Sinyaller ve Sistemler

Z-Dönüşümleri (Z-Transform)

Sürekli-Zaman sistemler için Laplace Dönüşümü

Ayrık-Zaman sistemler için Z-Dönüşümü

Z-T

Başlangıç şartına sahip fark denklemlerinin çözümü

Transfer fonksiyonunu kullanan sıfır-durum sistemlerin çözümü

Ayrık zaman sinyali $x[n]$ için $-\infty < n < \infty$ aralığında DTFT:

$$DTFT : X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

2π periyotlu Ω 'de periyodik

Sürekli-zaman için Fourier dönüşümü bazı sinyaller için yakınsama yapmadığından Laplace dönüşümü tanımlanmıştır.

$$e^{-j\omega t} \;\; vs. \;\; e^{-(\sigma + j\omega)t} \equiv e^{-st}$$

Ayrık zaman Fourier dönüşümü tanım bölgesini geliştirmek için Z-dönüşümü tanımlanır.

$$e^{-j\Omega n} \;\; vs. \;\; \alpha^{-n} e^{-j\Omega n} \equiv \left(\alpha e^{j\Omega}\right)^{-n} \equiv z^{-n}$$

Laplace dönüşümünde olduğu gibi Z-dönüşümleri 2 formda ele alınır.

<u>İki-bölgeli Z-dönüşümü</u>

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$ z kompleks değerli

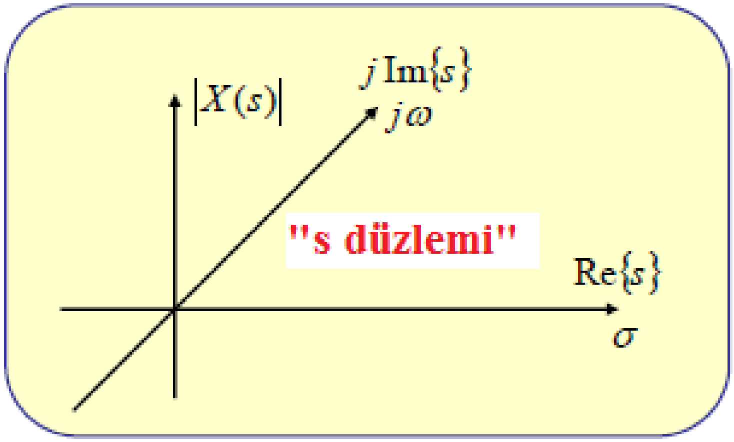
<u>Bir-bölgeli Z-dönüşümü</u>

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$ z kompleks değerli

$x[n]$ nedensel ise : $X_1(z) = X_2(z)$

Laplace dönüşümü	:	$s = \sigma + j\omega$	rectangular form
Z-dönüşümü	:	$z = \alpha e^{j\Omega}$	açısal form

Laplace için s-düzlemi:
jw -eksenine göre sol yarı düzlem sağ yarı düzlem



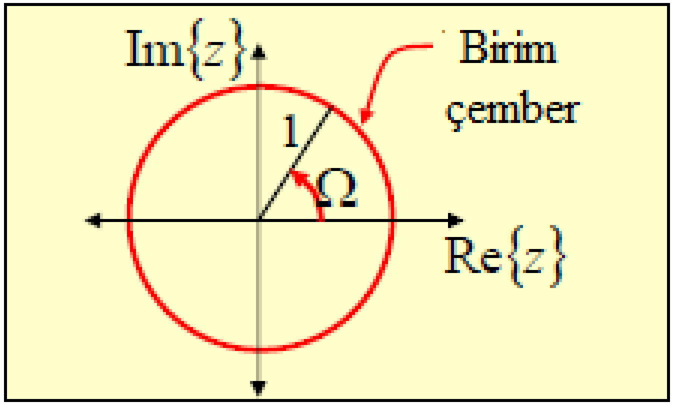
$\alpha = 1$ Z-T = DTFT

Tüm $z = e^{j\Omega}$ için $|z| = 1$

"Birim Çember"= tüm z değerleri çember içinde

DTFT sadece çember içini tanımlar
Z-dönüşümü ise çember dışınıda kapsar

$$\boxed{X(\Omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}}$$



Z-Dönüşüm Örnekleri

Birim Dürtü

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n}$$

$$= 1 \times z^{0} + 0 \times z^{-1} + 0 \times z^{-2} + \cdots$$

$$= 1$$

$$\boxed{\delta[n] \quad \leftrightarrow \quad 1}$$

Birim Basamak $u[n]$

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

"geometrik toplam"

$$\boxed{u[n] \quad \leftrightarrow \quad \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}}$$

