

Λύσεις ασκήσεων από τις Ακολουθίες του Γκατζούλη

4 Σεπτεμβρίου 2019

1 Ασκήσεις από το βιβλίο

Άσκηση 1. (σ.123/ 7.) Να εξεταστούν ως προς μονοτονία οι ακολουθίες

iv) (δ_ν) με $\delta_1 = 5$, $\delta_{\nu+1} = \frac{2+\delta_\nu}{5+\delta_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

vi) (ψ_ν) με $\psi_1 = \lambda \geq 0$, $\psi_{\nu+1} = \frac{4\psi_\nu - 3}{3}$ $\nu \in \mathbb{N}^*$.

iv) $\delta_1 = 5$, $\delta_2 = \frac{7}{10} < \delta_1$. Προφανώς $\delta_\nu > 0 \forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

$$\delta_{\nu+1} < \delta_\nu \Leftrightarrow \frac{2+\delta_\nu}{5+\delta_\nu} < \delta_\nu$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{2+x}{5+x} < x \forall x > 0$ άρα η δ_ν είναι γνησίως φθίνουσα.

vi) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της διαφοράς.

$$\delta_\nu = \psi_{\nu+1} - \psi_\nu = \frac{4\psi_\nu - 3}{3} - \psi_\nu = \frac{\psi_\nu - 3}{3}, \quad \delta_{\nu+1} = \frac{\psi_{\nu+1} - 3}{3} = \frac{4(\psi_\nu - 3)}{9}$$
$$\therefore \delta_\nu \delta_{\nu+1} = \frac{4(\psi_\nu - 3)^2}{27} \geq 0$$

Άρα η ψ_ν μπορεί να είναι μονότονη ή γνησίως μονότονη. Αν είναι γνησίως μονότονη

- και $\psi_2 < \psi_1$ τότε είναι γνησίως φθίνουσα. $\psi_2 < \psi_1 \Leftrightarrow \frac{4\lambda-3}{3} < \lambda \Leftrightarrow \lambda < 3$.
- και $\psi_2 > \psi_1$ τότε είναι γνησίως αύξουσα. $\psi_2 > \psi_1 \Leftrightarrow \lambda > 3$.

Για $\lambda = 3$ έχουμε ότι είναι σταθερή αφού

- $\psi_1 = \lambda = 3$, $\psi_2 = (4 \cdot 3 - 3)/3 = 3$, ..., $\psi_\nu = 3$.

Άσκηση 2. (σ.124/ 11.) Αν για μια ακολουθία ισχύει $\alpha_{2\nu-1} < \alpha_{2\nu} < \alpha_{2\nu+1} \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα.

Με εφαρμογή του κριτηρίου διαφοράς

$$\delta_\nu \delta_{\nu+1} = (\alpha_{2\nu} - \alpha_{2\nu-1})(\alpha_{2\nu+1} - \alpha_{2\nu}) > 0$$

Άρα γνησίως μονότονη και λόγω της διάταξης στην εκφώνηση γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 3. (σ.124/ 13.) Να μελετήσετε ως προς μονοτονία τις ακολουθίες:

iv) (α_ν) με $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+2} - \sqrt{\nu+4}$

v) (β_ν) με $\beta_\nu = \sqrt[3]{\nu+1} - \sqrt[3]{\nu}$

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu+2} - \sqrt{\nu+4}, \quad \alpha_{\nu-1} = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu+3}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} &= \sqrt{\nu+2} - \sqrt{\nu+4} + \sqrt{\nu+3} - \sqrt{\nu+1} \\
&= \frac{(\sqrt{\nu+2} - \sqrt{\nu+4})(\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4})}{\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}} + \frac{(\sqrt{\nu+3} - \sqrt{\nu+1})(\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1})}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}} + \frac{2}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}}
\end{aligned}$$

Αλλά η $\gamma_\nu = \sqrt{\nu}$ είναι γνησίως αύξουσα άρα $\sqrt{\nu+2} > \sqrt{\nu+1}$, $\sqrt{\nu+4} > \sqrt{\nu+3}$ οπότε με πρόσθεση:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4} &> \sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1} \Rightarrow \\
\frac{1}{\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}} &< \frac{1}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}} \Rightarrow \\
-\frac{2}{\sqrt{\nu+2} + \sqrt{\nu+4}} + \frac{2}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt{\nu+1}} &> 0
\end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι $\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} > 0$ άρα η α_ν είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 4. (σ.132/ 5.) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μονότονες και φραγμένες:

