Sinyaller ve Sistemler

Sıfır-Giriş Cevabı

Sıfır-Durum Cevabı

$$\boxed{Y(s) = \frac{IC(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)} X(s)}$$

Eğer sistem sıfır-durum cevabında ise;

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = H(s) X(s)$$

$$H(s) \triangleq \frac{B(s)}{A(s)}$$

H(s) = "Transfer Fonksiyonu"

Bu durumda sistem etkisi tümüyle transfer fonksiyonuna bağlıdır

n dereceli ifadenin Laplace dönüşümü

$$x^{(n)}(t) \quad \leftrightarrow \quad s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) \cdots x^{(n-1)}(0)$$

Sıfır-duruma (zero-state) sahip bir fark denkleminin Laplace dönüşümünü ele alalım(Başlangıç şartları IC:0)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$s^2Y(s) + a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = b_1 sX(s) + b_0 X(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\left[\frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}\right]}_{=H(s)} X(s)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

$$H(s)=\frac{b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

Konvolüsyon özelliği:

$$\boxed{Y(s)=H(s)X(s) \quad \leftrightarrow \quad y(t)=h(t)*x(t)}$$

$$\boxed{H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}}$$

Transfer Fonksiyonu = $\mathcal{L}$ {Dürtü Cevabı}

$$\boxed{H(\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}}$$

Frekans Cevabı

Transfer fonksiyonu $H(s)$ fark denklemleri ile tanımlamıştık. Bundan dolayı transfer fonksiyonunun yapısı incelendiğinde o sistem hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Bu yapıda “kutup” (pole) ve “sıfır”(zero) lar mevcuttur.

Bir sistem aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahip olsun:

$$\boxed{H(s) \triangleq \frac{B(s)}{A(s)}}$$

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \quad \begin{matrix} \leftarrow B(s) \\ \leftarrow A(s) \end{matrix}$$

$$H(s) = \frac{b_M (s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_N)}$$

$$H(s)\big|_{s=z_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, M \qquad \boxed{\{z_i\} \quad \text{"}H(\text{s})\text{ 'in sıfırları"}}$$

$$H(s)\big|_{s=p_i} = \infty \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad \boxed{\{p_i\} \quad \text{"}H(\text{s})\text{ 'in kutupları"}}$$

Not: p_i Karakteristik polinom kökleri

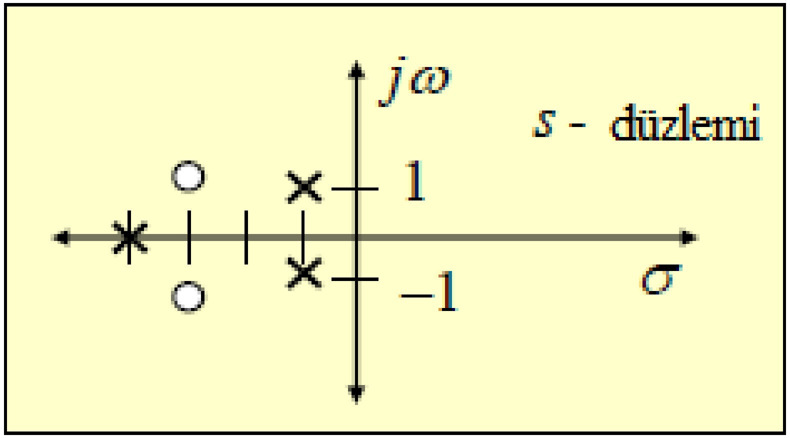
Kutup-Sıfır Grafiği:

Bu grafik sistem davranışının grafiksel görünüşüdür.

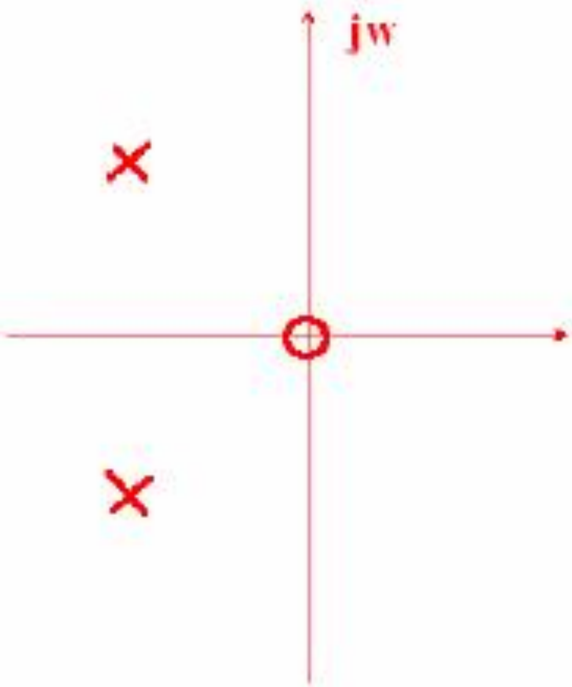
$$H(s)=\frac{2s^2+12s+20}{s^3+6s^2+10s+8}=\frac{2(s+3-j)(s+3+j)}{(s+4)(s+1-j)(s+1+j)}$$

