2.3 Baz ve Boyut

Tanım 2.42 V bir vektör uzayı, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer S lineer bağımsız ise ve $\text{Span}(S) = V$ ise S ye V nin bir bazı (tabanı) denir.

Örnek 2.43 $V = \mathbb{R}^3$ olsun. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ olsun. $S, \mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır. Bu baza $\mathbb{R}^3$ ün doğal bazı denir. Benzer şekilde $\mathbb{R}_3$ ün doğal bazı $S = \{[1\ \ 0\ \ 0], [0\ \ 1\ \ 0], [0\ \ 0\ \ 1]\}$ kümesidir. $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal bazının elemanları $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ile gösterilir.

Örnek 2.44 $S = \{t^2 + 1, t - 1, 2t + 2\}$ kümesinin P_2 nin bir bazı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\text{Span}(S) = P_2$ ve S nin lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. $at^2 + bt + c \in P_2$ alalım. $at^2 + bt + c = a_1(t^2) + a_2(t-1) + a_3(2t+2)$ olacak şekilde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ bulmalıyız. Buradan:
$+1$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 + 2a_3 &= b \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a_1 = a, a_2 = \frac{a+b-c}{2}, a_3 = \frac{c+b-a}{4}$$

bulunur. Her a, b, c için a_1, a_2, a_3 bulunabildiğinden $\text{Span}(S) = P_2$ dir.

Şimdi de S nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $a_1(t^2+1) + a_2(t-1) + a_3(2t+2) = 0$ dersek buradan $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olması gerektiği görülür. (Ödev). **Sonuç:** S, P_2 için bir bazdır.

Örnek 2.45 $\alpha_1 = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0], \alpha_2 = [0\ \ 1\ \ -1\ \ 2], \alpha_3 = [0\ \ 2\ \ 2\ \ 1]$ ve $\alpha_4 = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesinin $\mathbb{R}_4$ için bir baz olduğunu gösterin. (Ödev)

Teorem 2.46 Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi bir V vektör uzayının bir bazı ise V deki her vektör S deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak tek türlü yazılabilir.

Teorem 2.47 Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi sıfır olmayan vektörlerin bir kümesi ve $\text{Span}(S) = V$ ise S kümesi V için bir T bazı içerir.

V yi geren bir S kümesinden T bazı şöyle elde edilir:

Adım.1. $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = \theta$ eşitliği oluşturulur.

Adım.2. Buradan ek matris oluşturulur ve bu matris indirgenmiş satır eşelon forma getirilir. (**Not:** Satır eşelon forma getirmek de yeterlidir.)

Adım.3. Baş eleman olan 1 sayısını bulunduran kolona ait vektörler $V = \text{Span}(S)$ uzayı için bir baz oluşturur.

Örnek 2.48 $V=\mathbb{R}_3$ olsun. $\alpha_1=[1\ \ 0\ \ 1], \alpha_2=[0\ \ 1\ \ 1], \alpha_3=[1\ \ 1\ \ 2], \alpha_4=[1\ \ 2\ \ 1], \alpha_5=[-1\ \ 1\ \ -2]$ olsun. $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ kümesi V yi gerer. (Kontrol ediniz.) Şimdi S nin alt kümesi olan ve V nin bazı olan T kümesini bulalım.

Adım.1.

$$a_1[1\ \ 0\ \ 1]+a_2[0\ \ 1\ \ 1]+a_3[1\ \ 1\ \ 2]+a_4[1\ \ 2\ \ 1]+a_5[-1\ \ 1\ \ -2]=[0\ \ 0\ \ 0]$$

Adım.2.

$$\left.\begin{aligned} a_1+a_3+a_4-a_5&=0\\ a_2+a_3+2a_4+a_5&=0\\ a_1+a_2+2a_3+a_4-2a_5&=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{c}\text{Ek matris:}\\ \text{(ind. satır eşelon formu)}\end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$$

Adım.3. Baş elemanlar 1., 2. ve 4. kolonlardadır. Yani $T=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ kümesi $\mathbb{R}_3$ için bir bazdır.

