Sinyaller ve Sistemler

Sunu 5

Sürekli Zaman Sinyalleri İçin Sıfır-Durum Cevabı

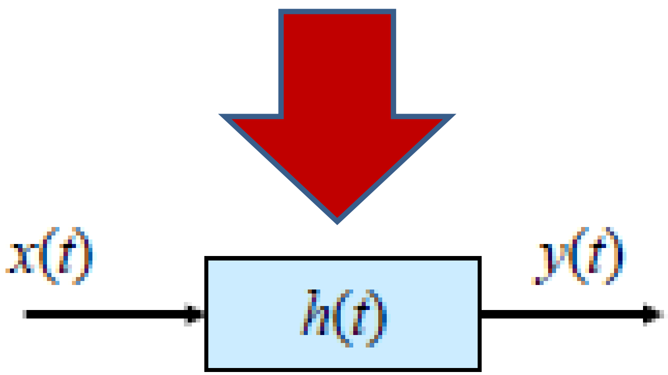
Sıfır-Durum Cevabı: Sıfır başlangıç şartlarına sahip bir sistemin özel bir girişe verdiği cevaptır.

$$y_{ZS}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda$$

C-T Konvolüsyon

$$y_{ZS}[n] = \sum_{i=1}^{n} h[n-i]x[i]$$

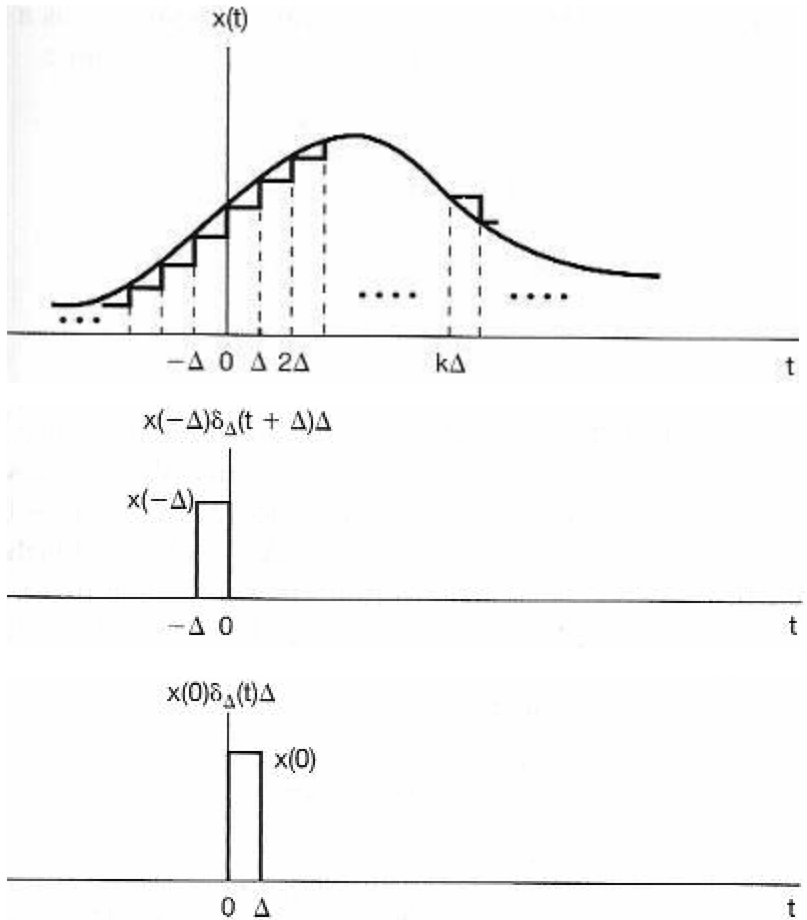
D-T Konvolüsyon



(Sunu-3)

Sürekli-Zaman İşaretlerin Dürtü (impuls) Cinsinden İfade Edilmesi

Bir sürekli-zaman işareti ötelenmiş darbelerin toplamı biçiminde yaklaşık olarak yazılabilir. Aşağıda bir sürekli-zaman işaretin $-\Delta \leq t \leq \Delta$ aralığındaki darbe yaklaşıklığı çizilmiştir.



Sürekli-Zaman İşaretlerin Dürtü (impuls) Cinsinden İfade Edilmesi

- $\delta_{\Delta}(t)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- Sürekli-zaman işaret yaklaşık olarak şöyle yazılabilir:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$$

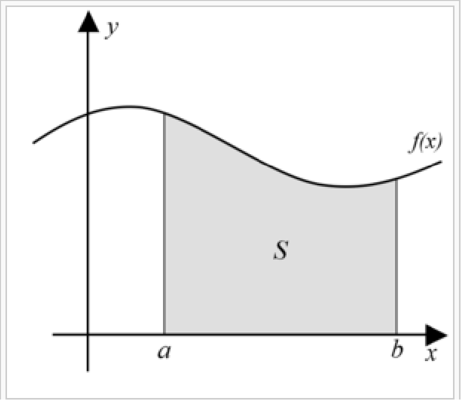
- Δ küçüldükçe yaklaşıklık iyileşir ve $\Delta \to 0$ limit durumunda $x(t)$ elde edilir. Yani,

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(\mathrm{t})$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$$

Sürekli-Zaman İşaretlerin Dürtü (impuls) Cinsinden İfade Edilmesi

- $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda toplama integrale eşit olur (Riemann integrali!).



