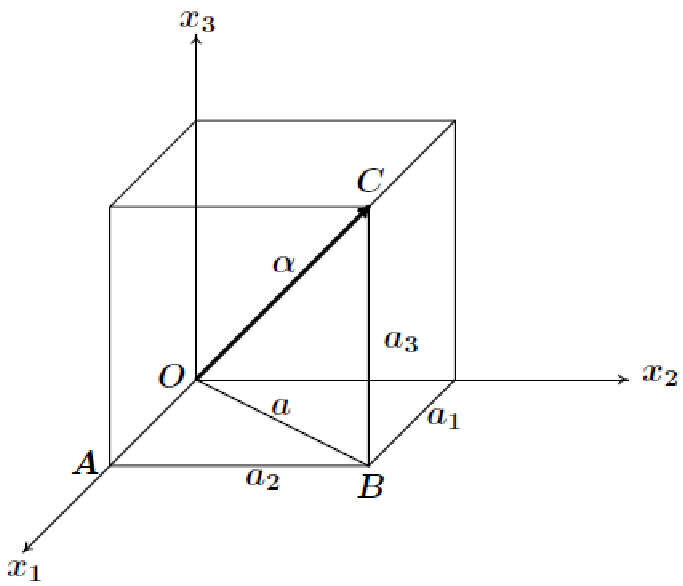
İç Çarpım Uzayları

3.1 $\mathbb{R}^3$ ün Standart İç Çarpımı

$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ olsun. Burada $\mathbb{R}^3$ uzayını bildiğimiz 3–boyutlu kartezyen düzlem olarak düşünüyoruz ve aşağıda inceleyeceğimiz kavramları $\mathbb{R}^n$ uzayına ve genel olarak vektör uzaylarına genelleştireceğiz. Şimdi, $\mathbb{R}^3$ de α nın, $|\alpha|$ ile gösterilen, uzunluğunu (veya büyüklüğünü) hesaplayalım.



Şekil 3.1: $\mathbb{R}^3$'de bir vektörün uzunluğu.

Şekil 3.1'de a uzunluğunu bulmak için OAB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 \Longrightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

elde edilir. Daha sonra OCB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|\alpha|^2 = a^2 + a_3^2 \Longrightarrow |\alpha| = \sqrt{a^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

elde edilir. Eğer $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ise $\alpha - \beta = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$ olup

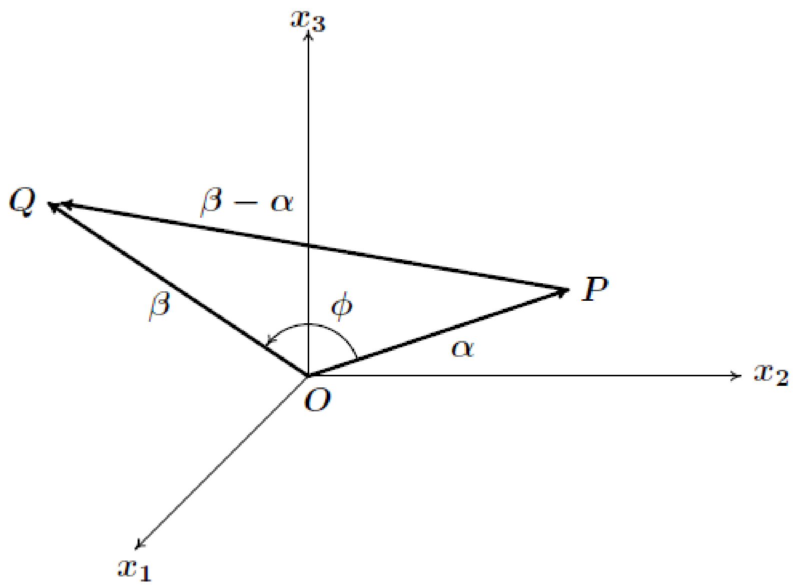
$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Bu α ile β arasındaki uzaklıktır. Aynı zamanda $\mathbb{R}^3$ de $P(a_1, a_2, a_3)$ ile $Q(b_1, b_2, b_3)$ noktaları arasındaki uzaklıktır.

Örnek 3.1 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ise $|\alpha| = \sqrt{14}$ ve $|\alpha - \beta| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{30}$ dur.