Not: S nin yazılışında vektörlerin sırası değiştirilirse V nin başka bir bazı elde edilebilir. Örneğin $\beta_1=\alpha_5,\beta_2=\alpha_4,\beta_3=\alpha_3,\beta_4=\alpha_2,\beta_5=\alpha_1$ yazılırsa $S=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5\}$ kümesinden $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=\{\alpha_5,\alpha_4,\alpha_3\}$ bazı elde edilir.

Teorem 2.49 Eğer $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ kümesi bir V vektör uzayının bazı ve $T=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r\}$ lineer bağımsız vektörlerin bir kümesi ise $r\leqslant n$ dir.

Sonuç 2.50 Eğer $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ ve $T=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m\}$ bir V vektör uzayının bazları ise $n=m$ dir.

İspat: S bir baz ve T lineer bağımsız olduğundan $m\leqslant n$ dir. Ayrıca T bir baz ve S lineer bağımsız olduğundan $n\leqslant m$ dir. Yani $n=m$ dir. Sonuç olarak "bir vektör uzayının her bazında aynı sayıda eleman vardır" deriz. □

Tanım 2.51 Bir V vektör uzayının bir bazındaki eleman sayısına (sonlu ise) V nin <u>boyutu</u> denir ve boy(V) ile gösterilir. $V=\{\theta\}$ ise boy$(V)=0$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.52 $S=\{t^2,t,1\}$ kümesi P_2 için bir baz olup boy$(P_2)=3$ dür.

Örnek 2.53 $\alpha_1=[0\ \ 1\ \ 1], \alpha_2=[1\ \ 0\ \ 1], \alpha_3=[1\ \ 1\ \ 2]$ ve $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ olsun. $V=$ Span(S), $\mathbb{R}_3$ ün alt uzayı olsun. V deki her vektör $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$ şeklindedir. $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$ olduğundan S lineer bağımlıdır. $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ dersek Span$(S_1)=V$ olur. S_1 lineer bağımsız olduğundan (kontrol edin) S_1, V nin bir bazıdır. Yani boy$(V)=2$ dir.

Sonuç 2.54 V nin boyutu n ise, V deki lineer bağımsız en büyük küme (en fazla elemanlı küme) n elemanlıdır ve V nin bir bazıdır.

Sonuç 2.55 Eğer boy$(V) = n$ ise V'yi geren en küçük kümede n vektör vardır ve bu küme V nin bir bazıdır. Yani boy$(V) = n$ ise $n+1$ elemanlı küme lineer bağımlıdır. Ayrıca $n-1$ elemanlı bir küme V'yi doğuramaz.

Örnek 2.58 boy$(\mathbb{R}^3) = 3$, boy$(\mathbb{R}_2) = 2$, boy$(\mathbb{R}^n) = n$, boy$(\mathbb{R}_n) = n$ dir. boy$(P_3) = 4$ dür; çünkü $\{t^3, t^2, t, 1\}$ bir bazdır. Genelde boy$(P_n) = n+1$ dir.

Tanım 2.59 Sonlu elemanlı bir bazı olan vektör uzayına <u>sonlu–boyutlu vektör uzayı</u> denir. Sonsuz sayıda elemanlı bazı olan vektör uzayında <u>sonsuz–boyutlu vektör uzayı</u> denir. Örneğin; bütün polinomların vektör uzayı P sonsuz boyutludur.

2.4 Koordinatlar ve İzomorfizmler

V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, V'nin sıralı bir bazı olsun. (Yani S'deki vektörlerin bir yazılış sırası olsun). $\alpha \in V$ vektörü $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$ şeklinde (tek türlü) yazılır. Bu durumda $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ vektörüne α nın S sıralı bazına göre <u>koordinat vektörü</u> denir. $[\alpha]_S$'nin elemanlarına da α nın S'ye göre <u>koordinatları</u> denir.

