Cel ćwiczenia:

Znalezienie i wykreślenie wielomianów interpolacyjnych stopnia n, $W_n(x)$, na przedziale $x \in \langle -1,1 \rangle$ dla funkcji $y(x) = \frac{1}{1+50x^2}$ oraz własnych $y(x) = \frac{1}{1+5x^2}$ i $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

- Jednorodnych węzłów interpolacji, tj. $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1} (i = 0, \dots, n)$
- $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$ $(i = 0, \dots, n)$

Porównanie zachowania tych wielomianów dla dużego n oraz z innymi własnymi funkcjami.

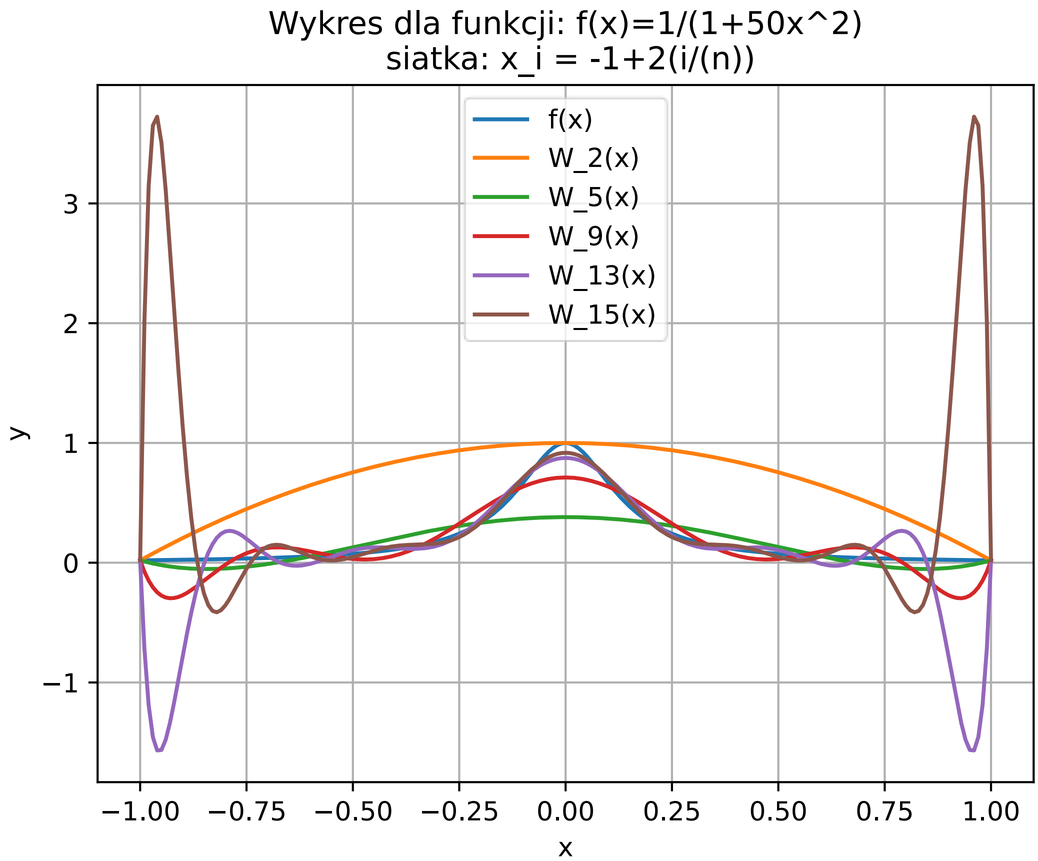
Teoria wykorzystana w zadaniu:

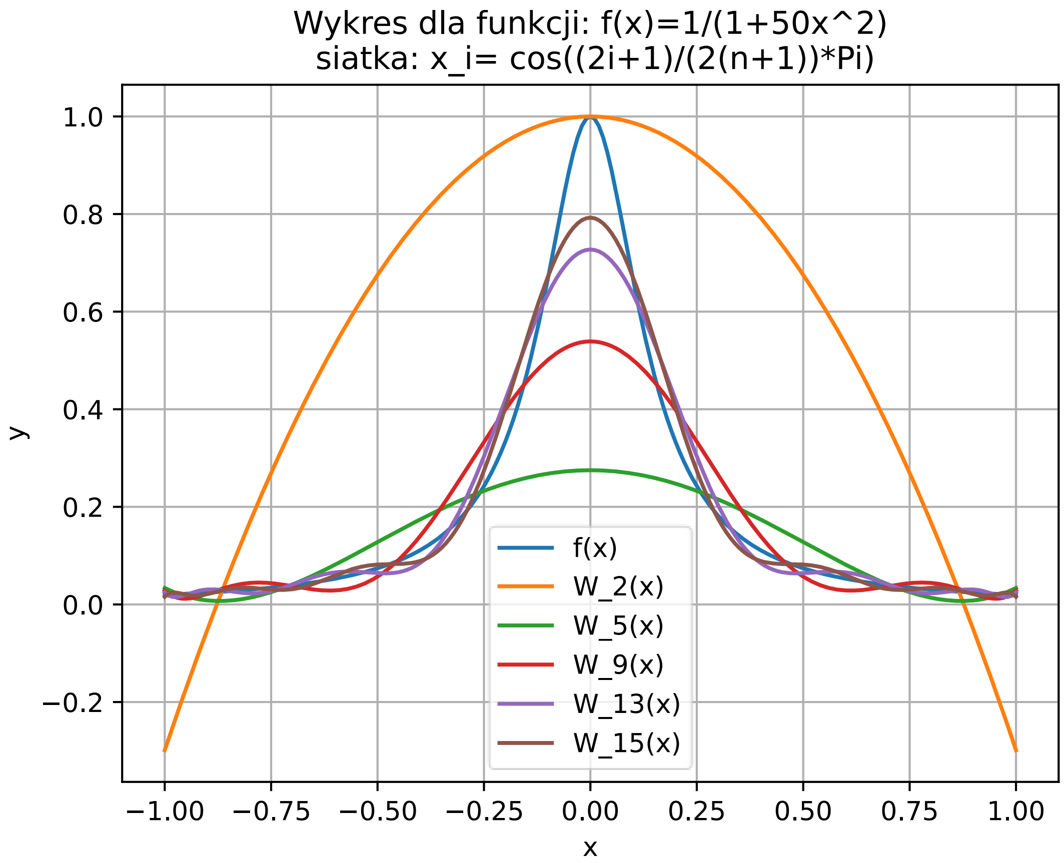
Interpolacja to numeryczna metoda pozwalająca na budowanie funkcji interpolacyjnej. Funkcja ta przechodzi przez określone punkty, zwane węzłami interpolacji, których wartości są wcześniej ustalone. W ramach zadania będziemy się zajmować interpolacją wielomianową, co oznacza przybliżanie funkcji za pomocą wielomianów. Do wyliczenia wartości wielomianu będziemy korzystać ze wzorów interpolacyjnego Lagrange'a:

