4 Lineer Dönüşümler ve Matrisler

Tanım 4.1 V ve W iki vektör uzayı olsun. $L : V \to W$ bir fonksiyon olsun. Eğer

a) Her $\alpha, \beta \in V$ için $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$ ve

b) Her $c \in \mathbb{R}$ ve her $\alpha \in V$ için $L(c \cdot \alpha) = c \cdot L(\alpha)$ ise

L'ye V'den W'ya bir <u>lineer dönüşüm</u> denir. Eğer $V = W$ ise L'ye V üzerinde bir <u>lineer operatör</u> denir.

Lemma 4.2 $L : V \longrightarrow W$ fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\alpha, \beta \in V$ için $L(a\alpha + b\beta) = aL(\alpha) + bL(\beta)$ olmasıdır.
İspat: ($\Longrightarrow$) L bir lineer dönüşüm olsun.

$$L(a\alpha + b\beta) = L(a\alpha) + L(b\beta) = aL(\alpha) + bL(\beta)$$

İspat: ($\Longleftarrow$) Şimdi de her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\alpha, \beta \in V$ için $L(a\alpha+b\beta) = aL(\alpha)+bL(\beta)$ olsun. $a = 1$, $b = 1$ alınırsa $L(\alpha+\beta) = L(\alpha)+L(\beta)$ elde edilir. Ayrıca $b = 0$, $a = c$ dersek $L(c\cdot\alpha) = c\cdot L(\alpha)$ bulunur. $\square$

Örnek 4.3 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ olsun.

$$L(\alpha+\beta) = L\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = L(\alpha)+L(\beta).$$

Ayrıca

$$L(c\alpha) = L\left(\begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = cL(\alpha).$$

Yani L bir lineer dönüşümdür. L'ye bir <u>projeksiyon (izdüşüm)</u> denir. Çünkü $P(a_1, a_2, a_3)$ noktasının L altındaki görüntüsü; ucu bu nokta olan 3–boyutlu doğrunun $\mathbb{R}^2$deki gölgesidir.

Örnek 4.4 $L : P_2 \longrightarrow P_1$, $L(at^2 + bt + c) = 2at + b$ olsun. L bir lineer dönüşümdür.

Örnek 4.5 $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $r \in \mathbb{R}$ bir skaler olmak üzere

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

olsun. L, $\mathbb{R}^3$ de bir lineer operatördür. (Kontrol ediniz) $r > 1$ ise L'ye uzama, $0 < r < 1$ ise büzülme denir. Çünkü; $r > 1$ ise vektör uzar, $0 < r < 1$ ise büzülür.

Örnek 4.7 $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

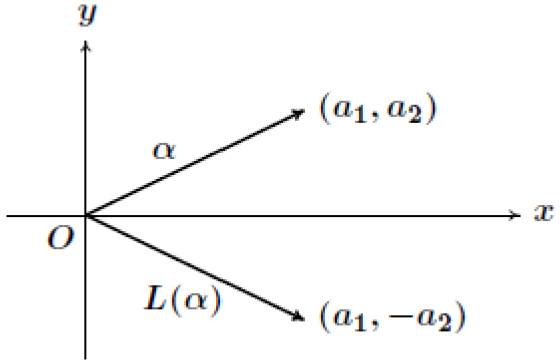
$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan L bir lineer dönüşümdür. Gösteriniz.

Örnek 4.9 $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

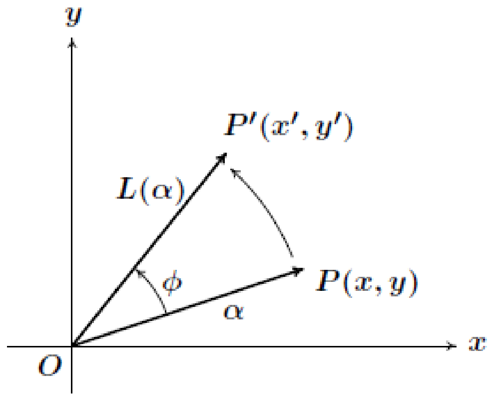
$\mathbb{R}^2$ de bir lineer operatördür. L'ye x-eksenine göre refleksiyon (yansıma) denir.



Örnek 4.10 $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dönüsümü bir α vektörünü ϕ acısı kadar döndürmekle elde edilen dönüşümdür. Bu dönüşüme bir rotasyon (dönme) denir.
Bu dönüşüm başlangıç noktası orjin ve uç noktası $P(x, y)$ olan vektörü, uzunluğunu değiştirmeden, saatin ters yönünde ϕ açısı kadar döndürüp, başlangıç noktası orjin ve uç noktası $P'(x', y')$ olan vektöre dönüştürür.



