Λύσεις ασκήσεων από τις Ακολουθίες του Γκατζούλη

2 Αυγούστου 2019

1 Ασκήσεις από το βιβλίο

Άσκηση 1. (σ.123/ 7.) Να εξεταστούν ως προς μονοτονία οι ακολουθίες
iv) (δ_ν) με $\delta_1 = 5,\ \delta_{\nu+1} = \frac{2+\delta_\nu}{5+\delta_\nu},\ \nu \in \mathbb{N}^*$.
vi) (ψ_ν) με $\psi_1 = \lambda \geq 0, \quad \psi_{\nu+1} = \frac{4\psi_\nu - 3}{3}\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

iv) $\delta_1 = 5,\ \delta_2 = \frac{7}{10} < \delta_1$. Προφανώς $\delta_\nu > 0\ \forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$.

$$\delta_{\nu+1} < \delta_\nu \Leftrightarrow \frac{2+\delta_\nu}{5+\delta_n} < \delta_\nu$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{2+x}{5+x} < x\ \forall\, x > 0$ άρα η δ_ν είναι γνησίως φθίνουσα.

vi) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της διαφοράς.

$$\delta_\nu = \psi_{\nu+1} - \psi_\nu = \frac{4\psi_\nu - 3}{3} - \psi_\nu = \frac{\psi_\nu - 3}{3}, \quad \delta_{\nu+1} = \frac{\psi_{\nu+1} - 3}{3} = \frac{4\left(\psi_\nu - 3\right)}{9}$$
$$\therefore \delta_\nu\ \delta_{\nu+1} = \frac{4(\psi_\nu - 3)^2}{27} \geq 0$$

Άρα η δ_ν μπορεί να είναι μονότονη ή γνησίως μονότονη. Αν είναι γνησίως μονότονη

- και $\psi_2 < \psi_1$ τότε είναι γνησίως φθίνουσα. $\psi_2 < \psi_1 \Leftrightarrow \frac{4\lambda-3}{3} < \lambda \Leftrightarrow \lambda < 3$.
- και $\psi_2 > \psi_1$ τότε είναι γνησίως αύξουσα. $\psi_2 > \psi_1 \Leftrightarrow \lambda > 3$.

Για $\lambda = 3$ έχουμε ότι είναι σταθερή αφού

- $\psi_1 = \lambda = 3,\ \psi_2 = (4 \cdot 3 - 3)/3 = 3,\ \ldots,\ \psi_\nu = 3$.

Άσκηση 2. (σ.124/ 11.) Αν για μια ακολουθία ισχύει $\alpha_{2\nu-1} < \alpha_{2\nu} < \alpha_{2\nu+1}\ \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα.

Με εφαρμογή του κριτήριου διαφοράς

$$\delta_\nu \delta_{\nu+1} = \left(\alpha_{2\nu} - \alpha_{2\nu-1}\right)\left(\alpha_{2\nu+1} - \alpha_{2\nu}\right) > 0$$

Άρα γνησίως μονότονη και λόγω της διάταξης στην εκφώνηση γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 3. (σ.124/ 13.) Να μελετήσετε ως προς μονοτονία τις ακολουθίες:
iv) (α_ν) με $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+2} - \sqrt{\nu+4}$
v) (β_ν) με $\beta_\nu = \sqrt[3]{\nu+1} - \sqrt[3]{\nu}$

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu+2} - \sqrt{\nu+4}, \quad \alpha_{\nu-1} = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu+3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} &= \sqrt{\nu+2} - \sqrt{\nu+4} + \sqrt{\nu+3} - \sqrt{\nu+1} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\nu+2} - \sqrt{\nu+4}\right)\left(\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}\right)}{\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}} + \frac{\left(\sqrt{\nu+3} - \sqrt{\nu+1}\right)\left(\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}\right)}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}} + \frac{2}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}}\end{aligned}$$

