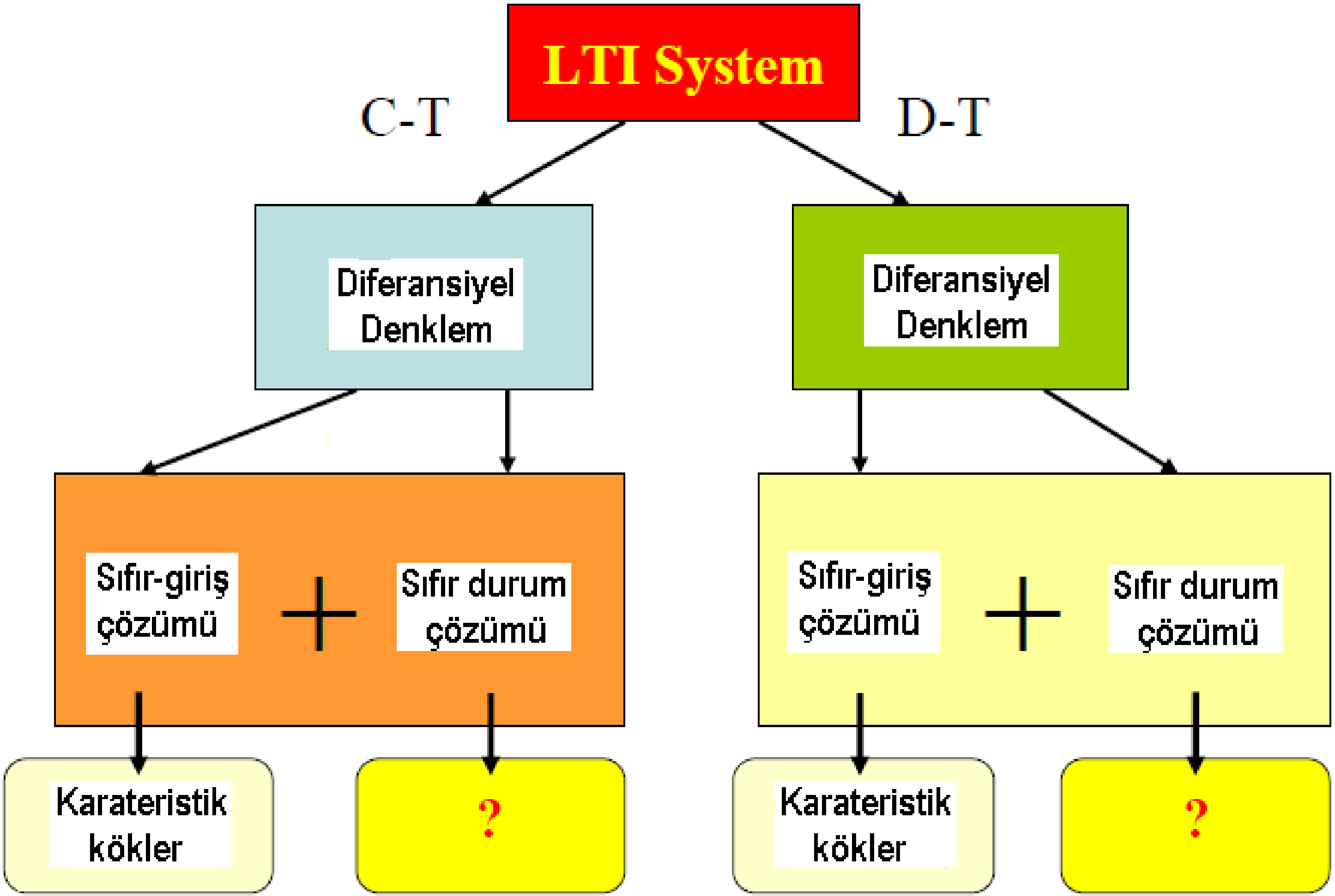
Sinyaller ve Sistemler

Sunu 4

Konvolüsyon



LTI Sistem

Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler (Linear Time Invariant-LTI)

- Bir çok fiziksel işlem LTI olarak tanımlanabilir. (DC motor, filtre devreleri).
- Bu sistemlerin matematiksel modelleri diferansiyel denklemlerle analiz edilebilirler. Tasarımcı için sistemin denetlenebilirliğini mümkün kılar.

Sıfır-Durum Cevabı

Sıfır-Durum Cevabı: Sıfır başlangıç şartlarına sahip bir sistemin özel bir gireşe verdiği cevaptır.

$$y_{ZS}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda$$

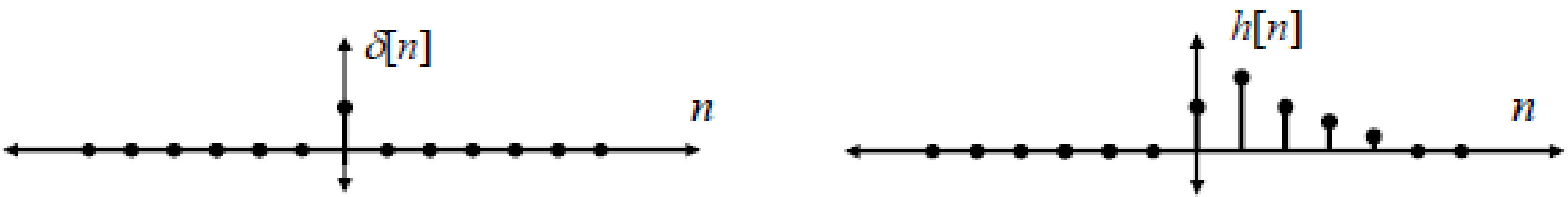
C-T Konvolüsyon

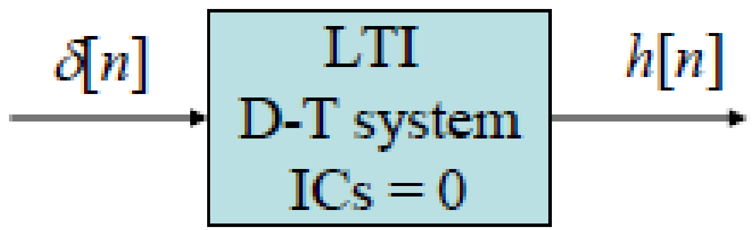
$$y_{ZS}[n] = \sum_{i=1}^{n} h[n-i]x[i]$$

D-T Konvolüsyon

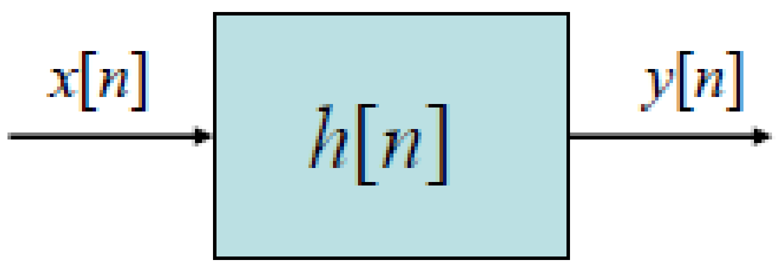
Birim Dürtü Cevabı

Dürtü Cevabı (Impulse response): Sistemi iyi bir şekilde tanımlar ve sistemin davranışını karakterize etmeyi sağlar.