$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

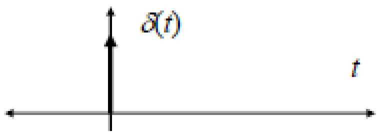
- Ayrıca, $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonu $\delta(t)$'ye eşit olur. O halde,

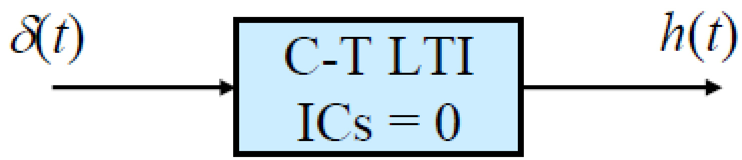
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

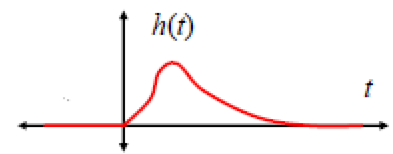
- Örnek olarak, $x(\mathrm{t}) = u(t)$ olsun. $t < 0$ için $u(t) = 0$ ve $t \geq 0$ için $u(t) = 1$ olduğundan $u(t)$ ile $\delta(t)$ arasında daha önce verdiğimiz aşağıda verilen ilişki elde edilir:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau$$

Birim Dürtü Cevabı







$\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $\hat{x}(t) = x(t)$ ve $\delta_\Delta(t) = \delta(t)$

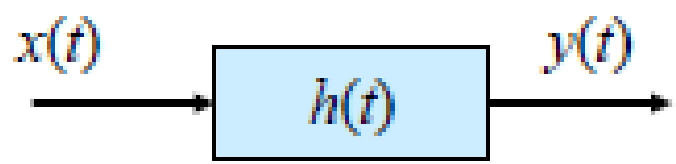
$$x(t) = \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

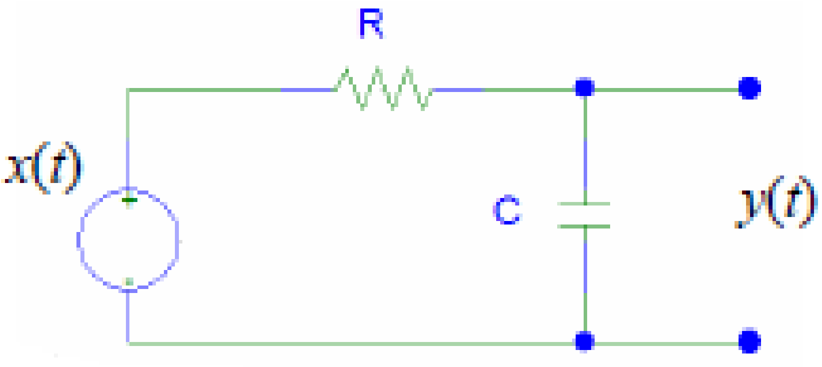
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

KONVOLÜSYON INTEGRALİ

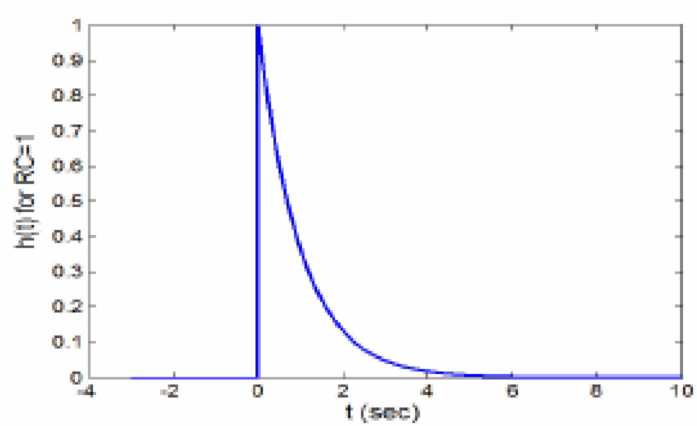
$$y(t) = x(t) * h(t)$$



RC devresinin birim basamak girişi için sıfır-durum cevabını inceleyelim.