- i) (α_ν) με $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{3^{\nu+1}}$
- ii) (β_ν) με $\beta_\nu = \frac{\nu!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)}$

i) Από την ανισότητα του Bernoulli, $(1+\alpha)^\nu \geq 1+\alpha\nu \quad \forall \alpha \geq -1$ άρα $3^\nu \geq (1+2)^\nu = 1+2\nu$ άρα

$$0 < \alpha_\nu = \frac{\nu+1}{3^\nu} \leq \frac{\nu+1}{1+2\nu} < \frac{\nu+1}{1+\nu} = 1$$

Κριτήριο πηλίκου για μονοτονία:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{\nu+2}{3^{\nu+1}}}{\frac{\nu+1}{3^\nu}} = \frac{\nu+2}{3\nu+3} < 1 \Rightarrow \alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$$

Άρα είναι κάτω φραγμένη από το 0, άνω από το 1 και γνησίως φθίνουσα.

ii) Κριτήριο πηλίκου για μονοτονία:

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{(\nu+1)!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu+1)}}{\frac{\nu!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)}} = \frac{\nu+1}{2\nu+1} < 1$$

Επίσης (η απόδειξη έπεται με περιπτώσεις για ν άρτιο και περιττό):

$$\beta_\nu = \frac{\nu!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)} < \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \nu}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)} < 1$$

Άσκηση 5. (σ.132/ 6.) Να αποδείξετε ότι δεν είναι φραγμένες οι ακολουθίες

- i) (α_ν) με $\alpha_\nu = 2\nu^2 + \nu$
- ii) (β_ν) με $\beta_\nu = \frac{3\nu^2 + \nu + 1}{\sqrt{\nu^2 + 2}}$
- iii) (γ_ν) με $(\gamma_\nu) = (-2)^\nu$
- iv) (δ_ν) με $(\delta_\nu) = e^{\nu^2 + \nu + 2}$

i) Για να δείξουμε ότι δεν είναι φραγμένη, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\nexists \theta \in \mathbb{R} : |\alpha_\nu| = |2\nu^2 + \nu| = 2\nu^2 + \nu \leq \theta \quad \forall \nu > \nu_0, \nu, \nu_0 \in \mathbb{N}^*$$

Για $\nu_0 = [\theta]$, $\nu = \nu_0 + 1 = [\theta] + 1 > \nu_0$, όπου $[\cdot]$ το ακέραιο μέρος, έχουμε:

$$|2\nu^2 + \nu| = 2([\theta] + 1)^2 + [\theta] + 1 > [\theta] + 1 > \theta$$

, αφού $[\theta] \geq \theta$

ii) Με τον ίδιο τρόπο, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\nexists \theta \in \mathbb{R} : |\beta_\nu| = \left| \frac{3\nu^2 + \nu + 1}{\sqrt{\nu^2 + 2}} \right| = \frac{3\nu^2 + \nu + 1}{\sqrt{\nu^2 + 2}} \leq \theta \quad \forall \nu > \nu_0, \nu, \nu_0 \in \mathbb{N}^*$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{3\nu^2 + \nu + 1}{\sqrt{\nu^2 + 2}} &> \frac{3\nu^2 + \nu}{\sqrt{\nu^2 + 2}} = \frac{\sqrt{(3\nu^2 + \nu)^2}}{\sqrt{\nu^2 + 2}} = \sqrt{\frac{9\nu^4 + 6\nu^3 + \nu^2}{\nu^2 + 2}} \\ &> \sqrt{\frac{9\nu^4 + 6\nu^3 + \nu^2}{\nu^2}} = \sqrt{(3\nu + 1)^2} = 3\nu + 1 \end{aligned}$$

Άρα για $\nu = \left\lceil \frac{\theta}{3} \right\rceil$ έχουμε

$$\beta_\nu = \frac{3\nu^2 + \nu + 1}{\sqrt{\nu^2 + 2}} > 3 \left\lceil \frac{\theta}{3} \right\rceil + 1 \geq 3 \frac{\theta}{3} + 1 > \theta$$

, που σημαίνει ότι δεν είναι φραγμένη.

iii)

iv)

Άσκηση 6. (σ.133/ 7.) Έστω οι ακολουθίες $(\alpha_\nu), (\beta_\nu)$. Αν η ακολουθία (α_ν) είναι φραγμένη και η ακολουθία (β_ν) είναι κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα αρνητικό να αποδείξετε ότι η ακολουθία (γ_ν) με $\gamma_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu}$ είναι φραγμένη.