Αλλά η $\gamma_\nu = \sqrt{\nu}$ είναι γνησίως αύξουσα άρα $\sqrt{\nu+2} > \sqrt{\nu+1},\ \sqrt{\nu+4} > \sqrt{\nu+3}$ οπότε με πρόσθεση:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4} > \sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1} \Rightarrow \\ &\frac{1}{\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}} < \frac{1}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}} \Rightarrow \\ -&\frac{2}{\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}} + \frac{2}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}} > 0\end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι $\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} > 0$ άρα η α_ν είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 4. (σ.132/ 5.) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μονότονες και φραγμένες:

i) (α_ν) με $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{3^\nu+1}$

ii) (β_ν) με $\beta_\nu = \frac{\nu!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}$

i) Από την ανισότητα του Bernouli, $(1+\alpha)^\nu \geq 1 + \alpha\nu \quad \forall\, \alpha \geq -1$ άρα $3^\nu \geq (1+2)^\nu = 1 + 2\nu$ άρα

$$0 < \alpha_\nu = \frac{\nu+1}{3^\nu} \leq \frac{\nu+1}{1+2\nu} < \frac{\nu+1}{1+\nu} = 1$$

Κριτήριο πηλίκου για μονοτονία:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{\nu+2}{3^{\nu+1}}}{\frac{\nu+1}{3^\nu}} = \frac{\nu+2}{3\nu+3} < 1 \Rightarrow \alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$$

Άρα είναι κάτω φραγμένη από το 0, άνω από το 1 και γνησίως φθίνουσα.

ii) Κριτήριο πηλίκου για μονοτονία:

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{(\nu+1)!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu+1)}}{\frac{\nu!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}} = \frac{\nu+1}{2\nu+1} < 1$$

Επίσης (η απόδειξη έπεται με περιπτώσεις για ν άρτιο και περιττό):

$$\beta_\nu = \frac{\nu!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)} < \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)} < 1$$

Άσκηση 5. (σ.132/ 6.) Να αποδείξετε ότι δεν είναι φραγμένες οι ακολουθίες

i) (α_ν) με $\alpha_\nu = 2\nu^2 + \nu$

ii) (β_ν) με $\beta_\nu = \frac{3\nu^2+\nu+1}{\sqrt{\nu^2+2}}$

iii) (γ_ν) με $(\gamma_\nu) = (-2)^\nu$

iv) (δ_ν) με $(\delta_\nu) = e^{\nu^2+\nu+2}$

i) Για να δείξουμε ότι δεν είναι φραγμένη, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\nexists \theta \in \mathbb{R}:\ |\alpha_\nu| = \left|2\nu^2 + \nu\right| = 2\nu^2 + \nu \leq \theta\ \forall \nu > \nu_0,\ \nu, \nu_0 \in \mathbb{N}^*$$

Για $\nu_0 = [\theta],\ \nu = \nu_0 + 1 = [\theta] + 1 > \nu_0$, όπου $[.]$ το ακέραιο μέρος, έχουμε:

$$\left|2\nu^2 + \nu\right| = 2([\theta]+1)^2 + [\theta] + 1 > [\theta] + 1 > \theta$$

, αφού $[\theta] \geq \theta$

ii) Με τον ίδιο τρόπο, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\nexists \theta \in \mathbb{R}: \ |\beta_\nu| = \left| \frac{3\nu^2+\nu+1}{\sqrt{\nu^2+2}} \right| = \frac{3\nu^2+\nu+1}{\sqrt{\nu^2+2}} \leq \theta \ \forall \nu > \nu_0, \ \nu, \nu_0 \in \mathbb{N}^*$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{3\nu^2+\nu+1}{\sqrt{\nu^2+2}} > \frac{3\nu^2+\nu}{\sqrt{\nu^2+2}} &= \frac{\sqrt{\left(3\nu^2+\nu\right)^2}}{\sqrt{\nu^2+2}} = \sqrt{\frac{9\nu^4+6\nu^3+\nu^2}{\nu^2+2}} \\ &> \sqrt{\frac{9\nu^4+6\nu^3+\nu^2}{\nu^2}} = \sqrt{\left(3\nu+1\right)^2} = 3\nu+1 \end{aligned}$$

Άρα για $\nu = \left[\frac{\theta}{3}\right]$ έχουμε

$$\beta_\nu = \frac{3\nu^2+\nu+1}{\sqrt{\nu^2+2}} > 3\left[\frac{\theta}{3}\right] + 1 \geq 3\frac{\theta}{3} + 1 > \theta$$

, που σημαίνει ότι δεν είναι φραγμένη.

iii)

iv)

Άσκηση 6. (σ.133/ 7.) Έστω οι ακολουθίες $(\alpha_\nu), (\beta_\nu)$. Αν η ακολουθία (α_ν) είναι φραγμένη και η ακολουθία (β_ν) είναι κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα αρνητικό να αποδείξετε ότι η ακολουθία (γ_ν) με $\gamma_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}$ είναι φραγμένη.

