Reel Vektör Uzayları

Tanım 2.1 Üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri tanımlı olan bir V kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V'ye bir gerçel (reel) vektör uzayı denir.

(a) $\alpha, \beta \in V$ iken $\alpha \oplus \beta \in V$ dir. (Yani V, $\oplus$ işlemine göre kapalıdır.)

- **(1)** $\forall \alpha, \beta \in V$ için $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$
- **(2)** $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$
- **(3)** $\forall \alpha \in V$ için $\alpha \oplus \theta = \theta \oplus \alpha = \alpha$ şartını sağlayan bir tek $\theta \in V$ vardır.
- **(4)** $\forall \alpha \in V$ için $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \theta$ şartını sağlayan bir tek $\beta \in V$ vardır. Bu elemana α'nın negatifi denir ve $-\alpha$ ile gösterilir.

(b) Her $\alpha \in V$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot \alpha \in V$ dir.

- **(5)** $c \odot (\alpha \oplus \beta) = (c \odot \alpha) \oplus (c \odot \beta) \quad (\forall \alpha, \beta \in V$ ve $c \in \mathbb{R}$ için)
- **(6)** $(c + d) \odot \alpha = (c \odot \alpha) \oplus (d \odot \alpha) \quad (\forall \alpha \in V$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için)
- **(7)** $c \odot (d \odot \alpha) = (cd) \odot \alpha \quad (\forall \alpha \in V$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için)
- **(8)** $1 \odot \alpha = \alpha \quad (\forall \alpha \in V$ için)

Altuzaylar

Tanım 2.12 V bir vektör uzayı ve $W \subseteq V$ olsun. Eğer W, V deki işlemlerle birlikte bir vektör uzayı oluyorsa W ya V nin bir alt uzayı denir.

Örnek 2.13 Her vektör uzayının en az iki alt uzayı vardır: kendisi ve $\{\theta\}$ (yani toplamanın birim elemanı). Bu uzaylara trivial (aşikâr) alt uzaylar denir.

Örnek 2.14 $P_2 = \{$ derecesi $\leqslant 2$ olan polinomlar $\}$ olsun. $P_2 \subseteq P$ dir. Ayrıca P_2, P nin alt uzayıdır. Genelde $P_n = \{$ derecesi $\leqslant n$ olan polinomlar $\}$ kümesi P nin alt uzayıdır.

Örnek 2.15 $V = \{$ derecesi 2 olan polinomlar $\}$ olsun. $V \subseteq P$ dir. Fakat V, P nin alt uzayı değildir. Çünkü $2t^2 + 3t + 1 \in V$ ve $-2t^2 + t + 2 \in V$ polinomlarının toplamı $4t + 3 \notin V$ dir.

Teorem 2.16 V, $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. W nun V nin alt uzayı olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin sağlanmasıdır: (Her $\alpha, \beta \in W; c \in \mathbb{R}$ için)

(a) $\alpha, \beta \in W \Longrightarrow \alpha \oplus \beta \in W$

(b) $c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in W \Longrightarrow c \odot \alpha \in W$

İspat: ($\Longrightarrow$) $W \subseteq V$ bir alt vektör uzayı olsun. W bir vektör uzayı olduğu için $\alpha, \beta \in W$ ise $\alpha \oplus \beta \in W$ ve $c \odot \alpha \in W$ olduğu açıktır.

İspat: ($\Longleftarrow$) **(a)** ve **(b)** sağlansın. **(b)**'den dolayı $(-1) \odot \alpha \in W$ dır (her $\alpha \in W$ için). **(a)**'dan dolayı $\alpha \oplus (-1) \odot \alpha \in W$ dir; fakat $\alpha \oplus (-1) \odot \alpha = \alpha \oplus (-\alpha) = \theta$ olduğundan $\theta \in W$ olur. O zaman $\alpha \oplus \theta = \alpha$ dır. Her $\alpha \in V$ için $(-1) \odot \alpha = -\alpha \in V$ olur (**(b)**den dolayı). $W \subseteq V$ olduğundan $1, 2, 5, 6, 7$ ve 8 özellikleri sağlanır. O halde W, V nin bir alt uzayıdır. □

Örnek 2.17

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{olsun.}$$

W, $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayı mıdır?