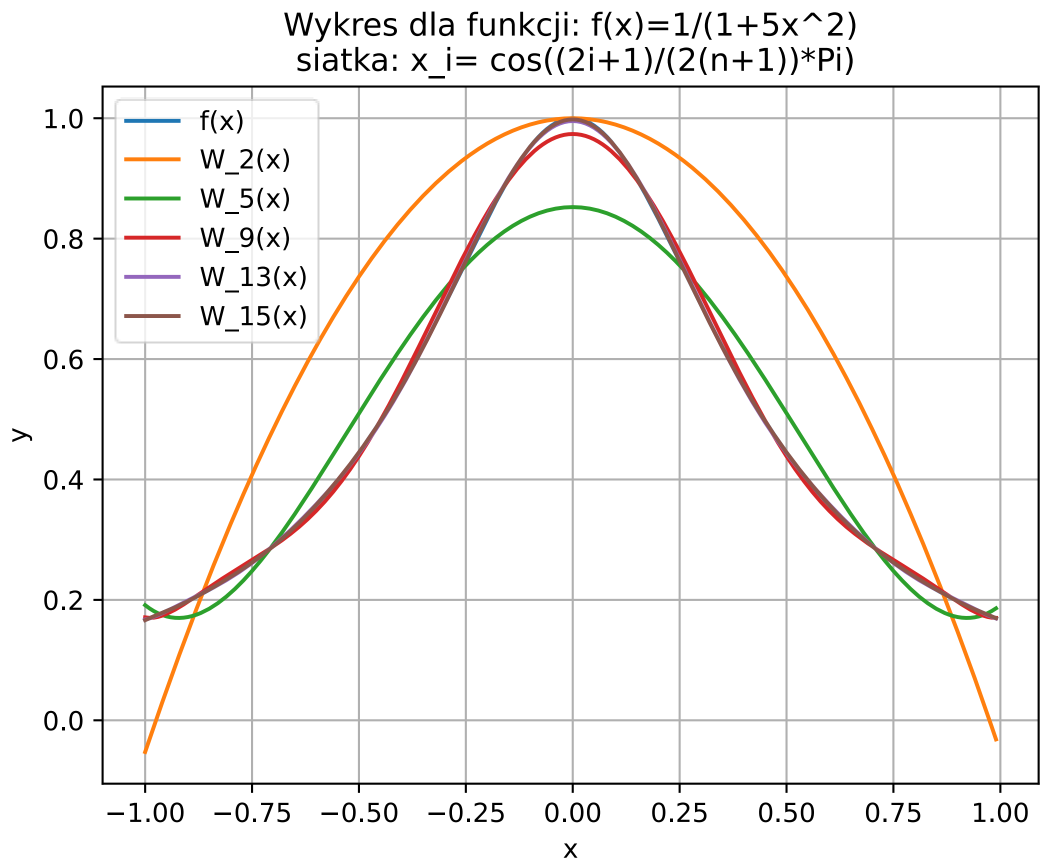
$$W_n(x) = \sum_j y_j \Phi_j(x)$$

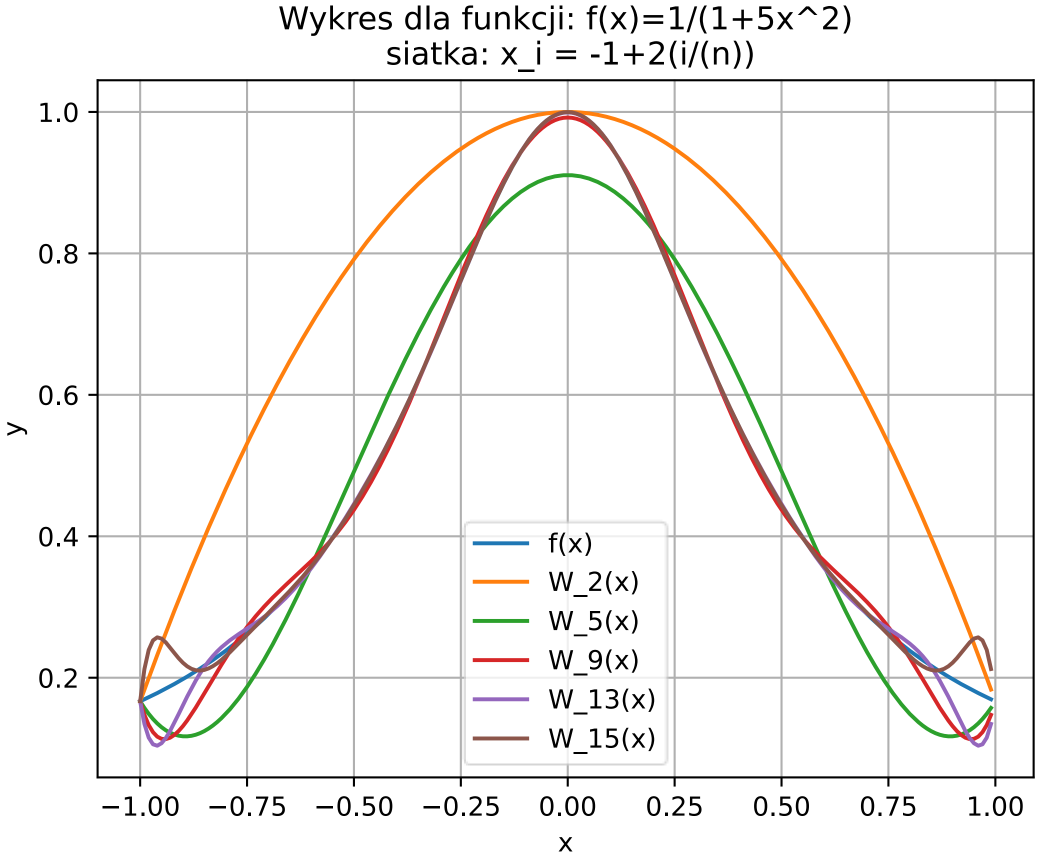
$$\Phi_j(x) = \prod_{k \neq k} \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$$