Έχουμε $\alpha_\nu \leq \theta_1 \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ και αν θ_2 το κάτω φράγμα της (β_ν) τότε $\beta_\nu > \theta_2 > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ άρα:

$$|\gamma_\nu| = \frac{|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu|}{|\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu|} \leq \frac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|}{|\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu|} \leq \frac{\nu\theta_1}{|\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu|}$$

Επίσης $\beta_1 \geq \theta_2, \ \beta_2 \geq \theta_2, \ldots, \beta_\nu \geq \theta_2, \ \theta_2 > 0$ άρα:

$$\frac{\nu\theta_1}{|\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu|} = \frac{\nu\theta_1}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu} \leq \frac{\nu\theta_1}{\nu\theta_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$
$$\therefore \gamma_\nu \leq \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

Άσκηση 7. (σ.242/ 5.) Να μελετήσετε ως προς σύγκλιση την ακολουθία α_ν με $\alpha_1 = \alpha, \ \alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha + \alpha_\nu^2, \ \nu \in \mathbb{N}^*$.

Μετά από μερικές παρατηρήσεις για $\alpha = 1/8, \ \alpha = 1/5$ κλπ., η ακολουθία φαίνεται να είναι γν. αύξουσα και να ισχύει $\alpha_\nu < 2\alpha \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

Θα δείξουμε ότι $\alpha_\nu < 2\alpha \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$. Προφανώς $\alpha_1 < 2\alpha$. Έστω $\alpha_\nu < 2\alpha$. Τότε $\alpha_{n+1} = \alpha_\nu^2 + \alpha < (2\alpha)^2 + \alpha < 2\alpha$. Πράγματι, $(2\alpha)^2 + \alpha < 2\alpha \Leftrightarrow \alpha(4\alpha - 1) < 0$, που ισχύει από τα δεδομένα της άσκησης, παίρνουμε $\alpha_{n+1} < 2\alpha$. Αποδείχθηκε ότι:

$$\alpha_\nu < 2\alpha \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

Άρα η ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

Θα αποδείξουμε ότι είναι και γν. αύξουσα.

$$\begin{gathered} \alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu \Leftrightarrow \\ \alpha + \alpha_\nu^2 > \alpha_\nu \Leftrightarrow \\ \alpha_\nu(\alpha_\nu - 1) > -\alpha \end{gathered} \tag{$\star$}$$

Αλλά

$$\begin{gathered} \alpha_\nu(\alpha_\nu - 1) > 2\alpha(2\alpha - 1) > -\alpha \Leftrightarrow \\ 2\alpha(2\alpha - 1) > -\alpha \Leftrightarrow \\ 4\alpha^2 - \alpha = \alpha(4\alpha - 1) > 0 \end{gathered} \tag{$\star\star$}$$

, που ισχύει. Λόγω της (★★) ισχύει και η (★) άρα και

$$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$$

Τελικά η ακολουθία είναι γν. αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνουσα.

Άσκηση 8. (σ.242/ 5.) Δίνονται οι ακολουθίες α_ν και $\beta_n u$ με $\alpha_1 = \alpha > 0$, $\beta_1 = \beta > 0$, $\alpha < \beta$ και

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2},\ \nu \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_{\nu+1} = \sqrt{\frac{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}{2}},\ \nu \in \mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\alpha_\nu < \beta_\nu$

ii) α_ν, β_ν συγκλίνουσες,

iii) $\lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu$

i) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha < \beta_\nu = \beta$. Αν $\alpha_\nu < \beta_\nu$ για κάποιο $\nu > 1$ τότε

$$\begin{gathered}
\alpha_{\nu+1} < \beta_{\nu+1} \Leftarrow \\
\frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} < \sqrt{\frac{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}{2}} \Leftarrow \\
(\alpha_\nu + \beta_\nu)^2 < 2(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) \Leftarrow \\
(\alpha_\nu - \beta_\nu)^2 > 0
\end{gathered}$$

, που είναι αληθής από υπόθεση. Άρα

$$\alpha_\nu < \beta_\nu \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

ii) Για την α_ν:

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} > \frac{\alpha_\nu + \alpha_\nu}{2} = \alpha_\nu \tag{2}$$

