Cel ćwiczenia:

Porównanie metod Jacobiego i Gaussa-Seidela, poprzez rozwiązanie układu równań dla N = 124. Przedstawienie graficzne różnicy pomiędzy dokładnym rozwiązaniem, a jego przybliżeniami w kolejnych iteracjach wybierając kilka zestawów punktów startowych

Teoria wykorzystana w zadaniu:

Metoda Jacobiego jest zbieżna, gdy macierz A jest silnie diagonalnie dominująca, co oznacza, że element na głównej diagonali musi być większy niż suma pozostałych elementów w danym wierszu. Metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna gdy macierz jest symetryczna i dodatnio określona.

Dzięki zastosowaniu iteracyjnej metody Jacobiego uzyskujemy następujący wzór dla zadanej macierzy:

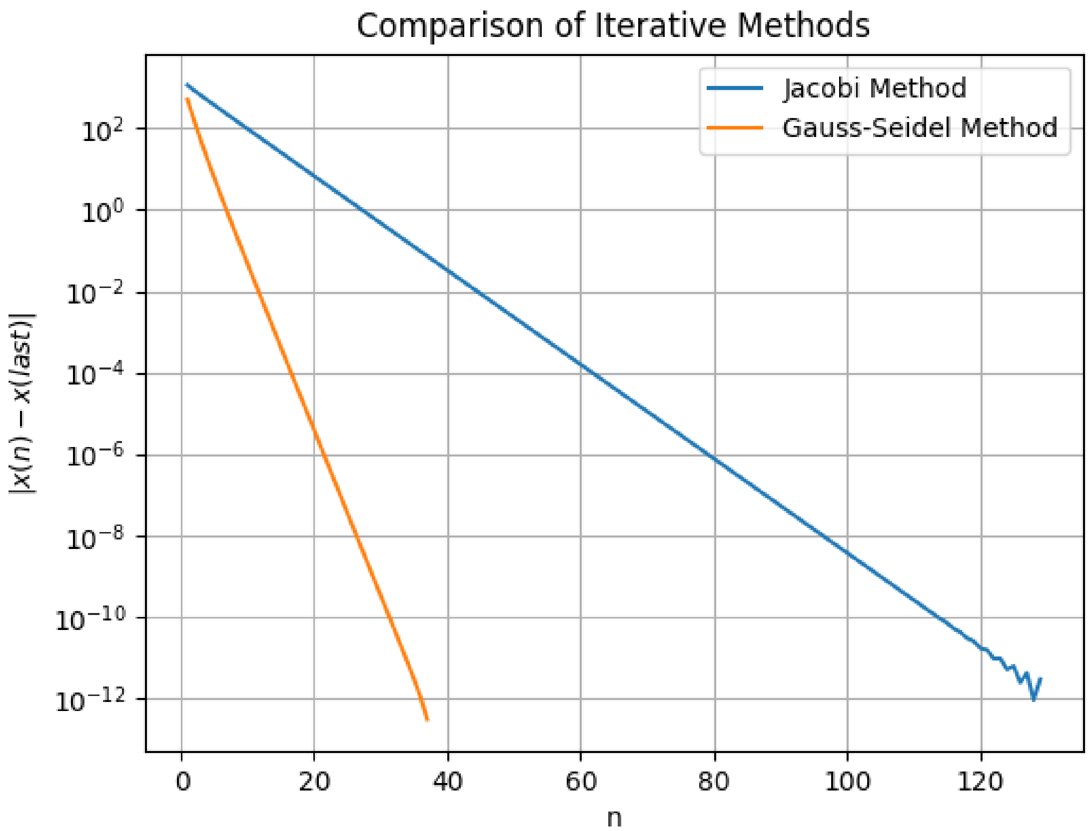
$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i - x_{i-1}^n - 0.15x_{i-2}^n - x_{i+1}^n - 0.15x_{i+2}^n}{3}$$

Dzięki zastosowaniu iteracyjnej metody Gaussa-Seidela: uzyskujemy następujący wzór:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i - x_{i-1}^{n+1} - 0.15x_{i-2}^{n+1} - x_{i+1}^n - 0.15x_{i+2}^n}{3}$$

Do określenia zbieżności zastosowana została norma euklidesowa wektorów.

Wyniki:



[0.17801523406350728, 0.38116168368748565, 0.5652840941469591, 0.7547708048478209, 0.9434196260962083, 1.1320640844028884, 1.3207574555923471, 1.509433629172526, 1.6981131715561697, 1.8867924844921544, 2.075471688855647, 2.2641509449084425, 2.452830188663298, 2.641509433882626, 2.830188679274737, 3.0188679245224557, 3.2075471698119036, 3.396226415094631, 3.584905660377396, 3.7735849056605257, 3.9622641509435232, 4.1509433962265465, 4.3396226415095684, 4.528301886792589, 4.71698113207561, 4.905660377358629, 5.094339622641649, 5.2830188679246675, 5.471698113207687, 5.660377358490707, 5.849056603773726, 6.0377358490567445, 6.226415094339765, 6.415094339622784, 6.6037735849058015, 6.792452830188821, 6.98113207547184, 7.1698113207548575, 7.358490566037876, 7.547169811320895, 7.7358490566039135, 7.924528301886931, 8.113207547169951, 8.301886792452969, 8.490566037735986, 8.679245283019007, 8.867924528302025, 9.056603773585042, 9.24528301886806, 9.43396226415108, 9.622641509434095, 9.811320754717116, 10.000000000000133, 10.188679245283149, 10.377358490566168, 10.566037735849187, 10.754716981132205, 10.943396226415224, 11.132075471698242, 11.320754716981261, 11.50943396226428, 11.698113207547296, 11.886792452830315, 12.075471698113335, 12.264150943396352, 12.452830188679371, 12.641509433962389, 12.830188679245405, 13.018867924528422, 13.207547169811441, 13.39622641509446, 13.584905660377478, 13.773584905660497, 13.962264150943517, 14.150943396226532, 14.339622641509552, 14.528301886792569, 14.71698113207559, 14.905660377358608, 15.094339622641625, 15.283018867924646, 15.471698113207664, 15.660377358490683, 15.849056603773695, 16.037735849056713, 16.226415094339735, 16.41509433962275, 16.60377358490577, 16.792452830188793, 16.981132075471805, 17.169811320754828, 17.358490566037847, 17.547169811320867, 17.73584905660388, 17.924528301886905, 18.113207547169917, 18.30188679245294, 18.490566037735956, 18.67924528301897, 18.86792452830199, 19.056603773585046, 19.24528301886784, 19.433962264151614, 19.622641509433876, 19.811320754708355, 20.00000000005851, 20.188679245068922, 20.377358490884202, 20.566037737631845, 20.7547169642557, 20.943396301364817, 21.132075297360526, 21.32075449096654, 21.50943847299419, 21.698088743609034, 21.886867012254402, 22.075434068531155, 22.263069200985225, 22.46032179750547, 22.613376527798604, 22.875158456135463, 23.232865218771064, 21.061564102655215, 33.15116870484305]

Wnioski:

Zastosowanie obu metod doprowadziło do otrzymania identycznego wyniku. Obie metody zbiegają i kończą swoją pracę przed podaną granicą, a wynik nie jest zależny od wektora początkowego. Na wykresie widoczna jest sporo różnica w szybkości, na korzyść metody Gaussa-Seidela, która korzysta z najbardziej aktualnych wartości, w przeciwieństwie do Jacobiego, która bazuje na wektorze z poprzedniej iteracji.