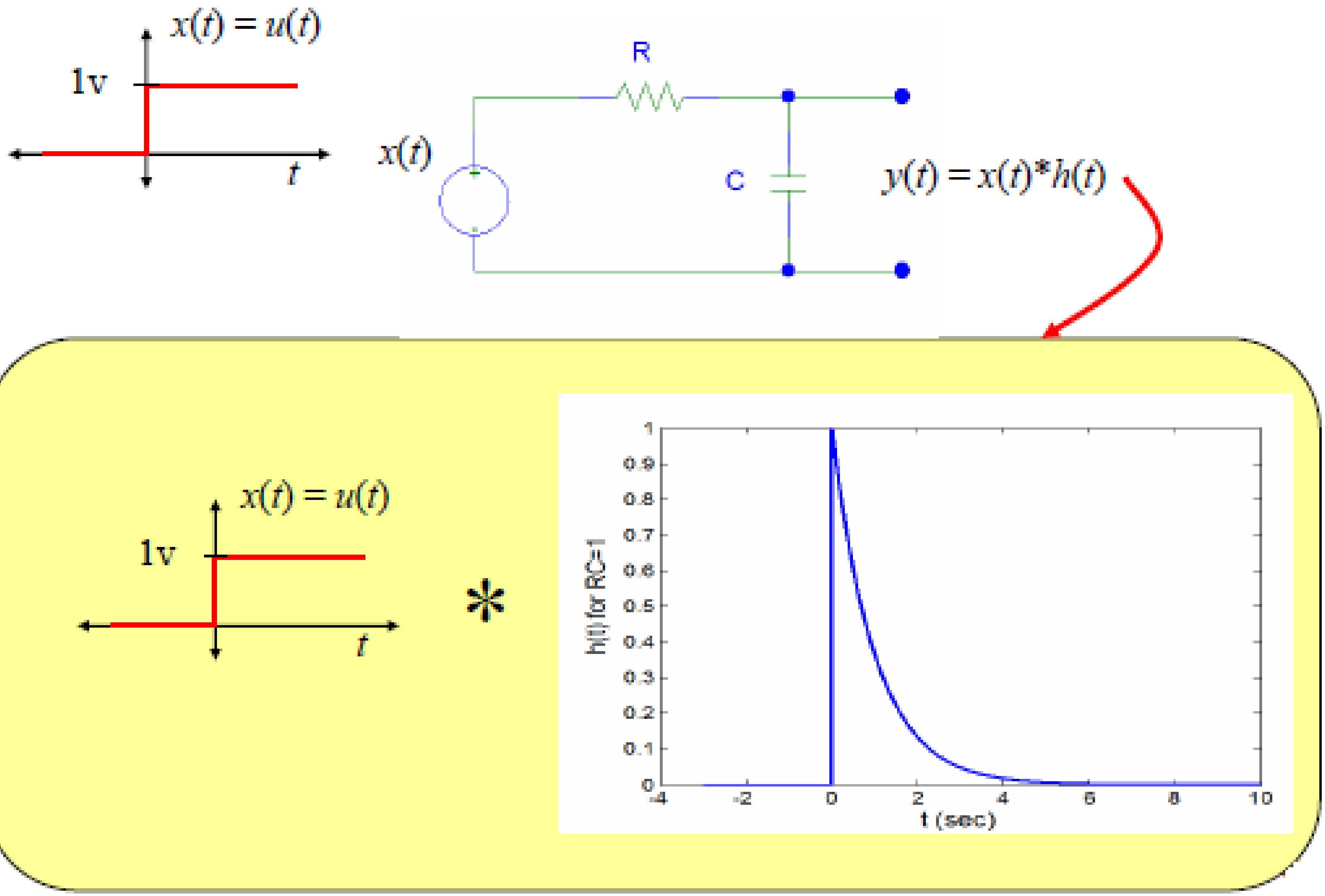


$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$



$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{RC}e^{-(1/RC)t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$ veya $$h(t)=\frac{1}{RC}e^{-(1/RC)t}u(t)$$

Giriş



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{RC} e^{-(1/RC)\tau} \underbrace{u(\tau)}_{\tau < 0} \right] \underbrace{u(t-\tau)}_{t-\tau<0 \quad veya \quad \tau > t} d\tau$$

$\tau < 0$ için integral =0
diğer durumlarda 1

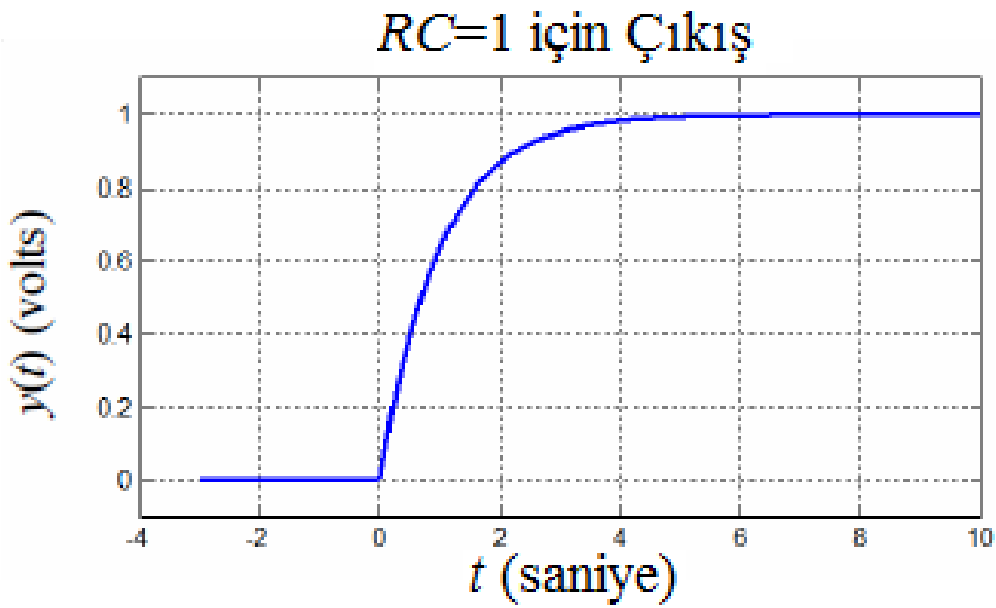
$t-\tau<0 \quad veya \quad \tau > t$ için integral =0
diğer durumlarda 1

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{RC} \displaystyle\int_0^t e^{-(1/RC)\tau} d\tau, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

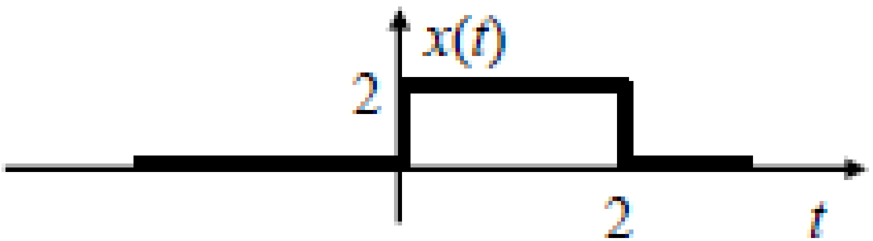
$$\frac{1}{RC}\int_0^t e^{-(1/RC)\tau}d(\tau)=\frac{1}{RC}\left[-RCe^{-(1/RC)\tau}\right]_0^t=\left[-e^{-(1/RC)\tau}\right]_0^t=\left[-e^{-(1/RC)t}\right]-\left[-e^{0}\right]$$

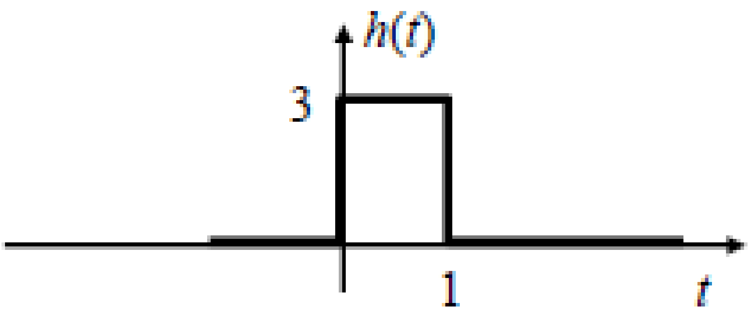
$$=1-e^{-(1/RC)t}$$

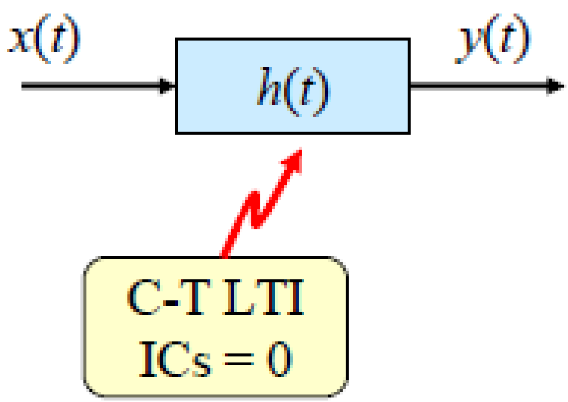
$$y(t)=\begin{cases}1-e^{-(1/RC)t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$



ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin dürtü (impuls) cevabı *h*(t) ve sisteme uygulanan giriş *x*(*t*) aşağıda verilmiştir. Sistem çıkışını *y*(*t*) 'yi hesaplayınız.