, δηλαδή γν. αύξουσα. Για τη β_ν από (1) λόγω της (2):

$$0 < \alpha = \alpha_1 < \ldots < \alpha_\nu < \beta_\nu$$

Δηλαδή β_ν κάτω φραγμένη και θετική. Για την μονοτονία της:

$$\beta_{\nu+1} = \sqrt{\frac{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}{2}} < \sqrt{\frac{\beta_\nu^2 + \beta_\nu^2}{2}} = \beta_\nu \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

Τελικά β_ν συγκλίνουσα. Αρκεί να δείξουμε ότι η α_ν είναι και άνω φραγμένη. Ξανά από (1):

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} < \frac{\beta_\nu + \beta_\nu}{2} = \beta_\nu < \beta_{\nu-1} < \ldots < \beta_1 = \beta$$

Άρα και η α_ν συγκλίνουσα.

iii) Έστω $x := \lim \alpha_\nu = \lim \alpha_{\nu+1}$, $y := \lim \beta_\nu = \lim \beta_{\nu+1}$. Από την υπόθεση:

$$\begin{gathered}
\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} \xRightarrow{\nu \to \infty} \\
x = \frac{x+y}{2} \Rightarrow \\
x = y
\end{gathered}$$

Άσκηση 9. (σ.242/ 12.) Να μελετηθεί ως προς σύγκλιση η ακολουθία α_ν με

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt[3]{\alpha_\nu^2 + 4}, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Υπολογίζουμε $\alpha_2 = \sqrt[3]{1^2+4} \approx 1.71,\ \alpha_3 = \sqrt[3]{1.71^2+4} \approx 1.91,\ \ldots$. Θα δείξουμε ότι ένα άνω φράγμα είναι το 2. Ήδη ιχύει $\alpha_1 < 2$. Αν $\alpha_\nu < 2$ για κάποιο ν τότε

$$\alpha_{\nu+1} = \sqrt[3]{\alpha_\nu^2+4} < \sqrt[3]{2^2+4} = 2$$

Άρα $\alpha_\nu < 2\ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$. Απομένει να δείξουμε ότι α_ν γν. αύξουσα.

$$\begin{gathered}
\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu \Leftarrow \\
\sqrt[3]{\alpha_\nu^2+4} > \alpha_\nu \Leftarrow \\
\alpha_\nu^2 + 4 > \alpha_\nu^3 \Leftarrow \\
\alpha_\nu^2 - 4 > \alpha_\nu^3 - 8 \Leftarrow \\
(\alpha_\nu - 2)(\alpha_\nu + 2) > (\alpha_\nu - 2)(\alpha_n^2 + 2\alpha_\nu + 4) \Leftarrow \\
(\alpha_\nu - 2)(\alpha_\nu^2 + \alpha_\nu + 2) < 0
\end{gathered}$$

Δείξαμε ήδη ότι $\alpha_\nu - 2 < 0$ και ισχύει $\alpha_\nu^2 + \alpha_\nu + 2 > 0$ άρα πράγματι $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$. Τελικά α_ν συγκλίνουσα. Παίρνουμε όρια στην αναδρομική σχέση και αν $x := \lim \alpha_\nu$ τότε:

$$x = \sqrt[3]{x^2+4} \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα το 2 είναι και το όριο της.

Άσκηση 10. (σ.243/ 13.) Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\alpha_\nu = \ln\left(\frac{\nu^2+2\nu+1}{\nu^2+2\nu}\right)$ και η ακολουθία β_ν με $\beta_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία β_ν είναι μονότονη και φραγμένη και έπειτα να βρείτε το όριο της.

$$\alpha_\nu = \ln\left(1 + \frac{1}{\nu^2+2\nu}\right)$$

Θα αποδείξουμε ότι α_ν γν. φθίνουσα ($\downarrow$). Θεωρούμε τις ακολουθίες $\alpha_{1\nu} = \ln \nu,\ \alpha_{2\nu} = \frac{1}{\nu^2+2\nu}$. $\alpha_{2\nu}\downarrow$ και $\alpha_{1\nu}\uparrow$ άρα $\alpha_\nu\downarrow$. Το κάτω φράγμα της α_ν είναι 0:

$$\nu^2 + 2\nu + 1 > \nu^2 + 2\nu \Rightarrow \frac{\nu^2+2\nu+1}{\nu^2+2\nu} > 1 \Rightarrow \alpha_\nu > 0$$

Το ίδιο και το όριο της $\lim \alpha_\nu = \lim \ln\left(\frac{\nu^2+2\nu+1}{\nu^2+2\nu}\right) = 0$.

