

Задачи для защиты лабораторной работы №1

Плюхин Дмитрий группа Р3117

Март 2016

1 Задача 4

Задание

Упорядочить функции по возрастанию скорости роста

$$\log_5 n \quad n^{0.3} \quad \sqrt{n} \quad n \log_2 n \quad n(\log_2 n)^3 \quad n^3 \quad 4^n$$

Решение

Известно, что экспонента растет быстрее, чем любой полином, а любой полином растет быстрее, чем любой логарифм поэтому из предложенных функций наибольшая скорость роста у 4^n .

Перед ней будут идти полиномы $n^{0.3}$, \sqrt{n} , n^3 , сравним их скорости роста, для этого запишем \sqrt{n} как $n^{0.5}$. Становится видно, что n^3 растет быстрее, чем $n^{0.5}$, а, в свою очередь, $n^{0.5}$ - быстрее чем $n^{0.3}$, что следует из порядка возрастания их степеней.

Наконец, сравним скорости роста логарифмов $\log_5 n$, $n \log_2 n$, $n(\log_2 n)^3$.

Приведем $\log_5 n$ к основанию 2: $\log_5 n = \frac{1}{\log_2 5} \log_2 n$, где $\frac{1}{\log_2 5}$ - константа, не влияющая на скорость роста. Поскольку все логарифмы кроме $\frac{1}{\log_2 5} \log_2 n$ домножаются на полином первой степени, у логарифма $\log_5 n$ наименьшая скорость роста. Относительно двух оставшихся, $n \log_2 n$, $n(\log_2 n)^3$, второй растет быстрее, поскольку возводится в большую степень.

Учтем, что $n(\log_2 n)^3$ и $n \log_2 n$ растут быстрее полиномов $n^{0.3}$ и \sqrt{n} , поскольку включают в себя полином высшей степени. Таким образом, имеем последовательность, совпадающую с исходной:

$$\log_5 n \quad n^{0.3} \quad \sqrt{n} \quad n \log_2 n \quad n(\log_2 n)^3 \quad n^3 \quad 4^n$$

2 Задача 5

Задание

Отметить все верные утверждения:

- $100n \log_2 n = \Theta(n + (\log_2 n)^2)$
- $2^n = \Theta(2^{n+1})$
- $\frac{n^2}{\log_3 n} = O(n(\log_2 n)^2)$
- $n! = \Omega(2^n)$
- $n \log_2 n = \Theta(n)$
- $n! = O(2^n)$
- $\frac{n^2}{\log_4 n} = \Theta(n(\log_3 n)^2)$

Решение

Согласно первому утверждению, отношение $\frac{n+(\log_2 n)^2}{100n \log_2 n}$ должно быть ограничено сверху и снизу некоторыми константами, оно представляет собой сумму $\frac{1}{100 \log_2 n} + \frac{\log_2 n}{100n}$, которая не ограничена снизу, так как логарифм асимптотически растет медленнее полинома, значит, первое утверждение не верно.

Рассмотрим второе утверждение. Оно верно, поскольку $\Theta(2^{n+1}) = \Theta(2 \times 2^n) = \Theta(2^n)$, и функция не может расти быстрее или медленнее самой себя.

Рассмотрим третье утверждение. Оно неверно, поскольку выражение $\frac{n}{\log_3 n (\log_2 n)^2} = \frac{n}{\ln(3)(\ln(2))^2 (\ln(n))^3}$ не ограничено сверху какой-либо константой, потому что полином растет быстрее логарифма.

Четвертое утверждение верно, поскольку:

$$n! = \prod_{i=1}^n i \geq \prod_{i=1}^n 2 \Rightarrow n! = \Omega(2^n)$$

Пятое утверждение не верно, поскольку, очевидно, функция $n \log_2 n$ отличается от n не на константу.

Шестое утверждение не верно, поскольку для его выполнения необходимо чтобы $\prod_{i=1}^n i \leq \prod_{i=1}^n 2$, но это, очевидно, не так

Последнее утверждение аналогично третьему с разницей лишь в основаниях логарифмов. Это различие может быть сведено к различию в константах, которые не влияют на скорость роста функций

Так, имеем всего 2 верных утверждения:

- $2^n = \Theta(2^{n+1})$
- $n! = \Omega(2^n)$

3 Задача 6

Задание

Доказать, что

$$\log(n!) = \Omega(n \log n)$$

Решение

$$\log(n!) = \log\left(\prod_{i=1}^n i\right) = \sum_{i=1}^n \log i = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \log i + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \log i \geq \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \Rightarrow \log(n!) = \Omega(n \log n)$$

Что и требовалось доказать