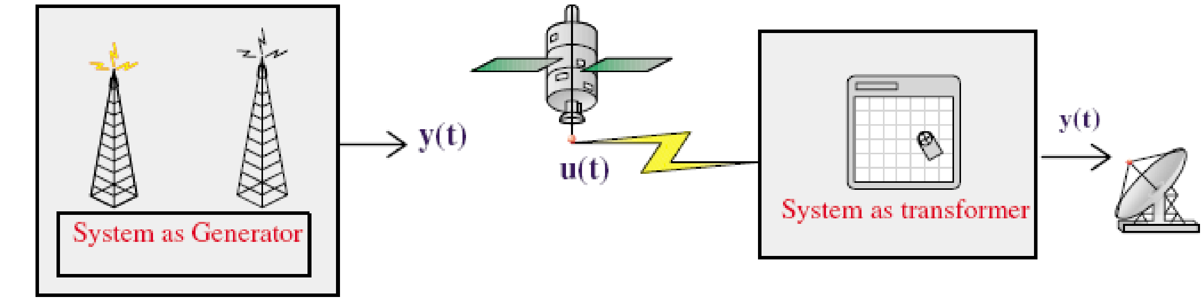
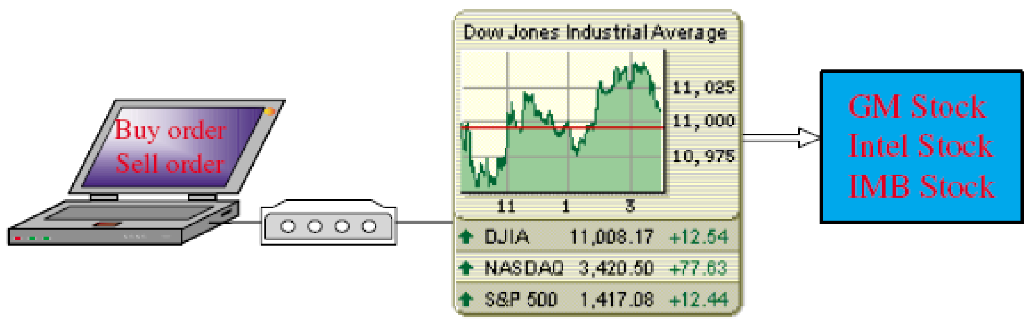
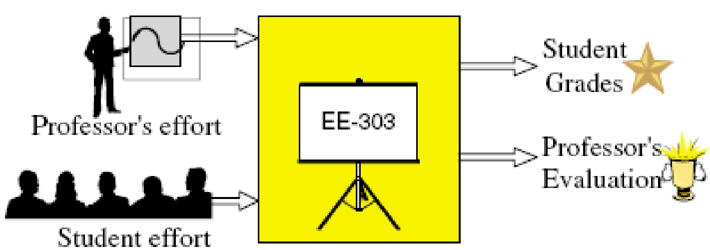
Sinyaller ve Sistemler

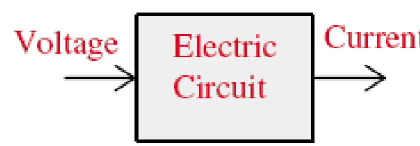
Sunu 3

Sistemler


System as Generator
y(t)
u(t)
System as transformer
y(t)