Η β_ν είναι γν. φθίνουσα ($\downarrow$) ως άθροισμα γν. φθίνουσων, προφανώς κάτω φραγμένη από το 0 και έχει όριο

$$\lim \beta_\nu = \lim \alpha_1 + \lim \alpha_2 + \ldots + \lim \alpha_\nu = 0$$

Άσκηση 11. (σ.257/ 5.) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

i) $\alpha_\nu = \left(1 - \frac{2}{\nu^2}\right)^{3\nu}$

ii) $\beta_\nu = \left(1 + \frac{2}{\nu}^2\right)^{\nu-1}$

iii) $\gamma_\nu = \left(\frac{2\nu^2+1}{2\nu^2+3}\right)^{\nu+2}$

iv) $\delta_\nu = \left(\frac{\nu+1}{\nu+\sqrt{2}}\right)^{\nu+1} \cdot \left(\frac{2\nu+\sqrt{3}}{2\nu+6}\right)^{2\nu-1}$

Χρησιμοιούμε ότι

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

$$\lim\left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu = \lim\left(1 + \frac{1}{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^\nu \underset{\substack{\nu\to\infty \\ \mu\to\infty}}{\overset{\frac{\nu}{\alpha}=\mu}{=}} \lim\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu\alpha} = \left[\lim\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\mu\right]^\alpha = e^\alpha \tag{2}$$

i)

$$\lim\left(1-\frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu}=\lim\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\nu}\right)^{\nu}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\nu}\right)^{\nu}\overset{(2)}{=}e^{-\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}}=1$$

$$\therefore \lim\left(\alpha_\nu\right)=\lim\left(1-\frac{2}{\nu^2}\right)^{3\nu}=1$$

ii)

$$\lim\left(\beta_\nu\right)=\lim\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu-1}=\lim\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu}/\lim\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)$$

Για το δεύτερο

$$\lim\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)=1 \tag{3}$$

Για το πρώτο

$$\lim\left[\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu^2}\right]^{\frac{1}{\nu}}=\lim\sqrt[\nu]{\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu^2}}=\lim\sqrt[\nu]{e^2}$$

$$\therefore \lim\left[\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu^2}\right]^{\frac{1}{\nu}}=1 \tag{4}$$

$$\lim\sqrt[\nu]{e^2}\overset{\sigma.\,170}{=}1$$

(3), (4) $\Rightarrow \lim\beta_\nu=1$.

iii)

$$\left(\frac{2\nu^2+1}{2\nu^2+3}\right)^{\nu+1}=\frac{\left(1+\frac{1}{2\nu^2}\right)^{\nu}}{\left(1+\frac{3}{\nu^2}\right)^{\nu}}\frac{1+\frac{1}{2\nu^2}}{1+\frac{3}{\nu^2}}$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{2\nu^2}\right)=\lim\left(1+\frac{3}{\nu^2}\right)=1 \tag{5}$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{2\nu^2}\right)^{\nu}=1,\quad \lim\left[\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{\nu^2}\right)^{\nu^2}\right]^{\frac{1}{\nu}}=\lim\sqrt[n]{e^{\frac{1}{2}}}=1 \tag{6}$$

$$\lim\left(1+\frac{3}{\nu^2}\right)^{\nu}=\ldots=\lim\sqrt[\nu]{e^3}=1 \tag{7}$$

$$(5)\,,(6)\,,(7)\Rightarrow\lim\left(\gamma_\nu\right)=\lim\left(\frac{2\nu^2+1}{2\nu^2+3}\right)^{\nu+1}=1$$

Άσκηση 12. (σ.257/ 6.) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

i) $\alpha_\nu=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu}\right)^{3\nu}$

ii) $\alpha_\nu=\left(2-\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}$

iii) $\alpha_\nu=\left(1+\frac{2\nu-1}{2\nu+3}\right)^{2\nu-1}$

iv) $\alpha_\nu=\left(\frac{\nu+1}{\nu+\sqrt{2}}\right)^{\nu+1}\left(\frac{2\nu+\sqrt{3}}{2\nu+6}\right)^{2\nu-1}$

i)

ii) Θέτουμε $\nu+1=\mu\ \ \therefore\ \lim\limits_{\nu\to\infty}\mu=\infty$, τότε η α_ν ξαναγράφεται

$$\alpha_\nu=\left(2-\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\mu-1}=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-1}$$

$$\therefore \lim\left(\alpha_\nu\right)=\lim\left[\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}/\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right]=e/1=e$$

