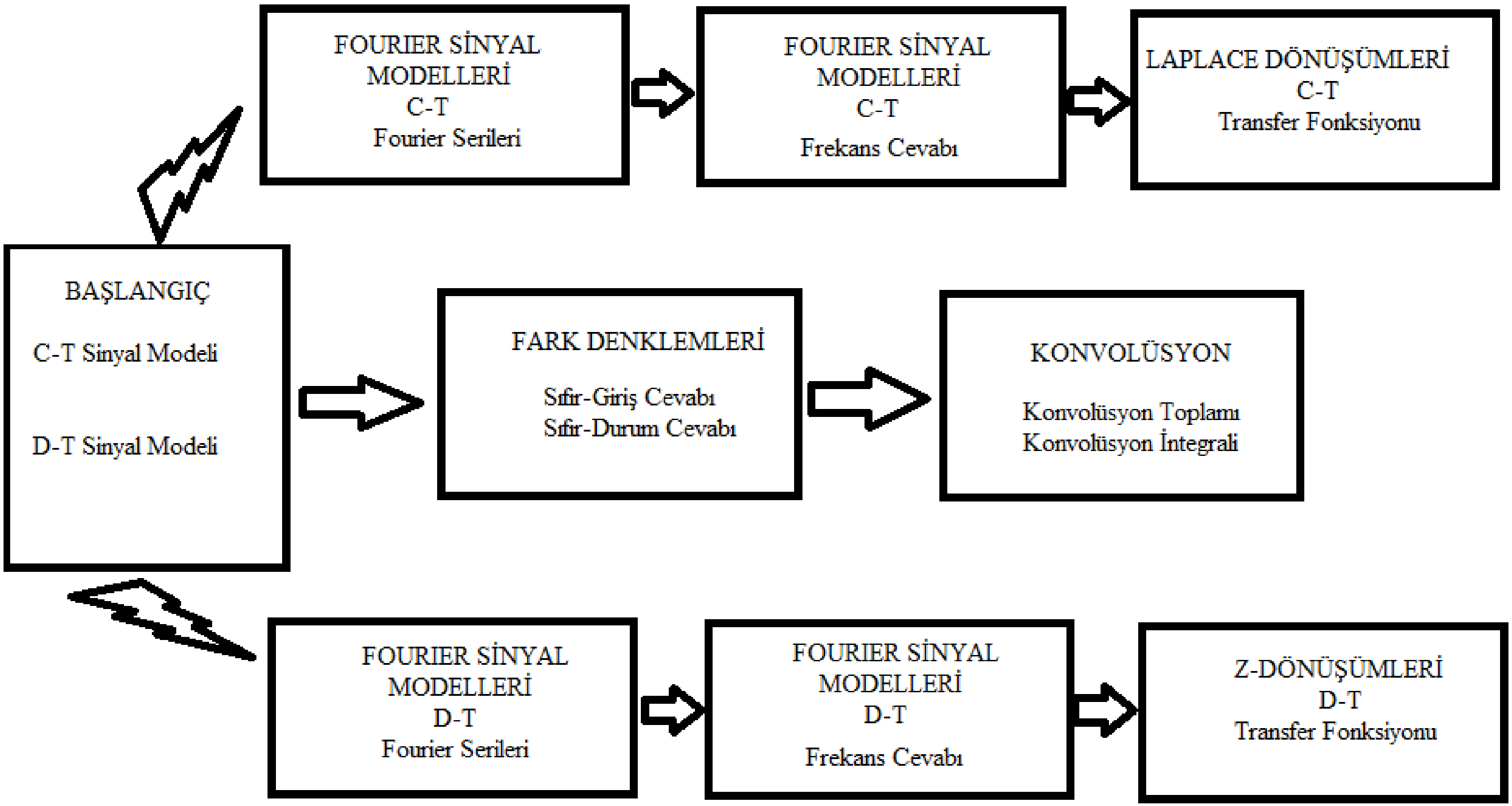
Sinyaller ve Sistemler

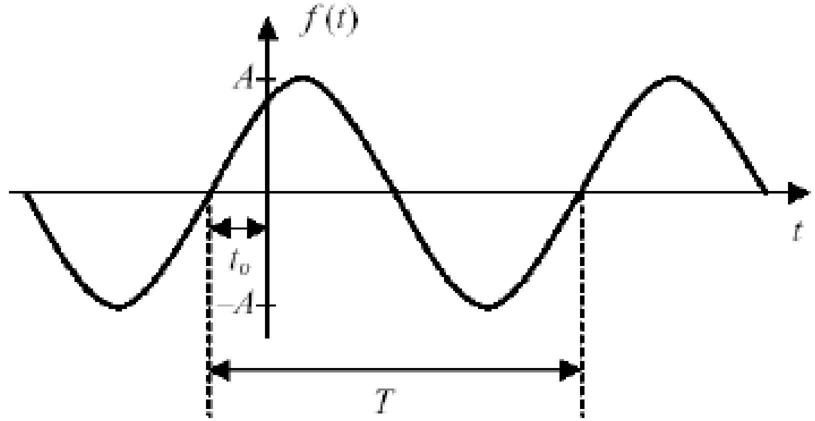
Sunu 6

Genel Bakış


FOURIER SİNYAL MODELLERİ C-T Fourier Serileri
FOURIER SİNYAL MODELLERİ C-T Frekans Cevabı
LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ C-T Transfer Fonksiyonu
BAŞLANGIÇ
C-T Sinyal Modeli
D-T Sinyal Modeli
FARK DENKLEMLERİ
Sıfır-Giriş Cevabı
Sıfır-Durum Cevabı
KONVOLÜSYON
Konvolüsyon Toplamı
Konvolüsyon İntegrali
FOURIER SİNYAL MODELLERİ D-T Fourier Serileri
FOURIER SİNYAL MODELLERİ D-T Frekans Cevabı
Z-DÖNÜŞÜMLERİ D-T Transfer Fonksiyonu

Sinüzoidal sinyal:

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$



Genel olarak sinüzoidal bir sinyal üç parametre ile tanımlanır:

A	- Genlik	
ω	- Frekans	rad/sn
ϕ	- Faz farkı(faz ötelemesi)	rad

T Periyot

Frekans iki şekilde ifade edilir:

Çevrim frekans: $f = 1/T$ 1 Hz=1 çevrim/saniye

Radyan frekans: $\omega = 2\pi/T$ radyan/saniye

İki frekans türü arasındaki dönüşüm

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

Faz farkı t_0 kadar bir zaman ötelemesini gösterir.

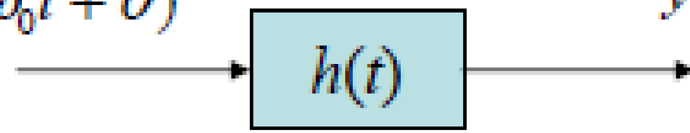
$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$t \Rightarrow t + t_o$$

$$f(t+t_o) = A\sin(\omega(t+t_o)) = A\sin(\omega t + \underbrace{\omega t_o}_{=\phi})$$

Sinüzoidal Sinyalin LTI Cevabı