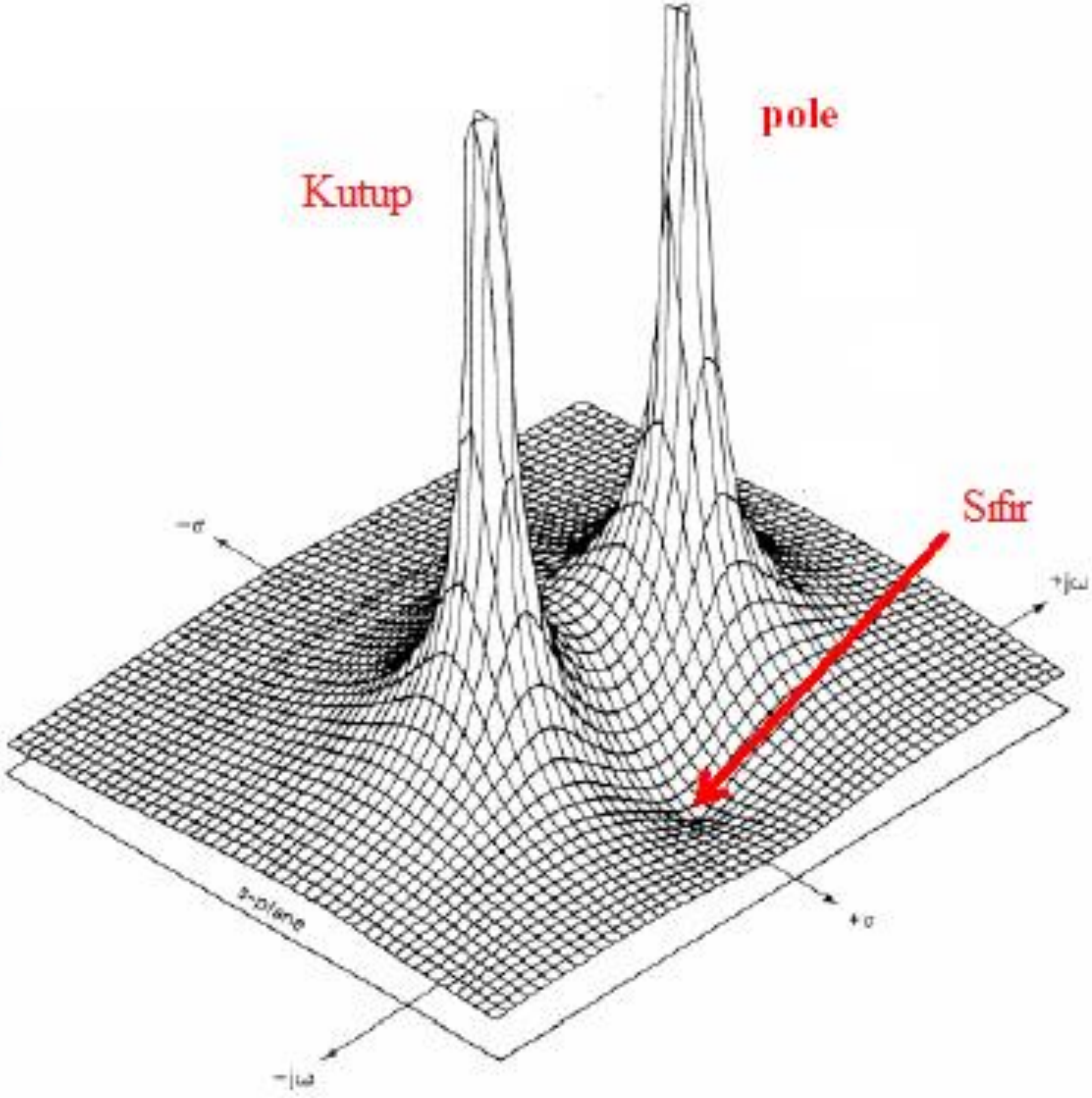
Reel katsayılar $\Rightarrow$ Kompleks konjuget parçalar

