не ограничен сверху (последовательность частичных сумм не ограничена сверху – каждая частичная сумма заведомо больше $\frac{1}{2}$), а значит, расходится, хотя и очень медленно.

Теоремы сравнения рядов

Есть два ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} b_i \text{, причем } a_i \leq b_i \text{ начиная с некоторого номера}$$

ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ БОЛЬШЕГО РЯДА

Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, то $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ тоже сходится

ТЕОРЕМА О РАСХОДИМОСТИ МЕНЬШЕГО РЯДА

Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится, то $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ тоже расходится

ТЕОРЕМА ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ СХОДИМОСТИ/РАСХОДИМОСТИ

Если $\lim_{i \to \infty} \frac{a_i}{b_i} = c, c > 0, c < \infty$ то ряды сходятся или расходятся одновременно

ТЕОРЕМА О ДВУХШАГОВОМ СРАВНЕНИИ

Возьмем новые два ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall n$ (ряд b растет быстрее ряда a), то из сходимости ряда b следует сходимость ряда a, а из расходимости a – сходимость b

Приведем пример использования этой теоремы на двух рядах:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Для первого ряда:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 * 2^n}{n!\,(n+1)} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

Для второго ряда:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^n}{2 * 2^n} = \frac{1}{2}$$

Имеет место неравенство

$$\frac{2}{n+1} \le \frac{1}{2} \text{ для } n \ge 3$$

Признак Коши

Если при достаточно больших n существует число q, 0 < q < 1 и $\sqrt[n]{a_n} \le q$, то ряд сходится.

Доказательство довольно простое:

$$\text{Если } \sqrt[n]{a_n} \le q, \text{то } a_n \le q^n, \text{а поскольку } \sum_{n=1}^{\infty} q^n \text{ сходится (доказано ранее), то и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Таким образом, признак Коши – частный случай теоремы о сходимости большего ряда, в котором больший ряд – всегда бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Более удобно пользоваться предельной формой признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \text{ , то при } q < 1 \text{ ряд сходится, при } q > 1 - \text{расходится, при } q = 1 - \text{не понятно}$$

Пример использования признака Коши:

$$\text{Рассмотрим ряд } \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}<1 \Rightarrow \text{сходится}$$

Признак Даламбера

Если $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ — расходится, при $q=1$ — не понятно

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{a}{n}\right)^n, a>0$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)n!\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}*\left(\frac{n}{a}\right)^n*\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e}-\text{сходится при } 0<a<e$$

$$\text{При } a>e \text{ и при } a=e \left(\text{поскольку}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e\right)\text{ряд расходится}$$

Интегральный признак Коши-Маклорена. Обобщенный гармонический ряд.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ-МАКЛОРЕНА

Рассматривается функция $y=f(x)$ — непрерывна и убывает при $x\geq 1$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ представляется как a_n

$=f(n)$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно

ОБОБЩЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, p>0$$

Применим интегральный признак Коши-Маклорена к исследованию этого ряда. Роль непрерывной функции, убывающей при $x\geq 0$ будет играть $f(x)=\frac{1}{x^p}$

Тогда можем перейти к рассмотрению интеграла

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^{\infty}=\begin{cases}+\infty, p\leq 1\\ \frac{1}{p-1}, p>1\end{cases}$$

Рассмотрим два примера.

Первый:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{2n^2-n+3}$$

Для того, чтобы выбрать «правильный» гармонический ряд, посмотрим на степени. Сверху наибольшая – 0,5, снизу наибольшая – 2, значит, нам нужна степень 1,5, то есть, вводим еще один ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,5}}$$

Эти два ряда сходятся одновременно по теореме об одновременной сходимости, а именно:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{2n^2-n+3} * n^{1,5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{2n^2-n+3} = \frac{1}{2}$$

Гармонический ряд сходится, откуда следует сходимость исходного ряда.

Второй:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n+\sqrt{n+3}+4}+1}}{n+5}$$

Сверху наибольшая степень – 0,25, снизу -1, выбираем гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,75}}$$

Который расходится, значит, расходится и исходный ряд

Знакочередующиеся ряды. Критерий Коши. Абсолютная сходимость знакочередующихся рядов.

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ члены имеют разные знаки, то ряд называется знакопеременным.