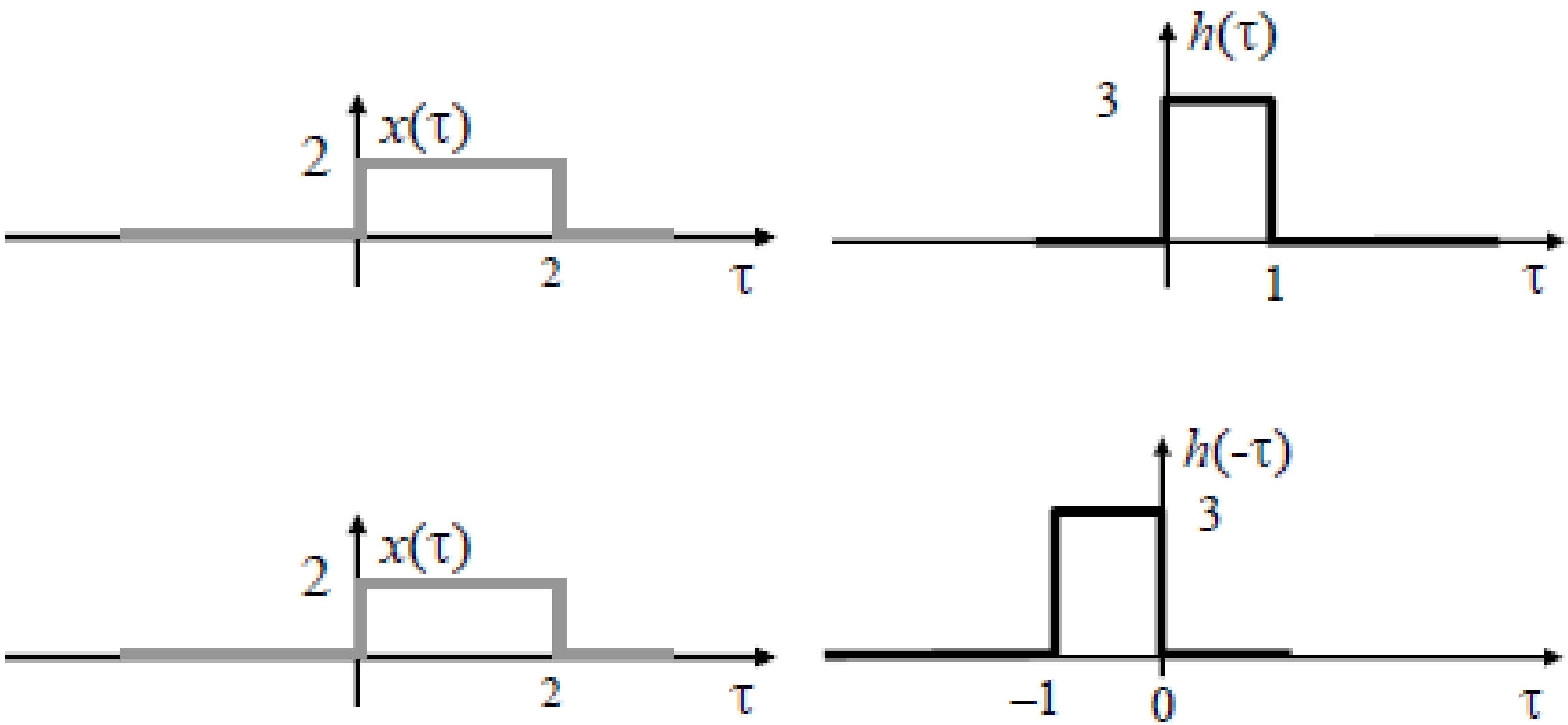




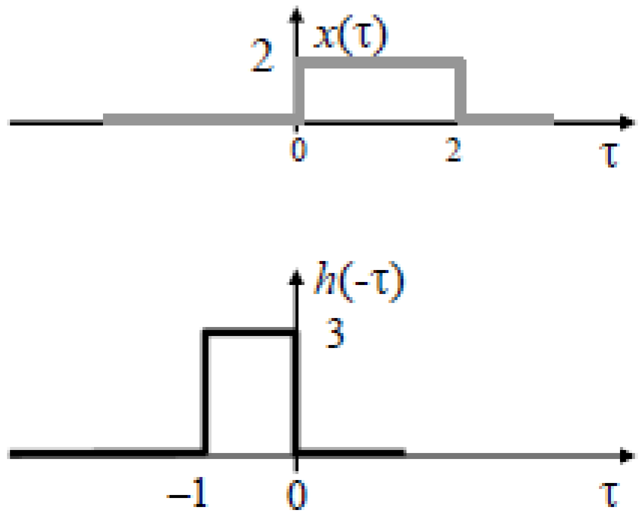


$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Sinyaller τ ‘nun bir fonksiyonu olarak yazılır.