H (s) 'in kutup-sıfır grafiği

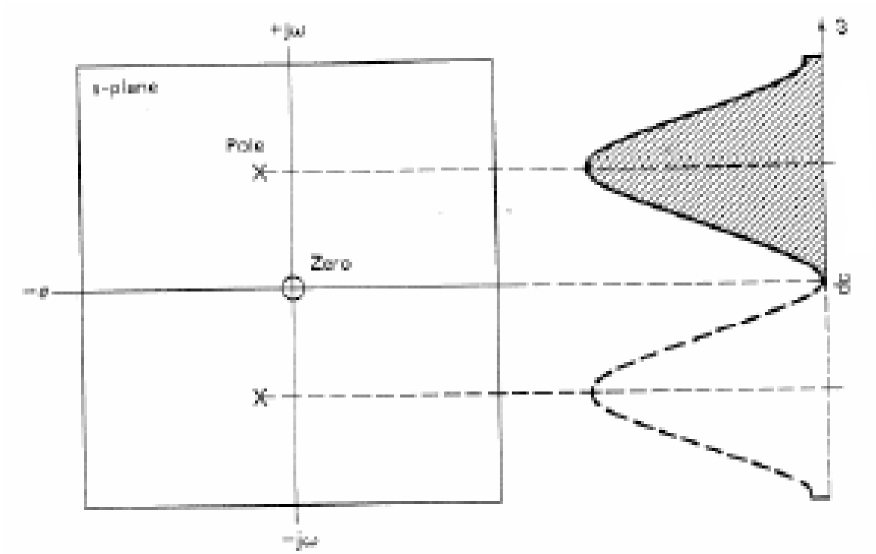


x	kutup tanımlar
o	sıfır tanımlar

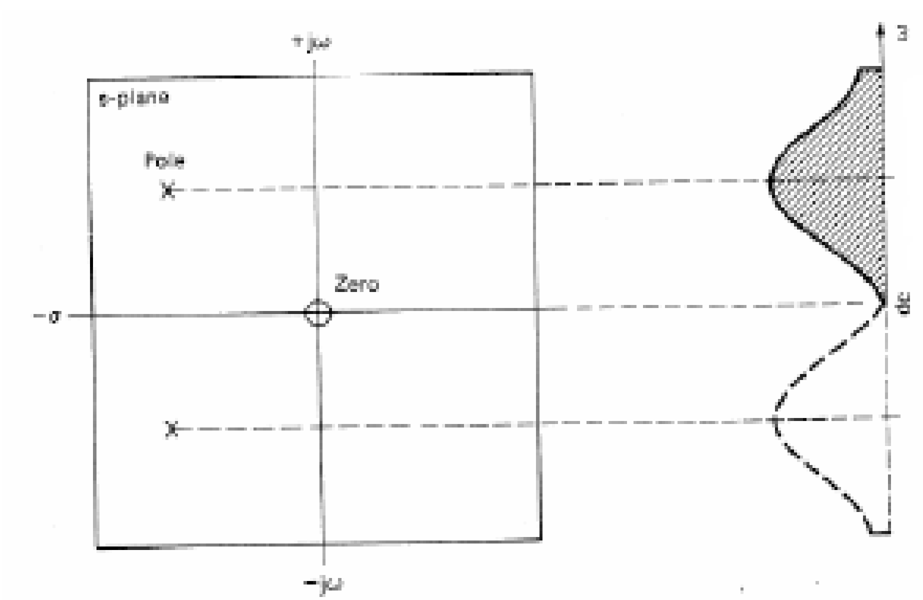

jw


pole
Kutup
Sıfır
−σ
+jω
+σ
−jω
s-plane

Kutup ve Sıfırların Frekans Cevabına Etkisi



Kutup $j\omega$ eksenine yaklaştıkça frekans cevabındaki($H(\omega)$)etkisi güçlenir. Frekans cevabında daha yüksek sıçramalar olur.



Transfer fonksiyonu ile istenilen bir frekans cevabını elde etmek kolaylaşır.

Matlab Uygulamaları

Matlab programında “residue” komutu ifadeyi çarpanlarına ayrıştıran bir komuttur.