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1 + b_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix} \text{ olsun. } \alpha \oplus \beta = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \end{bmatrix} \in W \text{ dur;}$$

çünkü $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$.

$$c \in \mathbb{R} \text{ ise } c \odot \alpha = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ c(a_1 + b_1) \end{bmatrix} \in W \text{ dur; çünkü } ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1). \text{ Teorem (2.16) dan}$$

W, $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayıdır.

Tanım 2.20 V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ ise

$$\mathrm{Span}(S) = \{a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k : a_i \in \mathbb{R}\}$$

kümesi V nin bir alt uzayıdır. Bu uzaya S nin <u>gerdiği</u> <u>(doğurduğu, ürettiği)</u> <u>uzay</u> denir.

Tanım 2.20 V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ ise

$$\mathrm{Span}(S) = \{a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k : a_i \in \mathbb{R}\}$$

kümesi V nin bir alt uzayıdır. Bu uzaya S nin <u>gerdiği</u> <u>(doğurduğu, ürettiği)</u> <u>uzay</u> denir.

2.2 Lineer Bağımsızlık

Eleman sayısı sonlu olan tek vektör uzayı $\{\theta\}$ uzayıdır. Çünkü V bir vektör uzayı $\theta \neq \alpha \in V$ ise her $c \in \mathbb{R}$ için $c\alpha \in V$ olacağından V sonsuz elemanlı olur.

Tanım 2.23 V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer bir $\alpha \in V$ vektörü $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k$$

şeklinde yazılabiliyorsa α ya S deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu (doğrusal birleşimi) denir.

Örnek 2.24 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörü $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. Gösterelim.

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \Longrightarrow a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Buradan $\left\{\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & 2 \\ 2a_1 + a_3 & = & 1 \\ a_1 + 2a_2 & = & 5 \end{array}\right\}$ denklem sistemi çözülürse $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -1$ bulunur.
Yani $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ olur.

Örnek 2.25 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektörünün Span$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesinde olup olmadığını inceleyiniz.
Çözüm: $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4$ olacak şekilde a_1, a_2, a_3, a_4 sayıları bulunursa $\alpha \in$ Span$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olur.

$$a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 & = & 0 \\ a_1 + a_3 & = & -2 \\ 2a_1 + a_2 - a_4 & = & 4 \end{array}\right\}$$

Ek matrisi satır eşelon forma getirirsek:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$, buradan $a_1 = a_4$, $a_2 = 4 - a_4$, $a_3 = -2 - a_4$, $a_4 =$ bir reel sayı.

Yani $\alpha \in$ Span$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olur. (Sonsuz miktarda a_1, a_2, a_3, a_4 bulunur.)

Tanım 2.26 V bir vektör uzayı $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer V deki her vektör S deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu ise S, V yi doğurur (gerer, üretir) veya V, S tarafından doğurulur (gerilir, üretilir) denir.

Örnek 2.27 $V = \mathbb{R}^3$ olsun. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi V'yi gerer mi?

Çözüm: $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in V$ olsun. (a, b, c herhangi 3 reel sayı) $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$ denkleminin çözümüne bakalım. (yani her a, b, c için a_1, a_2, a_3 bulunabileceğini göstermeye çalışalım.)

$\left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + a_3 &=& a \\ 2a_1 + a_3 &=& b \\ a_1 + 2a_2 &=& c \end{array}\right\}$ çözülürse $a_1 = \frac{-2a+2b+c}{3}$; $a_2 = \frac{a-b+c}{3}$; $a_3 = \frac{4a-b-2c}{3}$ bulunur.