Если при этом члены имеют еще и чередующиеся знаки, то ряд называется знакочередующимся.

Знакочередующиеся ряды могут расходиться абсолютно, но при том сходиться не-абсолютно (условно).

КРИТЕРИЙ КОШИ

Для того чтобы закопеременный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \text{ номер } N : \; \forall n \geq N \; |A_{n+m} - A_n| < \varepsilon \text{ при любом } m \in N$$

Наряду с уменьшением общего члена ряда по модулю необходимо, чтобы и суммы любого количества членов ряда с ростом n уменьшались по модулю

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИХСЯ РЯДОВ

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно (по абсолютным величинам).

Из абсолютной сходимости следует обычная сходимость, поскольку модуль суммы всегда не больше суммы модулей.

Теорема Лейбница

Если есть знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

И выполнены два условия

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак сходимости)
2) $a_n \geq a_{n+1} \forall n \leq N$ (члены ряда убывают по модулю)

То ряд сходится не-абсолютно (условно)

Доказательство:

Возьмем для начала такую частичную сумму:

$$A_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

Если выполнено второе условие теоремы Лейбница, то каждая скобка неотрицательна, а значит, последовательность частичных сумм $\{A_{2m}\}_{m\in N}$ – возрастающая.

С другой стороны,

$$A_{2m} = \ a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2m}$$

Если выполнено второе условие теоремы Лейбница, то каждая скобка неотрицательна, а значит, $A_{2m} \leq a_1$

$$\exists \lim_{m\to\infty} A_{2m} = A$$

Мы можем рассмотреть соотношение

$$A_{2m} = A_{2m-1} - a_{2m}$$

Перейдем к пределу:

$$\lim_{m\to\infty} A_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} A_{2m} - \lim_{m\to\infty} a_{2m} = A - 0 = A$$

$$A_{2m} < A < A_{2m-1}$$

Вывод: знакочередующийся ряд имеет сумму, совпадающую со знаком первого члена ряда и не превосходит по модулю первого члена.

Замечание:

Остаток ряда $r_n = (-1)^n(a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots)$

Выражение в круглых скобках положительно и не превосходит a_n.

Погрешность вычисления не превосходит последнего оставленного или первого отброшенного члена.

$$|r_n| \le |a_n|$$

Замечание:

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится в соответствии с радикальным признаком Коши или признаком Даламбера, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Расходится и теорему Лейбница смотреть не нужно, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Пример использования теоремы Лейбница. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{lnn}{n}$$

Проверим на абсолютную сходимость, для этого воспользуемся интегральным признаком Коши-Маклорена:

$$\int_1^{\infty} \frac{lnx}{x} dx = \int_1^{\infty} lnxd(lnx) = \infty - \text{расходится}$$

Итак, ряд расходится абсолютно. Теперь используем теорему Лейбница для проверки на условную сходимость:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{lnn}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 - \text{первое условие выполнено}$
2) Для того, чтобы проверить условие $\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{lnn}{n}$ найдем производную выражения $\frac{lnn}{n}$:
$$\left(\frac{lnn}{n}\right)' = \frac{1 - lnn}{n^2} < 0 \text{ при } n \ge 3 = \\ > \text{члены ряда убывают по модулю, то есть, второе условие тоже выполнено}$$

Делаем вывод, что ряд сходится условно.

Теорема Римана. Пример.

ТЕОРЕМА РИМАНА

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Сходится условно, то какое бы ни взять число l, конечное или бесконечное, члены ряда можно переставить таким образом, что его сумма будет равна именно l.

ПРИМЕР

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=B$$

$$B=\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4x-2}-\frac{1}{4x}\right)=\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4x-2}-\frac{1}{4x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{2}B$$

Условная сходимость осуществляется за счет взаимного погашения членов ряда, и потому существенно зависит от порядка, в котором они следуют друг за другом. В то время как абсолютная сходимость определяется скоростью убывания членов ряда.