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ $\qquad$ $y(t) = ?$



Euler açılımı kullanılırsa:

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}}{2}$$

$$\sin(\omega t + \theta) = \frac{e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) = \underbrace{\tfrac{A}{2} e^{j(\omega_0 t + \theta)}} + \underbrace{\tfrac{A}{2} e^{-j(\omega_0 t + \theta)}}$$

Sistem, iki parçalı bir girişe sahip olduğundan doğrusallık özelliğini kullanarak her bir parçanın cevabı hesaplanabilir.

Kompleks Sinüzoidal Sinyal

$$x_1(t)=\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 t+\theta)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=?$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{2}e^{j[\omega_0(t-\tau)+\theta]}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{2}e^{j[\omega_0 t+\theta]}e^{-j\omega_0\tau}h(\tau)d\tau$$

$$=\underbrace{\frac{A}{2}e^{j[\omega_0 t+\theta]}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau}_{\triangleq H(\omega_0)}$$

İntegral değişkeninden bağımsız kısım
Sadece $x_1(t)$ ye bağlı

Çıkış kompleks sinüzoidal girişin bazı kompleks sayılarla çarpımına dönüştü

$$\boxed{y(t) = H(\omega_o)\frac{A}{2}e^{j(\omega_o t+\theta)}}$$

Kompleks değişkenli

Kompleks sayı olduğundan $H(\omega_o) = |H(\omega_o)|e^{j\angle H(\omega_o)}$ şeklinde ifade edilebilir.

