BTS Services Informatiques
aux organisations

Session 2021

Épreuve : Mathématiques pour l'informatique

Durée de l'épreuve : 4 heures

SUJET

BTS
SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Sous-épreuve E21 – Mathématiques

Épreuve obligatoire

2021

SUJET

Durée : 2 heures **coefficient : 2**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Ce document comporte 6 pages numérotées de la page 1/6 à 6/6

Dès que ce document vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Exercice 1 (10 points) **: Un problème de routage**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère un réseau de commutation de paquets constitués de 6 routeurs A, B, C, D, E et F. Chaque paquet reçu par l'un des routeurs doit être acheminé vers un autre routeur, jusqu'à atteindre sa destination finale.
Dans le tableau ci-dessous, on a résumé les règles de routage d'un routeur à un autre routeur.

Peut transmettre à	A	B	C	D	E	F
A			■	■	■	
B	■		■		■	■
C					■	
D						
E				■		■
F				■		

On considère le graphe simple orienté **G** constitué des sommets A, B, C, D, E et F. Les sommets représentent les routeurs. Si un sommet X peut transmettre un paquet vers un sommet Y alors on a l'arc X $\rightarrow$ Y.

1.

a. Recopier et compléter le tableau des successeurs et des prédécesseurs du graphe **G** :

Sommets	Prédécesseurs	Successeurs
A		
B		
C		
D		
E		
F		

b. Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe **G,** les sommets étant rangés par ordre alphabétique.

2.

a. Calculer M^3.

b. Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 allant du sommet B au sommet D ?

3.

a. Déterminer la matrice $\widehat{M}$ de la fermeture transitive du graphe **G**.
b. Que signifie le nombre 1 à l'intersection de la troisième ligne et la sixième colonne de $\widehat{M}$?

4. Existe-t-il un chemin hamiltonien dans ce graphe ? Si oui, en indiquer un.

Partie B

Dans un parc informatique, chaque machine connectée à un réseau peut être identifiée à l'aide d'une adresse IPv4.

1.

a. Dans la base 2, un octet est constitué de 8 chiffres.
Déterminer le plus grand entier noté en base 10 qu'on peut écrire sous la forme d'un octet.
b. Une adresse IPv4 étant constituée de 4 octets notés en base 10 et séparés par un point, quel nombre maximal d'adresses IPv4 peuvent être attribuées ?

Le routeur C de la partie A gère les connexions réseaux d'un parc informatique de 8 machines étiquetées de 1 à 8.
Le DHCP de ce routeur est paramétré de telle façon qu'il attribue une plage de 49 adresses IPv4 allant de 192.168.1.2 jusqu'à 192.168.1.50.
Les 8 machines sont identifiées grâce aux adresses IPv4 suivantes :

Etiquette de la machine	Adresse IPv4 de la machine
1	192.168.1.2
2	192.168.1.4
3	192.168.1.12
4	192.168.1.49
5	192.168.1.48
6	192.168.1.50
7	192.168.1.5
8	192.168.1.6

2. Écrire le premier octet commun aux adresses de ces machines sous forme binaire puis sous forme hexadécimale.

Exercice 3 (5 points) : Codage de Hill

Dans le tableau suivant, on associe à chaque lettre de l'alphabet, en majuscule, son rang dans l'alphabet en commençant par 0.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

La procédure pour chiffrer un message est décrite dans l'exemple ci-dessous :

Pour chiffrer le message « **CARTES** » avec la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$:

- On remplace chaque lettre par son rang : C par 2, A par 0, R par 17, T par 19, E par 4 et S par 18. On obtient ainsi une matrice à 3 colonnes $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 17 \\ 19 & 4 & 18 \end{pmatrix}$;
- On effectue le produit matriciel $M \times W$; on a $M \times W = \begin{pmatrix} 36 & 72 & 36 \\ 63 & 114 & 67 \end{pmatrix}$;
- On remplace chaque coefficient de la matrice $M \times W$ par le reste de sa division euclidienne par 26. Ce qui revient à trouver, pour chaque coefficient, l'unique entier compris entre 0 et 25 qui lui est congru modulo 26.
  On a $36 \equiv 10\ [26]$, $72 \equiv 20\ [26]$, $63 \equiv 11\ [26]$, $114 \equiv 10\ [26]$, $67 \equiv 15\ [26]$;
  Ainsi on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 11 & 10 & 15 \end{pmatrix}$
- On remplace chaque nouveau coefficient de $M \times W$ par la lettre correspondante ; on obtient donc $\begin{pmatrix} KUK \\ LKP \end{pmatrix}$;
- Donc le message chiffré est « **KUKLKP** ».

Partie A :

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette clé permet de chiffrer le mot **« BUR »** en **« XMR »**

1. On considère le message **« JUA »**. Déterminer le message chiffré.
2. Que peut-on remarquer ? Que pensez-vous de cette clé de chiffrement ?

Partie B :

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 11 & n & 14 \\ 7 & 9 & 21 \\ 17 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, où n est un entier naturel compris entre 15 et 25.

On sait que cette clé permet de chiffrer le mot **« GEL »** en **« VMT »**.

1. Vérifier que $6n + 36 \equiv 12 \pmod{26}$.
2. Déterminer la valeur de l'entier naturel n.