Görüldüğü gibi, her a, b, c için a_1, a_2, a_3 vardır. O halde $\mathrm{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = V$ dir.

Örnek 2.28 $V = P_2$ olsun. $\alpha_1 = t^2 + 2t + 1$ ve $\alpha_2 = t^2 + 2$ ise $\mathrm{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = V$ midir?

Çözüm: a, b, c reel sayılar olmak üzere $\alpha = at^2 + bt + c \in V$ alalım. $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ olacak şekilde a_1, a_2 sabitleri bulmalıyız.

$$at^2 + bt + c = a_1(t^2 + 2t + 1) + a_2(t^2 + 2) = (a_1 + a_2)t^2 + (2a_1)t + (a_1 + 2a_2)$$

eşitliğinden $\left\{\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 &=& a \\ 2a_1 &=& b \\ a_1 + 2a_2 &=& c \end{array}\right\}$ sistemi elde edilir. Ek matrisi yazıp indirgenmiş forma getirirsek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2a - c \\ 0 & 1 & \vdots & c - a \\ 0 & 0 & \vdots & b - 4a + 2c \end{bmatrix}$$

bulunur. Eğer $b - 4a + 2c \neq 0$ ise çözüm yoktur (bu eşitsizliği sağlayan a, b, c vardır.) Yani $\{\alpha_1, \alpha_2\}, V$ yi doğurmaz.

Tanım 2.29 V bir vektör uzayı $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k = \theta_V$$

olacak şekilde, hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sabitleri varsa S kümesine lineer bağımlıdır denir. Aksi halde (yani a_i lerin hepsinin 0 olması zorunlu ise) S ye lineer bağımsızdır denir.

Örnek 2.30 $V = \mathbb{R}_4$ olsun. $\alpha_1 = [\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ ], \alpha_2 = [\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ ]$ ve $\alpha_3 = [\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 3\ ]$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olsun. $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = \theta$ diyelim. a_1, a_2 ve a_3'ü bulalım

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_3 & = & 0 \\ a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 & = & 0 \end{array}\right\} \text{ çözülürse } a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ bulunur. Yani } S \text{ lineer bağımsızdır.}$$

Örnek 2.31 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesi lineer bağımlı mıdır?

Çözüm: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 = \theta$ eşitliğinden

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 & = & 0 \\ 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 & = & 0 \\ -a_1 + a_2 - a_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. $m < n$ olduğundan Teorem (1.68)'den dolayı bir trivial olmayan çözüm vardır. Örneğin $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 0$ bir çözümdür. Yani S lineer bağımlıdır.

Teorem 2.34 S_1 ve S_2 bir vektör uzayının sonlu alt kümeleri ve $S_1 \subseteq S_2$ olsun.

(a) S_1 lineer bağımlı ise S_2 de lineer bağımlıdır.

(b) S_2 lineer bağımsız ise S_1 de lineer bağımsızdır.

İspat: (a) $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ ve $S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_m\}$ olsun. S_1 lineer bağımlı olduğundan hepsi birden sıfır olmayan $a_1, \ldots, a_k$ sayıları için $a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k = \theta$ dır. O zaman

$$a_1\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k + 0\alpha_{k+1} + 0\alpha_{k+2} + \cdots + 0\alpha_m = \theta$$

olur. Yukardaki toplamın sol tarafındaki katsayıların hepsi birden sıfır olmadığından S_2 lineer bağımlıdır.