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{d_N s^N+d_{N-1}s^{N-1}+\cdots+d_1 s+d_0}$$

$$=\frac{N(s)}{d_N(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

$$Y(s)=\frac{r_1}{(s-p_1)}+\frac{r_2}{(s-p_2)}+\cdots+\frac{r_N}{(s-p_N)}$$

numerator

dominator

Örnek-1: $Y(s) = \dfrac{3s-1}{s^2+3s+2}$

numerator vector $[3 \quad -1]$

denominator vector $[1 \quad 3 \quad 2]$.

```
» [r,p,k]=residue([3 -1],[1 3 2])

r =

    7
   -4

p =

   -2
   -1

k =
    []
```

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+3s+2} = \frac{7}{s+2} + \frac{-4}{s+1}$$

$$y(t) = 7e^{-2t}u(t) - 4e^{-t}u(t)$$

Örnek-2: $$Y(s)=\frac{2s^2+3s-1}{s^2+3s+2}$$

```
» [r,p,k]=residue([2 3 -1],[1 3 2])

r =
   -1
   -2

p =
   -2
   -1

k =
    2
```

$$Y(s)=\frac{2s^2+3s-1}{s^2+3s+2}=\frac{-1}{s+2}+\frac{-2}{s+1}+2$$

$$y(t)=-e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

Örnek-3: $$Y(s)=\frac{2s^2+3s-1}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{2s^2+3s-1}{(s+1)(s+2)^2}$$

```
» [r,p,k]=residue([2 3 -1],[1 5 8 4])

r =

    4.0000
   -1.0000
   -2.0000
```

$$Y(s)=\frac{2s^2+3s-1}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{2s^2+3s-1}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{4}{s+2}+\frac{-1}{(s+2)^2}+\frac{-2}{s+1}$$

```
p =

   -2.0000
   -2.0000
   -1.0000
```

$$y(t)=4e^{-2t}u(t)-te^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)$$

```
k =

     []
```

Örnek-4: $Y(s)=\dfrac{3s-1}{s^3+5s^2+9s+5}=\dfrac{3s-1}{(s+1)(s+(2+j))(s+(2-j))}$

» [r,p,k]=residue([3 -1],[1 5 9 5])

r =

1.0000 - 2.5000i
1.0000 + 2.5000i
-2.0000

$$Y(s)=\frac{3s-1}{s^3+5s^2+9z+5}=\frac{1-j2.5}{(s+(2-j))}+\frac{1+j2.5}{(s+(2+j))}+\frac{-2}{(s+1)}$$

$$y(t)=(1-j2.5)e^{(-2+j)t}u(t)+(1+j2.5)e^{(-2-j)t}u(t)-2e^{-t}u(t)$$

p =

-2.0000 + 1.0000i
-2.0000 - 1.0000i
-1.0000

$$=(2.69e^{-j1.19})e^{(-2+j)t}u(t)+(2.69e^{+j1.19})e^{(-2-j)t}u(t)-2e^{-t}u(t)$$

$$=2.69e^{-2t}\left[e^{j(t-1.19)}+e^{-j(t-1.19)}\right]u(t)-2e^{-t}u(t)$$

$$=5.38e^{-2t}\cos(t-1.19)u(t)-2e^{-t}u(t)$$

k = []

2. Dereceden Fark Denklemleri

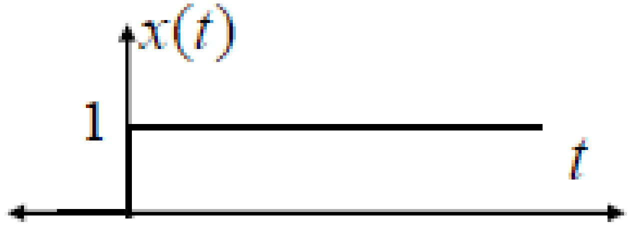
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=2x(t)$$

Başlangıç şartları:

$$y(0^-)=1 \qquad \dot{y}(0^-)=2$$

Fark denklemine sahip bir sistem verilsin.