Функциональные ряды. Область сходимости. Мажорируемые ряды.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \text{функциональный ряд}$$

При разных x получаются разные числовые ряды

Множество значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости этого ряда. В области сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)=S(x)$$

Простейший пример функционального ряда – та же геометрическая прогрессия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots$$

Если это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (x в интервале (-1;1)), то

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=S(x)=\frac{1}{1-x}$$

Функциональный ряд называется мажорируемым в некоторой области изменения x, если существует сходящийся положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$такой, что для каждого x из заданной области выполняется соотношение

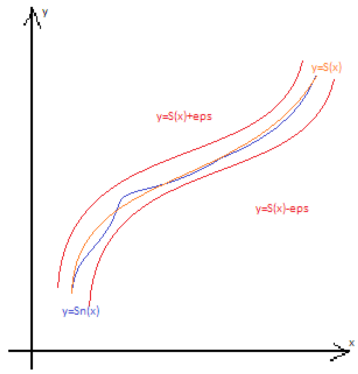
$$|a_n(x)|\le\alpha_n, \forall n\in N$$

Функциональный мажорируемый ряд сходится

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ мажорируем на отрезке [a,b], тогда

$$\forall\varepsilon>0\exists N_0: \text{для } n>N_0 \text{ верно } |S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

Геометрический смысл:



Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ называется равномерно сходящимся на интервале [a,b] если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \colon \forall n \geq N_0 |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \forall x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$$

ПРИЗНАК ВЕЙЕРШТРАССА

Любой мажорируемый ряд сходится равномерно. Например, возьмем простой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

Остаток ряда выглядит следующим образом:

$$r_n = \left| \begin{matrix} b_1 = x^n \\ q = x \end{matrix} \right| = \frac{x^n}{1-x} = S(x) - S_n(x)$$

Для того, чтобы доказать равномерную сходимость ряда, требуется доказать, что

$$r_n < \varepsilon \forall x \epsilon (-1; 1)$$

Перейдем к пределу остатка ряда:

$$\lim_{x \to -1+0} |r_n| = \lim_{x \to -1+0} \left| \frac{x^n}{1-x} \right| = \frac{1}{2}$$

Это говорит о том, что при приближении к левой границе промежутка остаток ряда приближается к значению $\frac{1}{2}$. То есть, если мы возьмем $\varepsilon < \frac{1}{2}$, то не сможем найти такого N_0, для всех n больше которого остаток ряда будет меньше $\frac{1}{2}$.То есть, ряд сходится неравномерно.

Геометрическая прогрессия сходится неравномерно.

Примеры равномерно сходящихся рядов:

1) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ на промежутке [0,1]
   Исследуем на равномерную сходимость:

Преобразуем общий член ряда следующим образом:

$$\frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} * \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}$$

То есть, увеличивая n, можно сколь угодно уменьшать остаток ряда, поскольку $f_n(x) > 0$ на рассматриваемом промежутке.

Таким образом, требуется обеспечить выполнение условия:

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon => n > \frac{1}{2\varepsilon} => N_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] - \text{ряд сходится равномерно}$$

2) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ на промежутке $[0,1]$

Тут дела обстоят немного по-другому. Мы можем взять $x = \frac{1}{n}$ и тогда случится страшное:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Соответственно, можем взять $\varepsilon < \frac{1}{2}$, и тогда остаток ряда не будет меньше $\frac{1}{2}$ при всех x из указанного промежутка, то есть, ряд сходится неравномерно

СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Будем рассматривать функциональный ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

1) Если $f_n(x) \forall n$ непрерывна в области D, то f(x) непрерывна в области D
2) $\lim\limits_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$

   x_0 – предельная точка области D

Степенные ряды. Теорема Абеля.

Степенной ряд выглядит как

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Где $a_0,\ a_1, a_2, \dots, a_n$ – числа из $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

Если степенной ряд:

1) Сходится при $x=x_0$, то сходится и при любом x, по модулю меньшем x_0
2) Расходится при $x=x_1$, то расходится и при любом x, по модулю большем x_1

Доказательство:

$$] \ x = x_0 => a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \dots + a_n {x_0}^n < \infty => \lim_{n \to \infty} a_n {x_0}^n = 0 =>$$
$$\exists M > 0 : |a_n {x_0}^n| < M \forall n$$

То есть, ограничим общий член ряда сверху некоторым положительным числом M

Затем перепишем ряд:

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 {x_0}^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots + a_n {x_0}^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

Для изучения абсолютной сходимости рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n {x_0}^n M = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится}$$

Но $\left|a_n {x_0}^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| < b_n$=> сходится

Интервал сходимости степенного ряда. Способы определения радиуса сходимости степенного ряда.