İspat: (b) S_2 lineer bağımsız olsun. Bir an için S_1'in lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. O zaman, (a) dan dolayı S_2 lineer bağımlı olur. Bu da bir çelişkidir. O halde S_1 lineer bağımsızdır. □

Not 2.36 $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımlı olmanın anlamı nedir? $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\mathbb{R}^2$ de lineer bağımlı olsun. Yani a_1, a_2 ikisi birden sıfır olmayan sayılar olmak üzere $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ dır.

$$a_1 \neq 0 \Longrightarrow \alpha_1 = -\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_2, \text{ veya}$$
$$a_2 \neq 0 \Longrightarrow \alpha_2 = -\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\alpha_1$$

dir. Yani biri diğerinin bir katıdır. Tersine, vektörlerden biri diğerinin bir katı olsun. Mesela $\alpha_1 = a\alpha_2 \implies 1\alpha_1 - a\alpha_2 = 0$ olup $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi lineer bağımlıdır. (Bkz. Şekil 2.6) Özetleyecek olursak

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ lineer bağımlı $\iff$ Biri diğerinin katı $\iff$ Merkezden geçen aynı doğru üzerindeler.

Teorem 2.37 V bir vektör uzayı, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq V$ sıfır olmayan vektörlerin bir kümesi olsun. S nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart bir α_j vektörünün kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer kombinasyonu olmasıdır.

2.3 Baz ve Boyut

Tanım 2.42 V bir vektör uzayı, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer S lineer bağımsız ise ve $\text{Span}(S) = V$ ise S ye V nin bir <u>bazı (tabanı)</u> denir.

Örnek 2.44 $S = \{t^2+1, t-1, 2t+2\}$ kümesinin P_2 nin bir bazı olduğunu gösteriniz.
Çözüm: $\text{Span}(S) = P_2$ ve S nin lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. $at^2+bt+c \in P_2$ alalım. $at^2+bt+c = a_1(t^2)+a_2(t-1)+a_3(2t+2)$ olacak şekilde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ bulmalıyız. Buradan:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 + 2a_3 &= b \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= c \end{aligned}\right\} \implies a_1 = a, a_2 = \frac{a+b-c}{2}, a_3 = \frac{c+b-a}{4}$$

bulunur. Her a, b, c için a_1, a_2, a_3 bulunabildiğinden $\text{Span}(S) = P_2$ dir.

Şimdi de S nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $a_1(t^2+1) + a_2(t-1) + a_3(2t+2) = 0$ dersek buradan $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olması gerektiği görülür. (Ödev). **Sonuç:** S, P_2 için bir bazdır.

Örnek 2.45 $\alpha_1 = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0], \alpha_2 = [0\ \ 1\ \ -1\ \ 2], \alpha_3 = [0\ \ 2\ \ 2\ \ 1]$ ve $\alpha_4 = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesinin $\mathbb{R}_4$ için bir baz olduğunu gösterin. (Ödev)

<u>V yi geren bir S kümesinden T bazı şöyle elde edilir:</u>

<u>Adım.1.</u> $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = \theta$ eşitliği oluşturulur.

<u>Adım.2.</u> Buradan ek matris oluşturulur ve bu matris indirgenmiş satır eşelon forma getirilir. (**Not:** Satır eşelon forma getirmek de yeterlidir.)

<u>Adım.3.</u> Baş eleman olan 1 sayısını bulunduran kolona ait vektörler $V = \text{Span}(S)$ uzayı için bir baz olusturur.

Örnek 2.48 $V = \mathbb{R}_3$ olsun. $\alpha_1 = [1\ \ 0\ \ 1], \alpha_2 = [0\ \ 1\ \ 1], \alpha_3 = [1\ \ 1\ \ 2], \alpha_4 = [1\ \ 2\ \ 1], \alpha_5 = [-1\ \ 1\ \ -2]$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ kümesi V yi gerer. (Kontrol ediniz.) Şimdi S nin alt kümesi olan ve V nin bazı olan T kümesini bulalım.

Adım.1.

$$a_1[1\ \ 0\ \ 1] + a_2[0\ \ 1\ \ 1] + a_3[1\ \ 1\ \ 2] + a_4[1\ \ 2\ \ 1] + a_5[-1\ \ 1\ \ -2] = [0\ \ 0\ \ 0]$$

Adım.2.

