Sinyaller ve Sistemler

2. Dereceden Fark Denklemi Çözümü

$$\boxed{y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=b_0x[n]+b_1x[n-1]}$$

Başlangıç şartları: $y[-1]$ & $y[-2]$

$$\boxed{\begin{aligned} Y(z)+a_1\left(z^{-1}Y(z)+y[-1]\right)+a_2\left(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\right) \\ =b_0X(z)+b_1z^{-1}X(z)\end{aligned}}$$

$$Y(z)=\frac{-a_1y[-1]-a_2y[-1]z^{-1}-a_2y[-2]}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}+\underbrace{\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}}_{H(z)}X(z)$$

Başlangıç şartları etkisi

Transfer fonksiyonu
(Frekans Cevabı)

N. Dereceden Fark Denklemi Çözümü

$x[n], x[n\text{-}1], \ldots$

$$\underbrace{y[n]+\sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i]}=\underbrace{\sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i]}$$

$$A(z)=z^N+a_1 z^{N-1}+\ldots+a_{N-1}z+a_N$$

$$B(z)=b_0 z^N+b_1 z^{N-1}+\ldots+b_M z^{N-M}$$

$C(z)=$ Başlangıç şartlarına bağlı

$$Y(z)=\boxed{\frac{C(z)}{A(z)}}+\boxed{\underbrace{\frac{B(z)}{A(z)}}X(z)}$$

Geçici cevap ve
Kararlı hal cevabı

$H(z)$ – transfer fonksiyonu

Başlangıç şartları
etkisi

Ayrık-Zaman Sistem Kararlılığı

$H(z)$ Frekans cevabına sahip bir sistem :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

kararlılık şartı

$H(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ $A(z)$ $\underbrace{p_1, p_2, \dots, p_N}_{H(z)\text{ 'nin kutupları}}$ köklerine sahip

$$H(z) = \frac{B(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)}$$

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] + \dots + h_N[n]$$

Her $h_i[n]$ $(p_i)^n u[n]$ parçası içerir $|p_i| < 1$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty}$$

$\Downarrow$

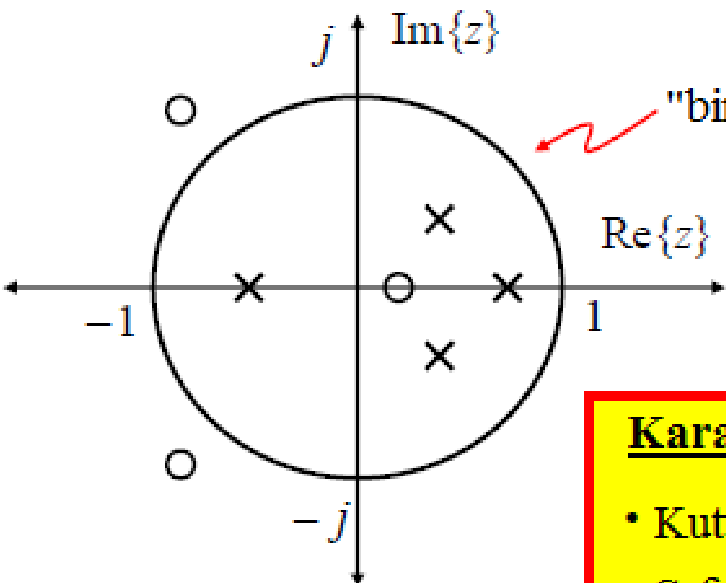
sistem kararlıdır

$$\boxed{|p_i| < 1}$$

$\Downarrow$

sistem kararlıdır

Kutuplar birim çember içinde olmalıdır.



Kararlı sistem:

- Kutuplar birim çember içinde olmalı
- Sıfırlar herhangi bir yerde olabilir

Not: Kökler kompleks ise konjugeyt parçalar oluşur.