Örnek 4.11 $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + 1 \\ 2a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$L(\alpha+\beta) = L\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1+b_1+1 \\ 2(a_2+b_2) \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}$$

fakat

$$L(\alpha)+L(\beta) = \begin{bmatrix} a_1+1 \\ 2a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1+1 \\ 2b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1+2 \\ 2(a_2+b_2) \\ a_3+b_3 \end{bmatrix} \neq L(\alpha+\beta)$$

olup bir L bir lineer dönüşüm değildir.

Örnek 4.12 $L : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2, L\,[a_1 \quad a_2] = [a_1^2 \quad 2a_2]$ şeklinde verilen L bir lineer dönüşüm müdür? Neden?

Çözüm: Ödev

Teorem 4.13 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ve V de n–boyutlu bir vektör uzayı olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, V nin bir bazı olsun. $\alpha \in V$ ise $L(\alpha)$ elemanı $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \ldots, L(\alpha_n)\}$ elemanları tarafından tamamem belirlenir.

Örnek 4.14 $L : \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ bir lineer dönüşüm olsun. $\alpha_1 = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$, $\alpha_2 = [0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 2]$, $\alpha_3 = [0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 1]$, $\alpha_4 = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $\mathbb{R}_4$ ün bir bazı olsun. Şimdi

$$L(\alpha_1) = [1 \;\; 2], \quad L(\alpha_2) = [0 \;\; 3], \quad L(\alpha_3) = [0 \;\; 0], \quad L(\alpha_4) = [2 \;\; 0]$$

verilsin. $\alpha = [3 \;\; -5 \;\; -5 \;\; 0]$ ise $L(\alpha)$ nasıl hesaplanır? Bunun için önce α elemanı S'deki vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılır. Bir takım hesaplamalardan sonra $\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4$ elde edilir ve daha sonra:

$$L(\alpha) = L(2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4) = 2L(\alpha_1) + L(\alpha_2) - 3L(\alpha_3) + L(\alpha_4) = [4 \;\; 7]$$

bulunur.

Teorem 4.15 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

(a) $L(\theta_V) = \theta_W$

(b) $L(\alpha - \beta) = L(\alpha) - L(\beta)$ dır. (Her $\alpha, \beta \in V$ için.)

4.2 Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntüsü

Tanım 4.16 Eğer bir lineer dönüşüm, fonksiyon olarak 1–1 ise, bu dönüşüme 1–1 lineer dönüşüm denir. $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Longrightarrow L(\alpha_1) \neq L(\alpha_2) \quad \text{veya} \quad L(\alpha_1) = L(\alpha_2) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

önermesi doğru ise (her $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ için) L 1–1 dir deriz.

Örnek 4.17 $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ olsun. $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$ olduğunu kabul edelim: Buradan

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= \ b_1 + b_2 \\ a_1 - a_2 &= \ b_1 - b_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2a_1 = 2b_1 \Longrightarrow a_1 = b_1 \Longrightarrow a_2 = b_2$$

olup $\alpha_1 = \alpha_2$ dir. Yani L, 1–1 dir.

Örnek 4.18 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ olsun. $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$ olup L, 1–1 değildir.

Tanım 4.19 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun L nin çekirdeği

$$\text{Çek}(L) = \{\alpha \in V : L(\alpha) = \theta_W\}$$

kümesi olarak tanımlanır. $L(\theta_V) = \theta_W$ olduğundan (Teorem 4.15) $\theta_V \in \text{Çek}(L)$ olup, çekirdek en az bir elemanlıdır; yani $\text{Çek}(L) \neq \emptyset$.

Örnek 4.20 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, Örnek 4.18′deki dönüşüm olsun.

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olup } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \text{Çek}(L). \text{ Fakat } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \notin \text{Çek}(L).$$

Acaba $\text{Çek}(L)$ kümesini nasıl bulabiliriz?

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

bulunur. $a_3 \in \mathbb{R}$ keyfi seçilebilir. O halde

$$\text{Çek}(L) \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(Yani Çek}(L), z\text{–ekseninin kendisidir.)}$$

Teorem 4.21 $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun

(a) Çek(L), V nin bir alt uzayıdır.