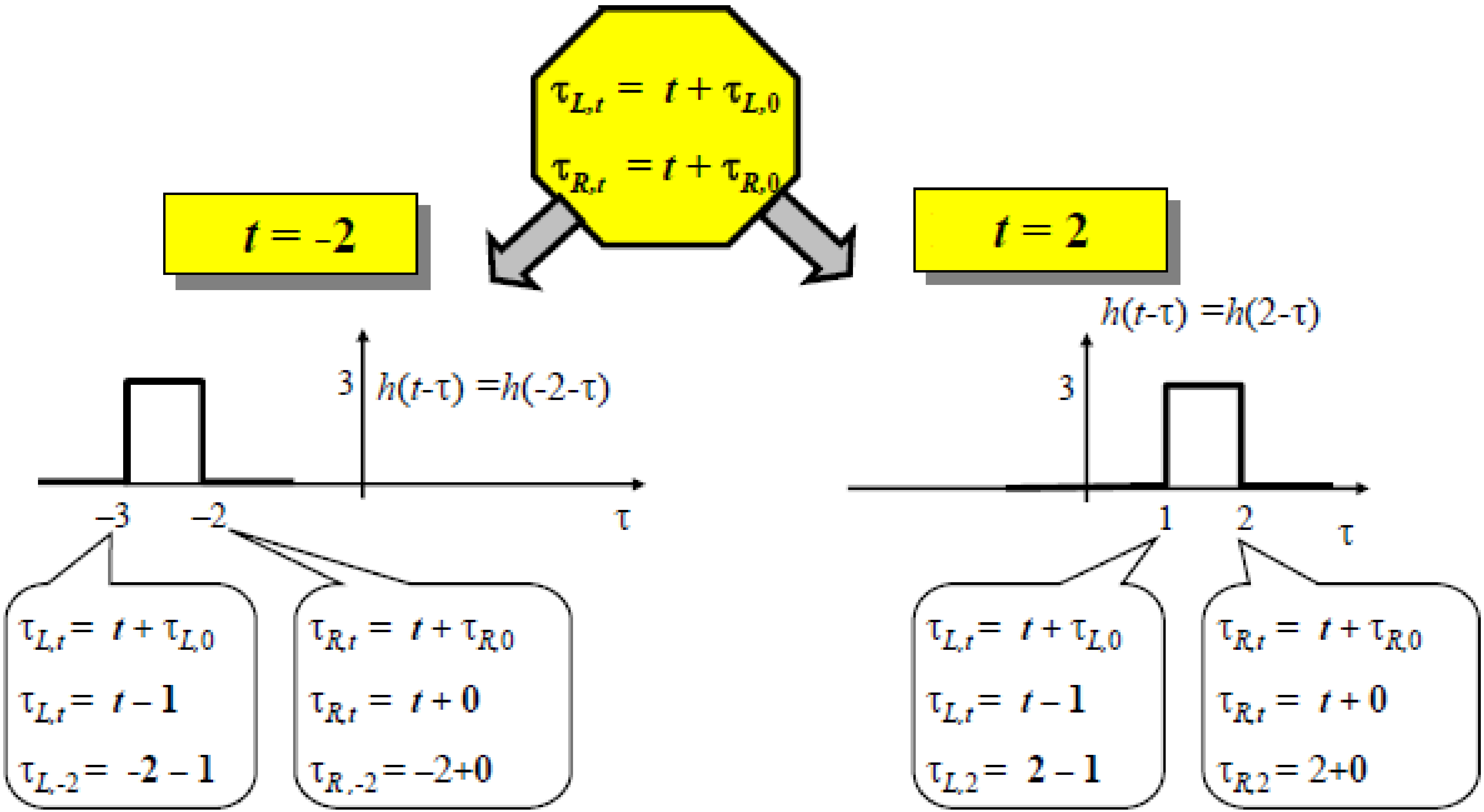


Ötelenecek sinyalin uç sınırlarını tayin edin.