Çıkış:

$$y(t) = \left(|H(\omega_o)|e^{j\angle H(\omega_o)}\right)\frac{A}{2}e^{j(\omega_o t+\theta)}$$

$$= \left(|H(\omega_o)|\frac{A}{2}\right)e^{j(\omega_o t+\theta+\angle H(\omega_o))}$$

$$y(t) = \underbrace{|H(\omega_o)|\frac{A}{2}}_{\text{Sistem genliği değiştirir}}e^{j(\omega_o t+\underbrace{\theta+\angle H(\omega_o)}_{\text{Sistem fazı değiştirir}})}$$

Sinüzoidal Sinyalin LTI Cevabı

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

Eşdeğeri:

$$x(t) = \tfrac{A}{2} e^{j(\omega_0 t + \theta)} + \tfrac{A}{2} e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

İkinci kısım içinde aynı çözümleme yapılırsa doğrusallık özelliğini kullanarak

$$y(t) = \left|H(\omega_o)\right| \tfrac{A}{2} e^{j(\omega_o t + \theta + \angle H(\omega_o))} + \left|H(-\omega_o)\right| \tfrac{A}{2} e^{j(-\omega_o t - \theta + \angle H(-\omega_o))}$$

Kompleks sayıların genlik ve fazör özellikleri

$$\left|H(\omega_o)\right| = \left|H(-\omega_o)\right| \qquad \angle H(-\omega_o) = -\angle H(\omega_o)$$

$$y(t) = \left|H(\omega_o)\right| A \underbrace{\left[\tfrac{1}{2} e^{j(\omega_o t + \theta + \angle H(\omega_o))} + \tfrac{1}{2} e^{-j(\omega_o t + \theta + \angle H(\omega_o))}\right]}_{\cos(\omega_o t + \theta + \angle H(\omega_o))}$$

Sinüzoidal Sinyalin LTI Cevabı

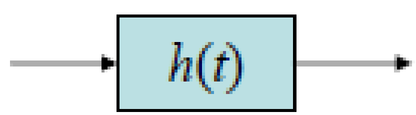
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$y(t) = A\left|H(\omega_o)\right|\cos(\omega_o t + \theta + \angle H(\omega_o))$$

Bir LTI sistemin sinüzoidal bir sinyalin genliğini ve fazını değiştirme ifadesi

Eğer bir sinyal sinüzoidal parçaların toplamı şeklinde ise sistemin doğrusallık ve süperpozisyon özelliklerini kullanarak sonucu elde edebiliriz.

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$



$$y(t) = A_1\left|H(\omega_1)\right|\cos(\omega_1 t + \theta_1 + \angle H(\omega_1)) + A_2\left|H(\omega_2)\right|\cos(\omega_2 t + \theta_2 + \angle H(\omega_2))$$

Temel frekansı ω_0 olan bir sinyal için $A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$?

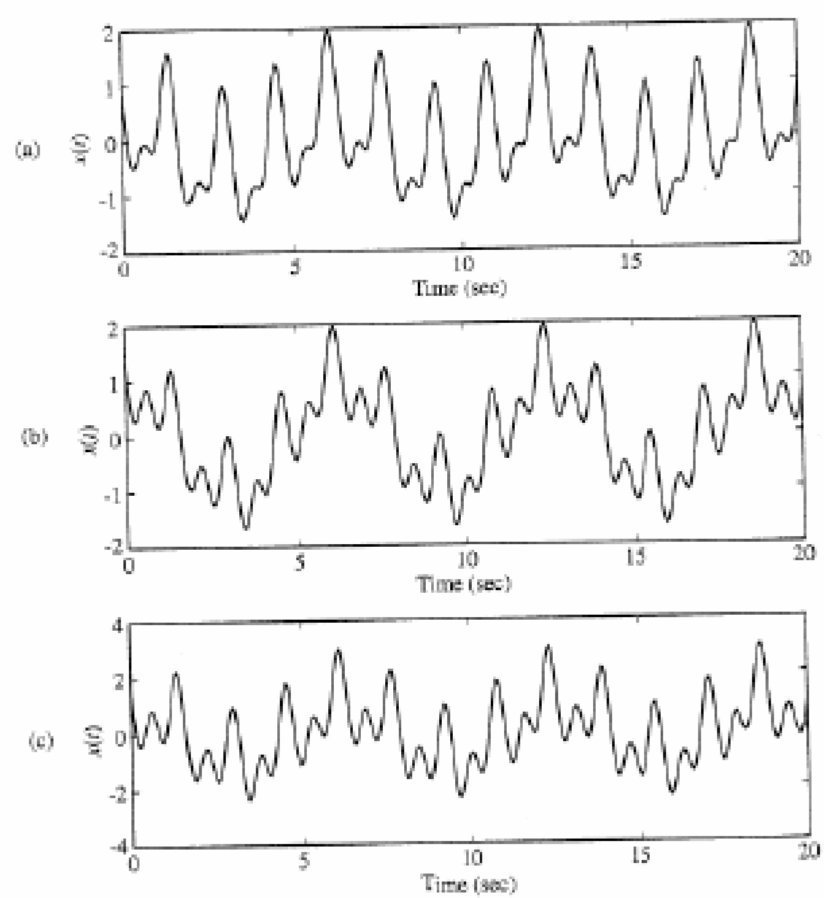
$$x(t) = A_1 \cos(t) + A_4 \cos(4t + \frac{\pi}{3}) + A_8 \cos(8t + \frac{\pi}{2})$$