Sembol:



Birim Dürtü Cevabı

1.Dereceden diferansiyel denkleme sahip bir sistem:

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$$

Başlangıç Şartları 0 olan (IC=0) bir sistemde δ[n] girişi için sistem cevabı:

$$h[n] = -ah[n-1] + b\delta[n]$$

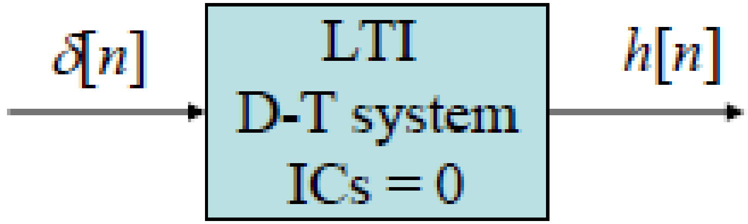
n	$\delta[n]$	$h[n]$
-1	0	$-a\times 0 + b\times 0 = 0$
0	1	$-a\times 0 + b\times 1 = b$
1	0	$-ab + b\times 0 = -ab$
2	0	$-a\times(-ab) = (-a)^2 b$
3	0	$-a\times(-a)^2 b = (-a)^3 b$

Birim dürtü cevabı

$$\boxed{h[n] = b(-a)^n u[n]}$$

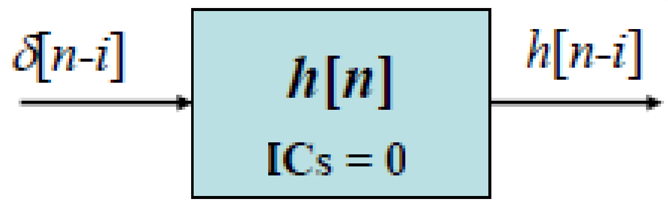
Sıfır-durum cevabı için h[n] nasıl kullanılacak?

D-T Konvolüsyon
(Convolution)

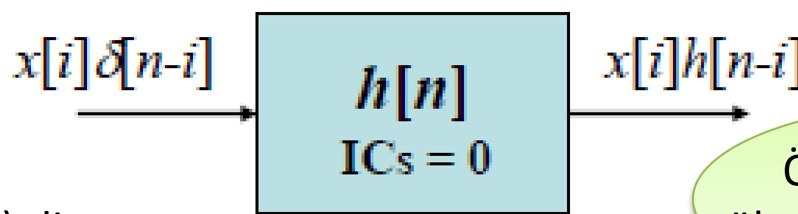


Ötelenmiş girişler ötelenmiş çıkışları verir

1. Adım: Zamanla değişmezlik:



2. Adım: Doğrusallığın çarpım (homojenlik) özelliği:

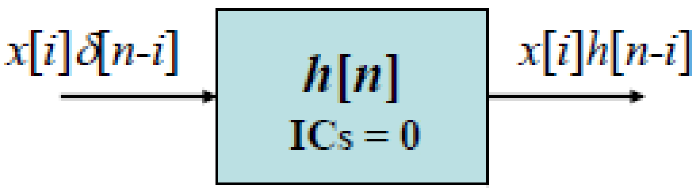


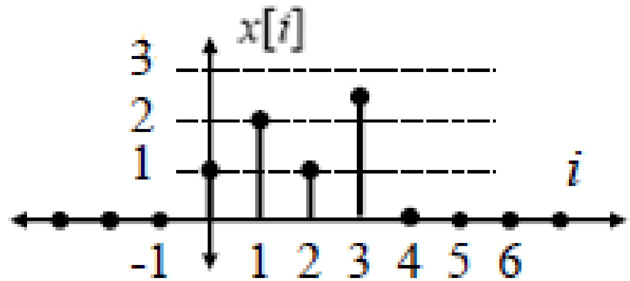
Ölçeklenmiş giriş ölçeklenmiş çıkış verir

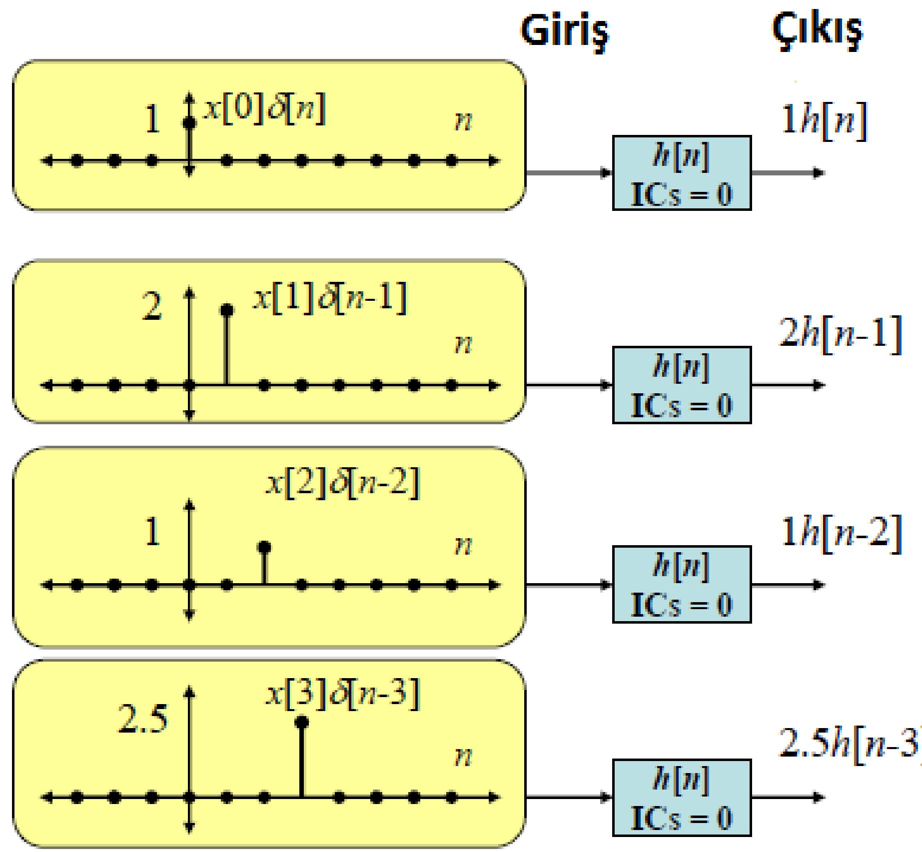
Sistemin a.x_1(t)’ye cevabı a.y_1(t) dir.

D-T Konvolüsyon

Özel bir giriş için (birim dürtü)
2. adımın analizi:



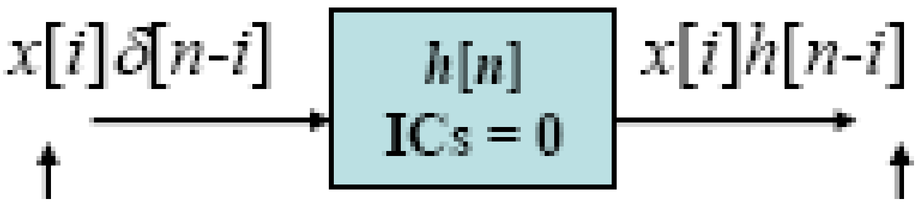




D-T Konvolüsyon

3. Adım: Doğrusallığın toplamsallık özelliği:

Sistemin ($x_1(t) + x_2(t)$)'ye cevabı ($y_1(t) + y_2(t)$)



Her bir *i* için farklı bir giriş → Her bir *i* için farklı bir cevap

Doğrusallığın toplamsallık özelliğini kullanırsak:

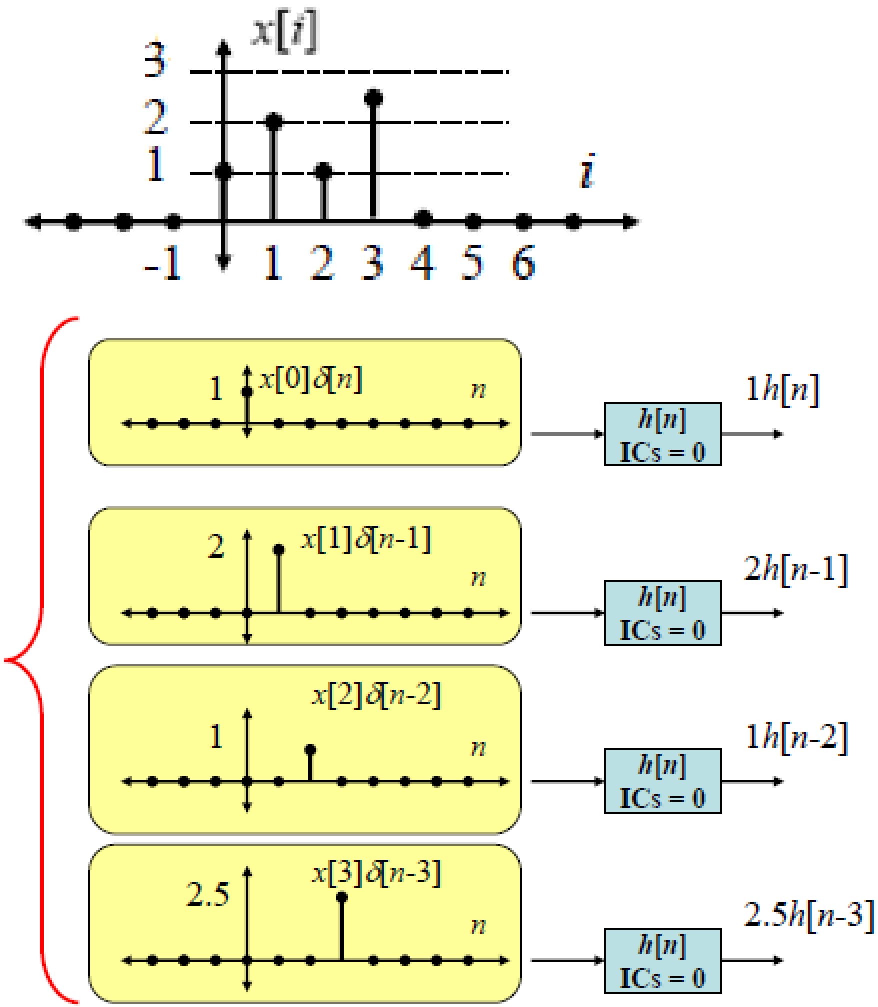
Girişlerin toplamı ⇒ Cevapların toplamı

Giriş: $\boxed{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[n-i]}$ → Çıkış: $\boxed{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i]}$

D-T Konvolüsyon

Özel bir giriş için 3. adım:

$$\boxed{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[n-i]}$$



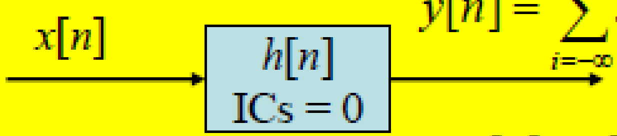
X 'in geciktirilmiş dürtüleri toplamı

x[n]

D-T Konvolüsyon

Giriş : $\boxed{\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[n-i]}_{=x[n]}}$ → **Çıkış :** $\boxed{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i]}$

x[n] girişli bir LTI sisteminin çıkış ifadesini türettik. Gecikmiş dürtülerin lineer kombinasyonudur.



$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i]$$ **KONVOLÜSYON**

$$y[n] = x[n] * h[n]$$ **Gösterimi**

Sistemin sıfır-durum cevabını bulmak için bu ifadeyi kullanacağız.

$$\boxed{y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i]}$$

Konvolüsyon Özellikleri

1- Yer değiştirme:

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

2- Birleşme:

$$x[n]*(v[n]*w[n])=(x[n]*v[n])*w[n]$$

3- Dağılma:

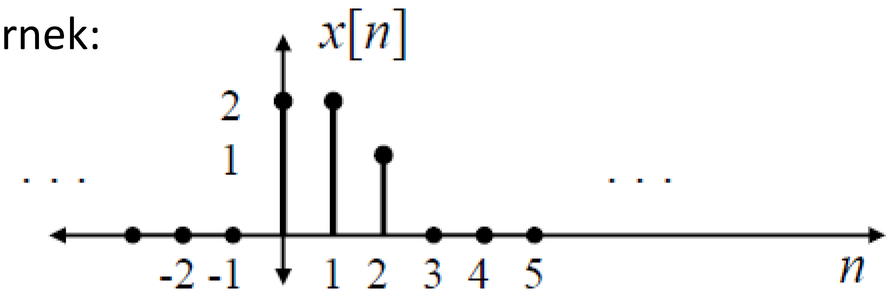
$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

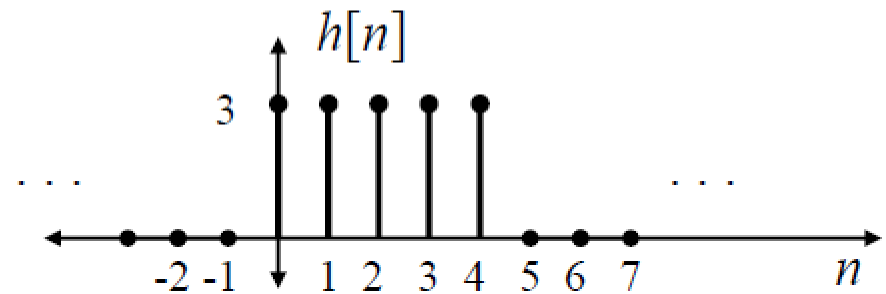
4- Dürtü Konvolüsyonu:

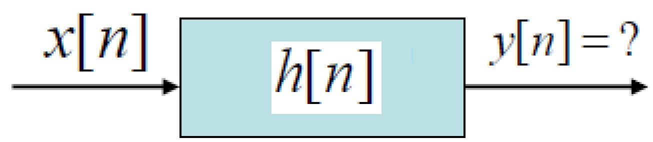
$$x[n]*\delta[n-q]=x[n-q]$$

Örnek

Örnek:







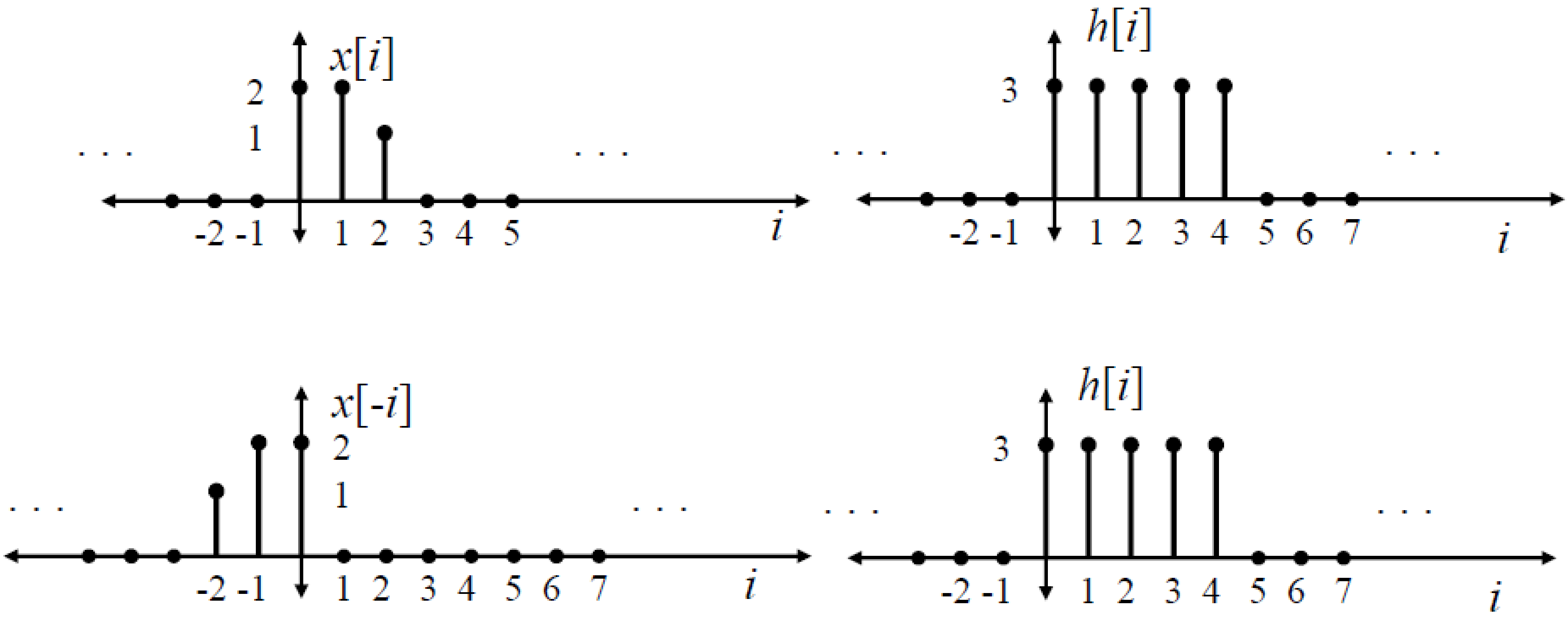
Konvolüsyon Toplamı: $y[n]=x[n]*h[n]$

Çözüm kolaylığı için konvolüsyonun yer değiştirme özelliğini kullanalım!

x[n] daha az bileşene sahip

$$y[n] = \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i]}_{x[n]*h[n]} = \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n-i]}_{h[n]*x[n]}$$

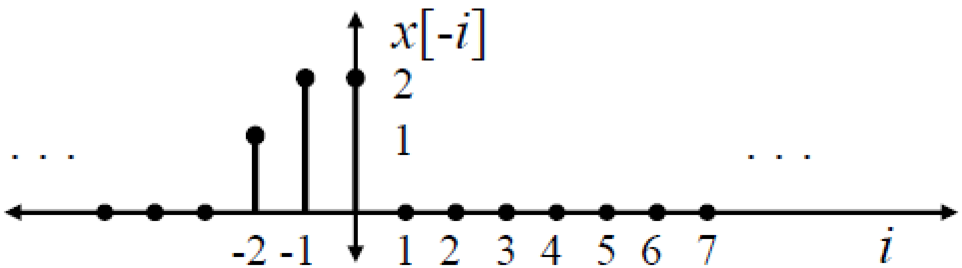
Örnek

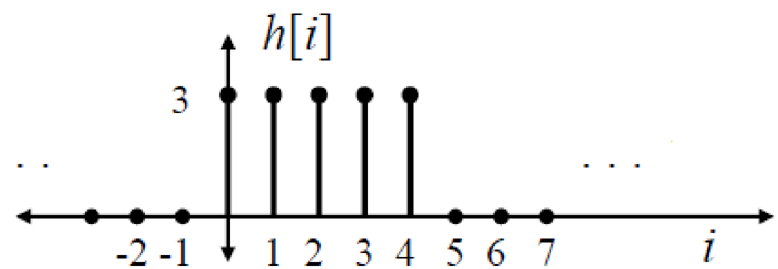


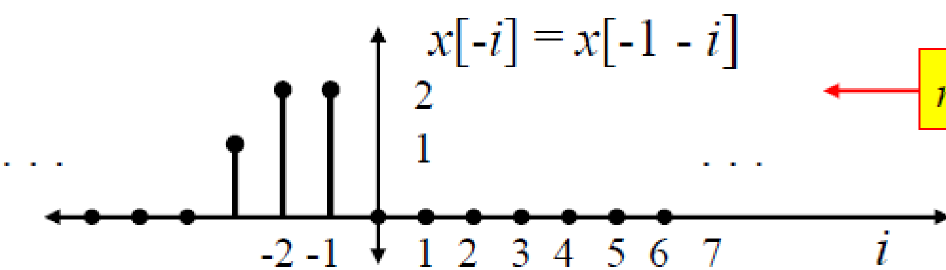
Örnek

$x[n - i]$ 'i elde etmek için $x[-i]$ n kadar ötelenir

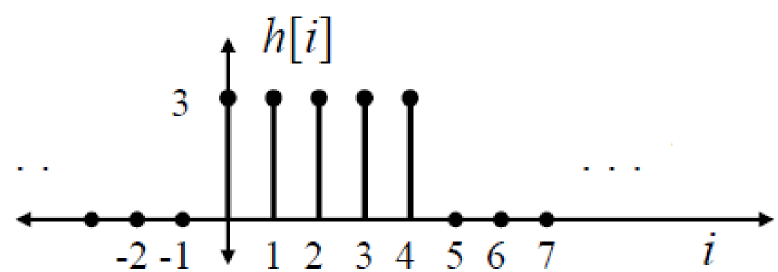
negatif n sola öteleme
pozitif n sağa öteleme