Üstel Fonksiyon

$$x[n] = a^n u[n] \qquad a \quad \text{reel veya kompleks}$$

Geometrik toplam kullanılırsa: $$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{a}{z}\right)^n = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\boxed{a^n u[n] \quad \leftrightarrow \quad \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}}$$

Z Transform Table

Time Signal	Z Transform
$\delta[n]$	1
$\delta[n-q], \quad q = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{z^q} = z^{-q}, \quad q = 1, 2, \ldots$
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$u[n] - u[n-q], \quad q = 1, 2, \ldots$	$\frac{z^q - 1}{z^{q-1}(z-1)}, \quad q = 1, 2, \ldots$
$a^n u[n], \quad a$ real or complex	$\frac{z}{z-a}, \quad a$ real or complex
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$(n+1)u[n]$	$\frac{z^2}{(z-1)^2}$
$n^2 u[n]$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$na^n u[n], \quad a$ real or complex	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$n^2 a^n u[n], \quad a$ real or complex	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
$n(n+1)a^n u[n], \quad a$ real or complex	$\frac{2az^2}{(z-a)^3}$
$\cos(\Omega_o n)u[n]$	$\frac{z^2 - \cos(\Omega_o)z}{z^2 - 2\cos(\Omega_o)z + 1}$
$\sin(\Omega_o n)u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_o)z}{z^2 - 2\cos(\Omega_o)z + 1}$
$a^n \cos(\Omega_o n)u[n]$	$\frac{z^2 - a\cos(\Omega_o)z}{z^2 - 2a\cos(\Omega_o)z + a^2}$
$a^n \sin(\Omega_o n)u[n]$	$\frac{a\sin(\Omega_o)z}{z^2 - 2a\cos(\Omega_o)z + a^2}$

Z Transform Properties

Property Name	Property	
Linearity	$ax[n]+bv[n]$	$aX(z)+bV(z)$
Right Time Shift (Causal Signal)	$x[n-q],\quad q>0$	$z^{-q}X(z)$
Right Time Shift (Non-Causal Signal)	$x[n-1]$ $x[n-2]$ $x[n-q],\quad q>0$	$z^{-1}X(z)+x[-1]$ $z^{-2}X(z)+x[-2]+z^{-1}x[-1]$ $z^{-q}X(z)+x[-q]+z^{-1}x[-q+1]+\cdots$ $\cdots+z^{-q+1}x[-1]$
Multiply by n	$nx[n]$	$-z\dfrac{d}{dz}X(z)$
Multiply by n^2	$n^2x[n]$	$z\dfrac{d}{dz}X(z)+z^2\dfrac{d^2}{dz^2}X(z)$
Multiply by Exponential	$a^n x[n],\quad a$ real or complex	$X(z/a),\quad a$ real or complex
Multiply by Sine	$\sin(\Omega_o n)x[n]$	$\dfrac{j}{2}\left[X(e^{j\Omega_o}z)-X(e^{-j\Omega_o}z)\right]$
Multiply by Cosine	$\cos(\Omega_o n)x[n]$	$\dfrac{1}{2}\left[X(e^{j\Omega_o}z)+X(e^{-j\Omega_o}z)\right]$
Summation (Causal Signal)	$\sum_{i=0}^{n}x[i]$	$\dfrac{z}{z-1}X(z)$
Convolution in Time	$x[n]*h[n]$	$X(z)H(z)$
Initial-Value Theorem	$x[0]=\lim_{z\to\infty}[X(z)]$ $x[1]=\lim_{z\to\infty}[zX(z)-zx[0]]$ $x[q]=\lim_{z\to\infty}[z^N X(z)-z^q x[0]-z^{q-1}x[1]-\cdots-zx[q-1]]$	
Final-Value Theorem	If $X(z)$ is rational and the poles of $(z-1)X(z)$ are inside unit circle Then $\lim_{n\to\infty}x[n]=[(z-1)X(z)]_{z=1}$	

