Gauss ve Gauss–Jordan İndirgeme Metodları

Tanım 1.60 Yukarıdaki teoremlerde izah edilen; bir lineer sistemin ek matrisi $[A \vdots B]$ yi satır eşelon forma getirme yöntemine Gauss indirgeme metodu; indirgenmiş satır eşelon forma getirme yöntemine de Gauss-Jordan indirgeme metodu denir.

Gauss indirgeme metodu iki adımdan oluşur:

Adım.1. $[A \vdots B]$ ek matrisinin satır eşelon formdaki $[C \vdots D]$ matrisine indirgenmesi (dönüştürülmesi).

Adım.2. $[C \vdots D]$ den yararlanarak çözümün bulunması.

Örnek 1.61 : ($n \times n$ tipi için)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_3 & = & 3 \end{array}\right\} \text{ ek matris } [A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 3 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi satır–eşelon forma çevirirsek:

$$[C \vdots D] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. (Kontrol ediniz). Daha sonra denklemi çözeriz:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_2 = 2 - x_3 = -1, x_1 = 9 - 3x_3 - 2x_2 = 9 - 9 + 2 = 2$$

Çözüm: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3.$

Örnek 1.62

$$[C \vdots D] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \text{ olsun. O zaman:}$$

$$\begin{aligned}
x_4 &= 9 - 2x_5 \\
x_3 &= 7 - 2x_4 - 3x_5 = 7 - 2(9 - 2x_5) - 3x_5 = -11 + x_5 \\
x_2 &= 7 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 7 - 2(-11 + x_5) - 3(9 - 2x_5) + x_5 = 2 + 5x_5 \\
x_1 &= 6 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_5 - 5x_5 = -1 - 10x_5 \\
x_5 &= \text{ herhangi bir reel sayı}
\end{aligned}$$

Buradan, bütün çözümler şu şekilde yazılır: (Sonsuz çözüm vardır)

Örnek 1.63

$$[C\vdots D] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. $CX = D$ nin çözümü yoktur. Çünkü, son satırdan: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$ çelişkisi vardır.

Örnek 1.64

$$[C\vdots D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$ olsun. Çözüm: $x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 7, x_4 = 8$.

Örnek 1.65

$$[C\vdots D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{2} & \vdots & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan $x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5, x_1 = \frac{3}{2} - x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_5$ elde edilir. x_2, x_3, x_5 herhangi reel sayılardır. O halde genel çözüm: (r, s, t : reel sayılar)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - r - 2s + \frac{5}{2}t \\ x_2 &= r \\ x_3 &= s \\ x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

Örnek 1.66 Aşağıdaki lineer sistemi hem Gauss hem de Gauss–Jordan yöntemi ile çözelim.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &=& 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &=& -2 \end{array} \right\} \text{ Ek matris: } [A\vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 6 \\ 2 & -3 & 2 & \vdots & 14 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Ek matrisi satır–eşelon forma getirelim:

$$\xrightarrow[S_3 \leftarrow (-3)S_1 + S_3]{S_2 \leftarrow (-2)S_1 + S_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Sonra: } S_2 \longleftarrow -\frac{S_2}{5}]{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \leftarrow (7)S_2 + S_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3 \leftarrow \frac{S_3}{10}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Buradan; $x_3 = 3$, $x_2 = 4 - 2x_3 = -2$, $x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 = 1$ bulunur.

Gauss–Jordan metodu için matrisi indirgenmiş satır eşelon forma getirelim:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \longleftarrow (-2)S_2 + S_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[S_2 \leftarrow (-2)S_3 + S_2]{S_1 \leftarrow S_3 + S_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Buradan $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ bulunur.

Homojen Sistemler

m denklem ve n bilinmeyenden oluşan $AX = 0$ homojen sistemini düşünelim.

Örnek 1.67 Ek matrisi aşağıda verilen homojen sistemi düşünelim.

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Bu matris indirgenmiş satır eşelon formda olduğu için, bütün çözümler:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -2r \\ x_2 = s \\ x_3 = -3r \\ x_4 = -4r \\ x_5 = r \end{array}\right\} (r \text{ ve } s \text{ herhangi iki sayı})$$

Teorem 1.68 m denklemli, n bilinmeyenli bir homojen sistemde eğer $m < n$ ise bu sistemin her zaman bir trivial olmayan çözümü vardır.

İspat: (Atlıyoruz.)