Έχουμε $\alpha_\nu \leq \theta_1 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ και αν θ_2 το κάτω φράγμα της (β_ν) τότε $\beta_\nu > \theta_2 > 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ άρα:

$$|\gamma_\nu| = \frac{|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu|}{|\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu|} \leq \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_\nu|}{|\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu|} \leq \frac{\nu\theta_1}{|\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu|}$$

Επίσης $\beta_1 \geq \theta_2, \beta_2 \geq \theta_2, \dots, \beta_\nu \geq \theta_2, \theta_2 > 0$ άρα:

$$\begin{aligned} \frac{\nu\theta_1}{|\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu|} &= \frac{\nu\theta_1}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu} \leq \frac{\nu\theta_1}{\nu\theta_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \\ \therefore \gamma_\nu &\leq \frac{\theta_1}{\theta_2} \end{aligned}$$

Άσκηση 7. (σ.242/ 5.) Να μελετήσετε ως προς σύγκλιση την ακολουθία α_ν με $\alpha_1 = \alpha, \alpha \in (0, \frac{1}{4})$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha + \alpha_\nu^2, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Μετά από μερικές παρατηρήσεις για $\alpha = 1/8, \alpha = 1/5$ κλπ., η ακολουθία φαίνεται να είναι γν. αύξουσα και να ισχύει $\alpha_\nu < 2\alpha \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

Θα δείξουμε ότι $\alpha_\nu < 2\alpha \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$. Προφανώς $\alpha_1 < 2\alpha$. Έστω $\alpha_\nu < 2\alpha$. Τότε $\alpha_{\nu+1} = \alpha + \alpha_\nu^2 < (2\alpha)^2 + \alpha < 2\alpha$. Πράγματι, $(2\alpha)^2 + \alpha < 2\alpha \Leftrightarrow \alpha(4\alpha - 1) < 0$, που ισχύει από τα δεδομένα της άσκησης, παίρνουμε $\alpha_{\nu+1} < 2\alpha$. Αποδείχθηκε ότι:

$$\alpha_\nu < 2\alpha \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

Άρα η ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

Θα αποδείξουμε ότι είναι και γν. αύξουσα.

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu+1} &> \alpha_\nu \Leftrightarrow \\ \alpha + \alpha_\nu^2 &> \alpha_\nu \Leftrightarrow \\ \alpha_\nu(\alpha_\nu - 1) &> -\alpha \end{aligned} \quad (\star)$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \alpha_\nu(\alpha_\nu - 1) &> 2\alpha(2\alpha - 1) > -\alpha \Leftrightarrow \\ 2\alpha(2\alpha - 1) &> -\alpha \Leftrightarrow \\ 4\alpha^2 - \alpha &= \alpha(4\alpha - 1) > 0 \end{aligned} \quad (\star\star)$$

, που ισχύει. Λόγω της (★★) ισχύει και η (★) άρα και

$$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$$

Τελικά η ακολουθία είναι γν. αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνουσα.

Άσκηση 8. (σ.242/ 5.) Δίνονται οι ακολουθίες α_ν και β_ν με $\alpha_1 = \alpha > 0$, $\beta_1 = \beta > 0$, $\alpha < \beta$ και

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2}, \quad \nu \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_{\nu+1} = \sqrt{\frac{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}{2}}, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) Για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\alpha_\nu < \beta_\nu$
- ii) α_ν, β_ν συγκλίνουν,
- iii) $\lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu$

i) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha < \beta_\nu = \beta$. Αν $\alpha_\nu < \beta_\nu$ για κάποιο $\nu > 1$ τότε

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu+1} < \beta_{\nu+1} &\Leftrightarrow \\ \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} < \sqrt{\frac{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}{2}} &\Leftrightarrow \\ (\alpha_\nu + \beta_\nu)^2 < 2(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) &\Leftrightarrow \\ (\alpha_\nu - \beta_\nu)^2 > 0 \end{aligned}$$

, που είναι αληθής από υπόθεση. Άρα

$$\alpha_\nu < \beta_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

ii) Για την α_ν :

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} > \frac{\alpha_\nu + \alpha_\nu}{2} = \alpha_\nu \quad (2)$$