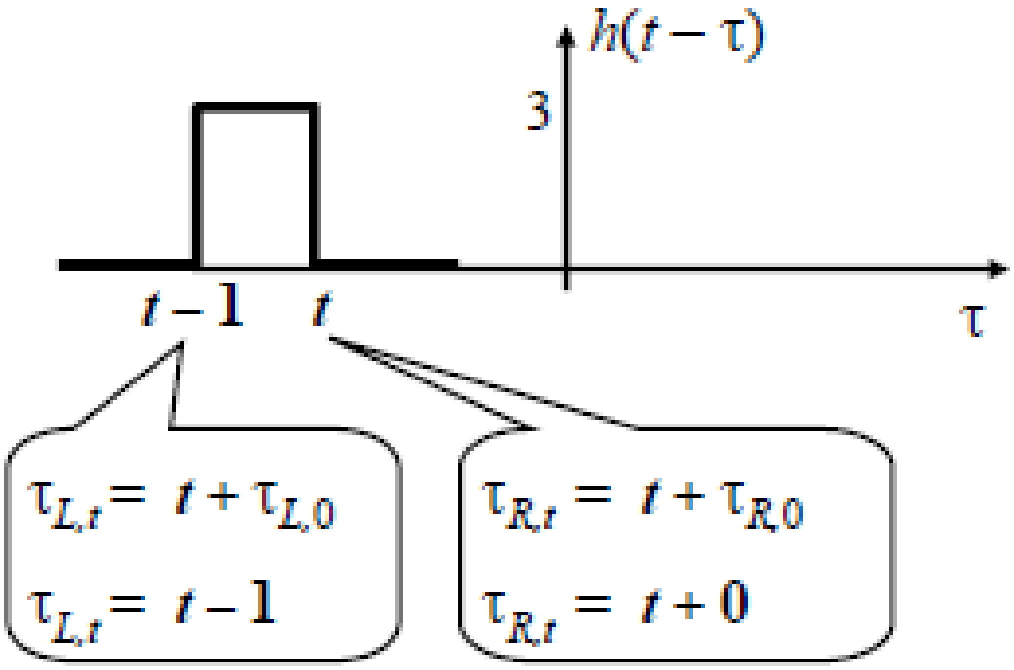


h(-τ) için *τ 'nun sol uç sınırı* $\tau_{L,0} = -1$

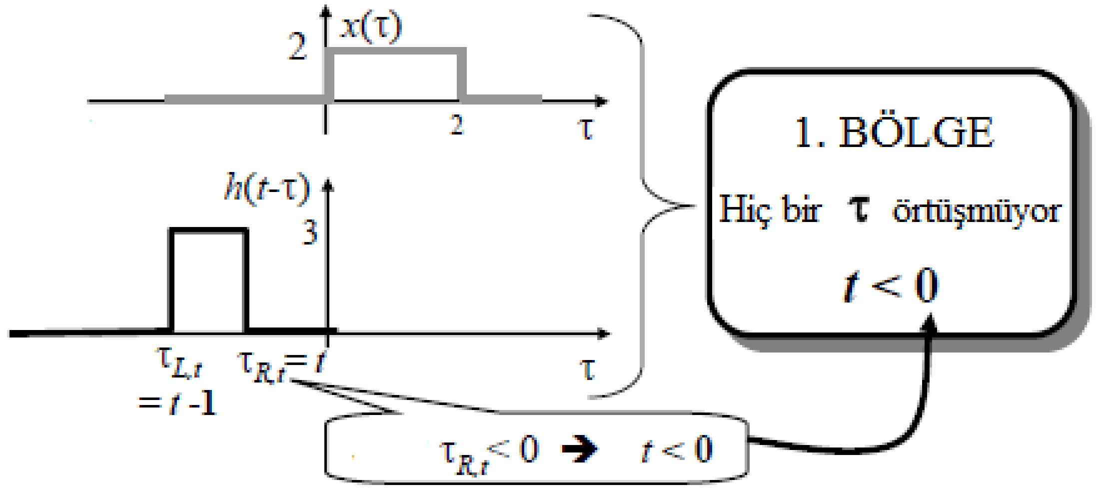
$\tau_{R,0} = 0$ *h*(-τ) için *τ 'nun sağ uç sınırı*

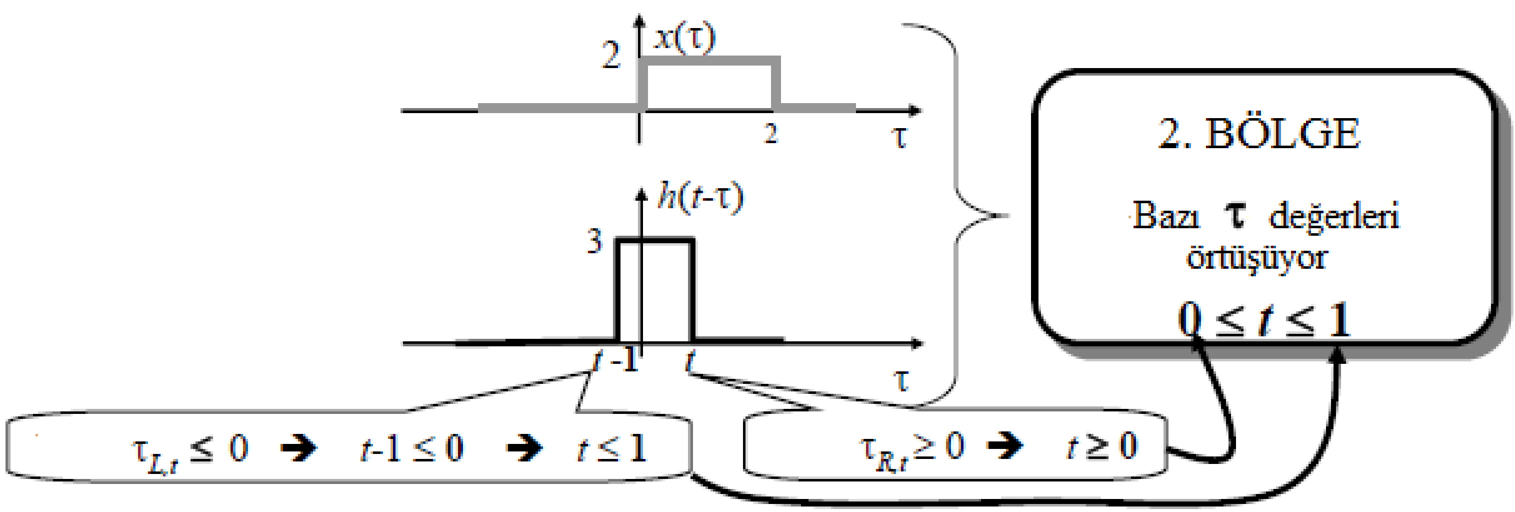

$\tau_{L,t} = t + \tau_{L,0}$
$\tau_{R,t} = t + \tau_{R,0}$
$t = -2$
$t = 2$
3
$h(t\text{-}\tau) = h(\text{-}2\text{-}\tau)$
-3
-2
τ
$h(t\text{-}\tau) = h(2\text{-}\tau)$
3
1
2
τ
$\tau_{L,t} = t + \tau_{L,0}$
$\tau_{L,t} = t - 1$
$\tau_{L,-2} = -2 - 1$
$\tau_{R,t} = t + \tau_{R,0}$
$\tau_{R,t} = t + 0$
$\tau_{R,-2} = -2+0$
$\tau_{L,t} = t + \tau_{L,0}$
$\tau_{L,t} = t - 1$
$\tau_{L,2} = 2 - 1$
$\tau_{R,t} = t + \tau_{R,0}$
$\tau_{R,t} = t + 0$
$\tau_{R,2} = 2+0$

t kadarlık bir öteleme için sınır değerlerini belirleyin.