$\omega_0 = 1$ $4\omega_0$ $8\omega_0$

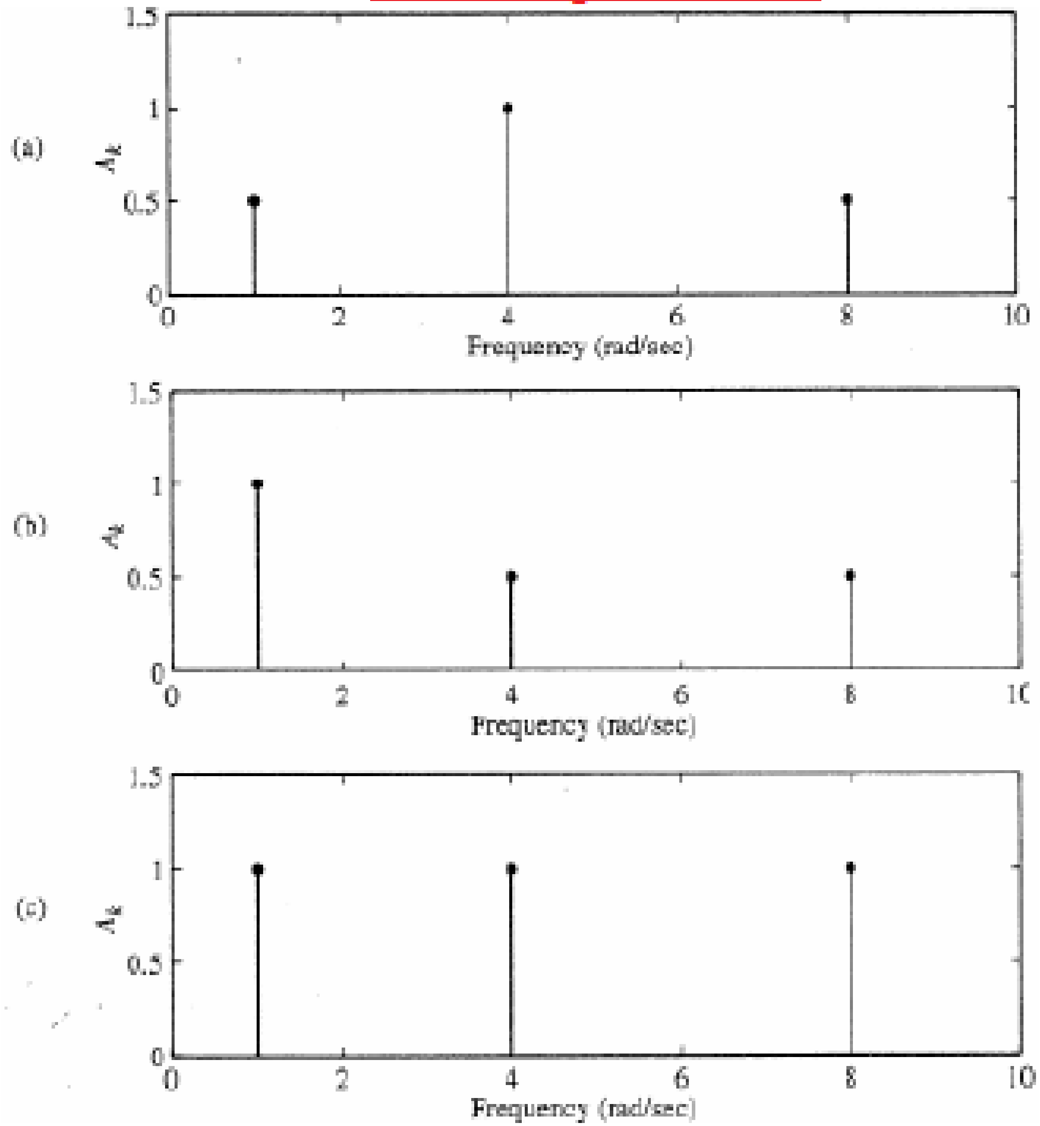
$A_1 = 0.5$
$A_4 = 1$
$A_8 = 0.5$

$A_1 = 1$
$A_4 = 0.5$
$A_8 = 0.5$

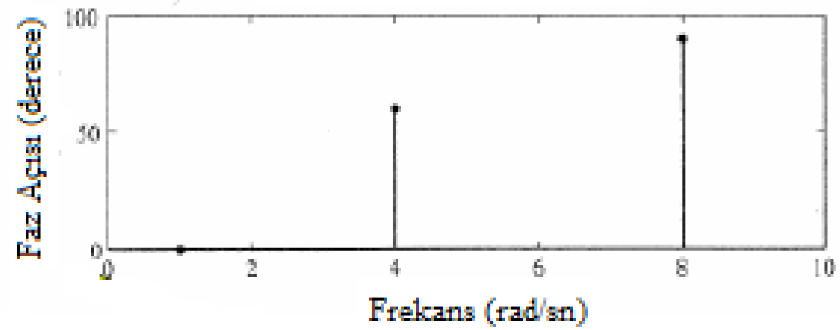
$A_1 = 1$
$A_4 = 1$
$A_8 = 1$



Genlik Spekturumu



Faz Spekturumu



Sinyali sinüzoidal toplamlar şeklinde yazalım

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=1}^{N} A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)} \qquad (A_k \text{ Reel })$$

Frekans bileşenler setine ve genlik-fazör setine sahip bir model

Eğer $k=0$ $\quad A_0\cos(0+\theta_0)$ $\quad A_0$ DC bileşen

$$\boxed{x(t)=A_0+\sum_{k=1}^{N} A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)}$$

Trigonometrik Form

"DC offset" $\quad (A_0 \text{ \& } A_k \text{ Reel})$

Euler dönüşümü ile kompleks eksponensiyel form

$$x(t) = c_0 + \left(\sum_{k=1}^{N} c_k e^{jk\omega_0 t} \right) + \left(\sum_{k=-1}^{-N} c_k e^{jk\omega_0 t} \right)$$

Pozitif frekans bileşeni

Negatif frekans bileşeni

c_0 Reel

c_k Kompleks

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\omega_0 t}}$$

Kompleks Eksponensiyel Form

Trigonometrik formdaki her bir bileşen kompleks eksponensiyel formda iki bileşene karşılık gelir.

Fourier Serileri

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

