Cel ćwiczenia:

Numeryczne znalezienie pierwiastka x^* równań $f(x) = 0$ i $g(x) = 0$ dla:

- $f(x) = \sin(x) - 0.4$
- $g(x) = f(x)^2 = (sin\,(x) - 0.4)^2$
- $u(x) \equiv \frac{g(x)}{g'(x)}$.

na przedziale $x\epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ metodami: bisekcji, falsi, siecznych i Newtona. Odnalezienie ile kroków potrzeba, żeby osiągnąć rozwiązanie z założoną z góry dokładność przy użyciu poszczególnych metod. Zbadanie i zwizualizowanie jak zachowuje się ciąg $x_i - x^*$ dla metod oraz funkcji f, g oraz u.

Teoria wykorzystana w zadaniu:

- Metoda bisekcji (połowienia, równego podziału):

Metoda bisekcji polega na dzieleniu przedziału na pół i sprawdzaniu, po której stronie pierwiastek funkcji się znajduje. Metoda ta jest iteracyjna i prostsza do zrozumienia, ale zwykle wolniejsza niż pozostałe metody. Wzór iteracyjny:

$$c = (a + b)/2$$

Jeśli $f(a) * f(c) < 0$, to $b = c$

Jeśli $f(b) * f(c) < 0$, to $a = c$

Powtarzaj aż $|b - a| < \varepsilon$, gdzie ε to zadana dokładność

- Metoda falsi (reguła rzekomej pozycji):

Metoda falsi jest podobna do metody bisekcji, ale zamiast dzielić przedział na pół, używa przeciwnych punktów na funkcji, aby przybliżyć pierwiastek. Jest bardziej efektywna niż metoda bisekcji, ale bardziej skomplikowana. Wzór iteracyjny:

$$x = \frac{(a * f(b) - b * f(a))}{(f(b) - f(a))}$$

Jeśli $f(a) * f(x) < 0$, to $b = x$

Jeśli $f(b) * f(c) < 0$, to $a = x$

Powtarzaj aż $|b - a| < \varepsilon$, gdzie ε to zadana dokładność

- Metoda siecznych (reguła siecznych):

Metoda siecznych jest iteracyjną metodą, która przybliża pochodną funkcji, korzystając z dwóch punktów na funkcji. Jest bardziej efektywna niż metoda bisekcji, ale wymaga początkowych przybliżeń. Wzór iteracyjny:

$$x[i + 1] = x[i] - \frac{f(x[i]) * (x[i] - x[i - 1])}{f(x[i]) - f(x[i - 1])}$$

Powtarzaj aż $|x[i + 1] - x[i]| < \varepsilon$, gdzie ε to zadana dokładność

- Metoda Newtona (metoda stycznych):

Metoda Newtona wykorzystuje pochodną funkcji do znajdowania pierwiastków. Jest efektywna, ale wymaga początkowych przybliżeń i może być niestabilna w niektórych przypadkach. Wzór iteracyjny:

$$x[i+1] = x[i] - \frac{f(x[i])}{f'(x[i])}$$

Powtarzaj aż $|x[i+1] - x[i]| < \varepsilon$, gdzie ε to zadana dokładność

Wyniki:

