Математика лекция 03.11.15

Математический анализ

Теория пределов

Множества

Множество в математике не определяется, как и понятие точки, прямой и т.д. Есть только синонимы – совокупность. Обозначаются большими латинскими буквами.

A={ai}$_{i=\overline{1,n}}$ – множество A

Для множеств есть операции:

A U B = C – объединение множеств, Ci прин. A или Ci прин. B

A ^ B = C – пересечение множеств, Ci прин A и Ci прин. B

A \ B = C – разность множеств, Ci прин. A и не прин. B

A C B – множество содержится в другом. Любой элемент множества A прин. B. A- подмножество множества B.

A = B – множества содержатся друг в друге

N – множество натуральных чисел

Z – множество целых чисел

Q – множество рациональных чисел

R – множество действительных чисел

C – множество комплексных чисел

Функции

] X,Y – множества

Функция – закон, который каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y.

f X -> Y – обозначение

Если X и Y – числовые множества, то y=f(x) – числовая функция (но это не единственная форма записи), это аналитическое задание функции, кроме него существуют еще два способа задания – графический и табличный.

Числовые функции, заданные аналитически

Что нужно знать:

1. Область определения
2. Множество значений
3. Что такое монотонная функция
4. Четная и нечетная функция
5. Обратная функция (и при каких условиях она существует (только у монотонных функций))
6. Понимать, что такое сложная функция (это функция которая задается от другой функции). В математике есть термин, который обозначает сложную функцию как суперпозицию (f(h(x) или f o h)

Есть список основных элементарных функций:

1. Степенные функции x^n
2. Показательные функции a^x
3. Логарифмические функции log(a)x

4. Тригонометрические функции cosx
5. Обратные тригонометрические функции arccosx

Допустимые действия – сложение, вычитание, умножение, деление и суперпозиция.

Элементарная функция – функция, полученная из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и взятия суперпозиции.

Пример 1.

Гиперболические функции chx = (e^x+e^(-x))/2 – гиперболический косинус. График похож на параболу. Имеет массу приложений в математике, она связана со свойствами тригонометрических функций на множестве комплексных чисел. Например, можно посчитать косинус мнимой единицы.

shx=(e^x-e^(-x))/2 – гиперболический синус, ее график похож на кубическую параболу.

thx=shx/chx – эта функция везде определена, точек разрыва нет, это – гиперболический тангенс

cthx=chx/shx – гиперболический котангенс

Пример 2.

sgnx (сигнум икс) – функция, принимающая 1, если x положительный, 0 если равно 0, -1 если x отрицательный.

Эта функция – претерпевающая разрыв в начале координат. Она элементарной не является.

Функция Дирока – везде равна нулю, но в нуле равна бесконечности – тоже не элементарная функция.

Многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_n$, $i=\overline{0,n}$, a_i = const.

Натуральные числа не содержат ноль, они начинаются с единицы.

Деление многочленов Pn(x)/Qm(x)=M(x)+N(x)/(Qm(x)) – означает определить частное и остаток, причем степень остатка меньше, чем степень делителя.

Основные теоремы, которые могут понадобиться:

1. Теорема Безу
   Пусть x1 – какое-то число. Остаток от деления многочлена Pn(x) на x-x1 равен значению многочлена в этой точке (т.е. Pn(x1)).
   Доказательство:
   Pn(x)=M(x)*(x-x1)+N(x)
   Пусть x=x1
   Pn(x1)=N(x)

   Определение x0 – корень многочлена, если многочлен в этой точке обращается в ноль

2. Следствие из теоремы Безу
   Если x0- корень многочлена Pn(x), то остаток от деления многочлена на (x-x0) равен нулю.
3. Если многочлен задан так:
   X^n-a^n ⋮ x-a
   X^n – a^n = Qm(x)(x-a) + N(x)
   X=a значит 0=0+N(x)
4. X0 называется корнем кратности k многочлена Pn(x), если Pn(x) делится на (x-x0)^k и не делится на (x-x0)^(k+1) без остатка. При k=0 x0- простой корень
5. Основная теорема высшей алгебры
   Любой многочлен Pn(x) имеет ровно n корней с учетом их кратности (на множестве комплексных чисел). (Вообще, можно формулировать по-разному, но мы формулируем так, чтобы удобно было решать задачи).
   Pn(x)=(x-x1)^k1(x-x2)^k2…(x-xm)^km

K1+k2+…+km=n

Так как комплексные корни встречаются парами, то на множестве вещественных чисел (x-z0)(x-z0(сопряженное)) = x^2 + bx+c, у которого отрицательный дискриминант.

На множестве вещественных чисел Pn раскладывается на произведение одночленов и квадратных многочленов (трехчленов) с отрицательным дискриминантом.

Еще эта теорема называется теоремой Гаусса.

Последовательности

Последовательность – это числовая функция, заданная на множестве натуральных чисел.

X1,x2,…,xn,…

Бывают конечными или бесконечными (например, прогрессии, арифметические или геометрические).

$\{xn\}_{i=\overline{1,m}}$

Число a называется пределом последовательности, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует номер n0 такой, что для всех n больших n0 верно соотношение |xn-a| < ε .

∀ ε>0 ∃ номер n0: ∀ n>n0 верно |xn-a| < ε

Какое бы число вы ни взяли, с какого-то номера все члены последовательности будут меньше этого числа.

Пример

Докажем что предел (2n+3)/(n-1), n>1 равен двум.

|(2n+3)/(n-1)-2|<eps] eps=0.01

5/(n-1)<0.01

n>501

ε – окрестностью точки A называется интервал (a-ε,a+ε)=U(a, ε)

Если у вас есть точка a, то вы откладываете на прямой в обе стороны отрезки длиной ε. Если поставить над U точку, то точка выкалывается.

Согласно определению предела последовательности в ε-окрестности точки A содержится бесконечное число членов последовательности

Теорема

Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство от противного:

Пусть последовательность имеет два предела a и b. На числовой прямой возьмем две точки и построим ε-окрестности. Тогда начиная с некоторого номера n0 все члены последовательности должны попадать как в первую окрестность, так и во вторую. Но это невозможно, значит последовательность имеет единственный предел.

Определение Последовательности, имеющие конечный предел, называются сходящимися. Существуют последовательности, у которых предел – бесконечность , и последовательности, которые предела не имеют.

Определение Последовательность {xn} называется ограниченной снизу, если существует число c, при котором все элементы xn>=c.

Пример

Xn=1/n>0 – ограничена снизу. Но нулю равна никогда не будет, то есть граница не достигается.

Аналогично существуют последовательности, ограниченные сверху. Ограниченные сверху и снизу последовательности называются ограниченными.

Теорема

Сходящаяся последовательность всегда ограничена.

$|xn-a|<eps$

$-eps+a<xn<a+eps$

Замечание.

Обратная теорема неверна. Если есть ограниченная последовательность, то она не обязательно имеет предел.

$xn=(-1)^n$ – ограниченная последовательность, но предела не существует.

Свойства сходящихся последовательностей

1) Если {xn} ограничена снизу числом C1, то $\lim_{n->\infty} xn>=C1$
2) Если для любого n значения одной последовательности равны значениям другой последовательности, то и предел одной последовательности равен пределу другой последовательности.
3) Лемма о двух милиционерах
   $Xn<=yn<=zn$, причем предел xn и предел zn равны, тогда предел последовательности yn равен буде тому же числу.