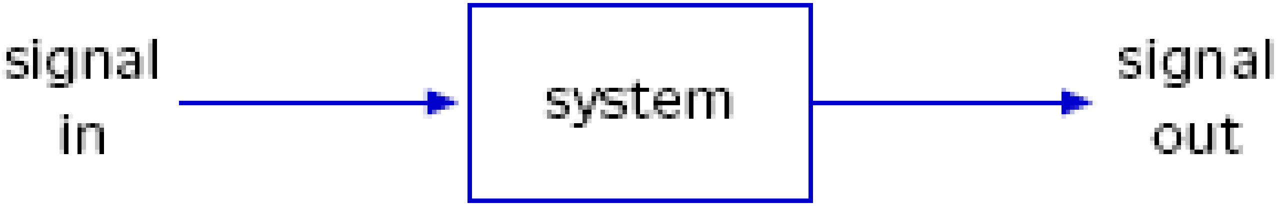

Buy order
Sell order
Dow Jones Industrial Average
11,025
11,000
10,975
11
1
3
DJIA 11,008.17 +12.54
NASDAQ 3,420.50 +77.63
S&P 500 1,417.08 +12.44
GM Stock
Intel Stock
IMB Stock


Professor's effort
Student effort
EE-303
Student Grades
Professor's Evaluation


Voltage
Electric Circuit
Current

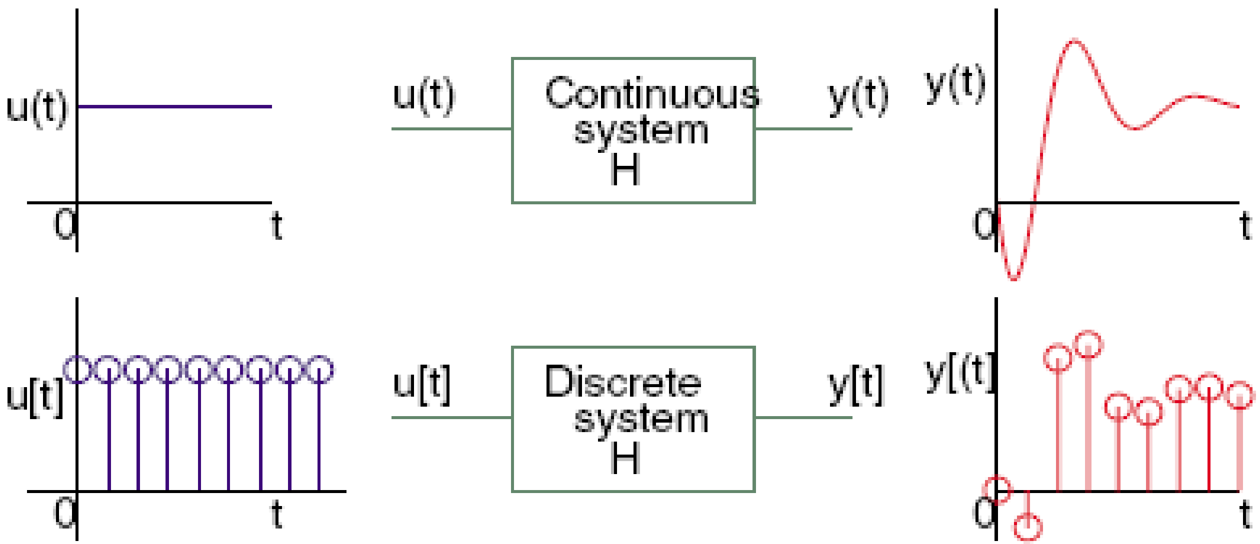
Sistem

Sistem: Fiziksel yada matematiksel bir sinyal üretir yada sinyali dönüştürür.



Bir sistem işaretin dönüşümüne sebep olan herhangi bir süreç olarak görülebilir. Bu tanıma göre bir sistemin bir giriş işareti ve giriş işaretine sistem dönüşümü ile bağlantılı olan çıkış işareti vardır.