iii) Χρησιμοποιούμε την ανισότητα Βερνουλι

$$(1+x)^{\nu} = 1 + \nu x \quad \forall \nu \in \mathbb{N},\, x \geq -1 \tag{1.1}$$

$$\alpha_{\nu} = \left(1 + \frac{2\nu - 1}{2\nu + 3}\right)^{2\nu - 1} > 1 + \frac{(2\nu - 1)^2}{2\nu + 3} \Rightarrow$$

$$\lim \alpha_{\nu} > \lim \left(1 + \frac{(2\nu - 1)^2}{2\nu + 3}\right) = \infty$$

iv)

$$\alpha_n = \left(\frac{\nu + 1}{\nu + \sqrt{2}}\right)^{\nu + 1} \left(\frac{2\nu + \sqrt{3}}{2\nu + 6}\right)^{2\nu - 1}$$

Θεωρούμε

$$\alpha_{1n} = \left(\frac{\nu + 1}{\nu + \sqrt{2}}\right)^{\nu + 1}, \quad \alpha_{2\nu} = \left(\frac{2\nu + \sqrt{3}}{2\nu + 6}\right)^{2\nu - 1}$$

Για την $\alpha_{1\nu}$

$$\mu := \nu + \sqrt{2}, \quad \lim(\mu) = \infty$$

$$\therefore \left(\frac{\mu - \sqrt{2} + 1}{\mu}\right)^{\mu - \sqrt{2} + 1} = \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\mu}\right)^{\mu - \sqrt{2} + 1}$$

$$\therefore \lim(\alpha_{1_\nu}) = \lim \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\mu}\right)^{\mu} \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\mu}\right)^{-\sqrt{2} + 1} = \lim \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\mu}\right)^{\mu} = e^{1 - \sqrt{2}} \cong 0.661$$

Για την $\alpha_{2\nu}$

$$\mu := 2\nu + 6, \quad \lim(\mu) = \infty$$

$$\therefore \left(\frac{2\nu + \sqrt{3}}{2\nu + 6}\right)^{2\nu - 1} = \left(\frac{\mu + \sqrt{3} - 6}{\mu}\right)^{\mu - 7} = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3} - 6}{\mu}\right)^{\mu}}{\left(1 + \frac{\sqrt{3} - 6}{\mu}\right)^{7}}$$

$$\therefore \lim(\alpha_{2\nu}) = e^{\sqrt{3} - 6} \cdot 1 \cong 0.014$$

Τελικά

$$\lim(\alpha_{\nu}) = \lim(\alpha_{1\nu}) \lim(\alpha_{2\nu}) \cong 0.093$$

2 Άλλες ασκήσεις

Άσκηση 13. (πηγή) Δίνεται η ακολουθία α_{ν} με $\alpha_1 = \sqrt{6}$ για $\nu \geq 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{6 + \alpha_{\nu}}$. Δείξτε ότι συγκλίνει και ότι βρείτε το όριο της.

Με επαγωγή για μονοτονία. Ισχύει $\alpha_2 \geq \alpha_1$. Υποθέτουμε ότι $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$. Τότε

$$\alpha_{n+2} = \sqrt{6 + \alpha_{n+1}} \geq \sqrt{6 + \alpha_n} = \alpha_{n+1}$$

Άρα αύξουσα. Με επαγωγή για άνω φράγμα το 3. Ισχύει $\alpha_1 \leq 3$. Αν $\alpha_{\nu} \leq 3$ τότε

$$\alpha_{\nu+1} = \sqrt{6 + \alpha_{\nu}} \leq \sqrt{6 + 3} = 3$$

Άρα συγκλίνουσα, συνεπώς έχει ένα όριο L. Για να βρεθεί, παίρνουμε όρια στην αναδρομική της υπόθεσης.

$$L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L = 3$$

Άσκηση 14. (πηγή) Η ακολουθία x_ν με $x_\nu = \frac{\lfloor x\nu \rfloor}{\nu}$ συγκλίνει· Αν ναι, ως προς ποιον αριθμό· $\lfloor . \rfloor$ δηλώνει το ακέραιο μέρος.

Από τον ορισμό του ακέραιου μέρους, όπου $\{.\}$ το δεκαδικό:

$$x_\nu = \frac{x\nu - \{x\nu\}}{\nu} = x - \frac{\{xn\}}{n}$$
$$\therefore \lim x_\nu = x$$

, αφού $0 \leq \{x\nu\} < 1$.