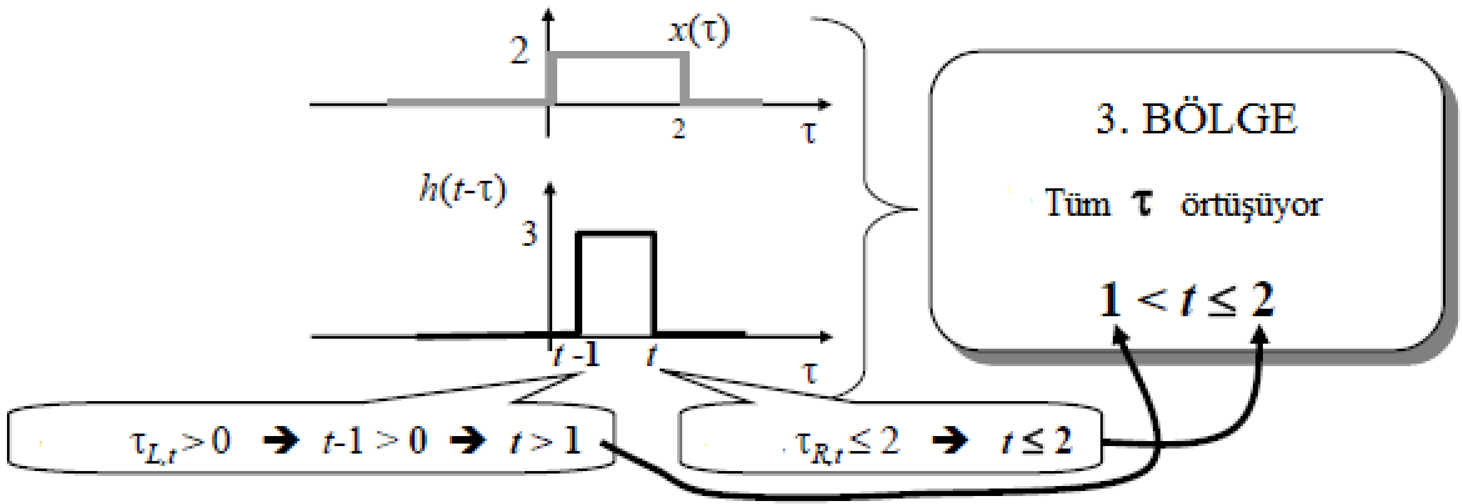


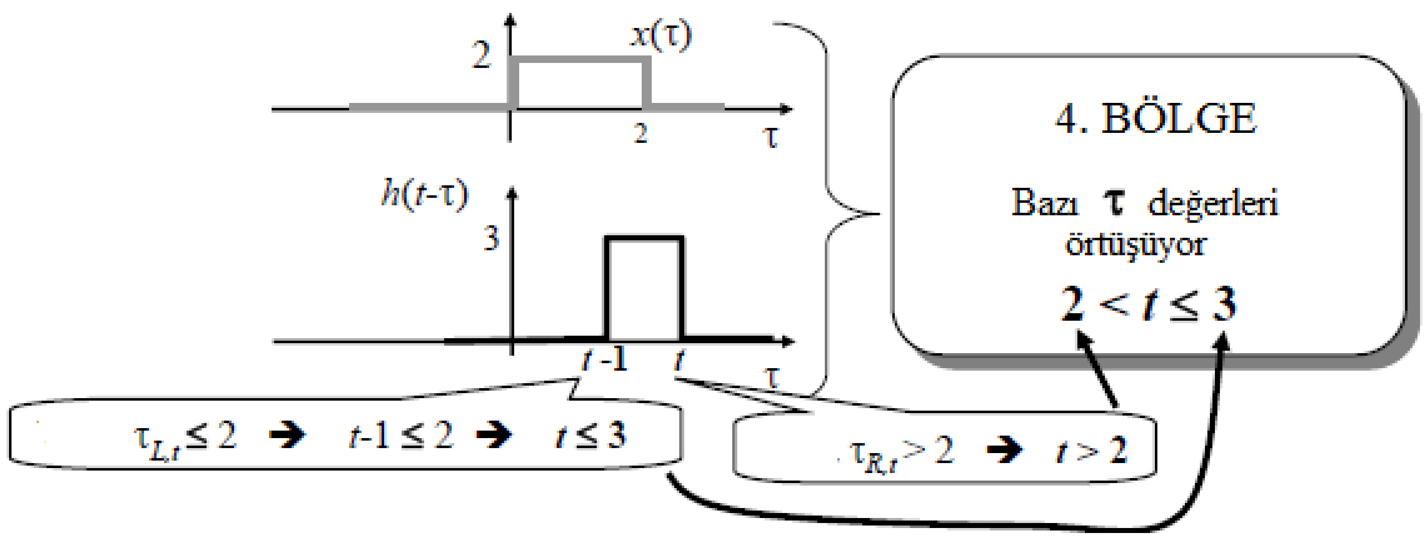
τ değerleri için çakışma *(örtüşme)* bölgelerini belirleyin.



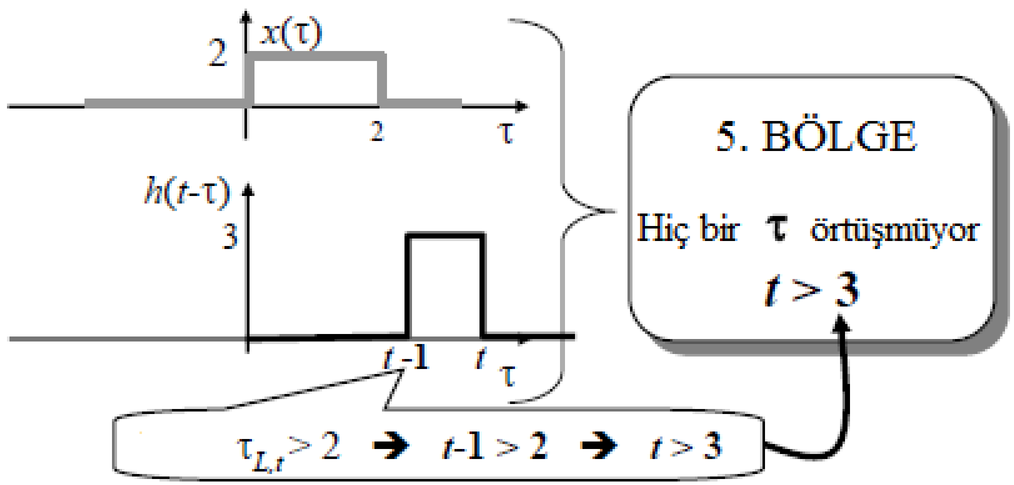


τ değerleri için çakışma *(örtüşme)* bölgelerini belirleyin.