, δηλαδή γν. αύξουσα. Για τη β_ν από (1) λόγω της (2):

$$0 < \alpha = \alpha_1 < \dots < \alpha_\nu < \beta_\nu$$

Δηλαδή β_ν κάτω φραγμένη και θετική. Για την μονοτονία της:

$$\beta_{\nu+1} = \sqrt{\frac{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}{2}} < \sqrt{\frac{\beta_\nu^2 + \beta_\nu^2}{2}} = \beta_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

Τελικά β_ν συγκλίνουσα. Αρκεί να δείξουμε ότι η α_ν είναι και άνω φραγμένη. Ξανά από (1):

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} < \frac{\beta_\nu + \beta_\nu}{2} = \beta_\nu < \beta_{\nu-1} < \dots < \beta_1 = \beta$$

Άρα και η α_ν συγκλίνουσα.

iii) Έστω $x := \lim \alpha_\nu = \lim \alpha_{\nu+1}$, $y := \lim \beta_\nu = \lim \beta_{\nu+1}$. Από την υπόθεση:

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu+1} &= \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \\ x &= \frac{x + y}{2} \Rightarrow \\ x &= y \end{aligned}$$

Άσκηση 9. (σ.242/ 12.) Να μελετηθεί ως προς σύγκλιση η ακολουθία α_ν με

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt[3]{\alpha_\nu^2 + 4}, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Υπολογίζουμε $\alpha_2 = \sqrt[3]{1^2 + 4} \approx 1.71$, $\alpha_3 = \sqrt[3]{1.71^2 + 4} \approx 1.91$, ... Θα δείξουμε ότι ένα άνω φράγμα είναι το 2. Ήδη ισχύει $\alpha_1 < 2$. Αν $\alpha_\nu < 2$ για κάποιο ν τότε

$$\alpha_{\nu+1} = \sqrt[3]{\alpha_\nu^2 + 4} < \sqrt[3]{2^2 + 4} = 2$$

Άρα $\alpha_\nu < 2 \forall \nu \in \mathbb{N}^*$. Απομένει να δείξουμε ότι α_ν γν. αύξουσα.

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu &\Leftrightarrow \\ \sqrt[3]{\alpha_\nu^2 + 4} > \alpha_\nu &\Leftrightarrow \\ \alpha_\nu^2 + 4 > \alpha_\nu^3 &\Leftrightarrow \\ \alpha_\nu^2 - 4 > \alpha_\nu^3 - 8 &\Leftrightarrow \\ (\alpha_\nu - 2)(\alpha_\nu + 2) > (\alpha_\nu - 2)(\alpha_\nu^2 + 2\alpha_\nu + 4) &\Leftrightarrow \\ (\alpha_\nu - 2)(\alpha_\nu^2 + \alpha_\nu + 2) < 0 \end{aligned}$$

Δείξαμε ήδη ότι $\alpha_\nu - 2 < 0$ και ισχύει $\alpha_\nu^2 + \alpha_\nu + 2 > 0$ άρα πράγματι $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$. Τελικά α_ν συγκλίνουν. Παίρνουμε όρια στην αναδρομική σχέση και αν $x := \lim \alpha_\nu$ τότε:

$$x = \sqrt[3]{x^2 + 4} \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα το 2 είναι και το όριο της.

Άσκηση 10. (σ.243/ 13.) Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\alpha_\nu = \ln \left(\frac{\nu^2 + 2\nu + 1}{\nu^2 + 2\nu} \right)$ και η ακολουθία β_ν με $\beta_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία β_ν είναι μονότονη και φραγμένη και έπειτα να βρείτε το όριο της.

$$\alpha_\nu = \ln \left(1 + \frac{1}{\nu^2 + 2\nu} \right)$$

Θα αποδείξουμε ότι α_ν γν. φθίνουσα (\searrow). Θεωρούμε τις ακολουθίες $\alpha_{1\nu} = \ln \nu$, $\alpha_{2\nu} = \frac{1}{\nu^2 + 2\nu}$. $\alpha_{2\nu} \searrow$ και $\alpha_{1\nu} \nearrow$ άρα $\alpha_\nu \searrow$. Το κάτω φράγμα της α_ν είναι 0:

$$\nu^2 + 2\nu + 1 > \nu^2 + 2\nu \Rightarrow \frac{\nu^2 + 2\nu + 1}{\nu^2 + 2\nu} > 1 \Rightarrow \alpha_\nu > 0$$

Το ίδιο και το όριο της $\lim \alpha_\nu = \lim \ln \left(\frac{\nu^2 + 2\nu + 1}{\nu^2 + 2\nu} \right) = 0$.