k integers

Fourier Serisi
Kompleks Eksponensiyel
Form

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

k integers

Fourier Serisi
Trigonometrik
Form

Euler açılımının Fourier Serilerinin Trigonometrik formuna direk uygulanması

$$A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) = \frac{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} + A_k e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k)}}{2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\omega_0 > 0$$

$$= \left[\frac{A_k}{2} e^{j\theta_k}\right] e^{jk\omega_0 t} + \left[\frac{A_k}{2} e^{-j\theta_k}\right] e^{-jk\omega_0 t}$$

$$= \left[\frac{A_k}{2} e^{j\theta_k}\right] e^{jk\omega_0 t} + \left[\frac{A_k}{2} e^{-j\theta_k}\right] e^{jk(-\omega_0) t}$$

Pozitif -Frekans Bileşeni

Negatif-Frekans Bileşeni

Örnek

$$x(t) = \cos(t) + 0.5\cos(4t + \pi/3) + \cos(8t + \pi/2)$$

Fourier serisinin trigonometrik formu elimizde mevcut $\omega_0 = 1$

$A_1 = 1$ $\quad A_4 = 0.5$ $\quad A_8 = 1$

$\theta_1 = 0$ $\quad \theta_4 = \pi/3$ $\quad \theta_8 = \pi/2$

İfade kompleks eksponensiyel formda yeniden yazılırsa

$$x(t) = \left[0.5e^{jt} + 0.5e^{-jt}\right] + \left[0.25e^{j\pi/3}e^{j4t} + 0.25e^{-j\pi/3}e^{-j4t}\right] + \left[0.5e^{j\pi/2}e^{j8t} + 0.5e^{-j\pi/2}e^{-j8t}\right]$$