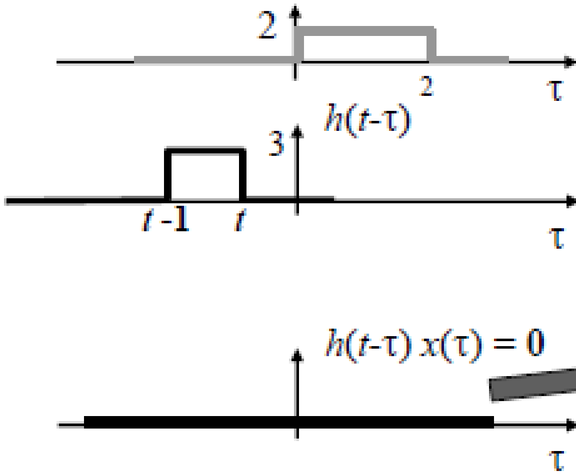




τ değerleri için çakışma *(örtüşme)* bölgelerini belirleyin.



Her bir bölge için integral hesabını yapın.

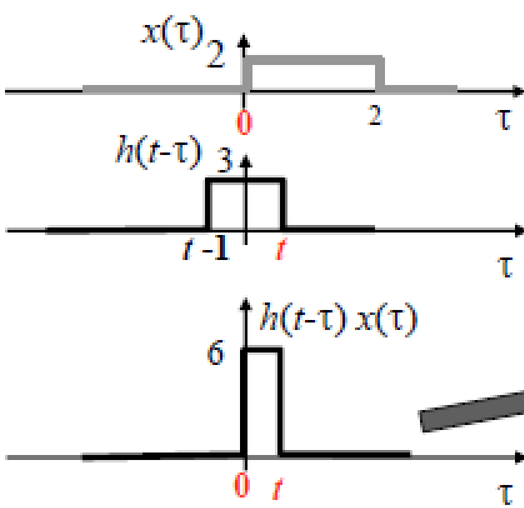


1. BÖLGE: $t < 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 0 d\tau = 0$$

$$y(t) = 0 \qquad t < 0$$



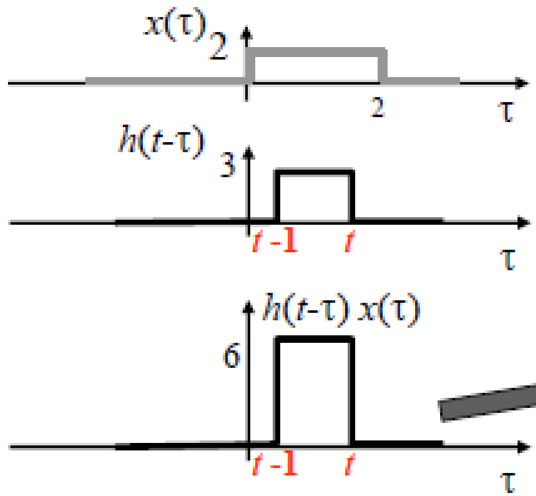
2. BÖLGE: $0 \le t \le 1$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} 6 d\tau = [6\tau]_0^t = 6t - 6\times 0 = 6t$$

$$y(t) = 6t \qquad 0 \le t \le 1$$

Her bir bölge için integral hesabını yapın.

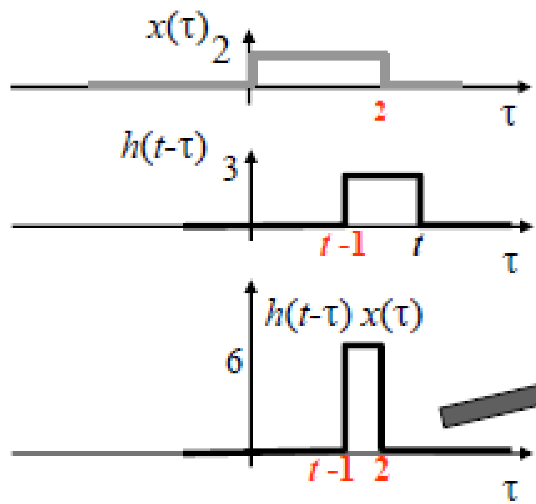


3. BÖLGE: $1 < t \leq 2$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{t-1}^{t} 6d\tau = [6\tau]_{t-1}^{t} = 6t - 6(t-1) = 6$$

$y(t) = 6 \qquad 1 < t \leq 2$



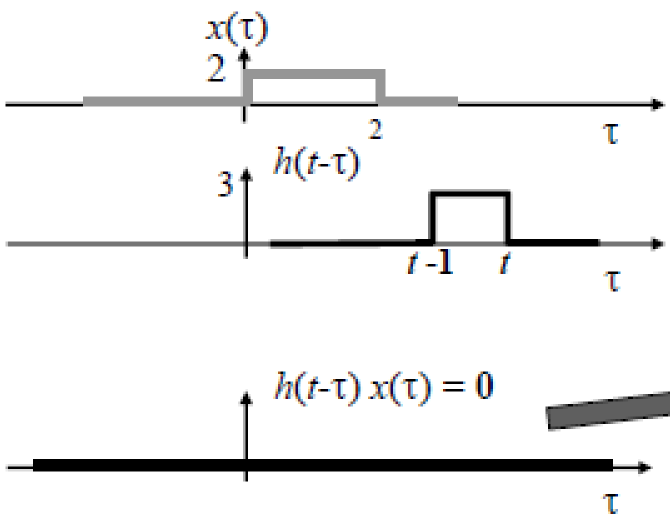
4. BÖLGE: $2 < t \leq 3$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{t-1}^{2} 6d\tau = [6\tau]_{t-1}^{2} = 6 \times 2 - 6(t-1) = -6t + 18$$

$y(t) = -6t + 18 \qquad 2 < t \leq 3$

Her bir bölge için integral hesabını yapın.



5. BÖLGE : $t > 3$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 0\, d\tau = 0$$

$$y(t) = 0 \qquad t > 3$$

Çıkış sinyalini çizin.