ИНТЕРВАЛ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Интервал сходимости степенного ряда:

$$|x| \leq |x_0|$$

Интервал расходимости степенного ряда:

$$(-\infty; -|x_1|]U[|x_1|; +\infty)$$

Теорема:

Интервал сходимости степенного ряда – отрезок с центром в начале координат.

Определение:

Радиус сходимости степенного ряда – неотрицательное число R, такое что

$$\begin{gathered} \text{при } x \in < -R; R > \text{сходится абсолютно} \\ \text{при } x \in (-\infty; -R > U < R; +\infty) \text{ расходится} \end{gathered}$$

В точках $\pm R$ требуется дополнительное исследование для определения вида скобки

СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИУСА СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Будем рассматривать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x|^n$$

Первый способ основан на использовании признака сходимости Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = Lx$$

Соответственно, радиус сходимости равен

$$R = \frac{1}{L} = \frac{x}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n}}$$

Второй способ основан на использовании признака сходимости Коши (радикального):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = Lx$$

Соответственно, радиус сходимости равен

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

В качестве примера определим радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

По признаку Даламбера:

$$R = \frac{x}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} * \frac{n}{x^n}} = 1$$

Проверяем на границах:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится как гармонический}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ сходится условно как ряд Лейбница}$$

Интервал сходимости, таким образом, принимает вид

$$[-1; 1)$$

Свойства степенных рядов

1) Степенной ряд мажорируем на любом отрезке [-r;r], полностью лежащем внутри интервала сходимости.
2) На [-r;r] ряд сходится равномерно
3) На [-r;r] $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна
4) Для двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, сходящихся в D, верно:
    a. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$
    b. $c \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$
    c. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n * \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 x + a_1 b_0 x) + (a_0 b_2 x^2 + a_1 b_1 x^2 + a_2 b_0 x^2) + \cdots + \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} x^n$
    d. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$
    e. $\int_{\alpha}^{x} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} a_n x^n dx + C$

Рассмотрим два примера

Первый:

$$\text{Найти сумму ряда } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Для упрощения действий продифференцируем:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

Полученный результат проинтегрируем:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = f(x)$$

При интегрировании константу взяли равной нулю, потому что f(x)=0

Второй:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, |x| < 1$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Проинтегрируем:

$$\int f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

5) Теорема единственности:
Если R – наименьший радиус сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ и если

$$\exists r \in (-R; R): \forall x, \text{удовлетворяющих условию } |x| < r \text{ верно } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \text{то коэффициенты рядов совпадают}$$

ОБОБЩЕНИЕ СТЕПЕННОГО РЯДА

Степенным рядом называется и вот такой ряд:

$$a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \dots + a_n(x-\alpha)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$$

Как видно, рассматриваемый ранее (стандартный) степенной ряд получается из этого при α=0

Область сходимости – отрезок с центром в точке α, поскольку теперь

$$-R < x - \alpha < R$$

$$\alpha - R < x < \alpha + R$$

Ряды Тейлора

Если y=f(x) имеет производные до n+1 – го порядка включительно, то имеет место разложение этой функции в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x) - \text{формула Тейлора}$$
$$R_n(x) - \text{бесконечно малая более высокого порядка, чем } (x-a)^n$$

К ряду Тейлора можно перейти, если существуют производные любого порядка и

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Если такого предела не существует или же он не стремится к нулю, то ряд все равно может сходиться, но не к функции f(x)

Ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Если a=0, то получается частный случай – ряд Маклорена:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Теорема. Если f(x) на [-H;0] или [0;H] имеет каждые производные, и все они ограничены, то есть

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le L \forall n$$

То имеет место разложение в ряд Маклорена.

Доказательство: по остатку $R_n(x)$:

$$|R_n(x)| \le \frac{LH^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Вывод: функция f(x) представляется в виде ряда

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)x^n}{n!} - \text{бесконечное разложение}$$

Разложение функций e^x, sinx, cosx в ряд Маклорена. Формулы Эйлера.