Sistem



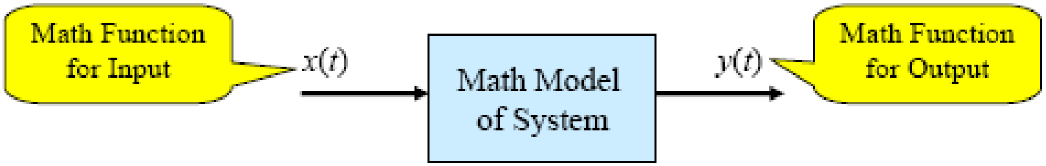
y(t) = Hu(t)

y[n] = Hu[n]

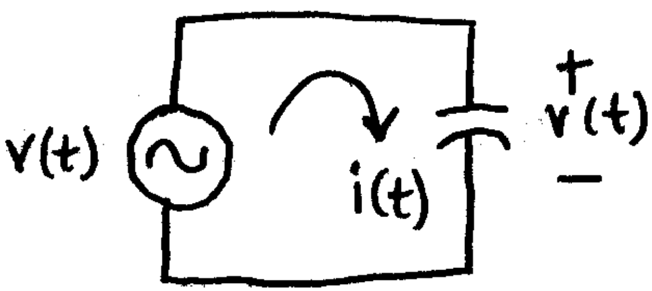
Bir sürekli-zaman sisteminde hem giriş hem de çıkış sürekli-zaman işaretidir. Benzer şekilde bir ayrık-zaman sisteminde hem giriş hem de çıkış ayrık-zaman işaretidir

Sistem

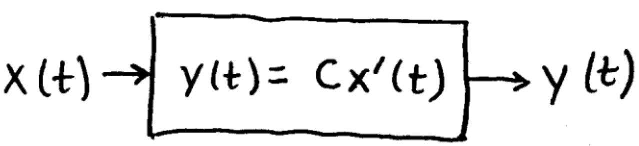
System View



$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

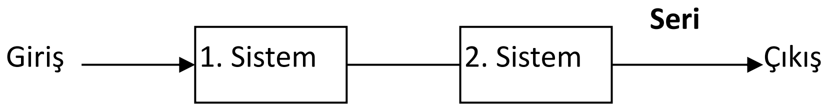


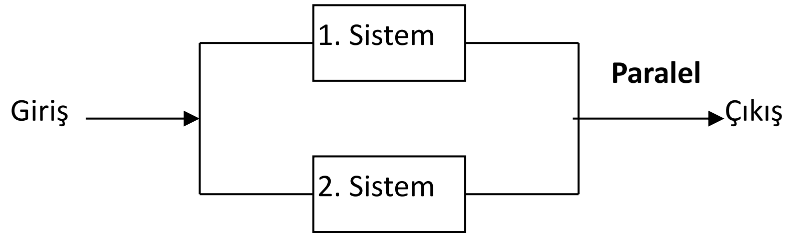
input = v(t) = x(t)
output = i(t) = y(t)