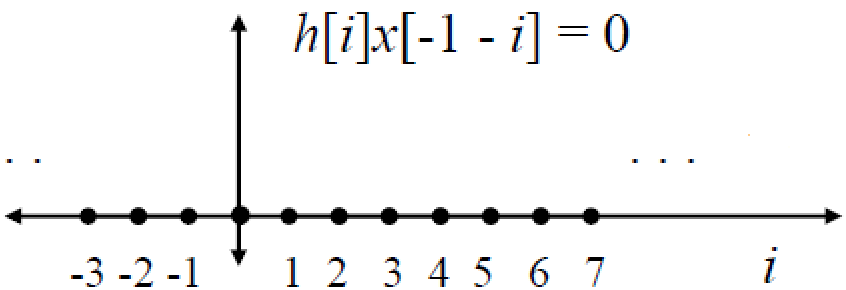






$n = -1$

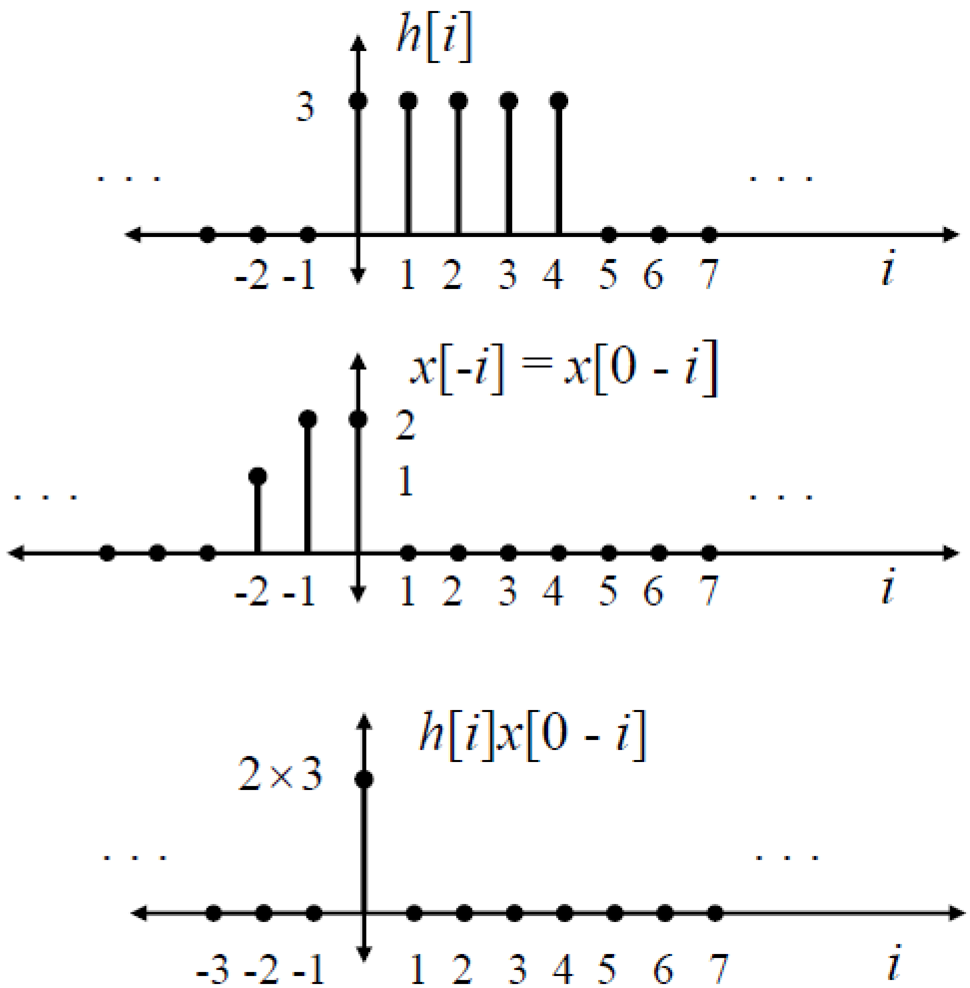




$$\boxed{y[n] = 0 \quad \forall n < 0}$$

Örnek

$n = 0$



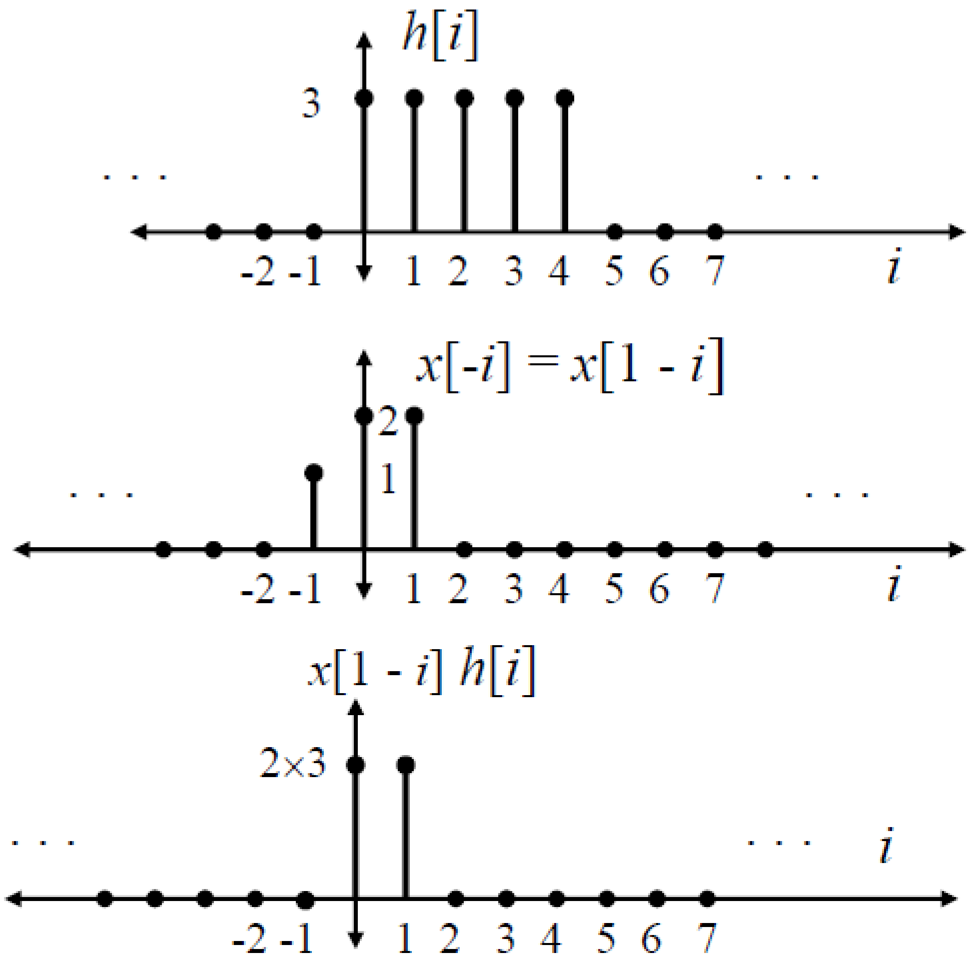
Öteleme yok

$x[0 - i] = x[-i]$

$\boxed{y[0] = 6}$

Örnek

$n = 1$

