

Отчет по лабораторной работе № 3
«Моделирование СМО с помощью аналитических
и численных методов»

Выполнил: студент группы Р3317

Плюхин Д.А.

Преподаватель: Соснин В.В.

Расчет варианта

Имя: Дмитрий (7 букв)

Фамилия: Плюхин (6 букв)

$$k = 2 + (7 \bmod 7) = 2$$

$$M[b] = 6$$

$$\lambda = 2 * 0.9 / 6 = 0.3$$

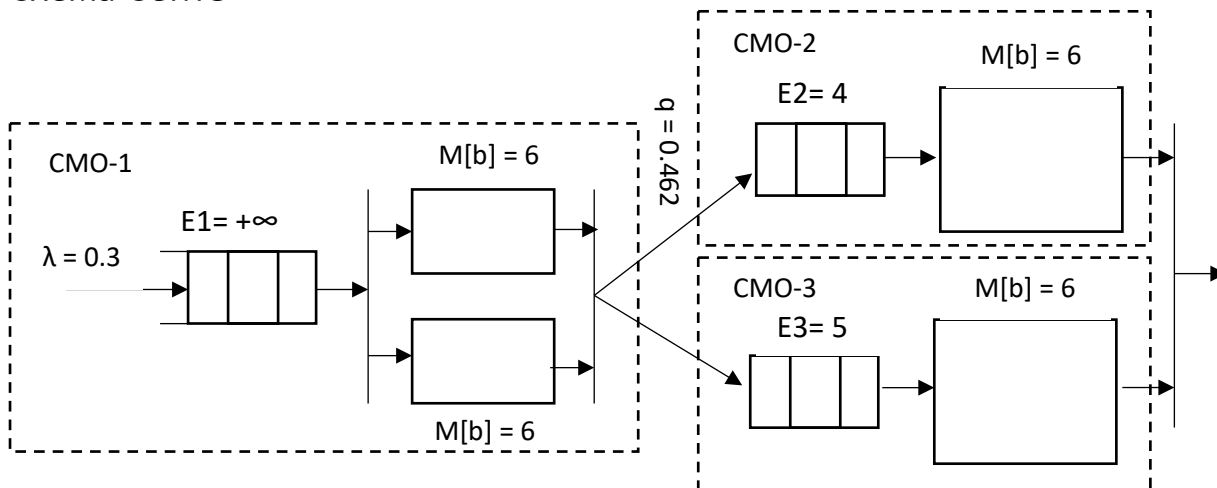
$$q = 6 / (6 + 7) = 0.462$$

$$E1 = +\infty$$

$$E2 = 3 + (6 \bmod 5) = 4$$

$$E3 = 9 - 4 = 5$$

Схема СеМО



Расчет характеристик СМО-1 с помощью аналитического моделирования

Используемые формулы:

$$\rho = \frac{\lambda b}{K}, \quad w = \frac{Pb}{K(1-\rho)}, \quad P = \frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} P_0,$$
$$P_0 = \left[\frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(K\rho)^i}{i!} \right]^{-1}, \quad u = w + b = \frac{b}{1-\rho},$$
$$l = \lambda w = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad m = \lambda u = \frac{\rho}{1-\rho}$$

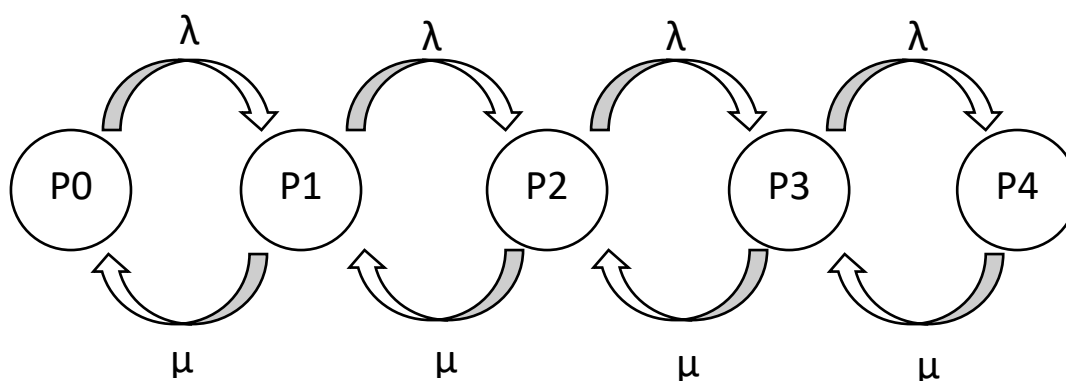
Полученные результаты с учетом известных значений $K = 2$, $b = 6$ и $\lambda = 0.3$:

$r =$	0,9	Загрузка системы
$P_0 =$	0,052632	Вероятность простоя
$P =$	0,852632	Вероятность занятости всех приборов
$w =$	25,57895	Среднее время ожидания заявок
$u =$	31,57895	Среднее время пребывания в системе
$l =$	7,673684	Средняя длина очереди заявок
$m =$	9,473684	Среднее число заявок в системе

Расчёт характеристик для СМО-2 и СМО-3 с помощью численного моделирования

Экспоненциальное распределение времени обслуживания в СМО-2 (исходная система)

Граф переходов:



Вероятности пребывания в пяти состояниях, соответствующих возможному количеству заявок в системе от 0 до 5 посчитаны при помощи приложения WinMark.

$\lambda =$	0,138462	Интенсивность входного потока
$\mu =$	0,166667	Интенсивность обслуживания заявок
$p_0 =$	0,280355	Вероятность отсутствия заявок
$p_1 =$	0,23276	Вероятность наличия одной заявки в приборе
$p_2 =$	0,193245	Вероятность наличия двух заявок
$p_3 =$	0,160439	Вероятность наличия трех заявок
$p_4 =$	0,133202	Вероятность наличия четырех заявок

Используемые формулы для расчета характеристик:

$$\pi = p_4, \lambda' = \lambda \pi, r = \sum_{i=1}^4 p_i, l = \sum_{i=2}^4 (i-1) * p_i,$$

$$m = \sum_{i=1}^4 i * p_i, w = \frac{l}{\lambda - \lambda'}, u = \frac{m}{\lambda - \lambda'}$$

Полученные результаты с учетом известных вероятностей и интенсивностей:

$\pi =$	0,133202	Вероятность потери заявки
$\lambda' =$	0,018443	Интенсивность потерь заявок
$r =$	0,719646	Загрузка системы
$l =$	0,913729	Средняя длина очереди

$m =$	1,633375	Среднее число заявок в системе
$w =$	7,613255	Среднее время ожидания заявок
$u =$	13,6094	Среднее время пребывания в системе

Экспоненциальное распределение времени обслуживания в СМО-3 (исходная система)