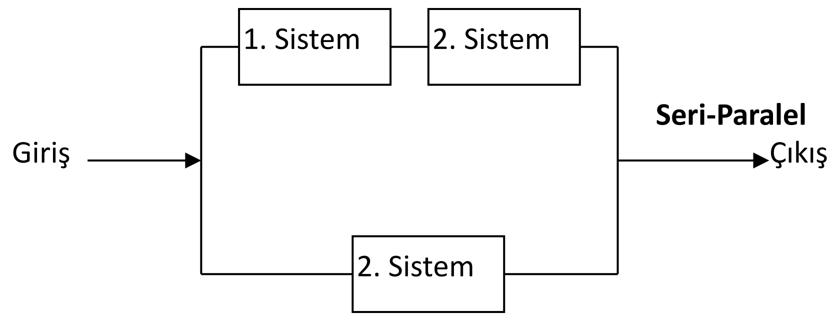


Sistemlerin Bağlanması

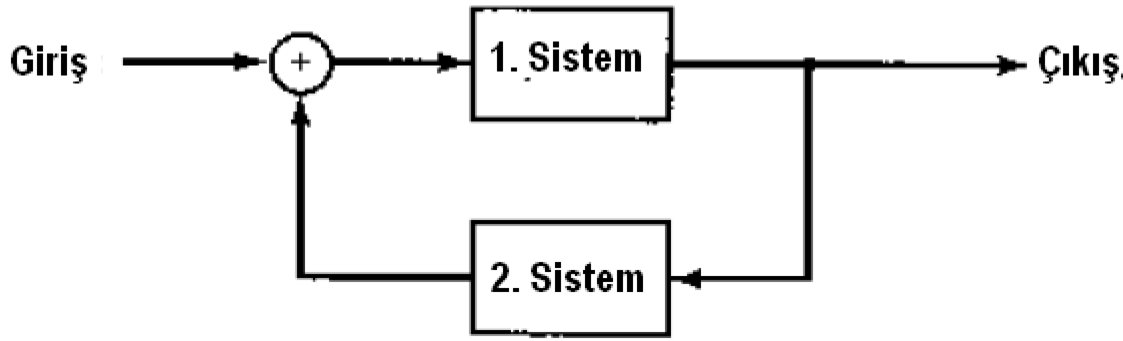
Sistemler seri, paralel, seri-paralel ve geri beslemeli olmak üzere dört farklı şekilde bağlanabilir.



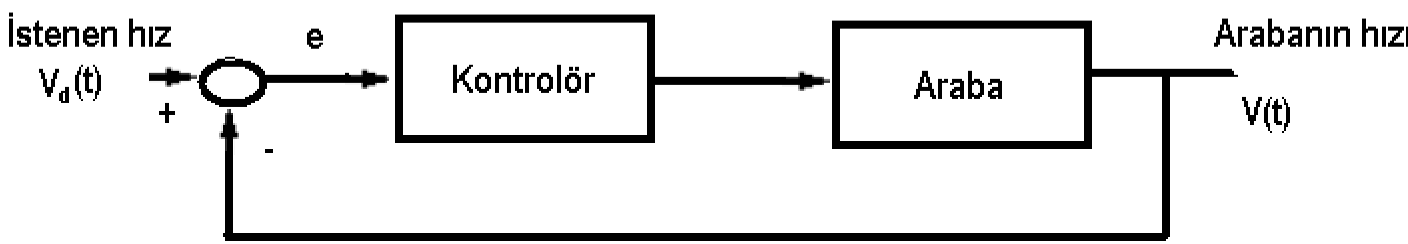




Geri Beslemeli Sistem



Örnek: Araç hız kontrol sistemi



Sistemlerin Temel Özellikleri

- Hafızalı ve Hafızasız Sistemler

Eğer bir sistemin herhangi bir andaki çıkışı bağımsız değişkenin her değeri için girişin sadece o andaki değerine bağlı ise **sistem hafızasızdır** denir.

$$y[n] = (2x[n] - x[n])^2$$

Sistem çıkışı y[n] tüm n değerleri için o andaki x[n] değerine bağlıdır. Hafızasızdır.

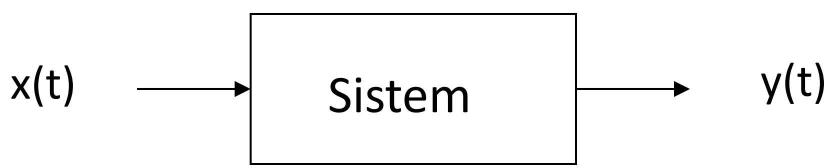
$$y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[k]$$

Sistem çıkışı y[n] ‘nin herhangi bir n anındaki değeri önceki x[n] değerlerine bağlıdır. Hafızalıdır.