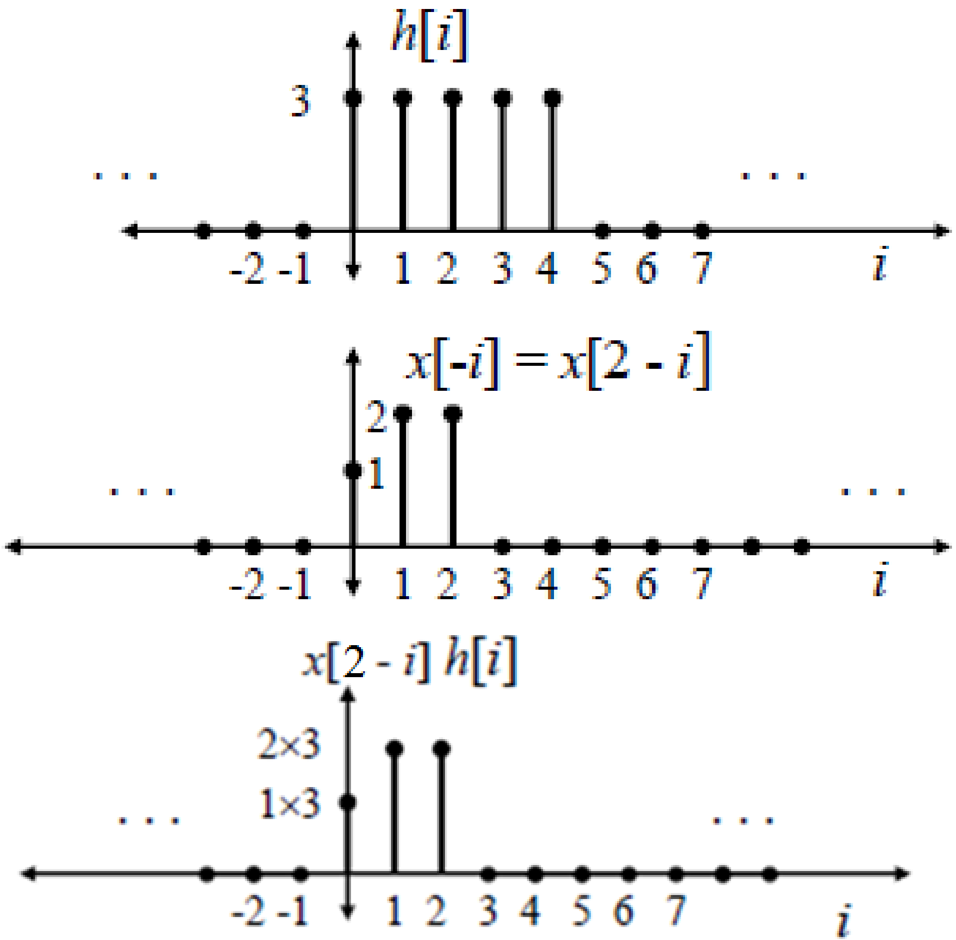


1 adım sağa öteleme

$$y[1] = 6 + 6 = 12$$

Örnek

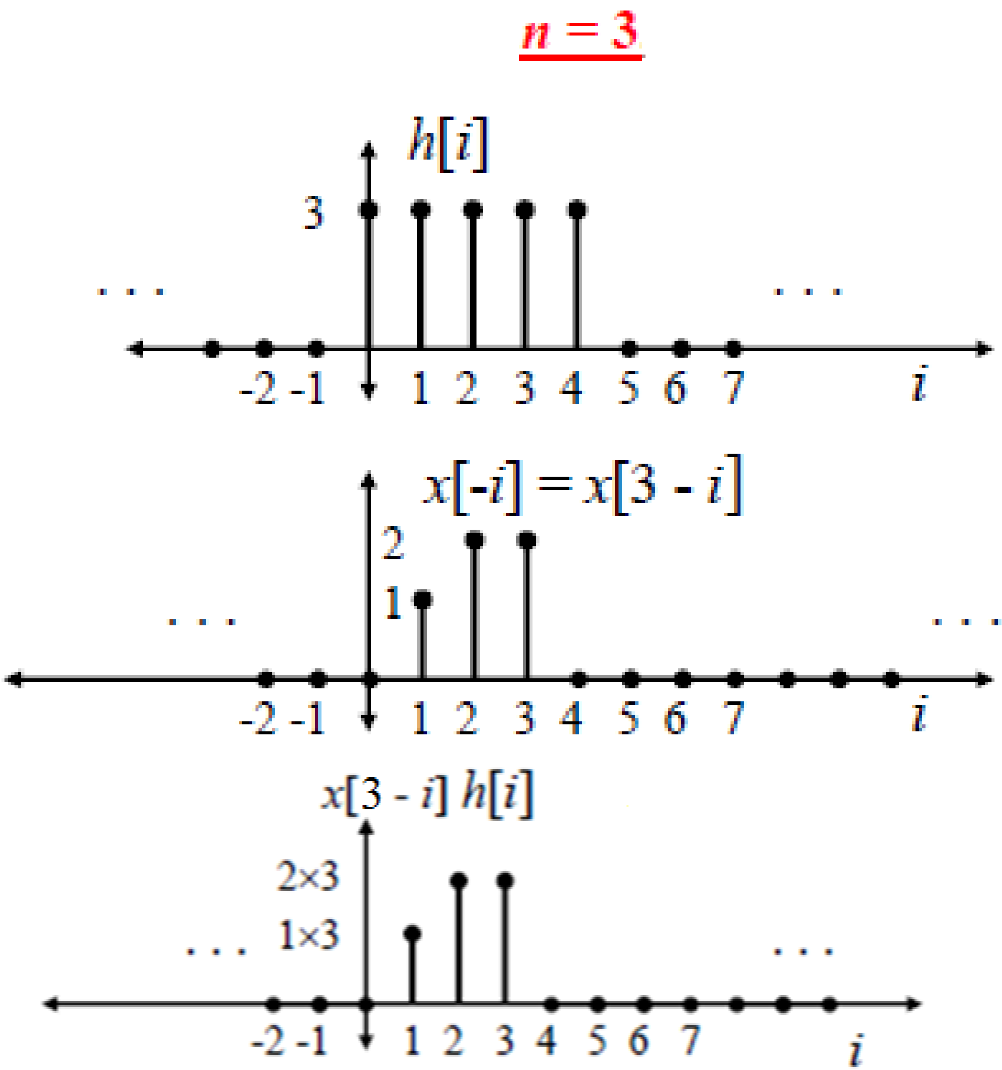
$\underline{n = 2}$



2 adım sağa öteleme

$$\boxed{y[2] = 3 + 6 + 6 = 15}$$

Örnek

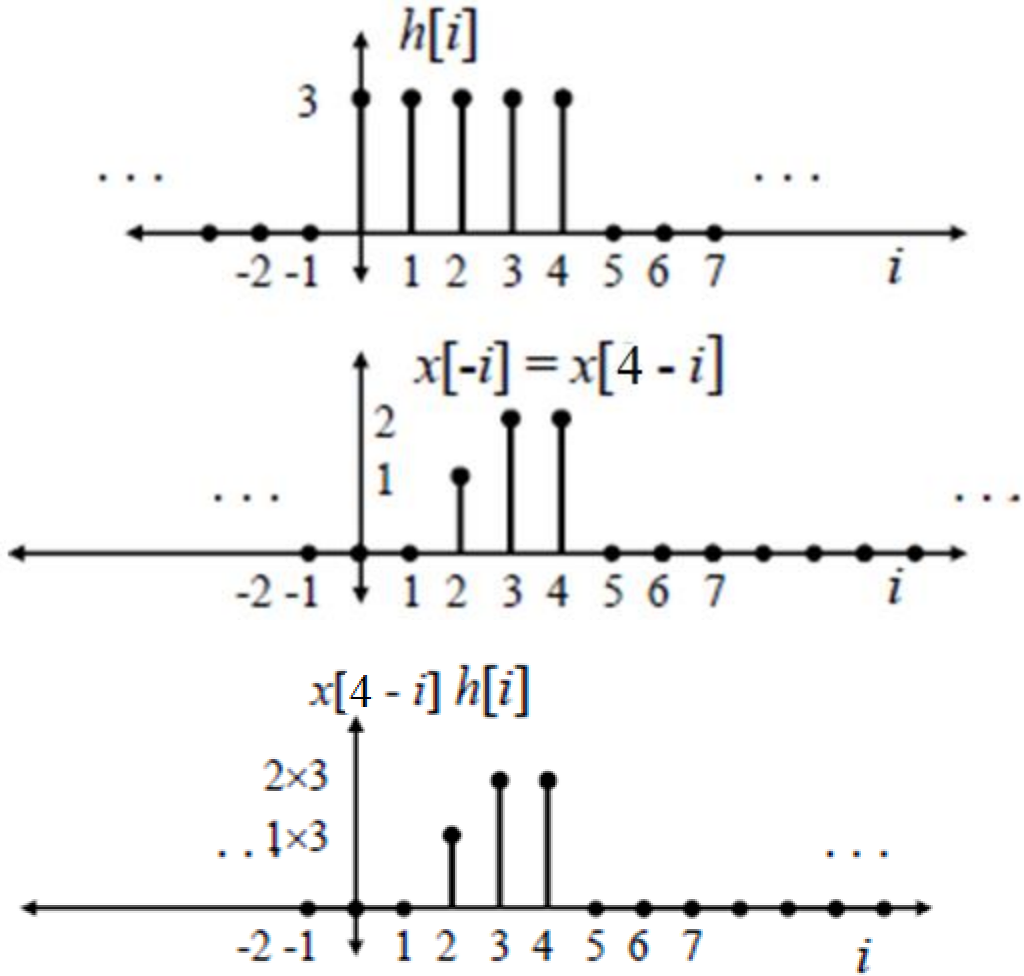


3 adım sağa öteleme

$$y[3] = 3 + 6 + 6 = 15$$