Η β_ν είναι γν. φθίνουσα (\searrow) ως άθροισμα γν. φθίνουσων, προφανώς κάτω φραγμένη από το 0 και έχει όριο

$$\lim \beta_\nu = \lim \alpha_1 + \lim \alpha_2 + \dots + \lim \alpha_\nu = 0$$

Άσκηση 11. (σ.257/ 5.) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

- i) $\alpha_\nu = \left(1 - \frac{2}{\nu^2} \right)^{3\nu}$
- ii) $\beta_\nu = \left(1 + \frac{2}{\nu} \right)^{\nu-1}$
- iii) $\gamma_\nu = \left(\frac{2\nu^2 + 1}{2\nu^2 + 3} \right)^{\nu+2}$
- iv) $\delta_\nu = \left(\frac{\nu+1}{\nu+\sqrt{2}} \right)^{\nu+1} \cdot \left(\frac{2\nu+\sqrt{3}}{2\nu+6} \right)^{2\nu-1}$

Χρησιμοποιούμε ότι

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (1)$$

$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{\nu} \right)^\nu = \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{\nu}{\alpha}} \right)^\nu \stackrel{\substack{\frac{\nu}{\alpha} \rightarrow \mu \\ \nu \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}}{\Leftrightarrow} \lim \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^{\mu\alpha} = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^\mu \right]^\alpha = e^\alpha \quad (2)$$

i)

$$\lim \left(1 - \frac{2}{\nu^2}\right)^\nu = \lim \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\nu}\right)^\nu \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\nu}\right)^\nu \stackrel{(2)}{=} e^{-\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}} = 1$$

$$\therefore \lim (\alpha_\nu) = \lim \left(1 - \frac{2}{\nu^2}\right)^{3\nu} = 1$$

ii)

$$\lim (\beta_\nu) = \lim \left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu-1} = \lim \left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right)^\nu / \lim \left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right)$$

Για το δεύτερο

$$\lim \left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right) = 1 \quad (3)$$

Για το πρώτο

$$\lim \left[\left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu^2} \right]^{\frac{1}{\nu}} = \lim \sqrt[\nu]{\left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu^2}} = \lim \sqrt[\nu]{e^2}$$

$$\therefore \lim \left[\left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right)^{\nu^2} \right]^{\frac{1}{\nu}} = 1 \quad (4)$$

$$\lim \sqrt[\nu]{e^2} \stackrel{\sigma. 170}{=} 1$$

(3), (4) $\Rightarrow \lim \beta_\nu = 1$.

iii)

$$\left(\frac{2\nu^2+1}{2\nu^2+3}\right)^{\nu+1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2\nu^2}\right)^\nu}{\left(1 + \frac{3}{\nu^2}\right)^\nu} \frac{1 + \frac{1}{2\nu^2}}{1 + \frac{3}{\nu^2}}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2\nu^2}\right) = \lim \left(1 + \frac{3}{\nu^2}\right) = 1 \quad (5)$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2\nu^2}\right)^\nu = 1, \quad \lim \left[\left(1 + \frac{1}{2\nu^2}\right)^{\nu^2} \right]^{\frac{1}{\nu}} = \lim \sqrt[\nu]{e^{\frac{1}{2}}} = 1 \quad (6)$$

$$\lim \left(1 + \frac{3}{\nu^2}\right)^\nu = \dots = \lim \sqrt[\nu]{e^3} = 1 \quad (7)$$

$$(5), (6), (7) \Rightarrow \lim (\gamma_\nu) = \lim \left(\frac{2\nu^2+1}{2\nu^2+3}\right)^{\nu+1} = 1$$

Άσκηση 12. (σ.257/ 6.)