Sistemlerin Temel Özellikleri

- Zamanla Değişmez ve Zamanla Değişen Sistemler (time-invariant and time-varying)

Eğer girişindeki zaman ötelemesi çıkışında da zaman ötelemesine sebep oluyorsa bu sisteme zamanla değişmez sistem denir.



$$y(t) = \mathrm{Sin}(x(t))$$

$$y_1(t) = \mathrm{Sin}(x_1(t))$$

$$x_2(t)=x_1(t-t_o)$$

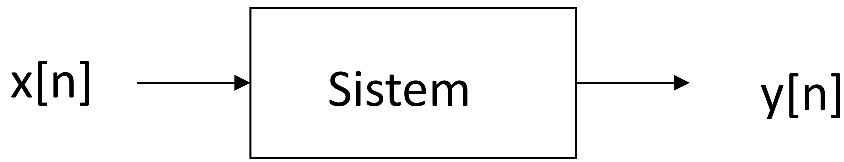
$$y_2(t) = \mathrm{Sin}(x_2(t)) = \mathrm{Sin}(x_1(t-t_o))$$

$$y_1(t-t_o) = \mathrm{Sin}(x_1(t-t_o))$$

$$y_2(t)= y_1(t-t_o)$$

Zamanla değişmez sistem

Sistemlerin Temel Özellikleri



$$y[n]=nx[n]$$

$x_1[n]=\ \delta[n]$ $\qquad$ $y_1(n)=0$

$x_2[n]=\ \delta[n-1]$ $\qquad$ $y_2(n)=n\ \delta[n-1]=\delta[n-1]$

Zamanla değişen sistem

Sistemlerin Temel Özellikleri

- Nedensellik (causality)

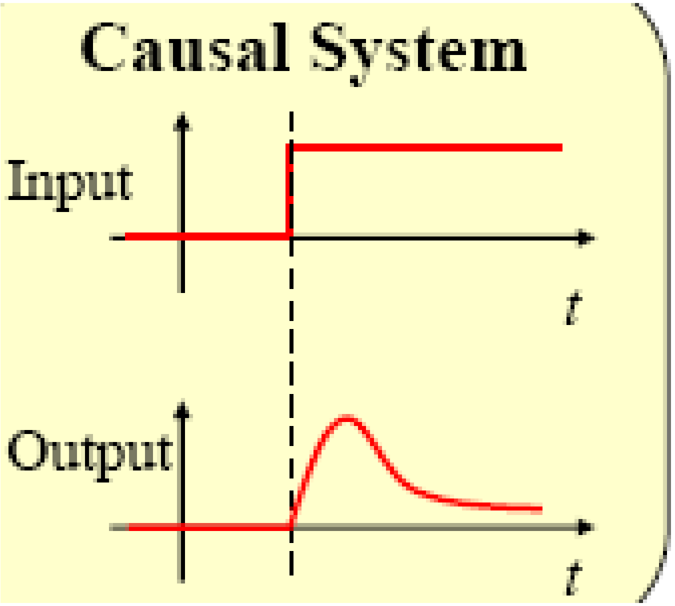
Bir sistemin t yada n anındaki çıkışı, geçmiş yada o andaki giriş değerlerine bağlı ise sistem nedenseldir.

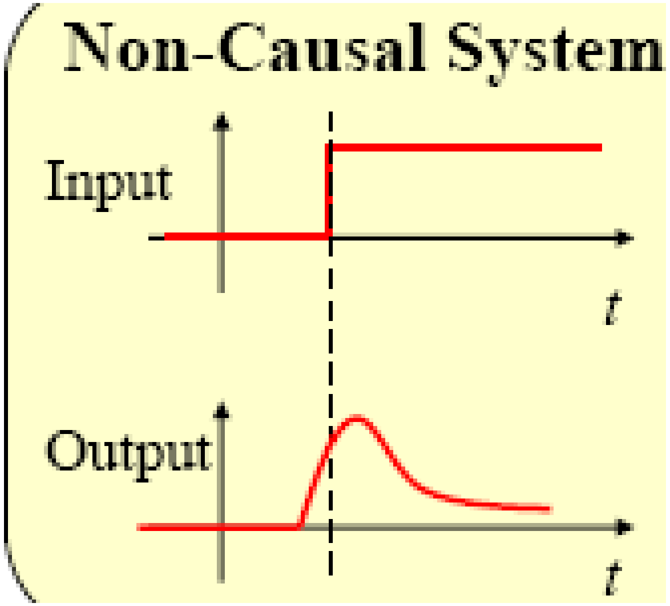
Eğer sistem gelecek giriş değerlerine de bağlı ise nedensel değildir.