(b) L 1–1 dir $\iff$ Çek$(L) = \{\, \theta_V \,\}$

İspat (a) $\alpha, \beta \in$ Çek(L) ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha + \beta \in$ Çek(L) ve $c\alpha \in$ Çek(L) olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in$ Çek(L) olduğundan $L(\alpha) = L(\beta) = \theta_W$ dur. Şimdi:

$$L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta) = \theta_W + \theta_W = \theta_W \Longrightarrow \alpha + \beta \in \text{Çek}(L)$$
$$L(c\alpha) = cL(\alpha) = c\theta_W = \theta_W \Longrightarrow c\alpha \in \text{Çek}(L)$$

olup Çek(L), V nin bir alt uzayıdır.

İspat (b) ($\Longrightarrow$) L 1–1 olsun. Çek$(L) = \{\, \theta_V \,\}$ olduğunu göstereceğiz. $\alpha \in$ Çek(L) alalım. $L(\alpha) = \theta_W$ dur. $L(\theta_V) = \theta_W$ olduğundan ve L 1–1 olduğundan $\alpha = \theta_V$ olmalıdır. O halde Çek$(L) = \{\, \theta_V \,\}$.

İspat (b) ($\Longleftarrow$) Çek$(L) = \{\, \theta_V \,\}$ olsun. L nin 1–1 olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} L(\alpha_1) = L(\alpha_2) &\Longrightarrow L(\alpha_1) - L(\alpha_2) = \theta_W \\ &\Longrightarrow L(\alpha_1 - \alpha_2) = \theta_W \\ &\Longrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \in \text{Çek}(L) \\ &\Longrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \theta_V \\ &\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \end{aligned}$$

olup L 1–1 dir. □

Tanım 4.23 $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. L nin görüntüsü (veya V nin L altındaki görüntüsü)

$$G(L) = \{\, w \in W : \text{ Bir } v \in V \text{ için } L(v) = w \,\}$$

kümesi olarak tanımlanır. Yani $\beta \in G(L)$ ise bir $\alpha \in V$ bulunabilir; öyle ki $L(\alpha) = \beta$ dır. Eğer $G(L) = W$ ise L'ye örten (üzerine) lineer dönüşüm denir.

Teorem 4.24 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $G(L)$, W nun alt uzayıdır.

Örnek 4.25 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ olsun. L örten midir?

Çözüm: $\beta = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alalım. $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ve $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}^3$ arıyoruz (her c, d için).

$$L(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Longrightarrow a_1 = c, a_2 = d$$

seçilirse $L(\alpha) = \beta$ olur. (a_3 herhangi bir sayı seçilebilir). Yani L örtendir. Bu durumda $G(L) = \mathbb{R}^2$ olup boy$(G(L)) = 2$ dir.

Örnek 4.27 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ile tanımlanan dönüşüm örten midir? boy$(G(L) =$?

Çözüm: Verilen her $\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ için $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}^3$ bulunabilir mi? $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ olsun.

$$L(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Şimdi ek matrisi indirgenmiş satır eşelon forma getirelim:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right]$$

Yani sadece $c - b - a = 0$ olduğundan bir çözüm vardır. O zaman L örten değildir. Şimdi $G(L)$ için bir baz bulalım:

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olur. Yani

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesi $G(L)$'yi doğurur. Üçüncü vektör ilk iki vektörün toplamı ve ilk iki vektör lineer bağımsız olduğu için (biri diğerinin katı değil), ilk iki vektör bir baz oluşturur. O halde boy$(G(L)) = 2$ olur.

Not 4.28 Son örnekte boy(Çek(L)) $= 1$ bulunur ve $\begin{bmatrix} -a \\ -a \\ a \end{bmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$ şeklindeki vektörlerden oluşur. (Kontrol edin.)

Örnek 4.29 $L : \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_3$, $L([a_1, a_2, a_3, a_4]) = [a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_1 + a_3]$ olarak tanımlansın. $G(L)$ için bir baz bulunuz.

Çözüm: $L([a_1, a_2, a_3, a_4]) = a_1[1,0,1] + a_2[1,0,0] + a_3[0,1,1] + a_4[0,1,0]$ olup

$$\{ [1,0,1], [1,0,0], [0,1,1], [0,1,0] \}$$

kümesi $G(L)$ yi doğurur. Bu kümedeki vektörlerden lineer bağımsız olanları bulalım:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini indirgenmiş satır eşelon forma getirirsek $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde ederiz. Yani

$$\{ [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1] \}$$

kümesi $G(L)$ için bir bazdır. $\text{boy}(G(L)) = 3$ olup L örtendir.

$$\boxed{\text{boy}(\text{Çek}(L)) + \text{boy}(G(L)) = \text{boy}(L'\text{nin tanım kümesi})}$$

Teorem 4.30 $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm ve V, n–boyutlu bir uzay ise

$$\text{boy}(\text{Çek}(L)) + \text{boy}(G(L)) = n.$$

Tanım 4.31 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm ise $\text{boy}(\text{Çek}(L))$ sayısına L'nin sıfırlığı denir.