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ В РЯД МАКЛОРЕНА

Выведем разложение экспоненты в ряд Маклорена:

$$f(x)=e^x$$

$$f(x)=e^0+e^0*x+\frac{e^0*x^2}{2}+\cdots+\frac{e^0*x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Итак,

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ КОСИНУСА В РЯД МАКЛОРЕНА

$$f(x)=cosx$$

$$f(x)=\cos(0)-\sin(0)*x-\frac{\cos(0)*x^2}{2}+\frac{\sin(0)*x^3}{6}+\frac{\cos(0)*x^4}{24}\ldots+\frac{(-1)^n*\cos(0)*x^{2n}}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Итак,

$$cosx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ СИНУСА В РЯД МАКЛОРЕНА

$$f(x)=\sin x$$

$$f(x)=\sin(0)+\cos(0)*x-\frac{\sin(0)*x^2}{2}-\frac{\cos(0)*x^3}{6}+\frac{\sin(0)*x^4}{24}+\cdots+\frac{(-1)^n*\cos(0)*x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Итак,

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Возьмем два ряда

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ и } e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

И сложим их. Нечетные степени сократятся, а четные – удвоятся:

$$e^x + e^{-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Если поделить это пополам, получится соотношение, похожее на разложение косинуса, но без минус единицы в степени n. Такое соотношение назвали гиперболическим косинусом:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Аналогичным образом придумали гиперболический синус:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Теперь сделаем вот что. Попробуем разложить в ряд

$$e^{x+iy}$$

Интерес представляет разложение комплексной составляющей, поэтому будем заниматься только ей:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{6} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!}$$

Известно, что можно сделать со степенями мнимой единицы:

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{iy^5}{120} - \frac{y^6}{720} \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^n i y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Очевидно, композицию можно разбить на две части – разложение e^{iy} наполовину состоит из разложения косинуса, наполовину – из разложения синуса:

$$e^{iy} = cosy + isiny$$

Аналогично тому, как мы взяли два ряда в начале, исследуем комплексный ряд со знаком минус:

$$e^{-iy} = 1 - iy + \frac{(iy)^2}{2} - \frac{(iy)^3}{6} + \cdots + \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} - \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Соответственно:

$$e^{-iy} = 1 - iy - \frac{y^2}{2} + \frac{iy^3}{6} + \frac{y^4}{24} - \frac{iy^5}{120} - \frac{y^6}{720} \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} - \frac{(-1)^n i y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

И выходит, что

$$e^{-iy} = cosy - isiny$$

Теперь складываем и вычитаем два разложения, получим:

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2cosy$$

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2isiny$$

Если первое выражение разделим на 2, а второе – на 2i, то получим две знаменитые формулы Эйлера:

$$cosy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$siny = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Из этих соотношений вытекает, что

$$cosy = chiy$$
$$siny = \frac{shiy}{i}$$
$$cos1 = chi$$
$$cosi = ch1$$

Биномиальный ряд

Ряд вида

$$f(x) = (1 + x)^m, m = const$$

f(x) удовлетворяет ДУ

$$\begin{cases} (1 + x)f'(x) = mf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Надо найти разложение в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

f(0)=1, значит, a_0=1

$$f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x \quad + \cdots + na_nx^{n-1}$$

Подставляем в первое уравнение системы:

$$(1 + x)(a_1 + 2a_2x \quad + \cdots + na_nx^{n-1}) = m(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$

А дальше перебираем коэффициенты, приравнивая их из левой и из правой части:

$$x^0: a_1 = m$$

$$x^1: a_1 + 2a_2 = ma_1 => \ a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$x^2: 2a_2 + 3a_3 = ma_2 => a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

$$\dots$$

$$x^{n-1}: (n-1)a_{n-1} + na_n = ma_{n-1} => a_n = \frac{(m-n+1)a_{n-1}}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$

Итак, биномиальный ряд:

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$$

При m=-1 – геометрическая прогрессия:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Разложение функций в биномиальные ряды возможно при $|x| < 1$, но в отдельных случаях ряды могут сходиться при x=1 или x=-1 (как знакочередующиеся).