$$y[n] = 0.2*\left(x[n-3] + x[n-1] + x[n]\right)$$ Nedensel sistem

$$y[n] = 0.2*\left(x[n-2] + x[n] + x[n+1]\right)$$ Nedensel olmayan sistem

Sistemlerin Temel Özellikleri



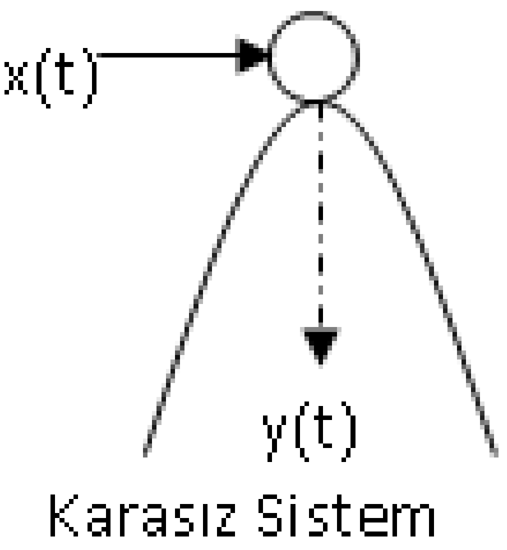


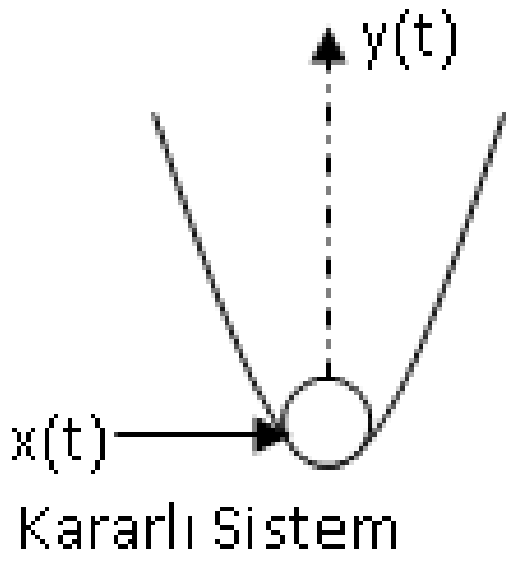
Geçmiş girişlere bağlı değil

Sistemlerin Temel Özellikleri

- Kararlılık (stability)

Küçük girişlerin küçük çıkışlar oluşturduğu sistemlere karalı sistemler denir. Başka bir ifade ile karalı bir sistemde sınırlı girişler sınırlı çıkışlar oluşturur.





Sistemlerin Temel Özellikleri

- Doğrusallık (linearity)

Bir sürekli-zaman sisteminin $x_1(t)$'ye cevabı $y_1(t)$ ve $x_2(t)$'ye cevabı $y_2(t)$ olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa (superposition) sistem lineerdir denir.

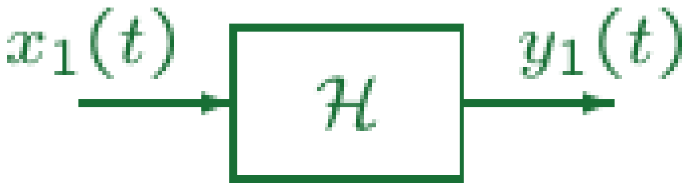
1- Sistemin $(x_1(t) + x_2(t))$'ye cevabı $(y_1(t) + y_2(t))$ dir. *(Toplamsallık)*