$\mathbb{R}^3$ de bir vektörün yönü bu vektörün x_1-,x_2- ve x_3- eksenleri ile yaptığı açıların kosinüsleri verilerek belirtilebilir. Bunlara yön (doğrultman) kosinüsleri denir.

Şimdi iki vektör arasındaki açıyı bulalım. $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ kabul edelim.



Şekil 3.2: $\mathbb{R}^3$'de iki vektör arasındaki açı

Şekil 3.2'de gösterildiği gibi; OPQ üçgeninde kosinüs kuralı uygulanırsa:

$$|PQ|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| \cdot \cos\phi$$

eşitliği geçerlidir. $|PQ| = |\beta - \alpha|$ olduğundan

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\beta - \alpha|^2}{2|\alpha||\beta|} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2}{2|\alpha||\beta|} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\alpha||\beta|} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.2 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ arasındaki açı ϕ nedir?

Çözüm:

$$\cos\phi = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \text{ olup } \phi = 60^{\circ} \text{ dir.}$$

Tanım 3.3 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ iki vektör olsun. $\mathbb{R}^3$'de α ile β'nın <u>standart iç çarpımı</u> $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ sayısı olarak tanımlanır ve $\langle \alpha, \beta \rangle$ (veya $\alpha \cdot \beta$) şeklinde gösterilir. Bu durumda

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad \text{ve} \quad \cos\phi = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|}, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\alpha \text{ ve } \beta \text{ diktir (ortogonaldir)} \iff \langle \alpha, \beta \rangle = 0.$$

Teorem 3.4 $\mathbb{R}^3$'deki standart iç çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(a) $\alpha \neq \theta$ ise $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ dir.

(b) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$

(c) $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$

(d) $\langle c\alpha, \beta \rangle = c\,\langle \alpha, \beta \rangle$

Not 3.5 $\mathbb{R}^3$' deki $\langle \alpha, \beta \rangle$ standart iç çarpımına aynı zamanda <u>skaler çarpım</u> (veya <u>nokta çarpım</u>) denir.

3.2 İç Çarpım Uzayları

Tanım 3.6 V bir vektör uzayı olsun. Her $\alpha, \beta \in V$ çiftini bir $\langle \alpha, \beta \rangle$ reel sayısına eşleyen ve aşağıdaki şartları sağlayan kurala V nin bir <u>iç çarpımı</u> denir.

(a) $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0 \quad$ (her $\alpha \neq \theta_V$ için)

(b) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \quad$ (her $\alpha, \beta \in V$ için)

(c) $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle \quad$ (her $\alpha, \beta, \gamma \in V$ için)

(d) $\langle c\alpha, \beta \rangle = c\,\langle \alpha, \beta \rangle \quad$ (her $\alpha, \beta \in V$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için)

Örnek 3.7 $\mathbb{R}^3$' de daha önce tanımlanan standart iç çarpım bir iç çarpımdır.

Örnek 3.8 $\mathbb{R}^n$'de standart iç çarpımı şöyle tanımlayabiliriz:

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ olsun. } \langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Örneğin $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise $\langle \alpha, \beta \rangle = 3 - 4 - 6 + 4 = -3$

Örnek 3.11 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ olsun. $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 3a_2b_2$ olarak tanımlayalım. Bu kural $\mathbb{R}^2$ nin bir iç çarpımıdır.

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = a_1^2 - 2a_1a_2 + 3a_2^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 2a_2^2 = (a_1 - a_2)^2 + 2a_2^2$$

elde edilir. Şimdi, eğer $\alpha \neq \theta$ ise (yani $a_1 \neq 0$ veya $a_2 \neq 0$ ise) $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ olduğu görülür. Diğer üç özellik de sağlanır. (Gösteriniz)

Tanım 3.15 Üzerinde bir iç çarpım tanımlı olan uzaya bir <u>iç çarpım uzayı</u> denir. Eğer bu uzay sonlu–boyutlu ise <u>Öklidyen uzay</u> denir. Bir iç çarpım uzayında α vektörünün <u>uzunluğu</u> (veya <u>vektör normu</u>)

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

olarak tanımlanır. (Yani bir vektörün normu, kendisi ile çarpımının kareköküdür.)