Örnek 2.65 : P_1 de $S = \{t, 1\}$ bir bazdır. $\alpha = p(t) = 5t - 2$ olsun. $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ dir. $T = \{t+1, t-1\}$ de P_1 in bir bazıdır. $\alpha = 5t - 2 = \frac{3}{2}(t+1) + \frac{7}{2}(t-1)$ olup $[\alpha]_T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ dir. Bazdaki yazılış sırası değişirse koordinatlar da değişir.

Örnek 2.66 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi bir bazdır. $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha = 3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3$ olup $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dir.

İzomorfizmler

Tanım 2.68 V, $\oplus$ ve $\odot$ işlemiyle bir vektör uzayı ve W da $\boxplus$ ve $\boxdot$ işlemleriyle bir vektör uzayı olsun. Eğer V den W ya 1–1 ve örten L fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa L ye V den W üzerine bir izomorfizm denir.

(a) $L(\alpha \oplus \beta) = L(\alpha) \boxplus L(\beta)$, (her $\alpha, \beta \in V$ için)

(b) $L(c \odot \alpha) = c \boxdot L(\alpha)$, (her $\alpha \in V, c \in \mathbb{R}$ için)

Bu durumda V, W ya izomorfiktir denir.

Not: V, W ya izomorfik ise W da V ye izomorfiktir. Bu durumda V ile W izomorfiktirler diyebiliriz.

Lemma 2.70 $L : V \longrightarrow W$ bir izomorfizm olsun. O zaman

(a) $L(\theta_V) = \theta_W$

(b) $L(\alpha - \beta) = L(\alpha) - L(\beta)$ (her $\alpha, \beta \in V$ için)

İspat (a): L bir izomorfizm olduğundan:

$$\begin{aligned}
\theta_V + \theta_V = \theta_V &\Longrightarrow L(\theta_V + \theta_V) = L(\theta_V) \\
&\Longrightarrow \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W} + \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W} = \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W} \\
&\Longrightarrow L(\theta_V) = \theta_W. \quad (L(\theta_V) \text{ sadeleşirse})
\end{aligned}$$

(b):

$$L(-\beta) = L\big((-1)\beta\big) = (-1)L(\beta) = -L(\beta)$$

elde edilir. Daha sonra da ispat şöyle tamamlanır:

$$L(\alpha - \beta) = L(\alpha + (-1)\beta) = L(\alpha) + L((-1)\beta) = L(\alpha) + (-L(\beta)) = L(\alpha) - L(\beta).$$

Teorem 2.71 İzomorfik olma bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar:

(a) Her V vektör uzayı kendine izomorfiktir.

(b) V, W ya izomorfik ise W da V ye izomorfiktir.

(c) U, V ye; V de W ya izomorfik ise U, W ya izomorfiktir.

Teorem 2.72 Sonlu boyutlu iki vektör uzayının izomorfik olmaları için gerek ve yeter şart boyutlarının eşit olmalarıdır.

Dönüşüm Matrisleri

Örnek 2.74 $V = \mathbb{R}^3$ olsun. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ve $T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

kümeleri V nin sıralı bazları olsun. S bazından T bazına dönüşüm matrisini bulalım:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\alpha_1]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\alpha_2]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\alpha_3]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ istenen dönüşüm matrisidir. Şimdi $\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ verilsin. $[\alpha]_T$ yi bulmak için α yı S deki vektörler cinsinden yazalım.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ olup } [\alpha]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Bu durumda $[\alpha]_T = P \cdot [\alpha]_S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ olmalıdır. Gerçekten de:

$$4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \text{ elde edilir. } \quad \text{Yani } [\alpha]_T = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

T bazından S bazına dönüşüm matrisi

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Örnek 2.75 $V = P_1$ uzayının iki sıralı bazı $S = \{t-1, t+1\}$ ve $T = \{t, t-2\}$ olsun.

$$\alpha_1 = t - 1 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(t-2) \Longrightarrow [\alpha_1]_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = t + 1 = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}(t-2) \Longrightarrow [\alpha_2]_T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olur. S den T ye dönüşüm matrisi $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ bulunur.