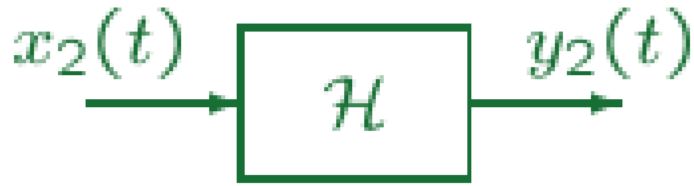
2- Sistemin $a.x_1(t)$'ye cevabı $a.y_1(t)$ dir. *(Çarpımsallık)*
ölçeklendirilmiş giriş → ölçeklendirilmiş çıkış

Lineer bir sistemi tanımlayan iki özellik tek özellik olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

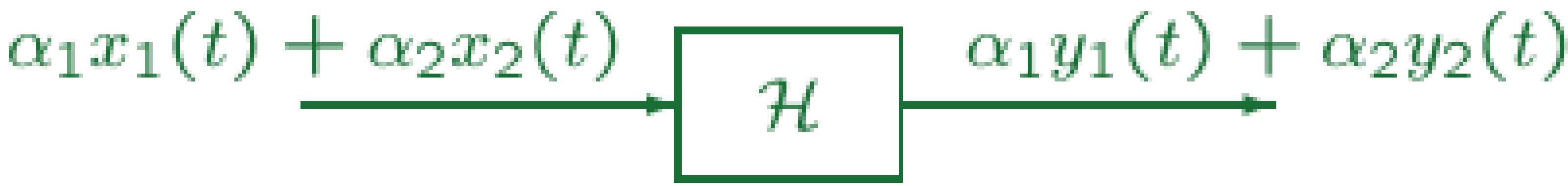
$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

Sistemlerin Temel Özellikleri





$$y_1(t) = \mathcal{H}[x_1(t)] \qquad y_2(t) = \mathcal{H}[x_2(t)]$$



$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \mathcal{H}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]$$

Sistemlerin Temel Özellikleri

Örnek: $y(t) = t\,x(t)$ Sisteminin doğrusallığını araştırın.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t\,x_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = t\,x_2(t)$$

$$x_3(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$$

$$\boxed{y_3(t) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)}$$

$$t\,x_3(t) =$$

$$t\,[a\,x_1(t) + b\,x_2(t)] =$$

$$t\,a\,x_1(t) + t\,b\,x_2(t) =$$

Sistem doğrusal bir sistemdir.

Sistemlerin Temel Özellikleri

Örnek: $y[n] = 3u[n] + 5$ Sistemi için $u_1[n] = 1 \quad u_2[n] = 2$

verilsin. Doğrusallığını araştırın

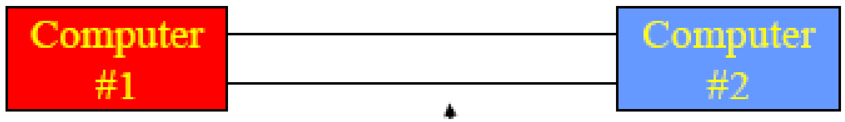
$$y_1[n] = 3u_1[n] + 5 = 8 \qquad y_2[n] = 3u_2[n] + 5 = 11$$

$$y_1[n] + y_2[n] = 19 \neq y\big[u_1[n] + u_2[n]\big] = 3\big(u_1[n] + u_2[n]\big) + 5 = 14$$

Sistem doğrusal değildir.

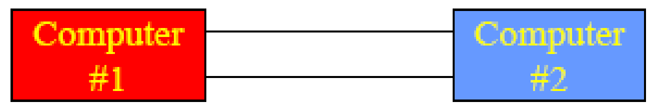
Diferansiyel Denklemler

Mühendislik tasarımı yapmak için bir sistemin davranışları öngörebilmemiz gerekir.