Ters z-dönüşümleri için ifadeyi çarpanlarına ayırma ve tablo kullanımı:

İfade önce z ile bölünür, kesirlerine ayrıldıktan sonra z ile çarpılır.

$$\boxed{Y(z)=\frac{z+1}{z^2+\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}}$$

İfadesinin ters z-dönüşümünü hesaplayın.

$Y(z)$ 'yi z ile böl

$$\boxed{\frac{Y(z)}{z}=\frac{z+1}{z^3+\frac{3}{4}z^2+\frac{1}{8}z}}$$

$Y(z)/z$ için "residue" Matlab komutu

```
[r,p,k]=residue([1 1],[1 0.75 0.125 0])

r =                  p =                  k = []
    4                  -0.5000
  -12                  -0.2500
    8                   0
```

$$\boxed{\frac{Y(z)}{z}=\frac{4}{z+\frac{1}{2}}-\frac{12}{z+\frac{1}{4}}+\frac{8}{z}}$$

$Y(z)/z$ ifadesini z ile çarp

$$\boxed{\frac{Y(z)}{z} = \frac{4}{z+\frac{1}{2}} - \frac{12}{z+\frac{1}{4}} + \frac{8}{z}} \Rightarrow \boxed{Y(z) = \frac{4z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{12z}{z+\frac{1}{4}} + 8}$$

Z-Dönüşüm tablosundan;

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = 4(-\tfrac{1}{2})^n u[n] - 12(-\tfrac{1}{4})^n u[n] + 8\delta[n]}$$

Matlab Uygulamaları

Örnek-1:

$$G(z)=H(z)/z=\frac{3z-1}{z^2-3z+2}$$

numerator vector [3 –1]

dominator vector [1 –3 2].

```
» [r,p,k]=residue([3 -1],[1 -3 2])

r =

    5
   -2

p =

    2
    1

k =

    []
```

$$G(z)=\frac{3z-1}{z^2-3z+2}=\frac{5}{z-2}+\frac{-2}{z-1}$$

$$H(z)=zG(z)=\frac{z(3z-1)}{z^2-3z+2}=\frac{5z}{z-2}+\frac{-2z}{z-1}$$

Örnek-2: $$G(z) = H(z)/z = \frac{2z^2+3z-1}{z^2-3z+2}$$

```
» [r,p,k]=residue([2 3 -1],[1 -3 2])

r =
    13
    -4

p =
     2
     1

k =
     2
```

$$G(z) = \frac{2z^2+3z-1}{z^2-3z+2} = \frac{13}{z-2} + \frac{-4}{z-1} + 2$$

$$H(z) = zG(z) = \frac{z(2z^2+3z-1)}{z^2-3z+2} = \frac{13z}{z-2} + \frac{-4z}{z-1} + 2z$$

Örnek-3: $$G(z) = H(z)/z = \frac{7z^3 + 2z^2 + 3z - 1}{z^2 - 3z + 2}$$

```
» [r,p,k]=residue([7 2 3 -1],[1 -3 2])

r =
    69
   -11

p =
     2
     1

k =
     7    23
```

$$G(z) = \frac{7z^3 + 2z^2 + 3z - 1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{69}{z-2} + \frac{-11}{z-1} + 7z + 23$$

$$H(z) = \frac{69z}{z-2} + \frac{-11z}{z-1} + 7z^2 + 23z$$

Örnek-4:

$$G(z)=H(z)/z=\frac{2z^2+3z-1}{z^3-5z^2+8z-4}=\frac{2z^2+3z-1}{(z-1)(z-2)^2}$$

```
» [r,p,k]=residue([2 3 -1],[1 -5 8 -4])

r =
   -2.0000
   13.0000
    4.0000

p =
    2.0000
    2.0000
    1.0000

k =
     []
```

$$G(z)=\frac{2z^2+3z-1}{z^3-5z^2+8z-4}=\frac{2z^2+3z-1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{-2}{z-2}+\frac{13}{(z-2)^2}+\frac{4}{z-1}$$

$$H(z)=\frac{2z^2+3z-1}{z^3-5z^2+8z-4}=\frac{2z^2+3z-1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{-2z}{z-2}+\frac{13z}{(z-2)^2}+\frac{4z}{z-1}$$

