Índice

1. Ejercicio 1

El volumen de un cono es 100 pulgadas cúbicas. Encuentre una función que modele la altura h del cono en términos de su radio r.

1.1. Desarrollo

Sea la fórmula del volumen del cono de la forma $V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Entonces, podemos igualar la cantidad buscada, en este caso, $100in^3$.

$$100in^3 = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Agrupamos los términos a despejar.

$$100in^3 = (\frac{\pi r^2}{3})h$$

Despejamos para simplificar nuestra incógnita, multiplicando ambos miembros de nuestra igualdad por $\frac{1}{(\frac{\pi r^2}{3})}$.

$$100in^3(\frac{1}{(\frac{\pi r^2}{3})}) = (\frac{\pi r^2}{3})(\frac{1}{(\frac{\pi r^2}{3})})h$$
$$100in^3(\frac{1}{(\frac{\pi r^2}{3})}) = (\cancel{\frac{\pi r^2}{3}})(\cancel{\frac{1}{(\frac{\pi r^2}{3})}})h$$

Reordenando nuestra ecuación y simplificando $\frac{1}{(\frac{\pi r^2}{3})}$, obtenemos lo siguiente:

$$h = 100in^3(\frac{3}{\pi r^2})$$
$$h = \frac{300in^3}{\pi r^2}$$

Por lo tanto, obtenemos la función de la forma $h(r)$, un modelo que depende y varia en función del radio:

$$\underline{h(r) = \frac{300in^3}{\pi r^2}}$$

1.2. Gráfica y tabla de datos del modelo Ej. 1

r	h
0.1	9549.29
0.2	2387.32
0.3	1061.03
0.4	596.83
0.5	381.97
0.6	265.25
0.7	194.88
0.8	149.20
0.9	117.89
1.0	95.49

r	h
1.1	78.91
1.2	66.31
1.3	56.50
1.4	48.72
1.5	42.44
1.6	37.30
1.7	33.04
1.8	29.47
1.9	26.45
2.0	23.87

Cuadro 1: Valores del modelo $h(r) = \frac{300in^3}{\pi r^2}$

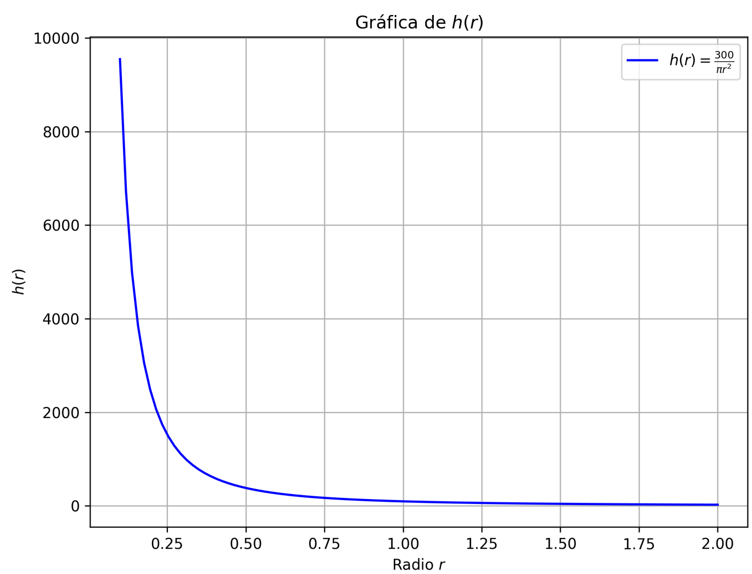

Figura 1: Gráfica del modelo $h(r) = \frac{300in^3}{\pi r^2}$

Podemos apreciar en la gráfica y tabla, que en efecto, para valores pequeños de r, los valores se crecen muy rápido, y por otro lado, los valores tienden a cero, mientras los valores de r aumentan. Con ello podemos concluir viendo la gráfica, que existe un volumen ideal en el segmento $r > 0{,}25$ y $r < 0{,}50$ donde existe un volumen posible físico, ya que, mayor o menor a esas cantidades, no existe un cono con esas características físicas en la realidad.