Örnek 1.70 $\left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 0 \\ x_1+x_4 &=& 0 \\ x_1+2x_2+x_3 &=& 0 \end{array}\right\}$ ek matrisi: $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Bu matrisin satır eşdeğeri:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{ olup çözümler: } \left\{\begin{array}{l} x_1=-r, \\ x_2=r \\ x_3=-r, \\ x_4=r \text{ (reel sayı)} \end{array}\right\}$$

Örnek 1.72 Aşağıdaki lineer denklem sisteminde a'nın hangi değerleri için **(a)** Hiç çözüm yo **(b)** Tek çözüm vardır. **(c)** Sonsuz sayıda çözüm vardır.

$$\begin{array}{lcl} x_1+x_2-x_3 &=& 2 \\ x_1+2x_2+x_3 &=& 3 \\ x_1+x_2+(a^2-5)x_3 &=& a \end{array}$$

Çözüm: Gauss indirgeme metodunu kullanalım:

$$[A\vdots B]=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right] \xrightarrow[S_3\leftarrow(-1)S_1+S_3]{S_2\leftarrow(-1)S_1+S_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

Şimdi $a=2$ ise $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ elde edilir ki sonsuz çözüm vardır. $a=-2$ ise

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

elde edilir ki çözüm yoktur. $a \neq \mp 2$ ise tek çözüm vardır.

Ödev: Bir önceki soruyu aşağıdaki sistemler için çözünüz.

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a^2 - 1)x_3 & = & a + 1 \end{array}\right\}$ (b) $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & = & 3 \\ x_1 + (a^2 - 8)x_2 & = & a \end{array}\right\}$

(c) $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2 - 5)x_3 & = & a \end{array}\right\}$

1.6 Elementer Matrisler ve A^{-1} in Bulunması

Tanım 1.73 I_n matrisine I.tip, II.tip ve III.tip bir elementer satır veya sütun işleminin sadece bir defa uygulanması ile edilen bir $n \times n$ A matrisine, sırasıyla I.tipte, II.tipte, III.tipte elementer matris denir.

Örneğin;

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ I.tipte elementer matris. Çünkü } I_3 \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} E_1$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ II.tipte elementer matris. Çünkü } I_3 \xrightarrow{S_2 \leftarrow (-2)S_2} E_2$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ III.tipte elementer matris. Çünkü } I_3 \xrightarrow{S_1 \leftarrow (2)S_2 + S_1} E_3$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ III.tipte elementer matris. Çünkü } I_3 \xrightarrow{K_3 \leftarrow (3)K_1 + K_3} E_3$$

Teorem 1.74 A $m \times n$ bir matris olsun A üzerinde I.tip, II.tip veya III.tip bir elementer satır (sütun) işlemi yapılarak B matrisi elde edilmiş olsun. E matrisi de I_m'ye (I_n'ye) aynı elementer satır (sütun) işlemi uygulayarak elde edilen matris olsun. O zaman $B = EA$ dır. ($B = AE$ dir).

Örnek 1.75 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftarrow (-2)S_3 + S_1} B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Aynı elementer satır işlemini birim matrise uygulayalım:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftarrow (-2)S_3 + S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \text{ diyelim.}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = B$$

olduğu görülür.

A^{-1} in Bulunması İçin Bir Yöntem

Örnek 1.84 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım:

$$[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 \longleftarrow (-5)S_1 + S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2 \longleftarrow \frac{S_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & \vdots & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \longleftarrow (-1)S_2 + S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & \vdots & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & \vdots & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3 \longleftarrow \frac{S_3}{-4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & \vdots & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & \vdots & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2 \longleftarrow \frac{-3}{2} S_3 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & \vdots & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1 \longleftarrow \frac{1}{2} S_3 + S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Buradan $A^{-1} = \begin{bmatrix} 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 5/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$ bulunur. Yani $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$ olmalıdır. (Kontrol ediniz.)

Teorem 1.85 $n \times n$ A matrisi singüler $\Longleftrightarrow$ A matrisi bir satırı tamamen sıfır olan bir B matrisine satır eşdeğerdir.

Örnek 1.86 Aynı yöntemle $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulmaya çalışalım.

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3 \longleftarrow (-5)S_1 + S_3]{S_2 \longleftarrow -S_1 + S_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_2 \longleftarrow \frac{S_2}{-4}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[S_3 \longleftarrow 12S_2 + S_3]{S_1 \longleftarrow -2S_2 + S_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Burada işlemi durduralım. Çünkü A matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine satır eşdeğerdir. Yani A nın tersi yoktur.

Teorem 1.88 A ve B $n \times n$ matrisler ve $AB = I_n$ olsun. O zaman $BA = I_n$ dir. Yani $B = A^{-1}$ dir.

İspat: Önce $AB = I_n \Longrightarrow A'$nın singüler olmadığını göstereceğiz. Farzedelim ki A singüler olsun. O zaman A, bir satırı tamamen sıfır olan bir C matrisine satır eşdeğerdir. Yani $C = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$ şeklindedir (E_i ler elementer matris). O halde

$$\begin{aligned} CB = E_k E_{k-1} \cdots E_1 AB &\Longrightarrow AB, CB'\text{ye satır eşdeğer} \\ &\Longrightarrow CB'\text{nin bir satır tamamen sıfır olup} AB \text{ singülerdir} \end{aligned}$$

Şimdi $AB = I_n$ olduğundan I_n'in singüler olduğu çelişkisi bulunur. Yani A singüler değildir. O zaman A^{-1} mevcuttur. $AB = I_n$ eşitliğinden $(A^{-1})AB = A^{-1}I_n \Longrightarrow B = A^{-1}$ elde edilir. $\square$