$t\geq 0$ için $y(t)=?$



$$x(t)=u(t)$$

Laplace dönüşümü:

$$\left[s^2Y(s)-y(0^-)s-\dot{y}(0^-)\right]+6\left[sY(s)-y(0^-)\right]+8Y(s) = 2X(s)$$

$$Y(s)=\frac{y(0^-)s+\left[\dot{y}(0^-)+6y(0^-)\right]}{s^2+6s+8}+\frac{2}{s^2+6s+8}X(s)$$

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \underbrace{\left[\frac{s+8}{s^2+6s+8}\right]}_{\text{Sıfır-giriş cevabı}} + \underbrace{\left[\frac{2}{s^2+6s+8}\right]}_{H(s)\ \text{"Transfer Fonksiyonu"}} X(s)$$

$$Y(s) = \left[\frac{s+8}{s^2+6s+8}\right] + \left[\frac{2}{s(s^2+6s+8)}\right]$$

0< |ζ| < 1?

$$Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t+\phi\right]u(t)$$

$$A = \beta\sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha}{\omega_n}-\zeta\omega_n\right)^2}{1-\zeta^2}+1}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha-\zeta\omega_n}\right)$$

$$\longleftrightarrow \quad \beta\frac{s+\alpha}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\alpha = 8 \qquad \beta = 1$$

$$\omega_n^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 2\sqrt{2}$$

$$2\zeta\omega_n = 6 \quad \Rightarrow \quad \zeta = 6/2\omega_n = 6/4\sqrt{2} = 1.06$$

$$Y(s)=\left[\frac{s+8}{s^2+6s+8}\right]+\left[\frac{2}{s(s^2+6s+8)}\right]=\left[\frac{s+8}{(s+4)(s+2)}\right]+\left[\frac{2}{s(s+4)(s+2)}\right]$$

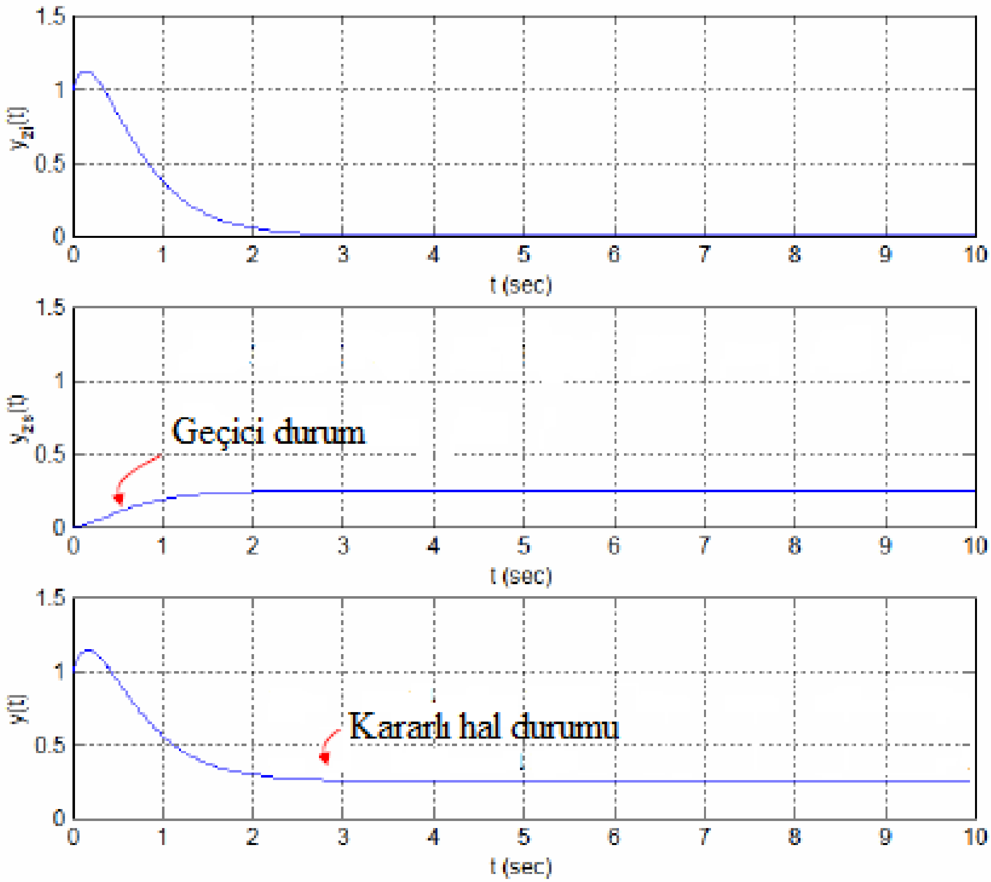
```
>> [R,P,K]=residue([1 8],[1 6 8])
R =
   -2
    3
P =
   -4
   -2
K =
    []
```

```
>> [R,P,K]=residue(2,[1 6 8 0])
R =
    0.2500
   -0.5000
    0.2500
P =
    -4
    -2
     0
K =
     []
```

$$Y(s)=\underbrace{\left(\left[\frac{-2}{s+4}\right]+\left[\frac{3}{s+2}\right]\right)}_{\text{Sıfır-giriş cevabı}}+\left(\underbrace{\left[\frac{0.25}{s+4}\right]+\left[\frac{-0.5}{s+2}\right]}_{\text{Geçici cevap}}+\underbrace{\left[\frac{0.25}{s}\right]}_{\text{Kararlı hal}}\right)$$

