Cel ćwiczenia:

Obliczenie macierzy $y = A^{-1}x$ uważając na fakt, iż macierz A jest rzadka. Mającą niezerowe element na diagonali, bez użycia procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej oraz pakietów algebry komputerowej.

Teoria wykorzystana w zadaniu:

Musimy obliczyć macierz odwrotną, których zazwyczaj się unika rozwiązując problemy numeryczne, dlatego mnożymy obustronnie przez A i otrzymujemy:

$$y = A^{-1}x \leftrightarrow Ay = x$$

Należy zauważyć, że macierz A ma specyficzną strukturę, gdzie większość elementów to zera, a jedynie cztery diagonale zawierają wartości. Możemy zastosować w takim wypadku macierz wstęgową. Następnie wprowadzając rozkład LU minimalizujemy naszą złożoność czasową i przy użyciu Algorytm Dollittle'a:

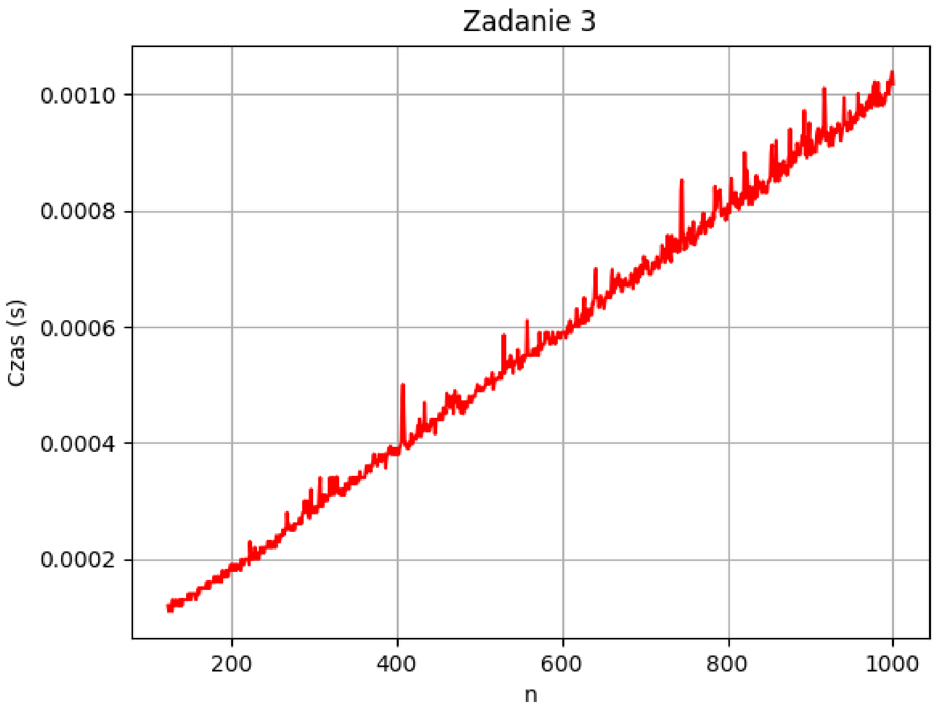
$$U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k<i} L_{ik} U_{kj}$$

$$L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k<j} L_{ik} U_{kj}}{U_{ij}}$$

Rozkładamy na macierze trójkątne, górną i dolną.

Wyniki:

(Szumy spowodowane są faktem, iż komputer wykonując program miał inne procesy działające w tle, które nie pozwalały działać z taką samą prędkością dla każdego n, przez co powstały wykres nie jest idealnie liniowy)



Szukane rozwiązanie:

[0.448700827728733, 1.4132732869357947, 2.1348778535462736, 2.8690132654396248, 3.5914885705595205, 4.311604959915503, 5.029827173723323, 5.747011462584994, 6.463503693914558, 7.179525964548697, 7.8952125968955915, 8.610651859797315, 9.325903619364162, 10.041009954626537, 10.756001271894783, 11.470900080737994, 12.185723394049369, 12.900484305313817, 13.615193053266005, 14.329857758065131, 15.044484941235352, 15.759079899902147, 16.47364698076612, 17.18818978377055, 17.902711315621058, 18.617214106977666, 19.331700302956037, 20.046171733762908, 20.76062997036838, 21.47507636878333, 22.189512105570603, 22.903938206548368, 23.6183555701598, 24.332764986629712, 25.047167153767735, 25.761562690082965, 26.475952145728595, 27.190336011683936, 27.904714727496145, 28.61908868783829, 29.33345824808956, 30.047823729103516, 30.762185421298863, 31.476543588182352, 32.19089846939369, 32.90525028334641, 33.61959922952588, 34.33394549049516, 35.048289233651346, 35.762630612767495, 36.4769697693505, 37.19130683383959, 37.90564192666726, 38.6199751592003, 39.33430663457682, 40.04863644845216, 40.762964689665075, 41.47729144083417, 42.19161677889273, 42.905940775569235, 43.62026349782013, 44.33458500822004, 45.04890536531427, 45.763224623938, 46.47754283550541, 47.19186004827236, 47.90617630757509, 48.62049165604775, 49.334806133820685, 50.04911977870149, 50.76343262634067, 51.47774471038327, 52.192056062607854, 52.9063667130542, 53.62067669014054, 54.33498602077156, 55.04929473043772, 55.76360284330703, 56.47791038230969, 57.192217369216245, 57.906523824710035, 58.62082976845425, 59.335135219153926, 60.049440194613666, 60.763744711791205, 61.47804878684707, 62.192352435190934, 62.90665567152471, 63.62095850988271, 64.3352609636691, 65.04956304569288, 65.76386476820053, 66.47816614290662, 67.19246718102224, 67.90676789328191, 68.62106828996849, 69.33536838093679, 70.0496681756356, 70.76396768312829, 71.47826691211242, 72.19256587093781, 72.90686456762393, 73.62116300987596, 74.33546120510012, 75.04975916041795, 75.76405688267984, 76.47835437847795, 77.19265165415811, 77.90694871583132, 78.62124556938441, 79.33554222049035, 80.04983867461782, 80.76413493704023, 81.47843101284448, 82.19272690693916, 82.90702262406211, 83.62131816878798, 84.33561354553508, 85.04990875857204, 85.76420381203626, 86.47849870460276, 87.19279247126808, 87.90778524137869, 88.68203579310355]

Wyznacznik = 6141973498.857843

Wnioski:

Własna implementacja działa znacznie szybciej niż program z wykorzystaniem biblioteki numpy, a wyniki wychodzą niemal identyczne w tych dwóch sposobach. Bardzo niewielka różnica spowodowana jest precyzją obliczeń. Podsumowując, przekształcenie macierzy A w macierz trójkątną przy użyciu rozkładu LU oraz zastosowanie algorytmów forward i backward substitution pozwala na rozwiązanie problemu w optymalny sposób.