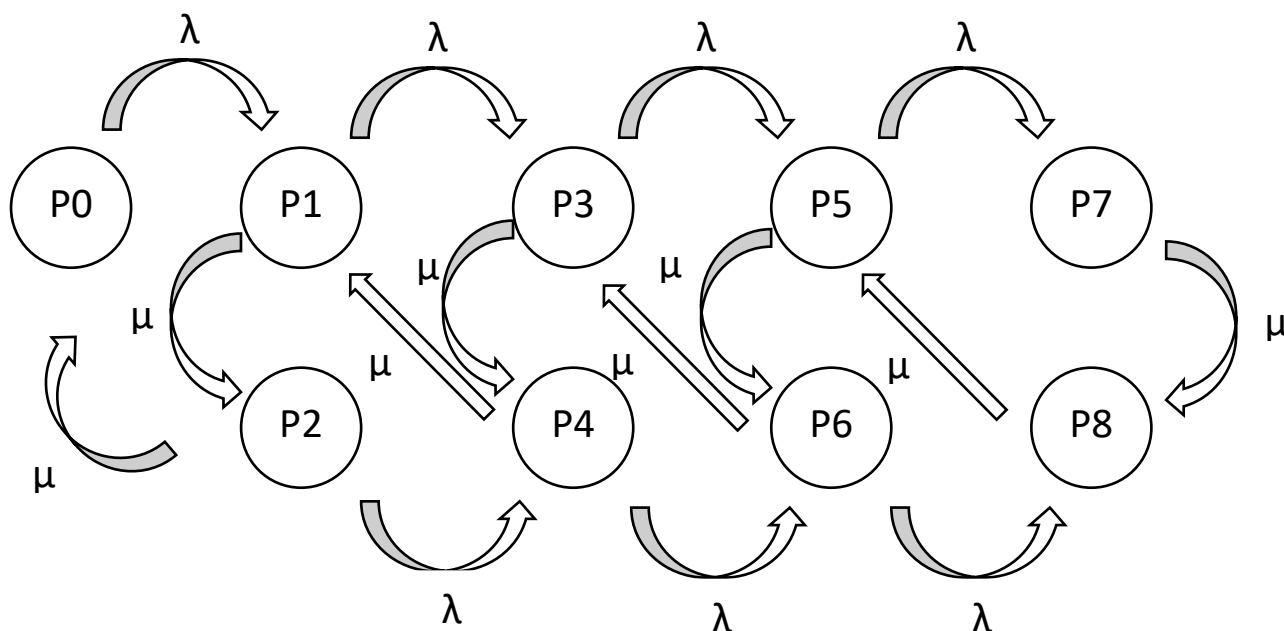
Граф переходов (за исключением того, что добавится еще одно состояние), используемые формулы и метод расчета вероятностей аналогичны предыдущему пункту.

Полученные результаты:

$\lambda =$	0,161538	Интенсивность входного потока
$\mu =$	0,166667	Интенсивность обслуживания заявок
$p_0 =$	0,180144	Вероятность отсутствия заявок
$p_1 =$	0,174525	Вероятность наличия одной заявки в приборе
$p_2 =$	0,169081	Вероятность наличия двух заявок
$p_3 =$	0,163807	Вероятность наличия трех заявок
$p_4 =$	0,158697	Вероятность наличия четырех заявок
$p_5 =$	0,153746	
$\pi =$	0,153746	Вероятность потери заявки
$\lambda' =$	0,024836	Интенсивность потерь заявок
$r =$	0,819856	Загрузка системы
$l =$	1,58777	Средняя длина очереди
$m =$	2,407626	Среднее число заявок в системе
$w =$	11,61478	Среднее время ожидания заявок
$u =$	17,61215	Среднее время пребывания в системе

Распределение Эрланга второго порядка времени обслуживания в СМО-2

Граф переходов:



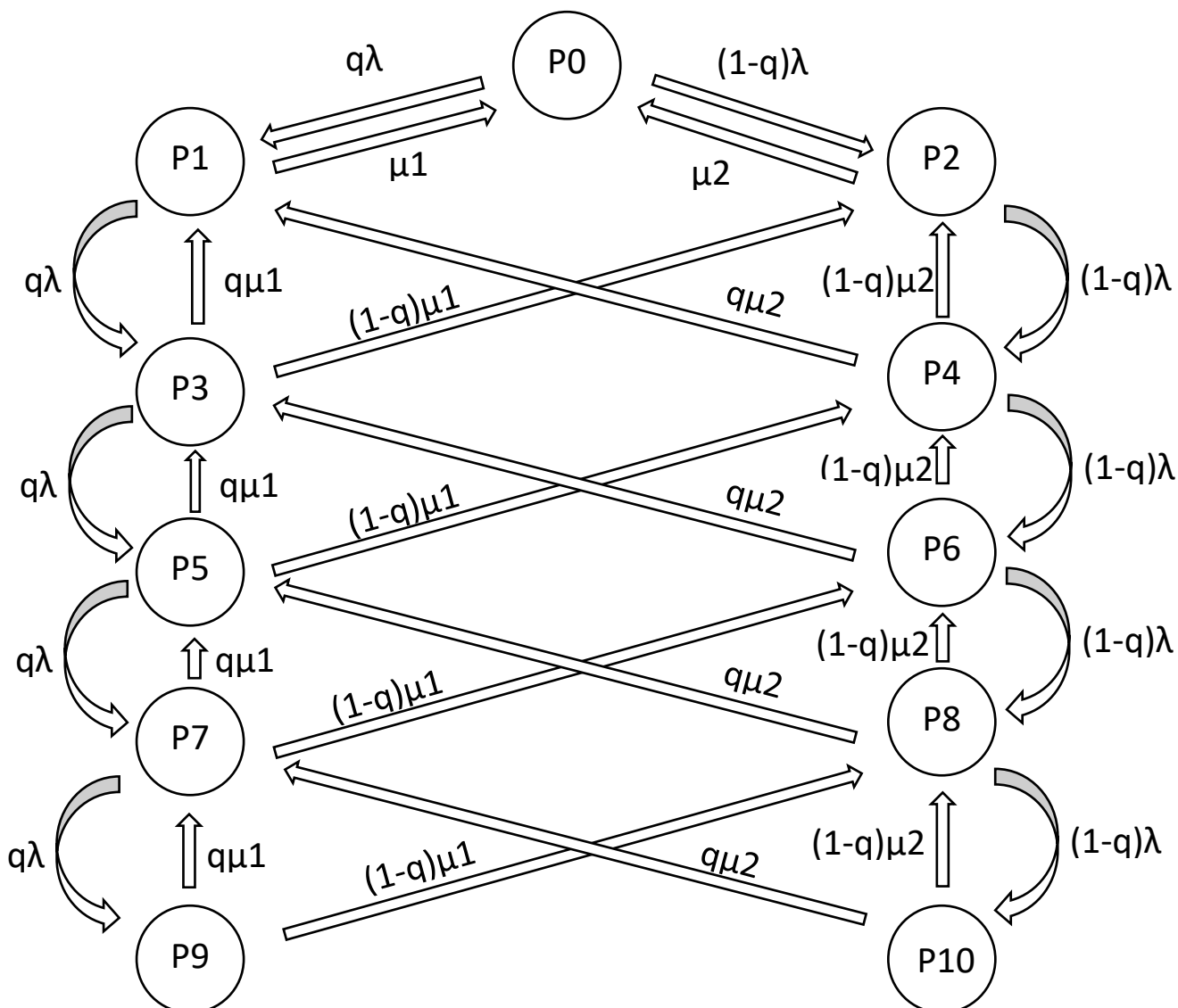
Полученные результаты:

$\lambda =$	0,138462	Интенсивность входного потока
-------------	----------	-------------------------------

$\mu =$	0,333333	Интенсивность обслуживания заявок
$p_0 =$	0,255655	Вероятность отсутствия заявок
$p_1 =$	0,150381	Вероятность наличия одной заявки
$p_2 =$	0,106235	Вероятность наличия одной заявки
$p_3 =$	0,1068	Вероятность наличия двух заявок
$p_4 =$	0,106635	Вероятность наличия двух заявок
$p_5 =$	0,081235	Вероятность наличия трех заявок
$p_6 =$	0,088691	Вероятность наличия трех заявок
$p_7 =$	0,033756	Вероятность наличия четырех заявок
$p_8 =$	0,070611	Вероятность наличия четырех заявок
$\pi =$	0,070611	Вероятность потери заявки
$\lambda' =$	0,009777	Интенсивность потерь заявок
$r =$	0,744344	Загрузка системы
$l =$	0,866388	Средняя длина очереди
$m =$	1,610732	Среднее число заявок в системе
$w =$	6,732645	Среднее время ожидания заявок
$u =$	12,51689	Среднее время пребывания в системе

Двухфазное гиперэкспоненциальное распределение времени обслуживания в СМО-3

Граф переходов:



Исходные данные:

$\lambda =$	0,161538	Интенсивность входного потока
$\mu_1 =$	0,104167	Интенсивность обслуживания заявок 1
$\mu_2 =$	0,27027	Интенсивность обслуживания заявок 2
$q =$	0,4	Вероятность - параметр закона распределения