Örnek

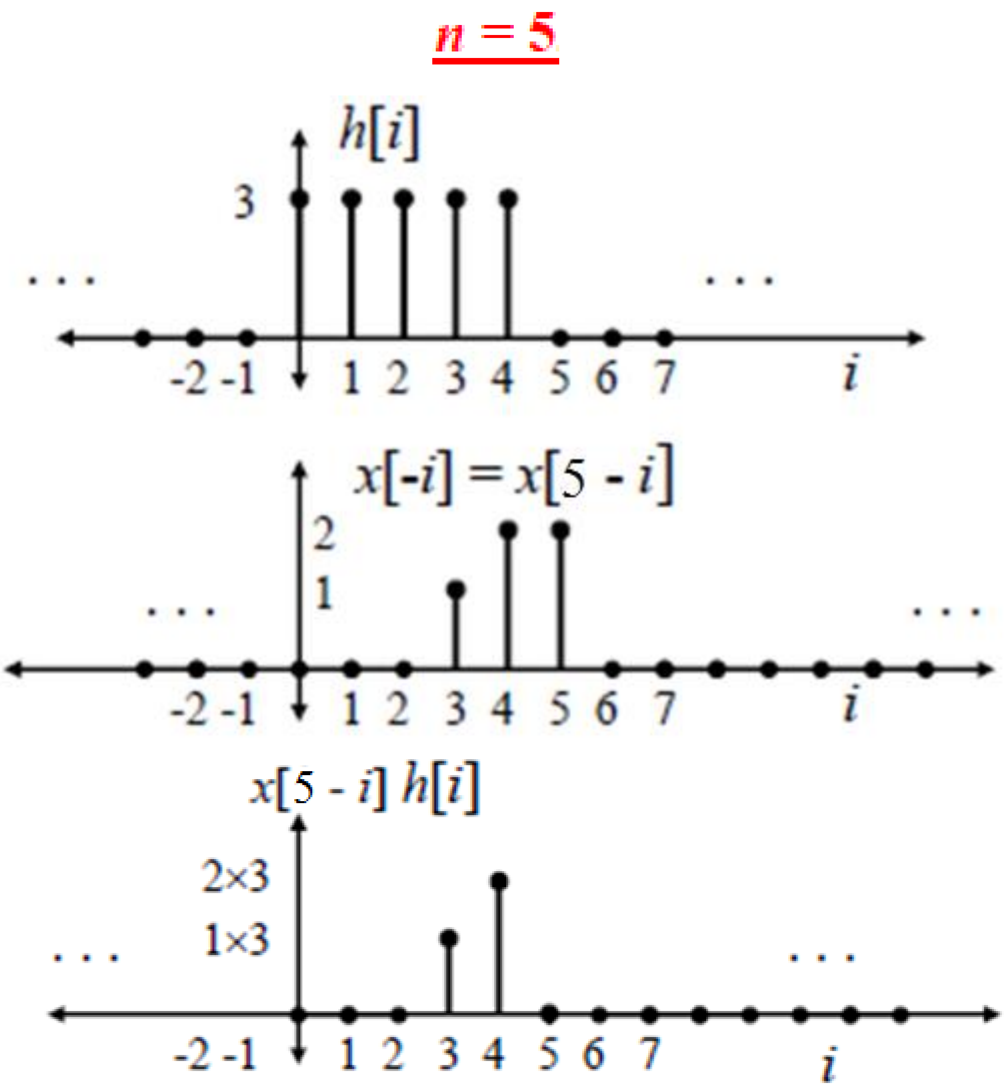
$n = 4$



4 adım sağa öteleme

$$y[4] = 3 + 6 + 6 = 15$$

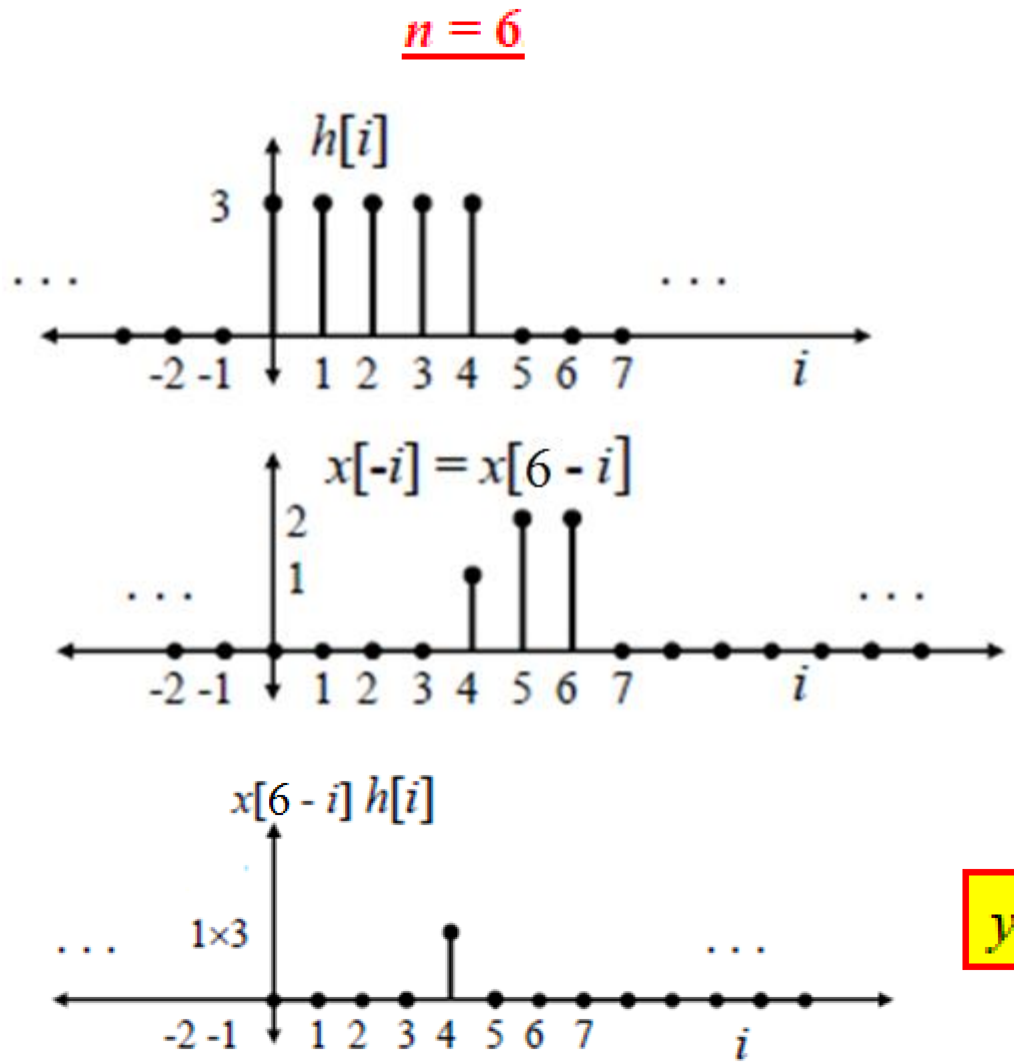
Örnek



5 adım sağa öteleme

$$\boxed{y[5] = 3 + 6 = 9}$$

Örnek

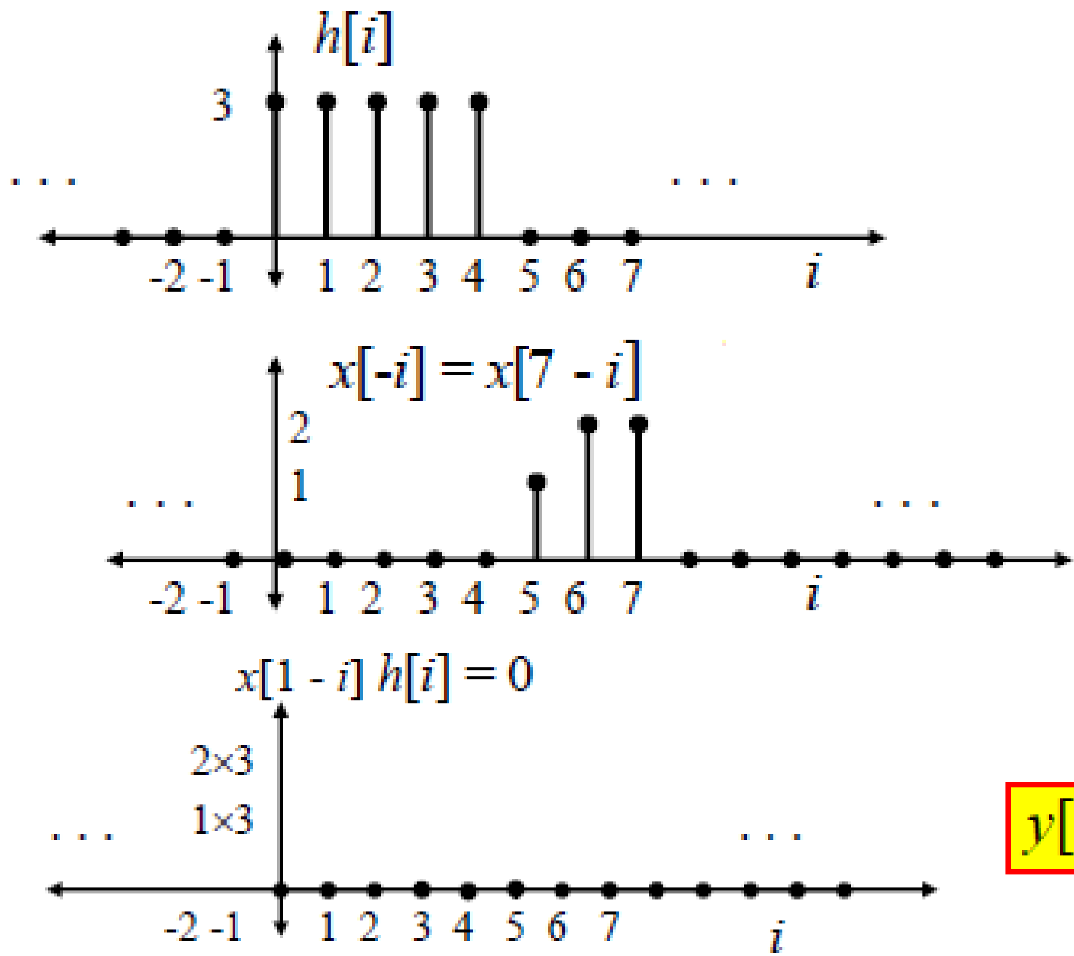


6 adım sağa öteleme