Разложение в ряд арксинуса и арктангенса

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД АРКТАНГЕНСА

$$f(x) = arctgx$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Раскладываем как биномиальный ряд:

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Потом интегрируем:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Константа после интегрирования равна нулю, поскольку arctg(0)=0

Итак,

$$arctgx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

С помощью этого выражения можно считать число пи с требуемой точностью:

$$arctg1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Но на практике такое выражение не используется, потому что ряд медленно сходится. Гораздо чаще используется разложение арксинуса.

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД АРКСИНУСА

$$f(x) = arcsinx$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Раскладываем в биномиальный ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}$$

Интегрируем:

$$\int \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \int x^{2n} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$$

Итак,

$$arcsinx = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$$

Сходится очень быстро, для расчета знаков числа пи используется часто

Логарифмический ряд

Разложим в ряд логарифм

$$y = \ln(1+x) = \int \ln'(1+x)dx = \int \frac{dx}{1+x} = \int (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!} (-1)^n x^n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^n dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Итак,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

А что было бы, если бы поставили «минус»?

$$y = \ln(1-x) = \int \ln{}'(1-x)dx = \int \frac{dx}{1-x} = \int (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!}(-1)^{2n}x^n)dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{x^n}{n} \right)$$

Если n- четное, то член равен нулю

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) = ln\frac{1+x}{1-x}$$

Нам надо как-то связать x и n. Сделаем так:

$$ln\frac{1+x}{1-x} = ln\frac{n+1}{n}$$

Чтобы это было верно, требуется, чтобы:

$$n + nx = n + 1 - nx - x$$

$$x(2n+1) = 1$$

$$x = \frac{1}{2n+1} => x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2n+1} \right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+2}$$

Итак,

$$\ln(n+1) = \ln(n) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+2}$$

Вычисление определенных интегралов с помощью рядов

Рассмотрим тут три примера вычисления определенных интегралов, которые посчитать другими способами затруднительно или невозможно.

Первый:

$$\int_0^a e^{-x^2} dx$$

$$\Phi = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Второй:

$$sit = \int_0^x \frac{sint}{t} dt$$

$$sit = \int_0^x \frac{sint}{t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,2n+1}$$

Третий:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi d\varphi}\,, k < 1 - \text{эллиптический интеграл}$$

Разложим в биномиальный ряд:

$$\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi} = (1+t)^{\frac{1}{2}} \Big|_{t\,=\,-k^2 sin^2\varphi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} (-1)^{n-1} x^n \Big|_{t\,=\,-k^2 sin^2\varphi}$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} (-1)^{2n-1} k^{2n} sin^{2n}\varphi \quad = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} sin^{2n}\varphi$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} sin^{2n}\varphi \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\varphi d\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\varphi d\varphi$$

Ряды Фурье

Ряд Фурье – функциональный ряд, который имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 sinx + a_2 cos2x + b_2 sin2x + \cdots + a_n cosnx + b_n sinnx + \cdots$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx$$

Период: $T_n = \frac{2\pi}{n}$ (наименьший положительный период)

Если функция представлена в виде стандартного ряда Фурье, то она имеет наименьший положительный период, равный 2π

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

Пусть заданный ряд Фурье задает функцию f(x), ряд сходится на интервале (-π;π) к функции f(x).

Если ряд, составленный из модулей коэффициентов сходится, то исходный ряд Фурье является мажорируемым и сходится равномерно на (-π;π) => можно почленно интегрировать.

Выведем формулы для нахождения коэффициентов.

Сначала будем интегрировать исходную функцию f(x):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n sinnx\, dx$$

Рассмотрим три интеграла по-отдельности:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxdx = \frac{a_n}{n} sinnx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n sinnxdx = -\frac{a_n}{n} cosnx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Теперь домножим исходную функцию на косинус и снова будем интегрировать:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosmxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} cosmxdx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxcosmxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n sinnxcosmxdx$$

Рассмотрим три интеграла по-отдельности:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} cosmxdx = \frac{a_0}{2m} sinmx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxcosmxdx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \big(\cos\big(x(n-m)\big) + \cos\big(x(n+m)\big)\big) dx$$
$$= \frac{a_n}{2} \left(\frac{\sin\big(x(n-m)\big)}{n-m} + \frac{\sin\big(x(n+m)\big)}{n+m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n sinnxcosmxdx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \big(\sin\big(x(n-m)\big) + \sin\big(x(n+m)\big)\big) dx$$
$$= -\frac{b_n}{2} \left(\frac{\cos\big(x(n-m)\big)}{n-m} + \frac{\cos\big(x(n+m)\big)}{n+m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Если $n \neq m$ то все интегралы равны нулю.