$q\lambda =$	0,064615
$(1-q)\lambda =$	0,096923
$q\mu_1 =$	0,041667
$q\mu_2 =$	0,108108
$(1-q)\mu_1 =$	0,0625
$(1-q)\mu_2 =$	0,162162

Интенсивности для нахождения вероятностей состояний

Матрица интенсивностей:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0,064615	0,096923								
1	0,104167	1		0,064615							
2	0,27027		2		0,096923						
3		0,041667	0,0625	3		0,064615					
4		0,108108	0,162162		4		0,096923				
5			0,041667	0,0625		5		0,064615			
6			0,108108	0,162162			6		0,096923		
7				0,041667	0,0625			7		0,064615	
8				0,108108	0,162162				8		0,096923
9						0,041667	0,0625			9	
10						0,108108	0,162162				10

Полученные результаты:

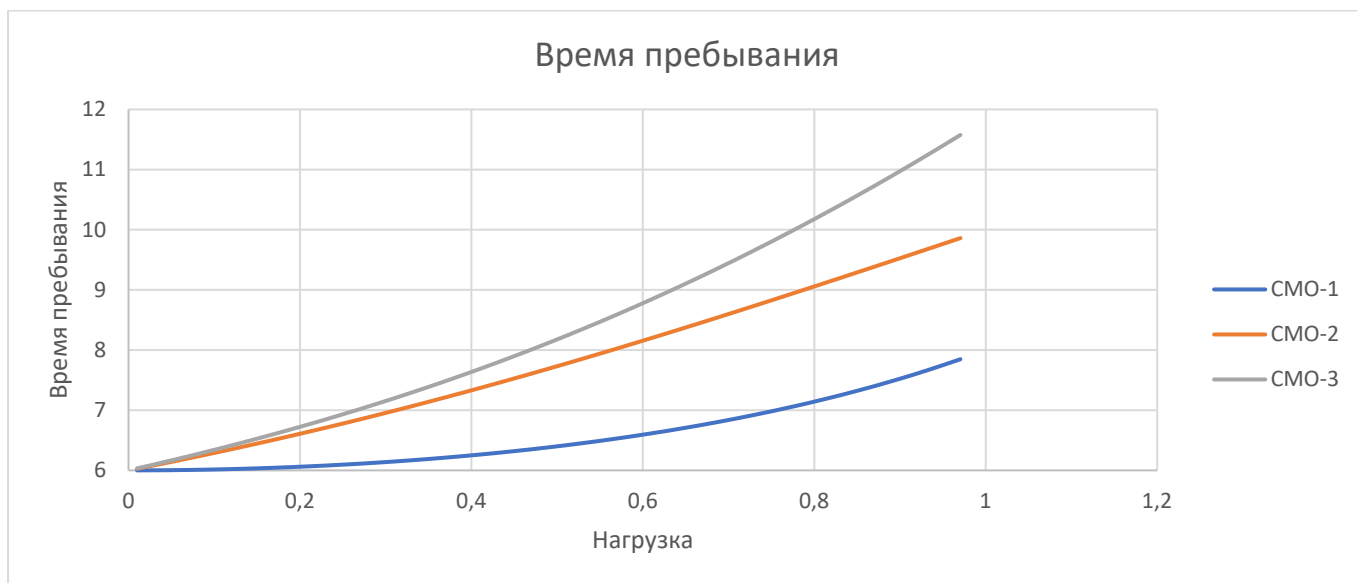
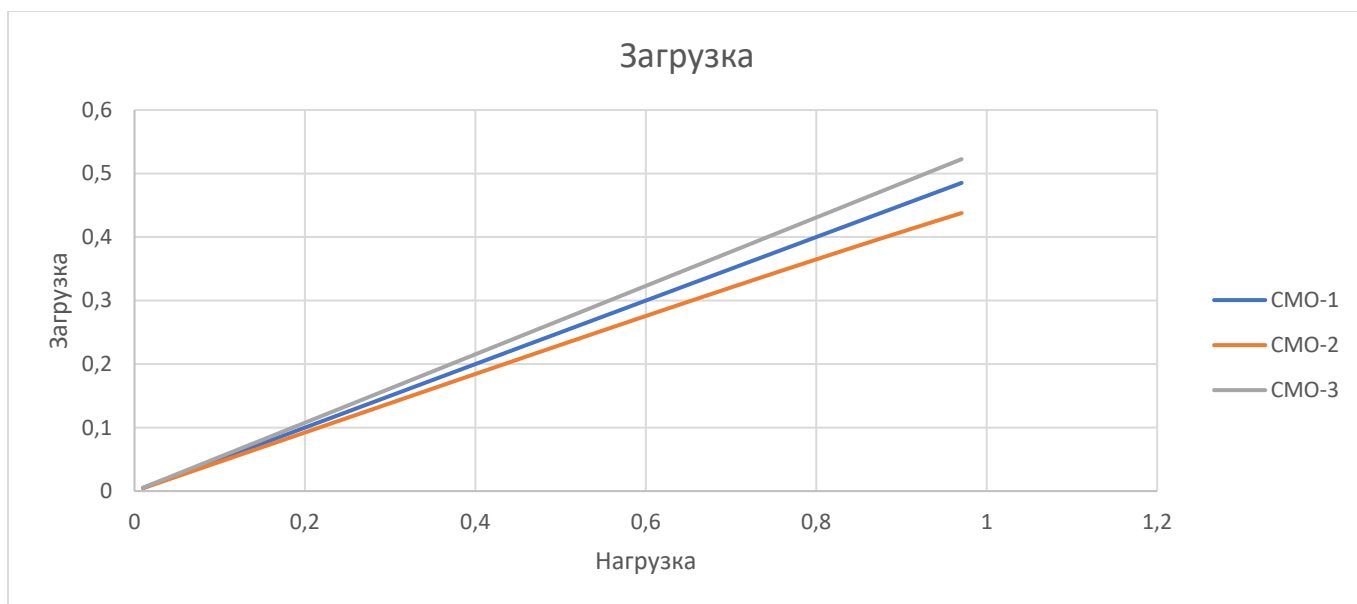
$p_0 =$	0,360027	Вероятность отсутствия заявок
$p_1 =$	0,200233	Вероятность наличия одной заявки
$p_2 =$	0,138046	Вероятность наличия одной заявки
$p_3 =$	0,105884	Вероятность наличия двух заявок
$p_4 =$	0,056585	Вероятность наличия двух заявок
$p_5 =$	0,054546	Вероятность наличия трех заявок
$p_6 =$	0,024593	Вероятность наличия трех заявок
$p_7 =$	0,027697	Вероятность наличия четырех заявок
$p_8 =$	0,01119	Вероятность наличия четырех заявок
$p_9 =$	0,017187	Вероятность наличия пяти заявок
$p_{10} =$	0,004013	Вероятность наличия пяти заявок