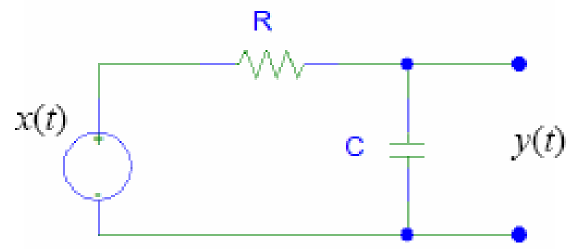


İki kondaktör ➔ kapasitör…

Physical System:



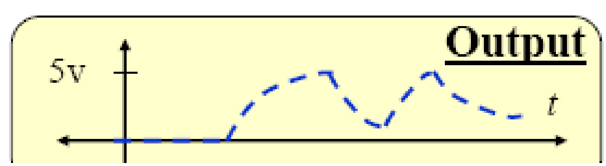
Schematic System:



Mathematical System:

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\,y(t) = \frac{1}{RC}\,x(t)}$$

Mathematical Solution:



Diferansiyel Denklemler

N. Dereceden bir sistemin genel formu

$$y^{(N)}(t) + \sum_{i=0}^{N-1} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{M} b_i x^{(i)}(t)$$

$y^{(i)}(t)$ çıkışın i. türevini $x^{(i)}(t)$ girişin i. türevi

$a_0 \dots a_n$ $b_0 \dots b_m$ gerçel sabit katsayılar

Çözüm iki kısımdan oluşur:

1- Sıfır-giriş cevabı(zero-input response)

2- Sıfır-durum cevabı(zero-state response)

Sıfır-giriş cevabı

Karakteristik denklem:

$$\lambda^N + a_{n\text{-}1}\,\lambda^{N\text{-}1} + \ldots + a_1\,\lambda + a_0$$

Kökler: N tane $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N$

N mod için $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_N t}$

$$\Rightarrow y_{zI}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_N e^{\lambda_N t}$$

Toplam çözüm: $y(t) = y_{ZI}(t) + y_{ZS}(t)$

$$y_{ZS}(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda}_{Convolution...inChp2}$$

Diferansiyel Denklemler

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t)$$

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} \equiv D^k y(t)$$

$$\underbrace{\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)}_{\triangleq Q(D)} y(t) = \underbrace{\left(b_m D^m + b_{b-1} D^{m-1} + \ldots + b_1 D + b_0\right)}_{\triangleq P(D)} f(t)$$

Diferansiyel Denklemler

Örnek:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

Sıfır-giriş çözümünü yapınız.

$\left(y'_{zi}(0) = -5 \right)$

$$D^2y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = Df(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

Sıfır-giriş formu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

Karakteristik denklem

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

Kökler

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-t} \qquad e^{\lambda_2 t} = e^{-2t}$$

Karakteristik mod

Diferansiyel Denklemler

Sıfır-giriş çözümü: $$y_{zi}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

Başlangıç şartlarına bakılır.

$$y_{zi}(0) = C_1 e^{-0} + C_2 e^{-0} = 0 \qquad \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$y'_{zi}(0) = -5 = -C_1 e^{-0} - 2C_2 e^{-0} \quad \Rightarrow C_1 + 2C_2 = 5$$

$$\Rightarrow C_1 = -5 \quad C_2 = 5$$

$$y_{zi}(t) = \underset{\text{first mode}}{-5e^{-t}} + \underset{\text{second mode}}{5e^{-2t}}$$

Kesikli zaman

N dereceli diferansiyel denklem

$$\underbrace{\underbrace{y[n]}_{\text{most "advanced" output sample}} + a_1 y[n-1] + \ldots + a_N \underbrace{y[n-N]}_{\text{least "advanced" output sample}}}_{\text{The difference between these two index values is the "order" of the difference eq.}} = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_M x[n-M]$$

$$y[n] + \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i]$$

Yinelenen form:

$$\underbrace{y[n]}_{\text{current output value to be computed}} = -\underbrace{\sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i]}_{\text{some past output values, with values already known}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{M} b_0 x[n-i]}_{\text{current \& past input values, already received}}$$