arcsin = 0.41151684606748806

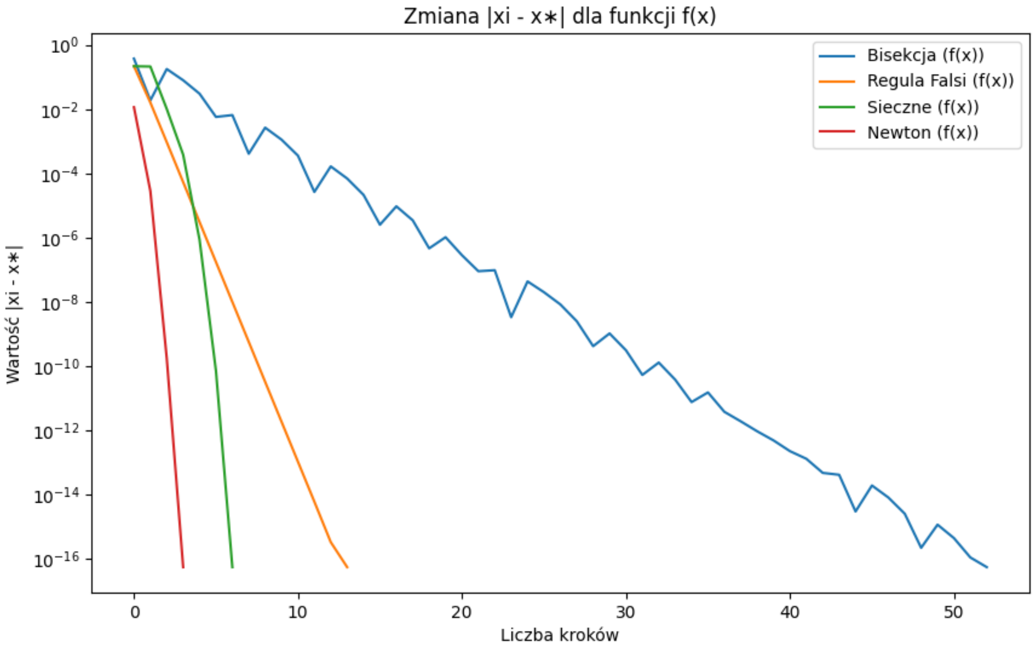
Wyniki dla funkcji f(x) i tolerancji 1e-16:

Bisekcja: 0.41151684606748806 Liczba kroków: 53

Regula Falsi: 0.411516846067488 Liczba kroków: 13

Sieczne: 0.411516846067488 Liczba kroków: 6

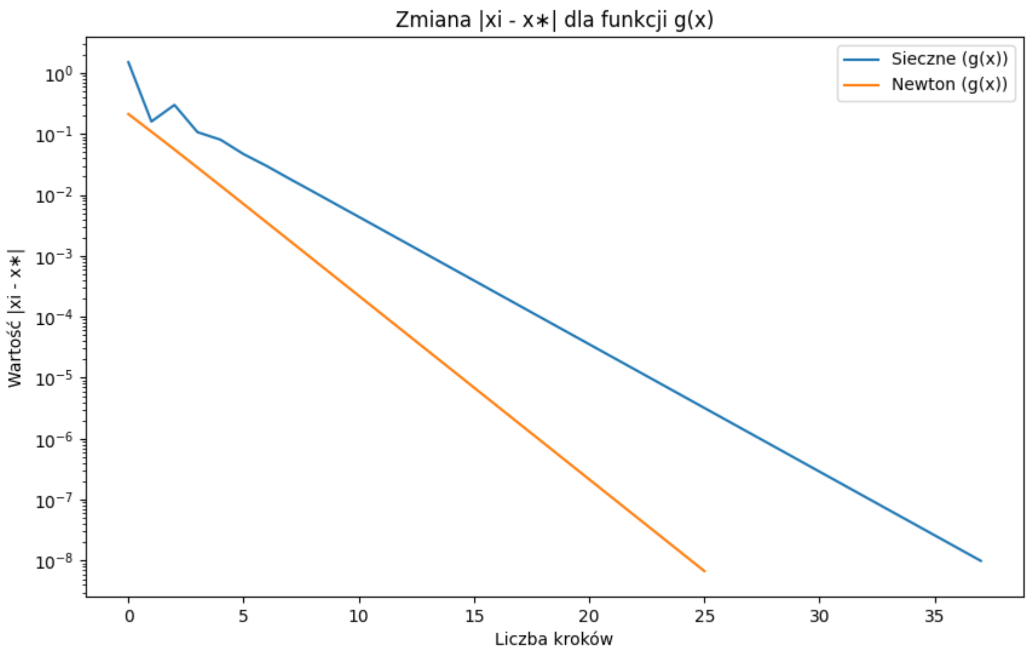
Newton: 0.411516846067488 Liczba kroków: 3