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_4 - a_5 &= 0 \\ a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 - 2a_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{Ek matris:} \\ \text{(ind. satır eşelon formu)}\end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Adım.3. Baş elemanlar 1., 2. ve 4. kolonlardadır. Yani $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ kümesi $\mathbb{R}_3$ için bir bazdır.

Not: S nin yazılışında vektörlerin sırası değiştirilirse V nin başka bir bazı elde edilebilir. Örneğin $\beta_1 = \alpha_5, \beta_2 = \alpha_4, \beta_3 = \alpha_3, \beta_4 = \alpha_2, \beta_5 = \alpha_1$ yazılırsa $S = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$ kümesinden $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \{\alpha_5, \alpha_4, \alpha_3\}$ bazı elde edilir.

Tanım 2.51 Bir V vektör uzayının bir bazındaki eleman sayısına (sonlu ise) V nin boyutu denir ve $\text{boy}(V)$ ile gösterilir. $V = \{\theta\}$ ise $\text{boy}(V) = 0$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.52 $S = \{t^2, t, 1\}$ kümesi P_2 için bir baz olup $\text{boy}(P_2) = 3$ dür.

Örnek 2.53 $\alpha_1 = [0\ \ 1\ \ 1], \alpha_2 = [1\ \ 0\ \ 1], \alpha_3 = [1\ \ 1\ \ 2]$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olsun. $V = \text{Span}(S)$, $\mathbb{R}_3$ ün alt uzayı olsun. V deki her vektör $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$ şeklindedir. $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ olduğundan S lineer bağımlıdır. $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ dersek $\text{Span}(S_1) = V$ olur. S_1 lineer bağımsız olduğundan (kontrol edin) S_1, V nin bir bazıdır. Yani $\text{boy}(V) = 2$ dir.

Örnek 2.58 $\text{boy}(\mathbb{R}^3) = 3$, $\text{boy}(\mathbb{R}_2) = 2$, $\text{boy}(\mathbb{R}^n) = n$, $\text{boy}(\mathbb{R}_n) = n$ dir. $\text{boy}(P_3) = 4$ dür; çünkü $\{t^3, t^2, t, 1\}$ bir bazdır. Genelde $\text{boy}(P_n) = n + 1$ dir.

Örnek 2.62 $\mathbb{R}_3$ de $\alpha = [1\ \ 0\ \ 1]$ vektörünü içeren bir baz bulunuz.
Çözüm: $\varepsilon_1 = [1\ \ 0\ \ 0], \varepsilon_2 = [0\ \ 1\ \ 0], \varepsilon_3 = [0\ \ 0\ \ 1]$ olmak üzere $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, $\mathbb{R}_3$'ün doğal bazıdır. $S_1 = \{\ \alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ olsun. ε_1 α'nın lineer kombinasyonu olmadığından ε_1'i tutarız. ε_2 vektörü α ve ε_1 in lineer kombinasyonu mudur? Cevap hayır olduğu için ε_2'yi de tutarız. ε_3 vektörü α, ε_1 ve ε_2 nin lineer kombinasyonu olduğundan (kontrol edin) ε_3'ü sileriz. İstenen baz $\{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ dir.

Örnek 2.64 Aşağıdaki homojen sistemin çözüm uzayı V için bir baz bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Çözüm: Gauss–Jordan yöntemiyle aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Genel çözüm: } X = \begin{bmatrix} 3s+t \\ -3s-t \\ -s-\frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R})$$

$$X = s \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ şeklinde yazılabilir. } \left\{ \begin{array}{c} s = 1 \\ t = 0 \end{array} \right\} \text{ ve } \left\{ \begin{array}{c} s = 0 \\ t = 1 \end{array} \right\} \text{ verilirse}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

çözümleri bulunur. $\text{Span}(\{X_1, X_2\}) = V$ olduğu açıktır. Ayrıca $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız olduğu için (biri diğerinin katı olmadığından) çözüm uzayı için bir bazdır. Yani $\text{boy}(V) = 2$ bulunur.