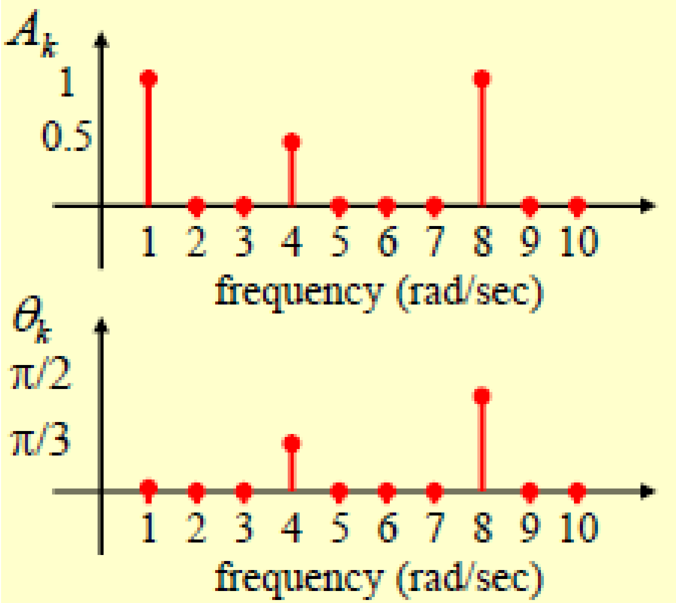
$c_1 = 0.5$ $\quad c_4 = 0.25e^{j\pi/3}$ $\quad c_8 = 0.5e^{j\pi/2}$

$c_{-1} = 0.5$ $\quad c_{-4} = 0.25e^{-j\pi/3}$ $\quad c_{-8} = 0.5e^{-j\pi/2}$

$$x(t) = \cos(t) + 0.5\cos(4t + \pi/3) + \cos(8t + \pi/2)$$

Genlik Spekturumu

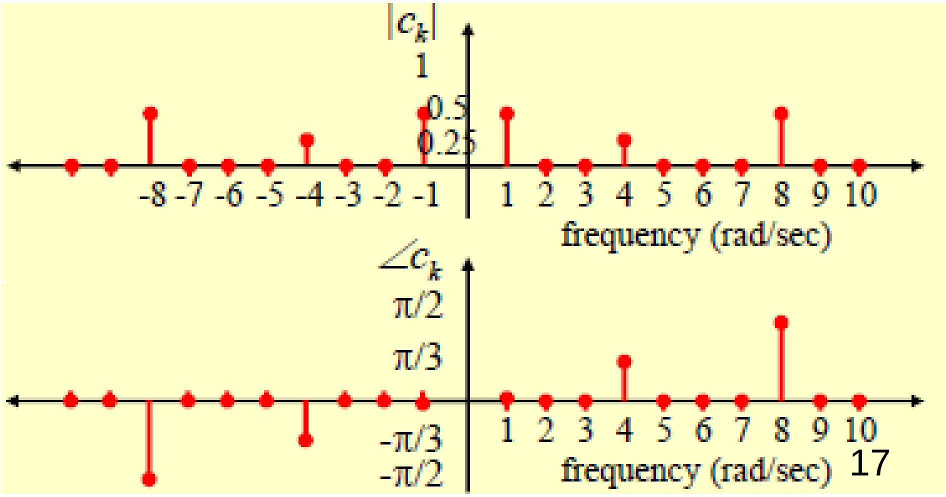
Faz Spekturumu



$$x(t) = \left[0.5e^{jt} + 0.5e^{-jt}\right] + \left[0.25e^{j\pi/3}e^{j4t} + 0.25e^{-j\pi/3}e^{-j4t}\right] + \left[0.5e^{j\pi/2}e^{j8t} + 0.5e^{-j\pi/2}e^{-j8t}\right]$$

Genlik Spekturumu

Faz Spekturumu



$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Zaman-düzlem modeli

zaman düzleminde $x(t)$ verildiğinde

$\rightarrow$

Frekans-düzlem modeli

Fourier Serilerinin katsayılarını $\{c_k\}$ bulduk

Zaman-düzlemindeki sinyal modelini bir frekans-düzlemindeki sinyal modeline dönüştürdük