1.3. Utilidad del modelo Ej. 1

Diseño de recipientes: Este modelo podría ser útil en el diseño de recipientes cónicos, como tanques de almacenamiento, silos o tolvas. Los ingenieros podrían utilizar esta ecuación para calcular la altura necesaria de un tanque dado un volumen especí fico y un radio.

Industria alimentaria: En la producción de productos alimenticios, como helados o pasteles cónicos, este modelo podría ayudar a determinar la altura óptima para una cantidad de relleno específica, garantizando que el producto tenga la forma deseada y se utilicen los ingredientes de manera eficiente.

Drenaje de agua: En proyectos de ingeniería civil, como el diseño de sistemas de drenaje pluvial, este modelo podría ser útil para calcular la profundidad necesaria de los conos de drenaje para manejar un cierto volumen de agua de lluvia.

Iluminación y acústica: En la acústica arquitectónica o el diseño de salas de conciertos, este modelo podría ayudar a calcular la altura óptima de techos cónicos para controlar la reverberación y la dispersión del sonido. De manera similar, podría aplicarse en la iluminación de reflectores cónicos para enfocar la luz de manera eficiente.

Ahorro de material: En la fabricación de productos cónicos, como conos de helado o embudos, este modelo podría ayudar a reducir el desperdicio de material al garantizar que se utilice la cantidad justa de material para crear la forma deseada.

Aerodinámica y cohetes: En la aerodinámica y el diseño de cohetes, se utilizan conos para reducir la resistencia al avanzar en un fluido. Este modelo podría ser útil para calcular la forma óptima del cono para reducir la resistencia al aire o al agua.

2. Ejercicio 2

Un rectángulo tiene un área de 16 metros cuadrados. Encuentre una función que modele su perímetro P en términos de la longitud x de uno de sus lados.

2.1. Desarrollo

Sea el área de un rectángulo de la forma:

$$A(x, y) = xy$$

Igualamos nuestra formula a la cantidad buscada:

$$xy = 16$$

Ahora que tenemos nuestro modelo, vamos a simplificarlo en términos de una variable, para ello, debemos multiplicar ambos términos de la igualdad por $\frac{1}{x}$

$$(\frac{1}{x})xy = 16(\frac{1}{x})$$
$$y = \frac{16}{x}$$

El perímetro de un rectángulo está denotado por la fórmula $P(x, y) = 2x + 2y$ y podemos sustituir $y = \frac{16}{x}$ para determinar $P(x, y)$ en términos de sólo x, entonces:

$$P(x) = 2x + 2(\frac{16}{x})$$
$$\underline{P(x) = 2x + \frac{32}{x}}$$

Esta fórmula se puede expresar también como $\frac{2(x^2+16)}{x}$ sin embargo, para minimizar la cantidad de cómputo, se optó por usar la forma $2x + \frac{32}{x}$

2.2. Gráfica y tabla de datos del modelo Ej. 2

x	$P(x)$
0.1	320.20
0.305	105.44
0.511	63.70
0.716	46.14
0.921	36.58
1.126	30.66
1.332	26.69
1.537	23.90
1.742	21.85
1.947	20.33

x	$P(x)$
10	23.2
12	26.66
14	30.28
16	34.
18	37.77
20	41.6
22	45.45
24	49.33
26	53.23
28	57.14
30	61.06

