Lineer Denklemler ve Matrisler

1.1 Lineer Denklem Sistemleri

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b$ sabitler ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$'ler de değişkenler olmak üzere;

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.1}$$

şeklindeki bir denkleme lineer denklem denir. Eğer $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayıları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yerine yazıldığında (1.1) denklemi sağlanıyorsa bu sayılara (1.1) denkleminin bir çözümü denir. Örneğin $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ve $x_3 = -4$ sayıları $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$ denkleminin bir çözümüdür. Çünkü $6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -13$ dür.

Genel olarak n bilinmeyenli m denklemli bir lineer denklem sistemi (kısaca lineer sistem) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.2}$$

Burada a_{ij} ler sabittir. $b_1, b_2 \ldots, b_n$ verildiğinde (1.2) yi sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerlerini bulmaya çalışacağız. $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayılarının bu sistemin bir çözümü olması demek, bu sayıların her bir denklemin çözümü olması demektir. Eğer bir lineer sistemin hiç çözümü yoksa bu sisteme tutarsız, eğer en az bir çözümü varsa tutarlı denir. Eğer $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ ise bu sisteme homojen sistem denir. Bir homojen sistemdeki $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ çözümüne trival (aşikar) çözüm denir. Aksi halde trival olmayan çözüm denir.

Eğer n bilinmeyenli r denklemden oluşan:

$$\begin{array}{ccc} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r \end{array} \tag{1.3}$$

sistemi ile (1.2) sisteminin çözümleri aynı ise bu sistemlere eş sistemler denir.

Örnek 1.1 $\left\{\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{array}\right\}$ Çözüm: $x_1 = 2, x_2 = 3$

$$\left\{\begin{array}{r} 8x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 10x_1 - 2x_2 = 14 \end{array}\right\}$$ Çözüm: $x_1 = 2, x_2 = 3$

Bu sistemler eş sistemlerdir.

Örnek 1.2 $\left\{\begin{array}{ll} x_1 & -3x_2 = -3 \\ 2x_1 & +x_2 = 8 \end{array}\right\}$ sistemini çözelim. Yok etme metodu kullanacağız. 1. denklemin 2 katını 2. denklemden çıkarırsak: $7x_2 = 14 \Longrightarrow x_2 = 2$ bulunur. Bunu 1. denklemde yazarsak $x_1 = 3$ bulunur.

Örnek 1.3 $\left\{\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{array}\right\}$ denklem sistemini göz önüne alalım. x_1'i yok edelim. 1. denklemin 2 katını 2. denklemden çıkartırsak $0 = 21$ gibi bir sonuç elde ederiz. Bunun anlamı sistemin çözümünün olmaması; yani tutarsız olması demektir.

Örnek 1.4 $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{array}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

1. denklemin 2 katını 2. denklemden, 1. denklemin 3 katını 3. denklemden çıkartırsak

$\left\{\begin{array}{l} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ -5x_2 - 10x_3 = -20 \end{array}\right\}$ bulunur. Buradan $x_3 = 3$, $x_2 = -2$ bulunur.

Bunlar 1. denklemde yazılırsa $x_1 = 1$ elde edilir.

Örnek 1.5 $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{array}\right\}$ denklem sistemine bakalım.

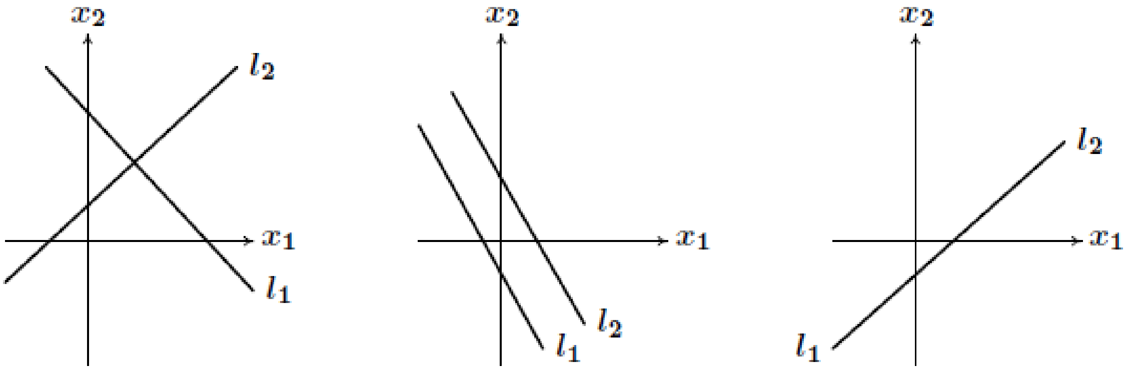
x_1'i yok edersek: $-3x_2 + 3x_3 = 12 \Longrightarrow x_2 = x_3 - 4$. Bunu 1. denklemde yazarsak $x_1 = x_3 + 4$ bulunur. Bu sistemin çözümü:

$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 - 4 \\ x_3 = \text{herhangi bir reel sayı} \end{array}\right\}$ Yani sonsuz tane çözüm var. Mesela $x_3 = 1, x_1 = 5, x_2 = -3$ gibi.