$$\boxed{y[6] = 3}$$

Örnek

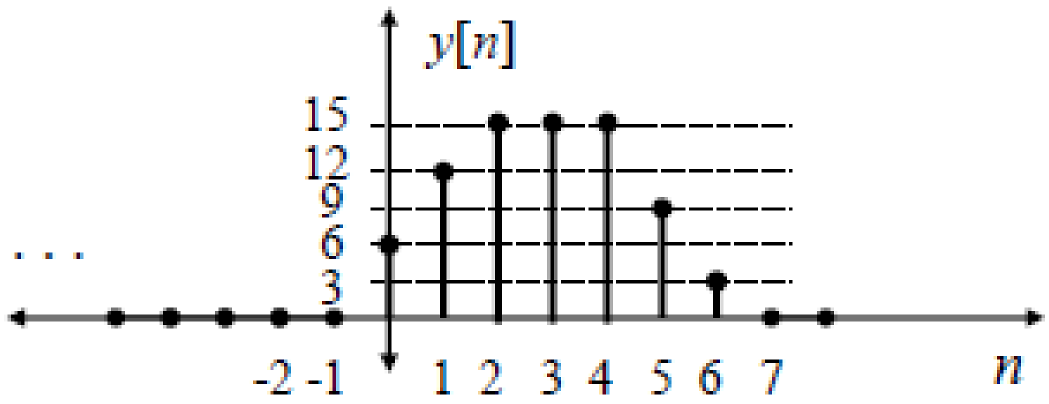
$n > 6$

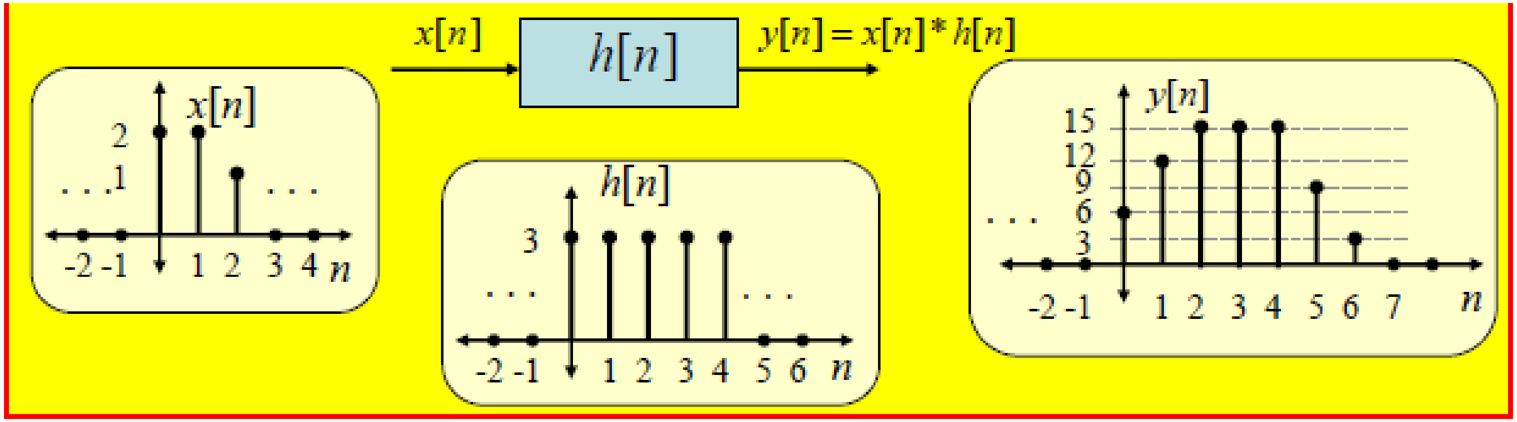


7 adım sağa öteleme

$$y[n] = 0 \quad \forall n > 6$$

Sonuç





h[n] birim dürtü cevabına sahip bir sistemin x[n] girişine ait sıfır-durum cevabını konvolüsyon ile elde ettik.