Cuadro 2: Tabla de valores del modelo $P(x) = 2x + \frac{32}{x}$

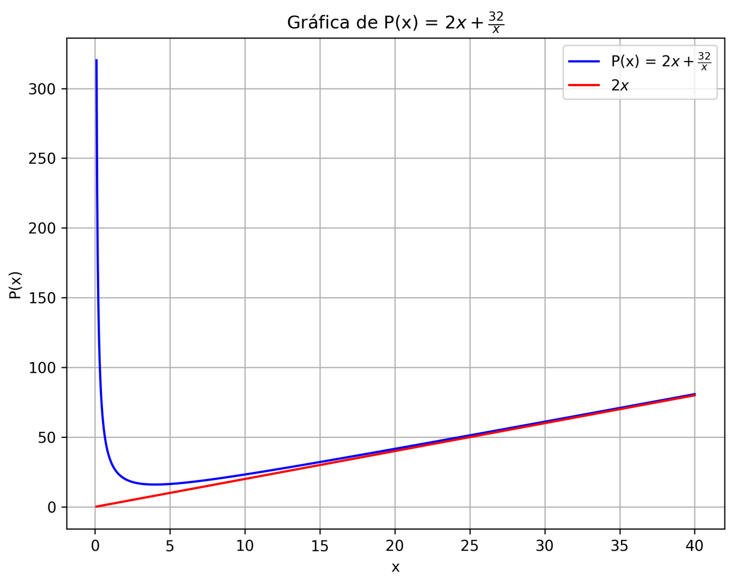

Figura 2: Gráfica del modelo $P(x) = 2x + \frac{32}{x}$

Podemos apreciar en la gráfica, un comportamiento muy parecido al modelo anterior, salvo por la diferencia que este no crece tan rápido para valores de x muy pequeños. Sin embargo mientras x crece, el término $\frac{32}{x}$ se anula, dando un comportamiento de crecimiento lineal muy parecido a la forma $2x$. Observando el comportamiento de la gráfica, podemos concluir que el perímetro de los rectángulos formados, posibles se comprende entre $x > 1$ y $x < 5$ en un modelo físico real.

2.3. Utilidad del modelo Ej. 2

Diseño de cercas: Si se está construyendo una cerca rectangular alrededor de un área, este modelo ayudaría a determinar cuánto material necesitas en función de la longitud de uno de los lados. Esto es importante para presupuestar el proyecto correctamente.

Construcción de marcos: En carpintería o construcción de edificios, se puede utilizar este modelo para calcular la cantidad de material necesario para hacer marcos de puertas y ventanas rectangulares, optimizando así el uso de recursos.

Costura y tela: En la industria de la confección, el modelo podría utilizarse para calcular cuánta tela se necesita para hacer cortinas o fundas para almohadas, por ejemplo, cuando se conoce la longitud de uno de los lados.

Optimización de recursos en agricultura: En la agricultura, especialmente en la construcción de cercas para áreas de cultivo, este modelo puede ayudar a calcular cuántos postes o vallas se necesitan en función del tamaño del campo.

Diseño de jardines: Los paisajistas pueden utilizar este modelo para planificar la cantidad de césped, adoquines u otros materiales necesarios para crear caminos o áreas rectangulares en un jardín.

Empaque de productos: En la industria del embalaje, se podría aplicar este modelo para calcular cuántos productos rectangulares caben en una caja de ciertas dimensiones, lo que es importante para la logística y el transporte.

3. Ejercicio 3

Del siguiente conjunto de datos:

t	y
0.0	0.56
0.5	0.45
1.0	0.29
1.5	0.13
2.0	0.05
2.5	-0.10
3.0	0.02
3.5	0.12
4.0	0.26
4.5	0.43
5.0	0.54
5.5	0.63
6.0	0.59

Cuadro 3: Datos de t y y

a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
b) Encuentre una función coseno de la forma $y = acos(\omega(t - c)) + b$ que modele los datos.
c) Grafique la función que encontró en el inciso (b) junto con la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta la curva a los datos?