Sonuç:
Bu örnekler göstermektedir ki; bir lineer sistemin tek çözümü de olabilir, hiç çözümü olmayabilir veya sonsuz tane çözümü olabilir.

Şimdi $\left\{\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{array}\right\}$ lineer denklem sistemini düşünelim.

Bu iki denklemin belirttiği doğruları l_1 ve l_2 ile gösterelim. Eğer $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$ bu sistemin çözümü ise (s_1, s_2) noktası hem l_1 hem de l_2 üzerindedir. Tersine eğer bir (s_1, s_2) noktası hem l_1 hem de l_2 üzerinde ise $x_1 = s_1, x_2 = s_2$ bu sistemin bir çözümüdür. Geometrik olarak da üç ihtimalin olduğunu Şekil 1.1 de görebiliriz.



(a) Tek çözüm **(b)** Çözüm yok **(c)** Sonsuz çözüm

Şekil 1.1:

Not: Yok etme metodunda aşağıdakilerden birisi yapılabilir:

1. i. ve j. denklemler yer değiştirebilir.
2. Denklemlerden herhangi biri sıfır olmayan bir sabitle çarpılabilir.
3. i. denklem yerine $[c \times (j.\text{denklem})] + i.\text{denklem}$ yazılabilir. $(i \neq j)$

1.2 Matrisler ve Matris İşlemleri

Tanım 1.6 Sayıların bir dikdörtgensel dizisine bir matris denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin i. satırı $[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ dir .$(1 \leqslant i \leqslant m)$.

A nın j. sütunu $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ dir. $(1 \leqslant j \leqslant n)$

Eğer bir A matrisinin m satırı ve n sütunu varsa bu matrise $m \times n$ tipinde matris denir. $m = n$ ise kare matris denir. (veya n. dereceden kare matris denir). $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanları A nın diyagonali (esas köşegeni) üzerindedir denir. a_{ij} elemanına (i, j)–inci eleman denir. A matrisi $A = [a_{ij}]$ şeklinde de yazılabilir. Eğer A , $m \times n$ tipinde bir matris ise ${}_mA_n$ yazarız ; eğer $n \times n$ tipinde ise A_n yazılır.

Örnek 1.7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B = [1 \;\; 3 \;\; -7], C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ise $a_{32} = -3, c_{21} = -1, b_{12} = 3, d_{22} = -2 \ldots$ gibi.

Tanım 1.8 Eğer $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin karşılıklı elemanları eşitse bu iki matrise eşit matrisler denir ve $A = B$ yazılır . Yani her $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ dir.

Tanım 1.9 Eğer $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde matrislerse A ve B nin toplamı olan $C = [c_{ij}] = A + B$ matrisi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.10 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Tanım 1.11 $A = [a_{ij}], m \times n$ tipinde bir matris olsun ve $c \in \mathbb{R}$ bir reel sayı olsun. A nın c sabiti ile çarpımı olan cA matrisi $C = [c_{ij}]$ ise $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $c_{ij} = c \cdot a_{ij}$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.12 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Tanım 1.13 Eğer A ve B $m \times n$ matris iseler $A + (-1)B$ matrisine A ve B nin farkı denir ve kısaca $A - B$ yazılır.

Toplam (Sigma) Sembolü

$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n$ yazılır. Buradaki i harfine indeks denir. $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = \sum_{j=1}^{n} r_j a_j$ olduğu açıktır.

Sigma sembolü aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.) $\sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{s=1}^{n} s_i a_i$

2.) $\sum_{i=1}^{n} c(r_i a_i) = c \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$

3.) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Tanım 1.14 Eğer $A = [a_{ij}], m \times n$ tipinde, $B = [b_{ij}], n \times p$ tipinde iki matris ise A ve B nin çarpımı olan $A \cdot B = C = [c_{ij}]$ matrisi $m \times p$ tipindedir ve şöyle tanımlanır:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, p \end{array} \right\}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Örnek 1.15 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ matrisleri verilsin.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2\cdot 4 + (-1)2 & 1\cdot 5 + 2(-3) + (-1)1 \\ 3(-2) + 1\cdot 4 + 4\cdot 2 & 3\cdot 5 + 1(-3) + 4\cdot 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Burada $B \cdot A$ matrisi de tanımlıdır. (Her zaman tanımlı olmayabilir.)