Sonuç 4.32 $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm ve $\text{boy}(V) = \text{boy}(W)$ olsun.

(a) L 1–1 ise örtendir.

(b) L örten ise 1–1 dir.

Teorem 4.33 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşümünün tersi vardır $\Longleftrightarrow$ L, 1–1 ve örtendir. Ayrıca L^{-1} de bir lineer dönüşümdür ve $(L^{-1})^{-1} = L$.

Örnek 4.34 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ olarak tanımlansın. $\text{Çek}(L) = \{\theta\}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani L, 1–1 dir. Ayrıca örten olup (Sonuç 4.32) tersi vardır. L^{-1} fonksiyonunu bulalım.

Teorem 4.35 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşümünün 1–1 olması için gerek ve yeter şart V deki lineer bağımsız her kümenin görüntüsünün W da lineer bağımsız olmasıdır.

Sonuç 4.36 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm ve $\text{boy}(V) = \text{boy}(W)$ olsun.

$$L \text{ 1–1 dir (yani tersi vardır)} \Longleftrightarrow V \text{ deki bir bazın görüntüsü, } W \text{ da bir bazdır.}$$

Not: A $n \times n$ matris olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

1. A singüler değildir.
2. $AX = 0$ 'ın sadece trivial çözümü vardır.
3. A, I_n 'in satır (sütun) eşdeğeridir.
4. $AX = B$ sistemi her $n \times 1$ $B \in \mathbb{R}^n$ matrisi için tek çözüme sahiptir.
5. A, elementer matrislerin bir çarpımıdır.
6. A'nın rankı n dir.
7. A'nın satırları (sütunları) $\mathbb{R}_n$ de ($\mathbb{R}^n$ de) lineer bağımsızdır.
8. $AX = O$ 'ın çözüm uzayının boyutu sıfırdır.
9. $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, L(X) = AX, (X \in \mathbb{R}^n)$ ile tanımlanan lineer dönüşüm 1–1 ve örtendir.

4.3 Bir Lineer Dönüşümün Matrisi

Örnek 4.38 $L : P_2 \longrightarrow P_1, L(p(t)) = p'(t)$ olsun. $S = \{t^2, t, 1\}$ ve $T = \{t, 1\}$ de P_2 ve P_1 için sıralı bazlar olsunlar. Şimdi L için A matrisini bulalım.

$$\left.\begin{array}{lll} L(t^2) = 2t = 2 \cdot t + 0 \cdot 1 & \Longrightarrow & [L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ L(t) = 1 = 0 \cdot t + 1 \cdot 1 & \Longrightarrow & [L(t)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L(1) = 0 = 0 \cdot t + 0 \cdot 1 & \Longrightarrow & [L(1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örneğin; $p(t) = 5t^2 - 3t + 2 \Longrightarrow L(p(t)) = 10t - 3$ dür. Ayrıca $L(p(t))$'yi A matrisini kullanarak bulabiliriz.

$$[p(t)]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olup

$$[L(p(t))]_T = A \cdot [p(t)]_S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow L(p(t)) = 10t - 3 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4.40 $L : P_2 \longrightarrow P_1$ Örnek 4.38'deki dönüşüm olsun. $S = \{t^2, t, 1\}$ ve $T = \{t+1, t-1\}$'de P_2 ve P_1 için sıralı bazlar olsunlar.

$$\left.\begin{array}{lcl} L(t^2) = 2t = 1\cdot(t+1) + 1\cdot(t-1) & \Longrightarrow & [L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L(t) = 1 = \frac{1}{2}(t+1) - \frac{1}{2}(t-1) & \Longrightarrow & [L(t)]_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ L(1) = 0 = 0\cdot(t+1) + 0\cdot(t-1) & \Longrightarrow & [L(1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Şimdi $p(t) = 5t^2 - 3t + 2$ alalım. $L(p(t)) = 10t - 3$ tür.

$$[L(p(t))]_T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 13/2 \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Gerçekten: $L(p(t)) = \frac{7}{2}(t+1) + \frac{13}{2}(t-1) = 10t - 3$ bulunur.

Not 4.48 **5.** $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm ve boy$(V) =$ boy(W) olsun. Aşağıdakiler denktir.

1. L tersi alınabilirdir.
2. L 1–1 dir.
3. L örtendir.
4. L'nin, S ve T'ye göre temsil matrisi olan A singüler değildir.