3.1. Gráfica de dispersión

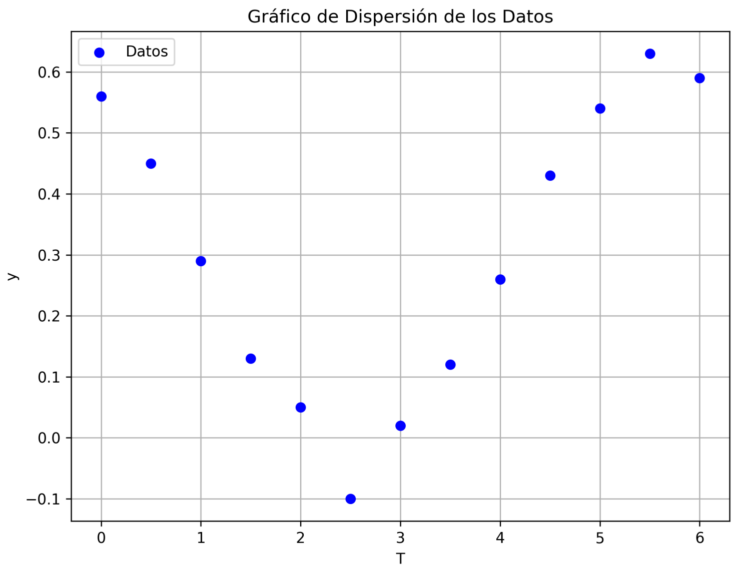

Figura 3: Gráfica de dispersión del modelo

3.2. Desarrollo

$b = desplazamiento\ vertical$
$b = \frac{1}{2}(vmax + vmin)$
$b = \frac{1}{2}(0{,}63 + (-0{,}1))$
$b = \frac{1}{2}(0{,}63 - 0{,}1)$
$b = \frac{1}{2}(0{,}62)$
$\underline{b = 0{,}31}$

$a = amplitud$
$a = \frac{1}{2}(vmax - vmin)$
$a = \frac{1}{2}(0{,}63 - (-0{,}1)$
$a = \frac{1}{2}(0{,}63 + 0{,}1)$
$a = \frac{1}{2}(0{,}64$
$\underline{a = 0{,}32}$

$\frac{2\pi}{\omega} = periodo$
$\frac{2\pi}{\omega} = 2(tvmax - tvmin)$
$\frac{2\pi}{\omega} = 2(5{,}5 - 2{,}5)$
$\frac{2\pi}{\omega} = 2(3)$
$\frac{2\pi}{\omega} = 6$
$\omega = \frac{2\pi}{6}$
$\underline{\omega = \frac{\pi}{3}}$

$c = desfase$
$c = timpo\ del\ valor\ max$
$\underline{c = 5{,}5}$
Ahora remplazando los valores en el modelo $y = acos(\omega(t - c)) + b$

$$\underline{y = 0{,}32cos(\frac{\pi}{3}(t - 5{,}5)) + 0{,}31}$$

3.3. Gráfica de dispersión y modelo

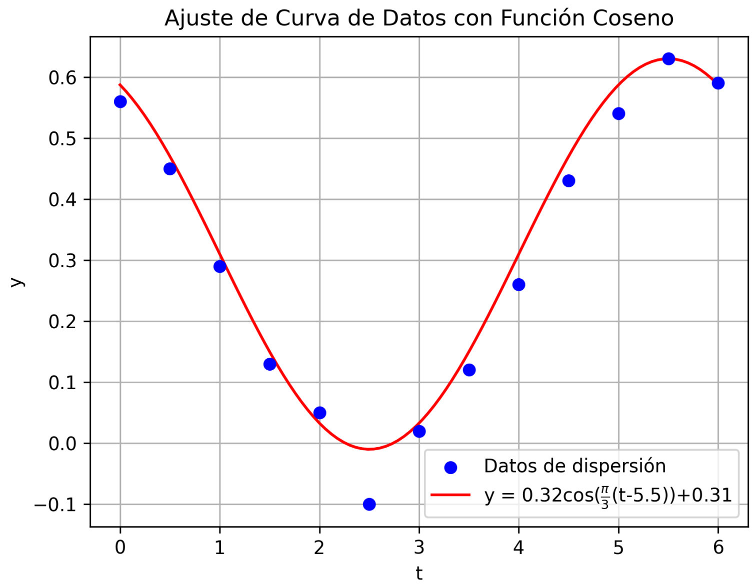

Figura 4: Gráfica de dispersión y modelo superpuestos

t	y
0.0	0.59
0.5	0.47
1.0	0.31
1.5	0.15
2.0	0.03
2.5	-0.01
3.0	0.03
3.5	0.15
4.0	0.31
4.5	0.47
5.0	0.59
5.5	0.63
6.0	0.59