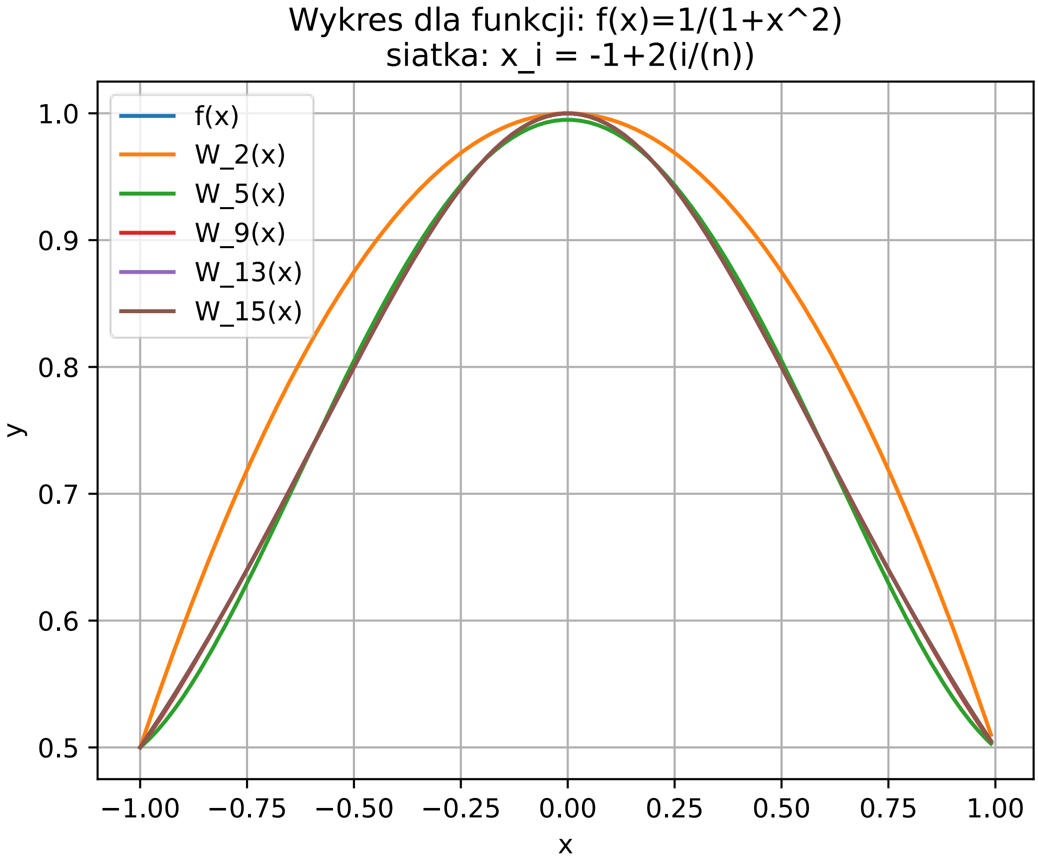
Wyniki:

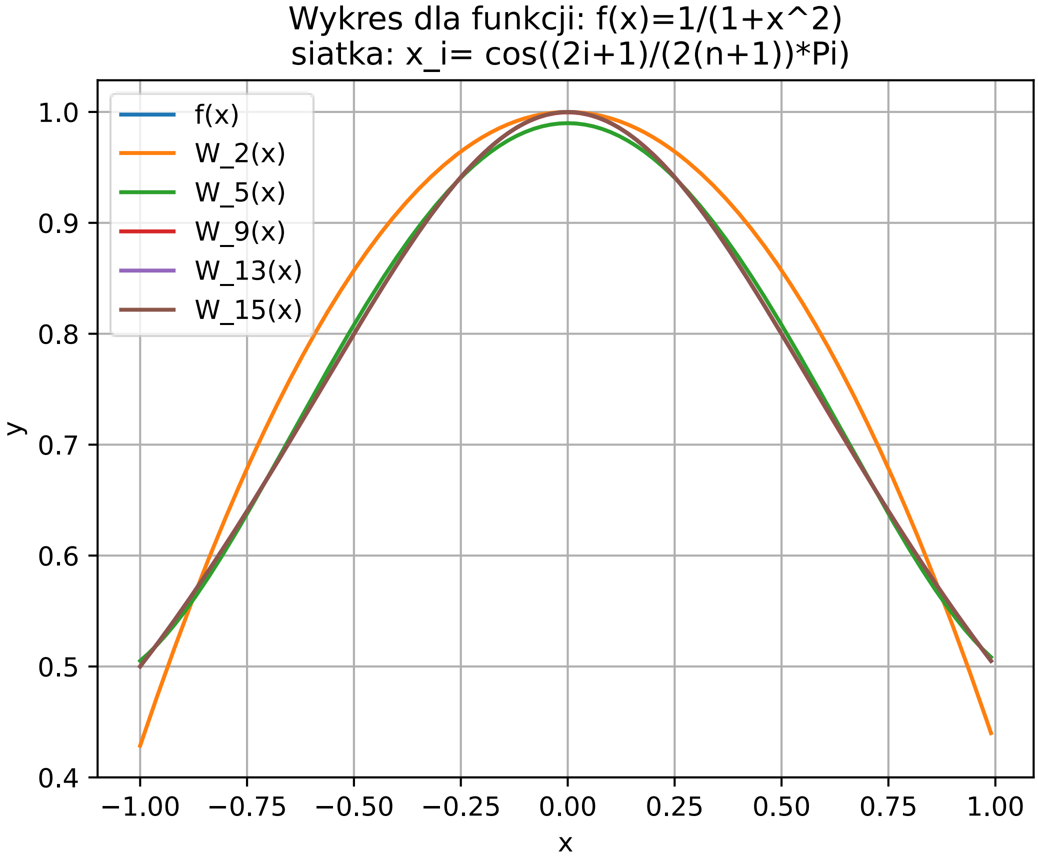



Wykres dla funkcji: f(x)=1/(1+50x^2)
siatka: x_i= cos((2i+1)/(2(n+1))*Pi)
f(x)
W_2(x)
W_5(x)
W_9(x)
W_13(x)
W_15(x)
y
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00


Wykres dla funkcji: f(x)=1/(1+5x^2)
siatka: x_i= cos((2i+1)/(2(n+1))*Pi)
f(x)
W_2(x)
W_5(x)
W_9(x)
W_13(x)
W_15(x)
y
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00


Wykres dla funkcji: f(x)=1/(1+5x^2)
siatka: x_i = -1+2(i/(n))
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x
f(x)
W_2(x)
W_5(x)
W_9(x)
W_13(x)
W_15(x)

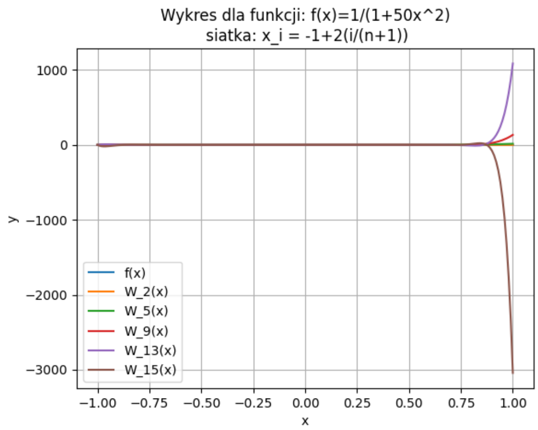

Wykres dla funkcji: f(x)=1/(1+x^2)
siatka: x_i = -1+2(i/(n))
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
y
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x
f(x)
W_2(x)
W_5(x)
W_9(x)
W_13(x)
W_15(x)



Wnioski:

Możemy zauważyć, początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n, zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów, jest to efekt Rungego, aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Ponadto na podstawie trzech przestawionych funkcji, widzimy, że wraz z zmniejszaniem mianowniku funkcji poprawia się jakość interpolacji oraz zmniejsza się efekt Rungego.

Uwaga do zadania:



(Początkowo zrobiłem wykresy dla dystrybucji jednorodnej z n+1 w mianowniku, lecz wykres jaki powstawał był zupełnie nieczytelny przez bardzo duży efekt Rungego , dlatego zamieniłem n+1 na n, by poprawić jego czytelność)