Z-Dönüşüm Özellikleri

Doğrusallık:

$$\boxed{ax[n] + by[n] \Longrightarrow aX(Z) + bY(Z)}$$

Zamanda Öteleme: $x[n] = 0,\ n < 0$ nedensel

$$\boxed{x[n] \leftrightarrow X(z), \qquad x[n-q] \leftrightarrow z^{-q}X(z)}$$

İspat: $X(z) = x[0]z^0 + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \ldots$ $\qquad X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$

$$Z\{x[n-q]\} = \underbrace{0z^0 + 0z^{-1} + \ldots + 0z^{-q+1}}_{=0 \quad \text{(nedensel)}} + x[0]z^{-q} + x[1]z^{-q-1} + \ldots$$

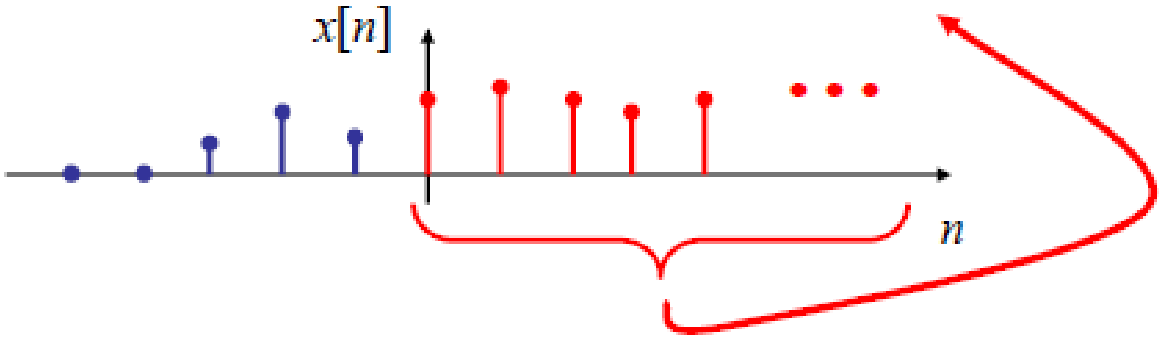
$$= x[0]z^0z^{-q} + x[1]z^{-1}z^{-q} + x[2]z^{-2}z^{-q} + \ldots$$

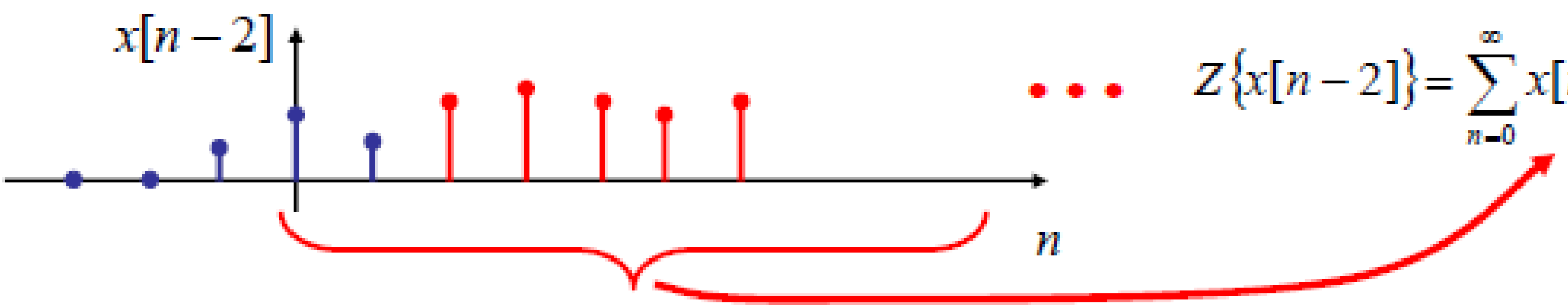
$$= z^{-q}\underbrace{\left[x[0]z^0 + x[1]z^{-1} + \ldots\right]}_{= X(z)}$$