Но если $n = m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxcosmxdx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n cos^2 nxdx = \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+cos2nx)dx = \pi a_n$$

Тогда получаем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx$$

Аналогично доказывается

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx$$

Теорема : Если f(x) монтонна и ограничена на (-π;π) то ряд Фурье сходится к f(x) на всем промежутке.

ЗАМЕЧАНИЕ К РАЗЛОЖЕНИЮ В РЯД ФУРЬЕ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{l}^{l+2\pi} f(x)dx\,, l - \text{любое число}, f(x) - 2\pi - \text{периодическая функция}$$

Доказательство:

$$\text{Пусть } x = \xi - 2\pi$$

$$\int_{c}^{d} f(x)dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} f(\xi - 2\pi)d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} f(\xi)d\xi$$

$$\text{Пусть } c = -\pi, d = l$$

$$\int_{-\pi}^{l} f(x)dx = \int_{\pi}^{l+2\pi} f(x)dx$$

$$\int_{l}^{l+2\pi} f(x)dx = \int_{l}^{-\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{l+2\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{l+2\pi} f(x)dx - \int_{-\pi}^{l} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Если y=f(x) нечетна от минус пи до пи, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = 0 \Rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)sinnxdx$$

Если y=f(x) четна от минус пи до пи, то

$$\int_0^\pi f(x)sinnxdx = 0 => b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)cosnxdx$$

На самом деле, каждая функция может быть задана в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} - \text{четная}$$

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} - \text{нечетная}$$

РЯДЫ ФУРЬЕ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОМЕЖУТКА

$$]\ f(x)\text{задана на } (-l; l) => T = 2l, \omega = \frac{\pi}{l}$$

$$]x = \frac{ly}{\pi} => y \in (-\pi; \pi)$$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) cosnydy$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) sinnydy$$

Интегрирование Диффуров с помощью рядов

Уравнение Бесселя:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, p - const$$

$$]y = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_0 \neq 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}, y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) x^{n+k-1}, y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) x^{n+k-1} + (x^2 - p^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} = 0$$

Приравниваем коэффициенты при разных степенях x:

$$n=0: a_0k(k-1)+a_0k-p^2a_0=0$$

$$a_0k^2=p^2a_0$$

$$k=\pm p$$

$$n=1: a_1(k+1)k+a_1(k+1)-a_1p^2=0$$

$$a_1k^2+2a_1k+a_1-a_1p^2=0$$

$$a_1(k^2+2k+1-p^2)=0$$

$$a_1((k+1)^2-p^2)=0$$

$$n=2: a_2(k+2)(k+1)+a_2(k+2)-a_2p^2+a_0=0$$

$$a_2((k+2)^2-p^2)+a_0=0$$

$$a_2=-\frac{a_0}{(k+2)^2-p^2}$$

Значит

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(k+n)^2-p^2}$$

Так, мы установили вид коэффициентов при разложении функции в степенной ряд. Тем не менее, это не полное решение. В самом начале у нас появилось два возможных варианта для значения k. Рассмотрим частный случай.

$$]k=p \Rightarrow (p+1)^2-p^2\neq 0 \Rightarrow a_1=0 \Rightarrow \text{все последующие нечетные коэффициенты} = 0$$

$$a_2=-\frac{a_0}{(p+2)^2-p^2}=-\frac{a_0}{4(p+1)}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(p+4)^2-p^2}=-\frac{a_0}{32(p+2)(p+1)}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{(p+6)^2-p^2}=-\frac{a_0}{32(p+2)(p+1)*(12p+36)}=-\frac{a_0}{384(p+2)(p+1)(p+3)}$$

Тогда решение будет иметь вид:

$$y_1=x^p\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n n!\,(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+n)}\right)$$

$$I_p=y_1c-\text{функция Бесселя первого рода}$$

Второго рода – при $k=-p$