Wyniki dla funkcji g(x) i tolerancji 1e-8:

Sieczne: 0.41151683611647644 Liczba kroków: 37

Newton: 0.41151683930856375 Liczba kroków: 25

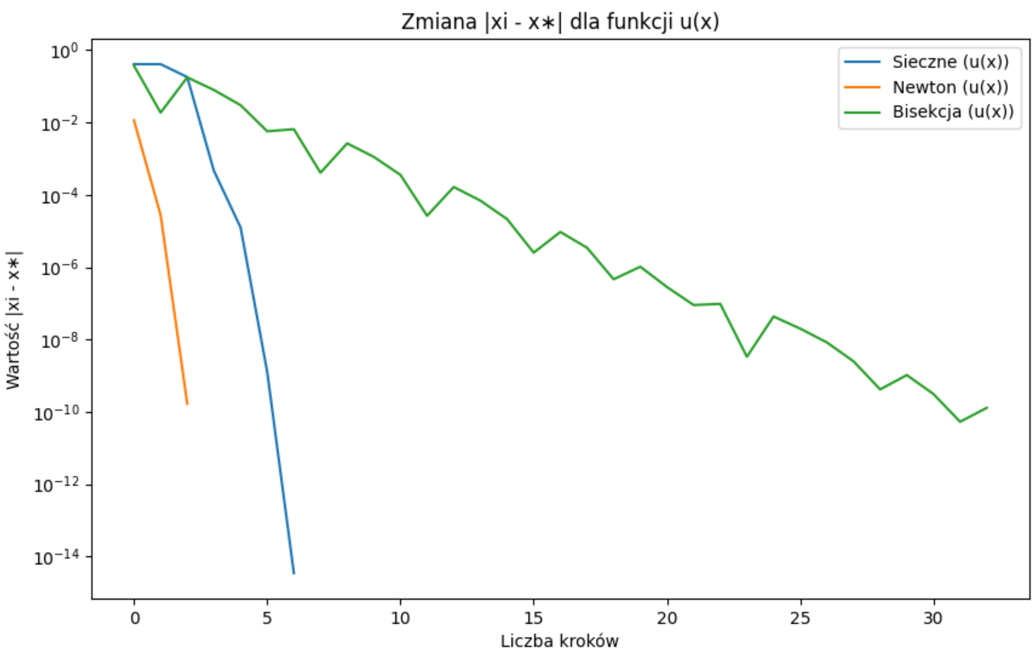


Wyniki dla funkcji u(x) i tolerancji 1e-10:

Sieczne: 0.41151684606749156 Liczba kroków: 5

Newton: 0.4115168462359344 Liczba kroków: 2

Bisekcja: 0.41151684610557304 Liczba kroków: 33



Wnioski:

Wszystkie metody działają poprawnie, gdyż ich wynik jest zgodny z oczekiwaną wartością z zadaną tolerancją. W każdym przypadku najszybszą metodą okazała się metoda Newtona. Dla funkcji g(x) nie możliwe jest wykorzystanie metody bisekcji i Falsi, ponieważ funkcje te nie zmieniają znaku. Dla funkcji u(x) nie jest możliwe wykonanie Fasli, ponieważ w punkcie $\frac{\pi}{2}$ znajduje się asymptota, więc aby móc wykorzystać tą metodę musielibyśmy zmienić przedział np. na [0, 1.4]. Metoda siecznych jest drugą najlepszą z metod pod względem szybkości, natomiast dużym jej plusem jest to, że wymaga mniej obliczeń w porównaniu z metodą Newtona, więc w przypadku bardziej złożonych funkcji będzie ona lepsza niż Newton. Metoda bisekcji okazała się zdecydowanie wolniejsza od pozostałych.