Laplace tablosundan: $\boxed{e^{-bt}u(t), \quad b \text{ real or complex}}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{1}{s+b}, \quad b \text{ real or complex}}$

$$y(t) = \underbrace{\left[-2e^{-4t} + 3e^{-2t}\right]}_{\text{Sıfır-giriş cevabı}} u(t) + \left[\underbrace{1/4e^{-4t} - 1/2e^{-2t}}_{\text{Geçici cevap}} \underbrace{+1/4}_{\text{Kararlı hal cevabı}}\right] u(t)$$



Aynı örnek modifiye edilirse: (kökleri kompleks yapmak için!)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=2x(t)$$

$$Y(s)=\underbrace{\left[\frac{s+8}{s^2+6s+8}\right]}_{\text{Sıfır-giriş cevabı}}+\underbrace{\left[\frac{2}{s(s^2+6s+8)}\right]}_{H(\mathrm{s})}$$

Şimdi aşağıdaki gibi olsun;

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=2x(t)$$

$$Y(s)=\underbrace{\left[\frac{s+8}{s^2+s+8}\right]}_{\text{Sıfır-giriş cevabı}}+\underbrace{\left[\frac{2}{s(s^2+s+8)}\right]}_{H(\mathrm{s})}$$

$$\alpha=8 \quad \beta=1$$

$$\omega_n^2=8 \quad \Rightarrow \quad \omega_n=2\sqrt{2}$$

$$2\zeta\omega_n=1 \quad \Rightarrow \quad \zeta=1/2\omega_n=1/4\sqrt{2}=0.18$$

$$\beta\frac{s+\alpha}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

0< |ζ| < 1? → Kompleks kökler

$$Y(s)=\left[\frac{s+8}{s^2+s+8}\right]+\left[\frac{2}{s(s^2+s+8)}\right]$$

$$=\left[\frac{s+8}{s^2+s+8}\right]+\left[\frac{0.25}{s}+\frac{-0.125+j0.0225}{(s+0.5-j2.78)}+\frac{-0.125-j0.0225}{(s+0.5+j2.78)}\right]$$

$$=\boxed{\left[\frac{s+8}{s^2+s+8}\right]}+\left[\frac{0.25}{s}-\boxed{0.25\frac{s+1}{s^2+s+8}}\right]$$

$$Y(s)=\frac{C(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}X(s)$$

$$Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t+\phi\right]u(t)$$

$$A=\beta\sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha}{\omega_n}-\zeta\omega_n\right)^2}{1-\zeta^2}+1}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha-\zeta\omega_n}\right)$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\beta\frac{s+\alpha}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$Y(s)=\left[\frac{s+8}{s^2+s+8}\right]+\left[\frac{0.25}{s}-0.25\frac{s+1}{s^2+s+8}\right]$$