DTFT ile Z-Dönüşüm İlişkisi

$$\boxed{H(\Omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}}$$

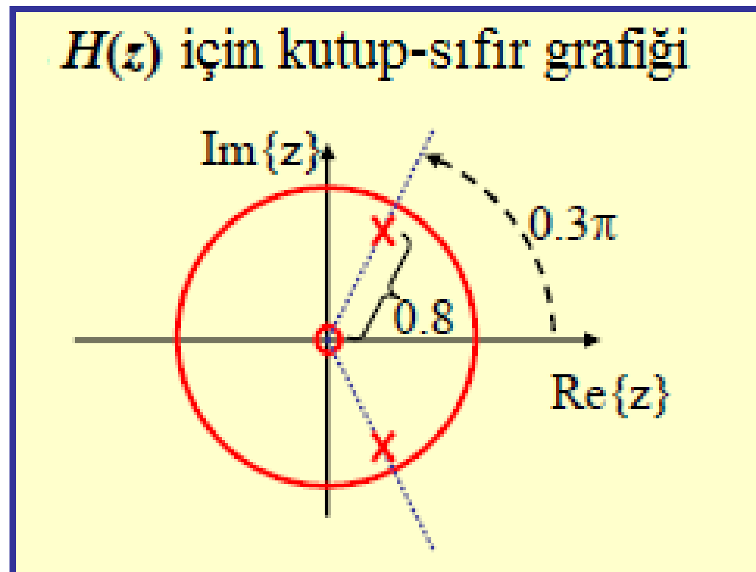
Örnek:

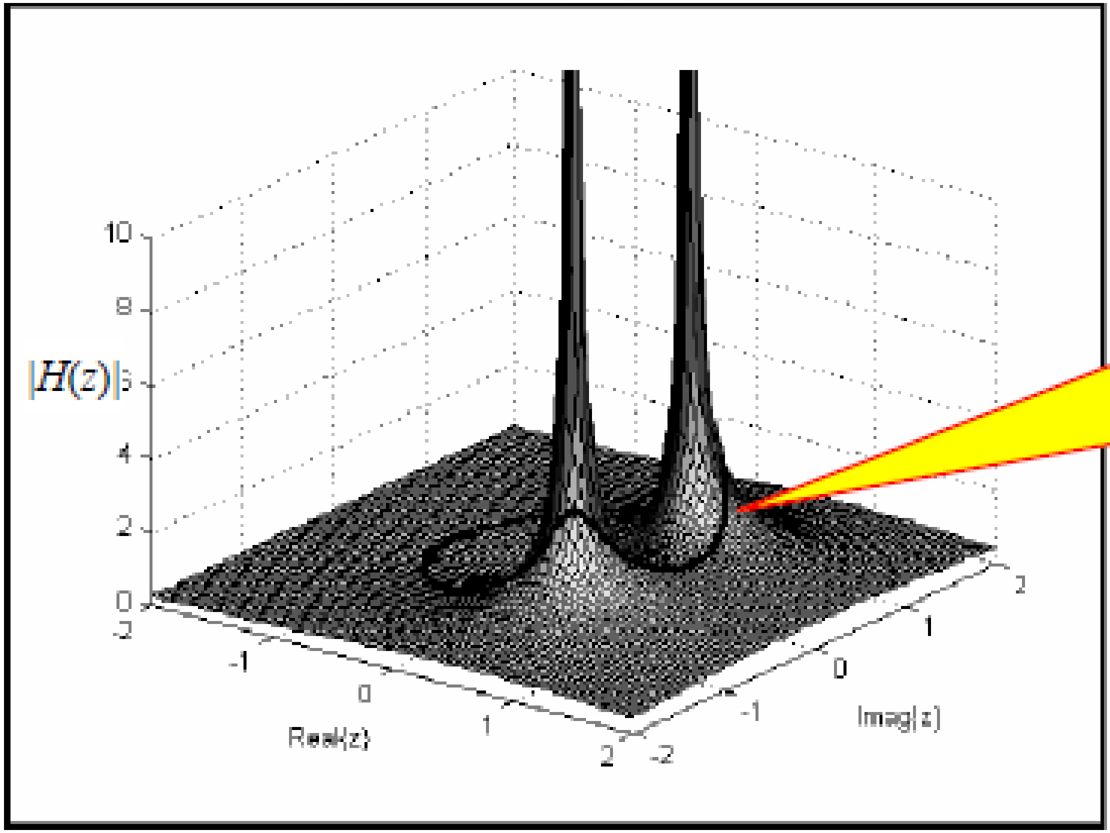
$z = 0 \qquad H(z) = 0$

$$H(z) = \frac{1}{\left(1-0.8e^{j0.3\pi}z^{-1}\right)\left(1-0.8e^{-j0.3\pi}z^{-1}\right)} = \frac{z}{\left(z-0.8e^{j0.3\pi}\right)\left(z-0.8e^{-j0.3\pi}\right)}$$

$z = 0.8e^{\pm j0.3\pi}$

$H(z) = \infty$





Frekans Cevabı:
Birim Çember içinde olan Transfer Fonksiyonuna eşittir

$$H(\Omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$