Nedensel olmayan sinyaller için zamanda öteleme:

$x[n]$ nedensel değil $\qquad x[n] \neq 0 \quad n < 0$

$$x[n] \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$





$$Z\{x[n-2]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-2] z^{-n}$$

$$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z)+x[-1]$$

$$x[n-2] \leftrightarrow z^{-2}X(z)+x[-1]z^{-1}+x[-2]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Genelleştirilirse:

$$\boxed{x[n-q] \leftrightarrow z^{-q}X(z)+x[-1]z^{-q+1}+x[-2]z^{-q+2}+\ldots+z^{-1}x[-q+1]+x[-q]}$$

İspat q=2 için;

$$Z\{x[n-q]\}=x[-2]z^{0}+x[-1]z^{-1} \quad + \quad x[0]z^{-2}+x[1]z^{-3}+\ldots$$

$$=\underbrace{x[-2]z^{0}+x[-1]z^{-1}}_{\text{Başlangıç değerleri}} \quad + \quad z^{-2}\underbrace{\left(x[0]z^{0}+x[1]z^{-1}+\ldots\right)}_{X(z)}$$

Konvolüsyon:

$$\boxed{x[n]*h[n] \leftrightarrow X(z)H(z)}$$

Z-Dönüşümleri ile Fark Denklemlerinin Çözümü

Ayrık-zaman bir sistemin fark denklem çözümü;

-Başlangıç şartı mevcut (Z-dönüşümü ile fark denkleminin çözümü)
-Sıfır başlangıç şartı için (Transfer fonksiyonu)

1. Dereceden fark denklem çözümü:

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

$$\text{IC} = y[-1]$$

$$x[n] \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

İstenen: $y[n] \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$Z\{y[n] + ay[n-1]\} = Z\{bx[n]\}$$

Doğrusallık

$$\underbrace{Z\{y[n]\}}_{Y(z)} + aZ\{y[n-1]\} = b\underbrace{Z\{x[n]\}}_{X(z)}$$

Zamanda öteleme var???

$$Z\{y[n-1]\} = z^{-1}Y(z) + y[-1]$$

$$Y(z)+a\left[z^{-1}Y(z)+y[-1]\right]=bX(z)$$

Amaç: ifadede z^{-1} li terim bırakmamak

$$Y(z)=\frac{-ay[-1]}{1+az^{-1}}+\frac{b}{1+az^{-1}}X(z)$$

z/z ile çarp

$$Y(z)=-ay[-1]\frac{z}{z+a}+\frac{bz}{z+a}X(z)$$

Transfer Fonksiyonu $\boxed{H(z)=\frac{bz}{z+a}}$

$$y[n]=-ay[-1](-a)^n u[n]+Z^{-1}\{H(z)X(z)\}$$

Başlangıç şartları etkisi
Geçici durum

Sıfır başlangıç değeri

Örnek:

$$Y(z) = -ay[-1]\frac{z}{z+a} + \frac{bz}{z+a}X(z)$$

$$x[n] = u[n] \quad \leftrightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Birim basamak

$$Y(z) = \frac{-ay[-1]z}{z+a} + \left(\frac{bz}{z+a}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$Y(z) = \frac{-ay[-1]z}{z+a} + \frac{\left(\frac{ab}{a+1}\right)z}{z+a} + \frac{\left(\frac{b}{a+1}\right)z}{z-1}$$

$$y[n] = -ay[-1](-a)^n + \frac{b}{a+1}\left[a(-a)^n + (1)^n\right] \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Başlangıç değerlerinin etkisi

1.terim Geçici Cevap

2.terim Kararlı Hal Cevabı