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

- i) $\alpha_\nu = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\nu}\right)^{3\nu}$
- ii) $\alpha_\nu = \left(2 - \frac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu$
- iii) $\alpha_\nu = \left(1 + \frac{2\nu-1}{2\nu+3}\right)^{2\nu-1}$
- iv) $\alpha_\nu = \left(\frac{\nu+1}{\nu+\sqrt{2}}\right)^{\nu+1} \left(\frac{2\nu+\sqrt{3}}{2\nu+6}\right)^{2\nu-1}$

i)

ii) Θέτουμε $\nu+1 = \mu \therefore \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu = \infty$, τότε η α_ν ξαναγράφεται

$$\alpha_\nu = \left(2 - \frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\mu-1} = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu-1}$$

$$\therefore \lim (\alpha_\nu) = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\mu / \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \right] = e/1 = e$$

iii) Χρησιμοποιούμε την ανισότητα Βερνούλι

$$(1+x)^\nu = 1 + \nu x \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, x \geq -1 \quad (1.1)$$

$$\alpha_\nu = \left(1 + \frac{2\nu-1}{2\nu+3}\right)^{2\nu-1} > 1 + \frac{(2\nu-1)^2}{2\nu+3} \Rightarrow$$

$$\lim \alpha_\nu > \lim \left(1 + \frac{(2\nu-1)^2}{2\nu+3}\right) = \infty$$

iv)

$$\alpha_n = \left(\frac{\nu+1}{\nu+\sqrt{2}}\right)^{\nu+1} \left(\frac{2\nu+\sqrt{3}}{2\nu+6}\right)^{2\nu-1}$$

Θεωρούμε

$$\alpha_{1n} = \left(\frac{\nu+1}{\nu+\sqrt{2}}\right)^{\nu+1}, \quad \alpha_{2\nu} = \left(\frac{2\nu+\sqrt{3}}{2\nu+6}\right)^{2\nu-1}$$

Για την $\alpha_{1\nu}$

$$\mu := \nu + \sqrt{2}, \quad \lim(\mu) = \infty$$

$$\therefore \left(\frac{\mu - \sqrt{2} + 1}{\mu}\right)^{\mu - \sqrt{2} + 1} = \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\mu}\right)^{\mu - \sqrt{2} + 1}$$

$$\therefore \lim(\alpha_{1\nu}) = \lim \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\mu}\right)^\mu \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\mu}\right)^{-\sqrt{2} + 1} = \lim \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\mu}\right)^\mu = e^{1 - \sqrt{2}} \cong 0.661$$

Για την $\alpha_{2\nu}$

$$\mu := 2\nu + 6, \quad \lim(\mu) = \infty$$

$$\therefore \left(\frac{2\nu + \sqrt{3}}{2\nu + 6}\right)^{2\nu-1} = \left(\frac{\mu + \sqrt{3} - 6}{\mu}\right)^{\mu-7} = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}-6}{\mu}\right)^\mu}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}-6}{\mu}\right)^7}$$

$$\therefore \lim(\alpha_{2\nu}) = e^{\sqrt{3}-6} \cdot 1 \cong 0.014$$

Τελικά

$$\lim(\alpha_\nu) = \lim(\alpha_{1\nu}) \lim(\alpha_{2\nu}) \cong 0.093$$

2 Άλλες ασκήσεις

Άσκηση 13. (πηγή) Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\alpha_1 = \sqrt{6}$ για $\nu \geq 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{6 + \alpha_\nu}$. Δείξτε ότι συγκλίνει και ότι βρείτε το όριο της.

Με επαγωγή για μονοτονία. Ισχύει $\alpha_2 \geq \alpha_1$. Υποθέτουμε ότι $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$. Τότε

$$\alpha_{n+2} = \sqrt{6 + \alpha_{n+1}} \geq \sqrt{6 + \alpha_n} = \alpha_{n+1}$$

Άρα αύξουσα. Με επαγωγή για άνω φράγμα το 3. Ισχύει $\alpha_1 \leq 3$. Αν $\alpha_\nu \leq 3$ τότε

$$\alpha_{\nu+1} = \sqrt{6 + \alpha_\nu} \leq \sqrt{6 + 3} = 3$$

Άρα συγκλίνουσα, συνεπώς έχει ένα όριο L . Για να βρεθεί, παίρνουμε όρια στην αναδρομική της υπόθεσης.

$$L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L = 3$$

Άσκηση 14. (πηγή) Η ακολουθία x_ν με $x_\nu = \frac{[x\nu]}{\nu}$ συγκλίνει. Αν ναι, ως προς ποιον αριθμό $[.]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος.

Από τον ορισμό του ακέραιου μέρους, όπου $\{.\}$ το δεκαδικό:

$$x_\nu = \frac{x\nu - \{x\nu\}}{\nu} = x - \frac{\{x\nu\}}{\nu}$$
$$\therefore \lim x_\nu = x$$

, αφού $0 \leq \{x\nu\} < 1$.