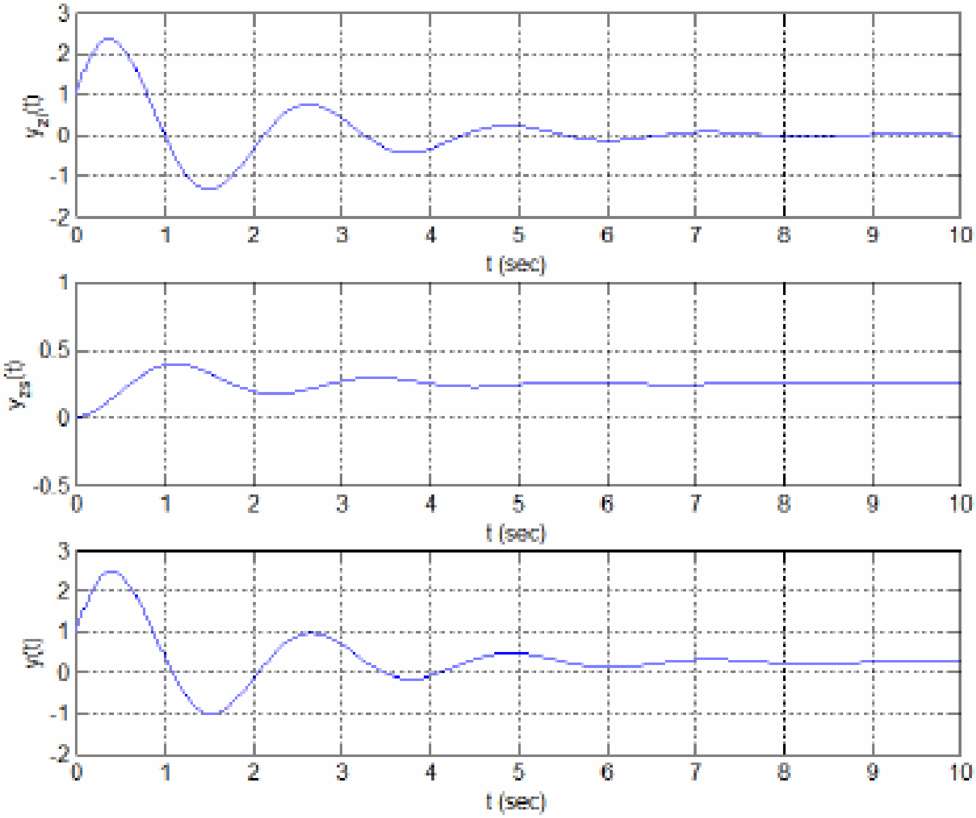
LT Tablosu

$$y(t)=2.87e^{-0.5t}\sin(2.78t+0.36)+0.25-0.25e^{-0.5t}\sin(2.78t+1.4)$$

Sıfır-Giriş Cevabı

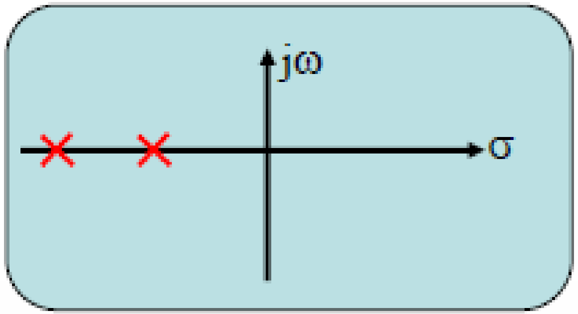
Sıfır-Durum Cevabı

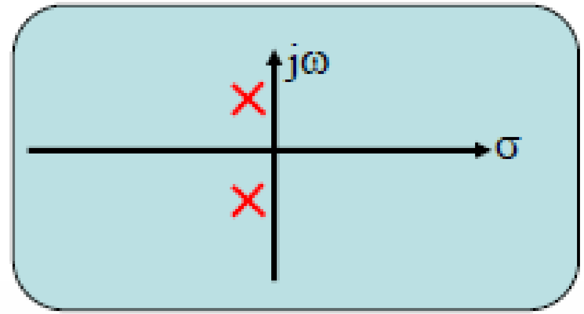
Toplam Cevap

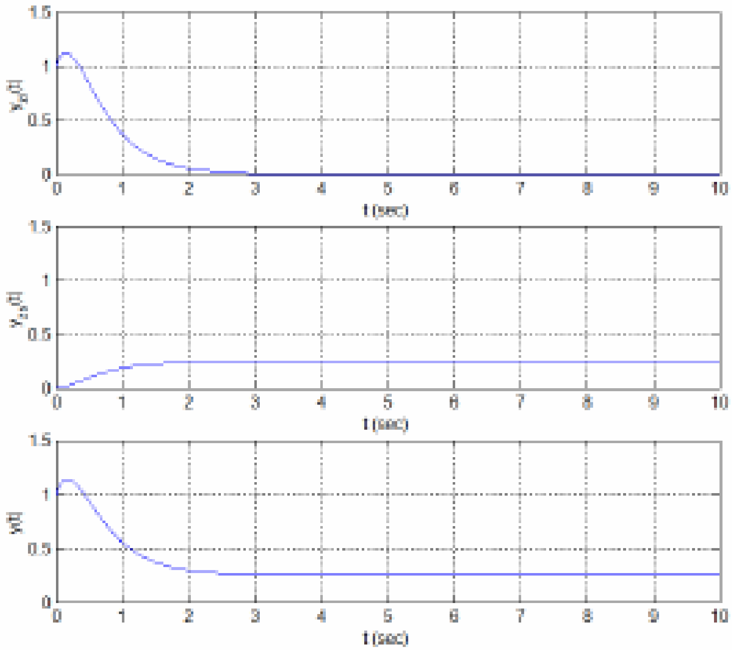


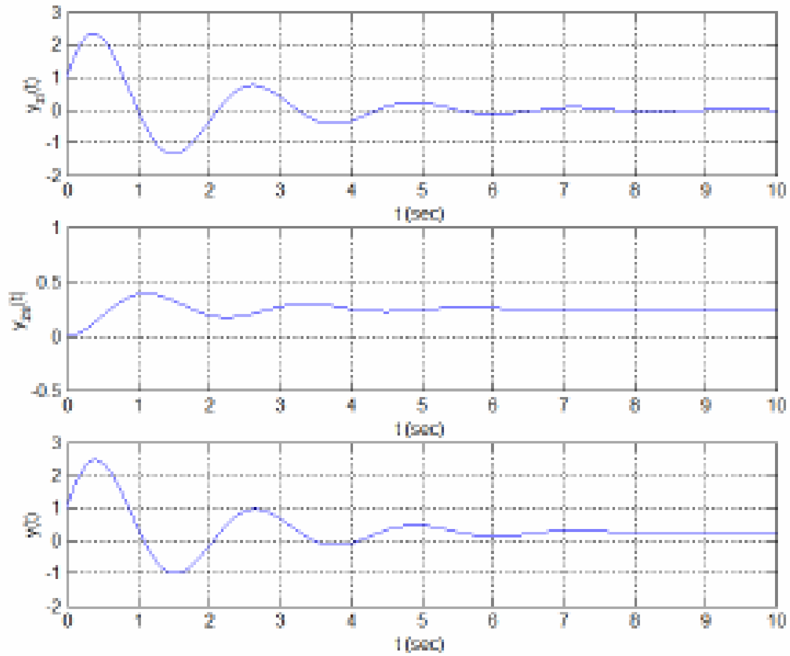
İki Durumun Karşılaştırılması:

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 6s + 8} = \frac{2}{(s+4)(s+2)} \qquad H(s) = \frac{2}{s^2 + s + 8} = \frac{2}{(s + 0.5 - j2.78)(s + 0.5 + j2.78)}$$









Devre Uygulamaları

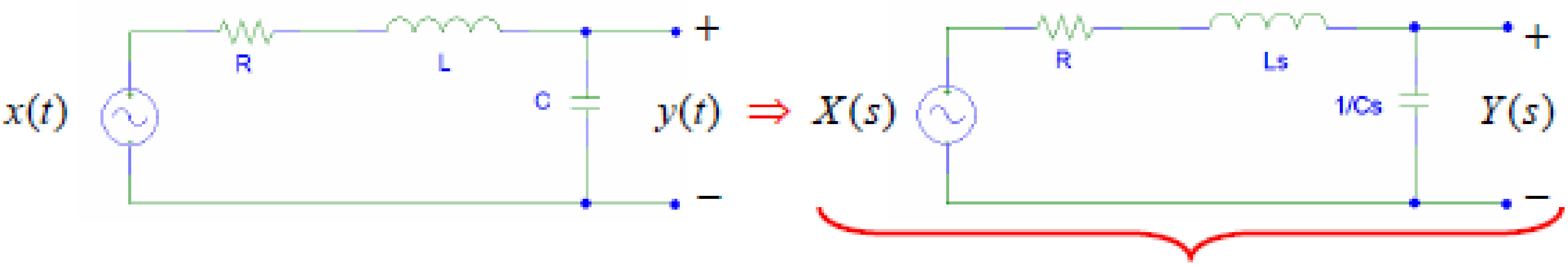
Elektronik devre uygulamalarında frekans cevabı analizi için empedansa bağlı frekanslar kullanılır.

$$Z_R(\omega) = R \qquad Z_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C} \qquad Z_L(\omega) = j\omega L$$

Transfer fonksiyonu için *s*-düzlemi frekans empedansı kullanılabilir.

$$\boxed{Z_R(s) = R \qquad Z_C(s) = \frac{1}{sC} \qquad Z_L(s) = sL}$$

Örnek: Aşağıdaki devrede sıfır-durum (Transfer fonksiyonu) için çözümü bulun.



s-düzlemi frekans empedans

Gerilim bölücü kuralı kullanılırsa:

$$Y(s) = \left[\frac{1/Cs}{R + Ls + (1/Cs)} \right] X(s) \quad \Rightarrow \quad = \underbrace{\left[\frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)} \right]}_{H(s)} X(s)$$