Soru: $\|\theta\| = 0$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: $\theta + \theta = \theta$)

Çözüm:

$$\langle \theta, \theta \rangle = \langle \theta + \theta, \theta \rangle = \langle \theta, \theta \rangle + \langle \theta, \theta \rangle$$

olup eşitliğin her iki tarafından $\langle \theta, \theta \rangle$ sayısı sadeleşirse $\langle \theta, \theta \rangle = 0$ elde edilir. Uzunluk (norm) tanımından: $\|\theta\| = \sqrt{\langle \theta, \theta \rangle} = 0$ elde edilir.

Soru: V bir iç çarpım uzayı ise her $\alpha \in V$ için $\langle \alpha, \theta \rangle = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\alpha \in V$ için

$$\langle \alpha, \theta \rangle = \langle \alpha, \theta + \theta \rangle = \langle \alpha, \theta \rangle + \langle \alpha, \theta \rangle$$

olup eşitliğin her iki tarafından $\langle \alpha, \theta \rangle$ sayısı sadeleşirse $\langle \alpha, \theta \rangle = 0$ elde edilir.

Teorem 3.16 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliği) α ve β bir V iç çarpım uzayının elemanları iseler

$$\boxed{\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2}$$

Örnek 3.17 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^3$ de iki vektör olsun.

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 1(-3) + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -5, \quad \|\alpha\| = \sqrt{14}, \quad \|\beta\| = \sqrt{17}$$

olup $\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2$ olduğu görülür.

Tanım 3.18 α ve β bir V iç çarpım uzayında iki vektör olsun. Cauchy–Schwarz eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{\langle \alpha, \beta\rangle^2}{\|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2} \leqslant 1 \quad \text{veya} \ -1 \leqslant \frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \leqslant 1$$

Bu durumda

$$\cos\phi = \frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

olacak şekilde bir tek ϕ açısı vardır. Bu açıya α ile β vektörleri arasındaki açı denir.

Sonuç 3.19 (Üçgen Eşitsizliği) Eğer α ve β bir iç çarpım uzayında iki vektör ise

$$\boxed{\|\alpha + \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|} \quad \text{dır.}$$

Tanım 3.21 V bir iç çarpım uzayı olsun. $\alpha, \beta \in V$ vektörleri arasındaki uzaklık

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.22 V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\langle \alpha, \beta\rangle = 0$ ise α ile β vektörlerine ortogonaldirler (diktirler) denir.

Örnek 3.23 $\mathbb{R}^4$ de standart iç çarpıma göre $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörleri ortogonaldir, çünkü $\langle \alpha, \beta\rangle = 0$ dır.

Not 3.25 Bir V iç çarpım uzayındaki θ_V vektörü her vektöre ortogonaldir. Ayrıca iki vektör arasındaki açı $\dfrac{\pi}{2}$ ise bu vektörler ortogonaldir.

Not 3.26 Bir V iç çarpım uzayındaki bir sabit vektöre ortogonal olan bütün vektörlerin kümesi, V nin bir alt uzayıdır.

Tanım 3.27 V bir iç çarpım uzayı olsun. $S \subseteq V$ olsun. Eğer S deki her iki vektör çifti ortogonal ise S kümesine ortogonaldir denir. Buna ilaveten S deki her vektörün uzunluğu 1 ise (uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir) S kümesine ortonormaldir denir.

Not 3.28 Eğer $\alpha \neq \theta$ ise α ile aynı yönde (yani aralarındaki açı sıfır olacak şekilde) bir birim vektör her zaman vardır. $\beta = \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ olsun. Şimdi

$$\|\beta\| = \sqrt{\langle \beta, \beta\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right\rangle} = \sqrt{\frac{\langle \alpha, \alpha\rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\alpha\|}} = \sqrt{\frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|^2}} = 1$$

olur. Yani β bir birim vektördür. Ayrıca α ile β arasındaki açının kosinüsü 1 dir. Çünkü

$$\cos\phi = \frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|} = \frac{\left\langle \alpha, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right\rangle}{\|\alpha\|} = \frac{\langle \alpha, \alpha\rangle}{\|\alpha\|^2} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|^2} = 1 \Longrightarrow \phi = 0^{o}$$

Yani α ile β aynı yöndedir.

Teorem 3.30 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi bir V iç çarpım uzayında ortogonal olsun ve her k için $\alpha_k \neq \theta$ olsun. O zaman S lineer bağımsızdır.