Cuadro 4: Modelo $y = 0{,}32cos(\frac{\pi}{3}(t-5{,}5))+0{,}31$

t	y
0.0	0.56
0.5	0.45
1.0	0.29
1.5	0.13
2.0	0.05
2.5	-0.10
3.0	0.02
3.5	0.12
4.0	0.26
4.5	0.43
5.0	0.54
5.5	0.63
6.0	0.59

Cuadro 5: Nube de datos originales

Los valores parecen ajustarse bien, salvo por el segmento de (3.0, 0.02) hasta (5.0, 0.54) que difieren un poco del modelo creado. Dentro de estos datos, existe una anomalía en (2.5, -0.10), que puede ser explicada por la impredictibilidad de la naturaleza caótica.

3.4. Utilidad del modelo Ej. 3

Dinámica de Sistemas: El modelo podría utilizarse para describir oscilaciones o vibraciones en sistemas físicos o mecánicos. Por ejemplo, podría aplicarse para estudiar el movimiento de un péndulo, la vibración de una estructura o el comportamiento de un resorte.

Procesamiento de Señales: En ingeniería de señales, este modelo podría ser útil para analizar y sintetizar señales periódicas o funciones armónicas. Se podría aplicar en campos como la comunicación, la electrónica y la acústica.

Análisis de Datos Temporales: Cuando se trabaja con datos temporales, como series temporales en meteorología, finanzas o biología, este tipo de funciones coseno se utiliza para modelar patrones estacionales o periódicos en los datos.

Ingeniería Eléctrica: En ingeniería eléctrica, podría aplicarse para describir la corriente alterna (CA) en circuitos eléctricos. La CA se caracteriza por tener una forma de onda sinusoidal similar a la función coseno.

Procesamiento de Imágenes y Sonido: En el procesamiento de imágenes y sonido, las funciones coseno se utilizan en técnicas de compresión y transformación, como la Transformada de Fourier o la Transformada Discreta del Coseno (DCT).

Mecánica de Vibraciones: En ingeniería mecánica, este tipo de funciones se aplica en el análisis de vibraciones en maquinaria, vehículos y estructuras para predecir y mitigar problemas de vibración no deseada.

Simulación y Modelado: Puede utilizarse en simulaciones de sistemas físicos o naturales que exhiban comportamiento oscilatorio o periódico, como la dinámica de poblaciones en ecología.

Procesamiento de Señales Biomédicas: En aplicaciones biomédicas, este tipo de funciones puede emplearse para analizar señales biológicas periódicas, como las señales de ECG (electrocardiograma) o EEG (electroencefalograma).

4. Conclusiones Generales

¿Se les hizo difícil de aprender el tema?

No, al menos en lo personal, creo que los temas son preliminares y dentro de la base de conocimientos se facilita bastante tendiendo al alcance los recursos vistos en clase. Tanto complementario en internet, libros y conocimientos adquiridos a través de la práctica.

¿Qué opinan de las aplicaciones?

Son de suma importancia, son la base fundamental de temas más avanzados y sin ellos no podremos comprender por ejemplo cómo se comporta un modelo que oscila en un intervalo de tiempo o bien, como se comporta una tendencia, una tasa de crecimiento o decrecimiento. Creo que se cumplieron muy bien los objetivos del curso para esta unidad y los métodos son muy efectivos para trabajar con álgebra y trigonometría.