Mesela; $\alpha = 5t + 1$ in S bazına göre koordinatları: $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ tür. α nın T bazına göre koordinatları:

$$[\alpha]_T = P \cdot [\alpha]_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Kontrol edelim. Gerçekten de $\alpha = 5t + 1 = 11t - \frac{1}{2}(t-2)$ olduğu görülür. Bu örnekte T bazından S bazına dönüşüm matrisi:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

2.5 Bir Matrisin Rankı

Örnek 2.79 $\alpha_1 = [1 \ \ -2 \ \ 1], \alpha_2 = [-1 \ \ 1 \ \ 1], \alpha_3 = [1 \ \ -3 \ \ 3], \alpha_4 = [3 \ \ -5 \ \ 1]$ ve $\alpha_5 = [1 \ \ -4 \ \ 5]$ olsun. $\mathbb{R}_3$'de $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ kümesi tarafından doğurulan V alt uzayı için bir baz bulalım.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi olsun. V uzayı A matrisinin satır uzayıdır. Elementer satır işlemleri uygulanırsa $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. Bu matris indirgenmiş satır eşelon formdadır. A nın satır uzayı ile B nin satır uzayı aynıdır. B nin satır uzayı için bir baz $\beta_1 = [1 \ \ 0 \ \ -3]$ ve $\beta_2 = [0 \ \ 1 \ \ -2]$ olmak üzere $\{\beta_1, \beta_2\}$ kümesidir. Dolayısıyla $\{\beta_1, \beta_2\}$, V için bir bazdır.

Örnek 2.84 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine satır eşdeğerdir. Yani **satır–rank**$(A) =$ **satır–rank**$(B) = 2$.

Teorem 2.86 Bir $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ matrisinin satır rankı sütun rankına eşittir.

Örnek 2.87 A matrisi Örnek 2.84'deki matris olsun. A'nın kolon uzayı A'nın kolonları tarafından doğurulan uzaydır. ($\mathbb{R}^4$ ün alt uzayıdır)

$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. A nın kolonlarını satır olarak yazarsak:

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & +1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. A' nü indirgenmiş satır eşelon forma getirirsek: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

elde edilir. Bu durumda $\{[1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -1], [0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]\}$ kümesi A' nün satır uzayı için bir bazdır ve $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi de A nın sütun uzayı için bir bazdır. Yani **sütun–rank**$(A) = 2$ dir.

$$A \text{ ve } B \text{ eşdeğerdir} \iff \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$$

$$A, n \times n \text{ matris olsun. } \text{rank}(A) = n \iff A, I_n{}' \text{ in satır eşdeğeridir.}$$

$$\iff A \text{ singüler değil}$$

Rankın Uygulaması

$$AX = B \text{ sistemi tutarlıdır} \iff \text{rank}[A \vdots B] = \text{rank}(A).$$

Örnek 2.95 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sistemi verilsin. $\text{rank}(A) = \text{rank}[A \vdots B] = 3$ olduğu için sistemin çözümü vardır.

Örnek 2.96 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ sisteminin çözümü yoktur, çünkü $\text{rank}(A) = 2$ fakat $\text{rank}[A \vdots B] = 3$ dür.

Not: $A, n \times n$ matris olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1. A singüler değildir.
2. $AX = 0$'ın tek çözümü trivialdir.
3. A matrisi I_n'ye satır (sütun) eşdeğerdir.
4. Her $B \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $AX = B$ nin tek çözümü vardır.
5. A, elementer matrislerin bir çarpımıdır.
6. $\text{rank}(A) = n$ dir.
7. A nın satırları (sütunları), $\mathbb{R}_n$ de ($\mathbb{R}^n$ de) lineer bağımsızdır.