Cel ćwiczenia:

Przy wykorzystaniu metody potęgowej znalezienie największej co do modułu wartości własnej macierzy A oraz odpowiadający jej wektor własny. Zilustrowanie na wykresie zbieżności metod w funkcji ilości wykonanych iteracji. Przy wykorzystaniu algorytmu QR bez przesunięć, znaleźć wszystkie wektory własne macierzy M. Przeanalizowanie i przedstawienie na wykresie, jak elementy diagonalne macierzy A_i ewoluują w funkcji indeksu i. Odpowiedzenie na pytanie czy zbieżność powyższych algorytmów jest zadowalająca i jak można ją usprawnić.

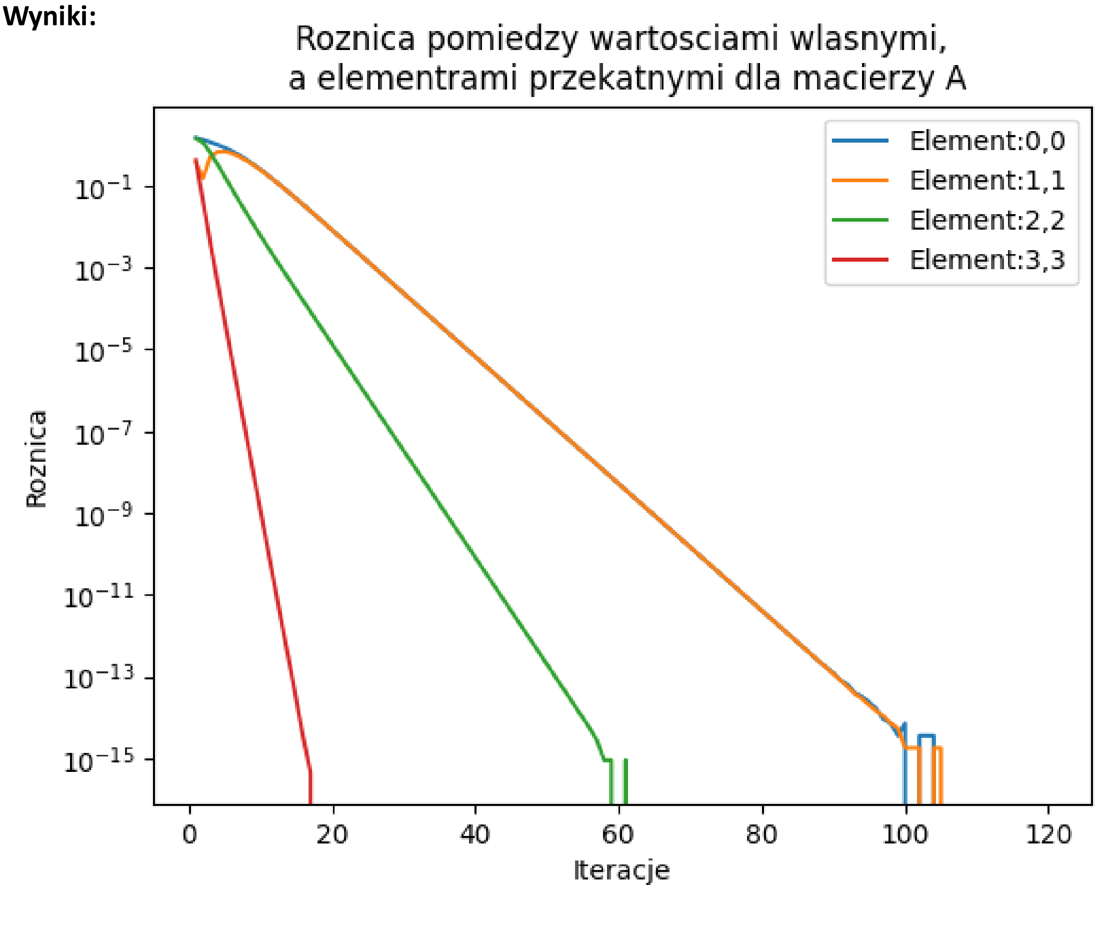
Teoria wykorzystana w zadaniu:

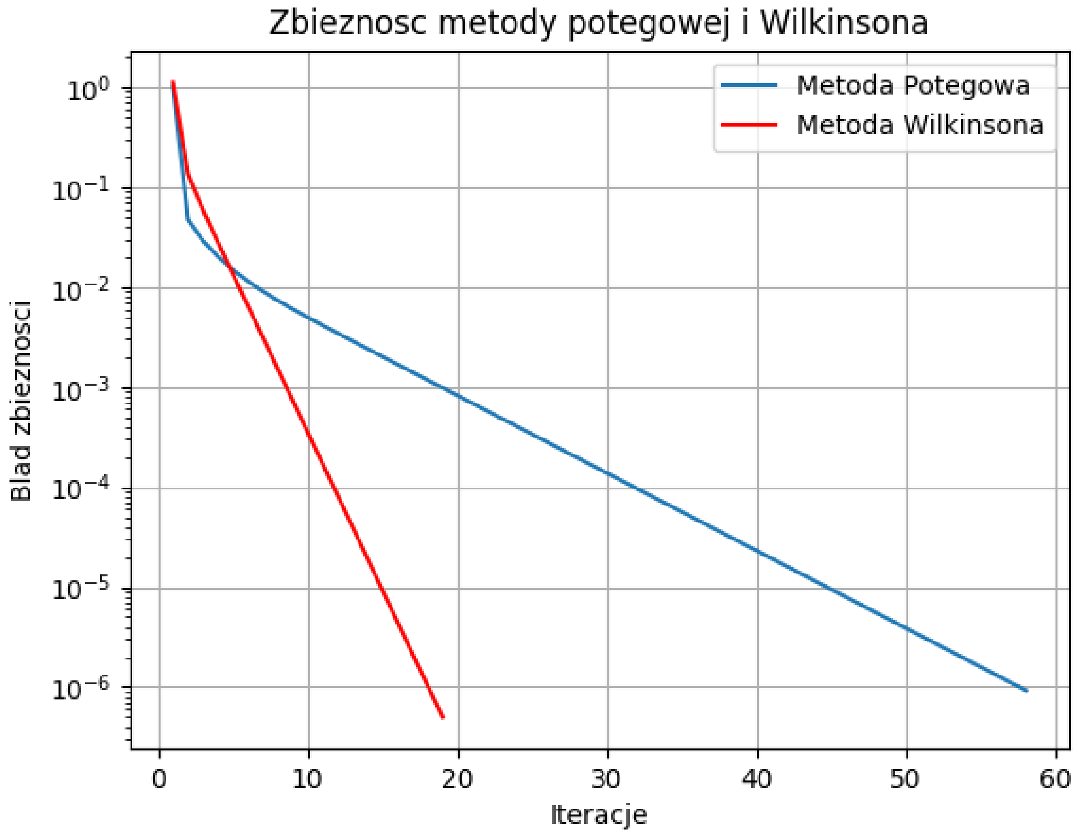
Metoda potęgowa do znajdowania dominującej wartości własnej macierzy polega na rozpoczęciu od inicjalizacji wektora początkowego (może to być losowy wektor lub wektor wypełniony jedynkami), a następnie iteracyjnym mnożeniu macierzy A przez wektor x i normalizacji wyniku, aby jego norma wynosiła 1: $x = \frac{A*x}{||A*x||}$. Proces ten jest kontynuowany aż do osiągnięcia zbieżności, zazwyczaj wyznaczonej na podstawie małej zmiany wektora własnego między kolejnymi iteracjami lub po osiągnięciu maksymalnej liczby iteracji. Po zakończeniu iteracji, wartość własna jest przybliżeniem dominującej wartości własnej macierzy, a wektor x odpowiada jej wektorowi własnemu.

Rozkład QR to rozkładanie macierzy na iloczyn dwóch macierzy: macierzy ortogonalnej (Q) i macierzy trójkątnej górnej (R), uzyskując $A = QR$. W naszym przypadku macierz A będzie to macierz zawierająca różnice między elementami diagonali zadanej macierzy M oraz wartościami własnymi każdej iteracji.

Metoda Wilkinsona to metoda służąca do poprawiania przybliżonych wartości własnych macierzy. Działanie tej metody polega na iteracyjnym poprawianiu istniejących przybliżeń wartości własnych w celu zbliżenia się do dokładnych wartości własnych. Kluczowym elementem jest obliczanie reszty między macierzą pierwotną, a przybliżonymi wartościami własnymi, a następnie korzystanie z rozkładu QR do znalezienia nowych i bardziej dokładnych przybliżeń. Ten proces jest powtarzany do momentu osiągnięcia zbieżności lub uzyskania zadowalającej dokładności przybliżeń.

Wyniki:





Dominująca wartość własna(dla podpunktu a): 9.742393758842107

Wektor własny (dla podpunktu a): [0.3327265892506157, 0.579734285789243, 0.628566072807256, 0.3976252844095202]

Wartości własne (dla podpunktu b): [9.74239376 8.14771771 6.03172371 2.07816482]

Wartości obliczone bezpośrednio przy użyciu biblioteki:
Wartości własne macierzy M: [9.74239376 8.14771771 6.03172371 2.07816482]

Największa co do modułu wartość własna: 9.742393758888332

Dominujący wektor własny: [-0.33272255 -0.57973369 -0.62856775 -0.39762688]

Wnioski:

Zarówno metoda potęgowa, jak i algorytm QR pozwalając dobrze określić wektory własne. Odpowiadając na pytanie z podpunktu(c) możemy usprawnić działanie stosując metodę Wilkinsona, przez co ilości iteracji dla naszej macierzy zmniejszyła się około 3 krotnie(dla innych macierzy stosunek będzie inny), a uzyskany wynik będzie taki sam. W algorytmie QR możemy zauważyć, że dla naszej zadanej macierzy najszybciej zbiega element(3,3), potem(2,2), a dopiero potem pozostałe, jest zapewne to spowodowane dużą różnicą wartości w macierzy M, a odpowiadającym im wartością własnym.