Şimdi Bölüm 1.1 deki (1.2) nolu lineer sisteme dönelim ve aşağıdaki matrisleri tanımlayalım:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Böylece (1.2) lineer sistemi $A \cdot X = B$ şeklinde yazılabilir. Burada A' ya katsayılar matrisi denir. Aşağıdaki matrise de ek matris (eklenmiş matris) denir. (Yani denklem sisteminin ek matrisi denir)

$$[A\vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

Örnek 1.16 $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 5 \\ -2x_1 + x_3 & = & 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 & = & 3 \end{array} \right\}$ denklem sistemini düşünelim. Bu lineer sistemi

matris formunda şöyle yazılabilir: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

Katsayılar matrisi $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, ek matris $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & \vdots & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -4 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$

Tanım 1.17 Eğer $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris ise A nın transpozu (devriği) olan ve A' (veya A^T) ile gösterilen matris, $a'_{ij} = a_{ji}$ olarak tanımlanır. Yani A' matrisi, A nın satırlarının sütun ve sütunların satır yapılmasıyla elde edilen matristir.

Örnek 1.18 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ise $A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

Örnek 1.19 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ve $E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. (Eğer mümkünse) aşağıdaki işlemleri yapınız:

(a) $C + E$	**(b)** AB ve BA
(c) $2C - 3E$	**(d)** $CB + D$
(e) $AB + D^2$, $D^2 = DD$ dir.	**(f)** $(3)(2A)$ ve $6A$
(g) $A(BD)$	**(h)** $(AB)D$
(i) $A(C + E)$	**(j)** $AC + AE$
(k) $3A + 2A$ ve $5A$	**(l)** A'
(m) $(A')'$	**(n)** $(AB)'$
(o) $B'A'$	**(p)** $(C + E)'$
(r) $C' + E'$	**(s)** $A(2B)$ ve $2(AB)$

Örnek 1.20 Eğer $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde bir matris ise A nın izi (trace) diyagonaldeki elemanların toplamı olarak tanımlanır:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Buna göre, aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $\mathrm{Tr}(c \cdot A) = c\,\mathrm{Tr}(A)$ (c : reel sayı)

(b) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

(c) $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$

İspat:

(a) $A = [a_{ij}] \Longrightarrow c \cdot A = [c \cdot a_{ij}]$ dir.

$$\mathrm{Tr}(c \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} c a_{ii} = c \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = c \cdot \mathrm{Tr}(A)$$

(b) $B = [b_{ij}]$ olsun. ($n \times n$ tipinde)

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

(c) $C = AB$ ve $D = BA$ olsun $C = [c_{ij}], D = [d_{ij}]$ olsun.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ ve } d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Şimdi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \quad (i \text{ harfi ile } k \text{ harfi yer değiştirdi}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \mathrm{Tr}(D)
\end{aligned}$$

olup $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ olduğu ispatlanır. □

Örnek 1.21 $AX = B$ denkleminin birden fazla çözümü varsa, sonsuz tane çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: X_1 ve X_2 iki çözüm olsun. $r + s = 1$ olmak üzere $X_3 = rX_1 + sX_2$ matrisini düşünelim. $AX_3 = B$ olduğunu gösterelim:

$$AX_3 = A(rX_1 + sX_2) = ArX_1 + As \cdot X_2 = r(AX_1) + s(AX_2) = rB + sB = (r+s)B = B$$

olup sonsuz tane çözüm vardır. (Çünkü bu şekilde sonsuz miktarda r ve s seçilebilir.)

Örnek 1.22 $AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ şartını sağlayan 2×2 tipinde A ve B matrisleri bulunamayacağını ispatlayınız.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ olsun. $AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$$AB - BA = \begin{bmatrix} ae + bg - ea - fc & af + bh - eb - fd \\ ce + dg - ga - hc & cf + dh - gb - hd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup $bg - fc = 1$ ve $cf - gb = 1$ olur ve taraf tarafa toplanırsa $0 = 2$ çelişkisi elde edilir. O halde bu şekilde A ve B matrisleri olamaz.