3.3 Gram–Schmidt Yöntemi

Bu kısımda her Öklidyen V uzayı için aynı zamanda ortonormal bir küme olan bir S bazı elde edilebileceğini göstereceğiz. Böyle bir baza ortonormal baz denir. Böyle bir baz bulmak için kullandığımız yönteme de Gram–Schmidt Yöntemi denir.

Teorem 3.32 (Gram–Schmidt Yöntemi) V bir iç çarpım uzayı ve $\{\theta\} \neq W$ alt uzayı da bazı $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ olan bir alt uzay olsun. O zaman W nun bir $T = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ ortonormal bazı vardır.

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\boxed{\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1\rangle}{\langle \beta_1, \beta_1\rangle}\beta_1} \qquad \boxed{\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1\rangle}{\langle \beta_1, \beta_1\rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2\rangle}{\langle \beta_2, \beta_2\rangle}\beta_2.}$$

$$\boxed{\beta_4 = \alpha_4 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_1\rangle}{\langle \beta_1, \beta_1\rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_2\rangle}{\langle \beta_2, \beta_2\rangle}\beta_2 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_3\rangle}{\langle \beta_3, \beta_3\rangle}\beta_3.}$$

Bu şekilde $T^* = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ ortogonal kümesi bulunur.

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$$

Örnek 3.33 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ olsun. $\mathbb{R}^3$ uzayı için $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ bazını düşünelim. Şimdi S'yi $T = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ ortonormal bazına dönüştürelim.

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1\rangle}{\langle \beta_1, \beta_1\rangle}\beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2/3}{6/9}\begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Şimdi, $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ ortogonal bir bazdır. Her bir β_i'yi bir sabitle çarparsak yine bir ortogonal baz elde ederiz. Yani $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi de $\mathbb{R}^3$ için bir ortogonal bazdır. Ortonormal baz için her bir β_i kendi uzunluğuna bölünür:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

kümesi de $\mathbb{R}^3$'ün bir ortonormal bazıdır.

Örnek 3.38 $V = \mathbb{R}_3$ olsun. W da $S = \{[2\ \ 1\ \ 1], [1\ \ 1\ \ 2]\}$ tarafından doğurulan alt uzay olsun. $\alpha = [5\ \ 3\ \ 4] \in W$ olsun.

$$[5\ \ 3\ \ 4] = 2[2\ \ 1\ \ 1] + 1[1\ \ 1\ \ 2] \Longrightarrow [5\ \ 3\ \ 4]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. α'nın uzunluğu $\|\alpha\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{50}$ dir. S'ye göre koordinat vektörünü kullanırsak $\|\alpha\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ bulunur ki bu yanlıştır; çünkü S, ortonormal olmalıydı. S'yi ortogonal yaparsak (Gram–Schmidt yöntemini kullanarak):

$$\left\{ [2\ \ 1\ \ 1], \left[-\frac{4}{6}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{7}{6}\right] \right\} \text{ veya } \{ [2\ \ 1\ \ 1], [-4\ \ 1\ \ 7] \}$$

bazını buluruz. Bu bazı ortonormal hale getirirsek:

$$T = \left\{ \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{-4}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right] \right\}$$

bulunur. Şimdi, $[\alpha]_T = \begin{bmatrix} \frac{17\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{66}}{6} \end{bmatrix}$ olup (kontrol edin) $\|\alpha\|$'yı bu koordinat vektörüne göre hesaplarsak:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\left(\frac{17\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{66}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1800}{36}} = \sqrt{50}$$

bulunur; ki bu da doğru cevaptır.

Teorem 3.39 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi bir V vektör uzayı için ortonormal bir baz ve $\alpha \in V$ olsun. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $c_i = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$ olmak üzere

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n \text{ dir.}$$

(Bu teorem bir elemanın bir ortonormal baza göre koordinatlarını kolayca bulmamıza yarar.)

Örnek 3.40 $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\}$ $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal bazdır. Bu baza göre $\alpha = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörünün koordinatlarını bulalım. (S nin elemanlarına, sırasıyla, α_1, α_2 ve α_3 diyelim.) Teorem 3.39 kullanılırsa; $i = 1, 2, 3$ için $c_i = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$ hesaplanır:

$$c_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9,$$
$$c_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9,$$
$$c_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9$$

Kontrol edelim:

$$9\alpha_1 + 9\alpha_2 + 9\alpha_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha.$$