$\pi =$	0,0212	Вероятность потери заявки
$\lambda' =$	0,003425	Интенсивность потерь заявок
$r =$	0,639974	Загрузка системы
$l =$	0,522208	Средняя длина очереди
$m =$	1,162182	Среднее число заявок в системе
$w =$	3,302734	Среднее время ожидания заявок

$u = 7,350286$

Среднее время пребывания в системе

Графики изменения загрузки, времени пребывания и вероятности потерь в зависимости от нагрузки на СМО-1



Сравнение результаты расчётов с результатами, полученными с помощью имитационного моделирования в домашнем задании №2

Расчет характеристик СМО-1			
Величина	Результат расчета	Результат из ДЗ 2	Наименование
$r =$	0,9	$0,905 \pm 0,002$	Загрузка системы
$w =$	25,57894737	$27,743 \pm 1,219$	Среднее время ожидания заявок
$u =$	31,57894737	$33,7308 \pm 1,219$	Среднее время пребывания в системе
$l =$	7,673684211	$8,3852 \pm 0,352$	Средняя длина очереди заявок

Расчет характеристик СМО-2 (экспоненциальное распределение)			
Величина	Результат расчета	Результат из ДЗ 2	Наименование
$\pi =$	0,133202	$0,1074 \pm 0,004$	Вероятность потери заявки
$r =$	0,719646	$0,7474 \pm 0,003$	Загрузка системы
$l =$	0,913729	$0,8762 \pm 0,012$	Средняя длина очереди
$w =$	7,613254632	$7,0316 \pm 0,091$	Среднее время ожидания заявок
$u =$	13,60939599	$13,0272 \pm 0,109$	Среднее время пребывания в системе

Расчет характеристик СМО-3 (экспоненциальное распределение)			
Величина	Результат расчета	Результат из ДЗ 2	Наименование
$\pi =$	0,153746	$0,1576 \pm 0,003$	Вероятность потери заявки
$r =$	0,819856	$0,8224 \pm 0,004$	Загрузка системы
$l =$	1,58777	$1,6028 \pm 0,021$	Средняя длина очереди
$w =$	11,61477805	$11,6804 \pm 0,143$	Среднее время ожидания заявок
$u =$	17,61214887	$17,6712 \pm 0,167$	Среднее время пребывания в системе

Расчет характеристик СМО-2 (эрланговское распределение)			
Величина	Результат расчета	Результат из ДЗ 2	Наименование
$\pi =$	0,070611	$0,072 \pm 0,003$	Вероятность потери заявки
$r =$	0,744344	$0,7798 \pm 0,003$	Загрузка системы
$l =$	0,866388	$0,8126 \pm 0,012$	Средняя длина очереди
$w =$	6,732645498	$6,2512 \pm 0,074$	Среднее время ожидания заявок
$u =$	12,51689491	$12,2512 \pm 0,074$	Среднее время пребывания в системе

Расчет характеристик СМО-3 (гиперэкспоненциальное распределение)			
Величина	Результат расчета	Результат из ДЗ 2	Наименование
$\pi =$	0,0212	$0,1818 \pm 0,003$	Вероятность потери заявки
$r =$	0,639974	$0,8104 \pm 0,004$	Загрузка системы
$l =$	0,522208	$1,638 \pm 0,014$	Средняя длина очереди
$w =$	3,302734155	$12,2454 \pm 0,1$	Среднее время ожидания заявок
$u =$	7,350286065	$18,3032 \pm 0,13$	Среднее время пребывания в системе

Таким образом, значения, полученные в ходе аналитического и численного моделирования хотя преимущественно и находятся за пределами выявленных доверительных интервалов, но отстоят от них на относительно малые величины. Вероятно, это связано с недостаточно большим количеством заявок, пропущенных через СМО во время моделирования. Исключение составляет лишь СМО-3 со временем обслуживания, распределенным по гиперэкспоненциальному закону – результаты расчета и результаты имитационного моделирования отличаются существенно.

Выводы по проделанной работе

1. Изменение разброса времени обслуживания в приборах приводит к увеличению времени ожидания заявок в очередях, и, соответственно, общего времени пребывания заявок в системе.

2. При низкой загрузке СМО-1 выходной поток заявок определяется законом распределения времени обслуживания, а поскольку он является экспоненциальным, то имеем дело в худшем случае с системой $M/G/1$, характеристики которой, в соответствии с формулой Поллачека-Хинчина, зависят только от первых двух моментов и не зависят от закона распределения времени обслуживания.
3. При загрузке СМО-1, стремящейся к нулю, время нахождения заявок в СМО-1 распределено по тому же закону, что и время обслуживания в приборе (очереди почти нет и именно время обслуживания определяет время нахождения заявки в системе), то есть, по экспоненте. В случае же перегрузки СМО-1 время нахождения в системе от заявки к заявке постоянно увеличивается таким образом, что величина, обратная времени нахождения заявки в такой системе окажется распределена по экспоненциальному закону.
4. При увеличении разброса времени обслуживания и увеличении нагрузки на СМО увеличивается доверительный интервал времени пребывания заявок в системе.