Cel ćwiczenia:

Znalezienie wartości współczynników dla funkcji:

$$F(x) = a * x^2 + b * \sin(x) + c * \cos(5x) + d * \exp(-x)$$

Z wykorzystaniem otrzymanych danych(współrzędnych punktów) przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów, a następnie przedstawienie dopasowanej funkcji F(x). Następnie dla własnej funkcji G(x), wygenerowanie zbioru punktów w postaci $(x, G(x) + \delta y)$, gdzie δy to losowe zaburzenie i powtórzenie dopasowania dla tej funkcji.

$$G(x) = a * x^2 + b * \sin(-3x) + c * \cos(2x) + d * \exp(-7x)$$

Zadane wartości dla G(x) wykorzystane w zadaniu: a: 0.1 b: 0.2 c: 0.3 d: 0.4.

Teoria wykorzystana w zadaniu:

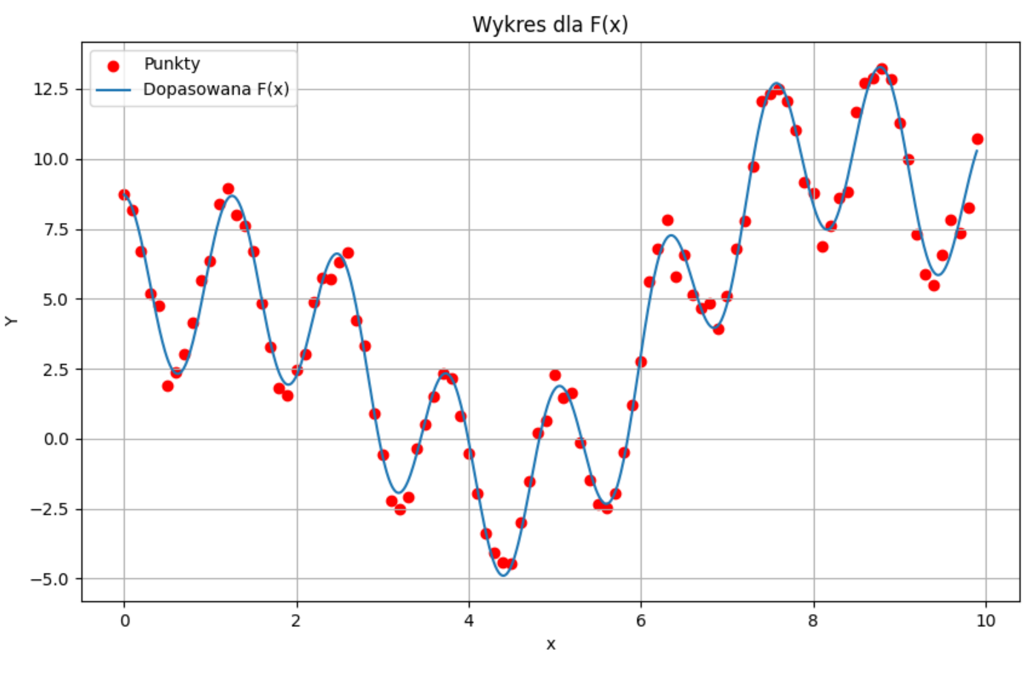
Metoda najmniejszych kwadratów służy do dopasowania liniowych modeli matematycznych do zestawów pomiarowych. Jej celem jest minimalizacja sumy kwadratów różnic między danymi pomiarowymi, a przewidywanymi wartościami modelu. Mając zestaw danych pomiarowych (x, y), gdzie x to wartości niezależne, a y to odpowiadające wartości zależne, określamy matematyczny model lub funkcję opisującą tę zależność(w przypadku a mieliśmy podany).

Wykorzystanie rozkładu SVD w metodzie najmniejszych kwadratów do obliczania współczynników polega na przekształceniu macierzy problemu w sposób umożliwiający efektywne obliczenie pseudo inwersji. Rozpoczyna się od zastosowania rozkładu SVD do macierzy A, co daje wynik w postaci

$A = U\Sigma V^T$, gdzie U, Σ i V to macierze otrzymane z tego rozkładu. Następnie oblicza się pseudo inwersję macierzy A, oznaczoną jako A^+ wykorzystując, że $A^+ = V\Sigma^+U^T$, w tym wyrażeniu Σ^+ jest pseudo inwersją macierzy Σ, która tworzona jest przez odwrócenie niezerowych elementów na przekątnej Σ i pozostawienie zerowych elementów bez zmian. Ostatecznie, rozwiązanie problemu najmniejszych kwadratów, czyli szukany wektor współczynników x, jest obliczany jako $x = A^+b$.

Dzięki temu podejściu, nawet w sytuacjach, gdy macierz A jest źle uwarunkowana, metoda ta pozwala na znalezienie optymalnego rozwiązania w sensie minimalizacji sumy kwadratów różnic między danymi obserwowanymi a modelowanymi.

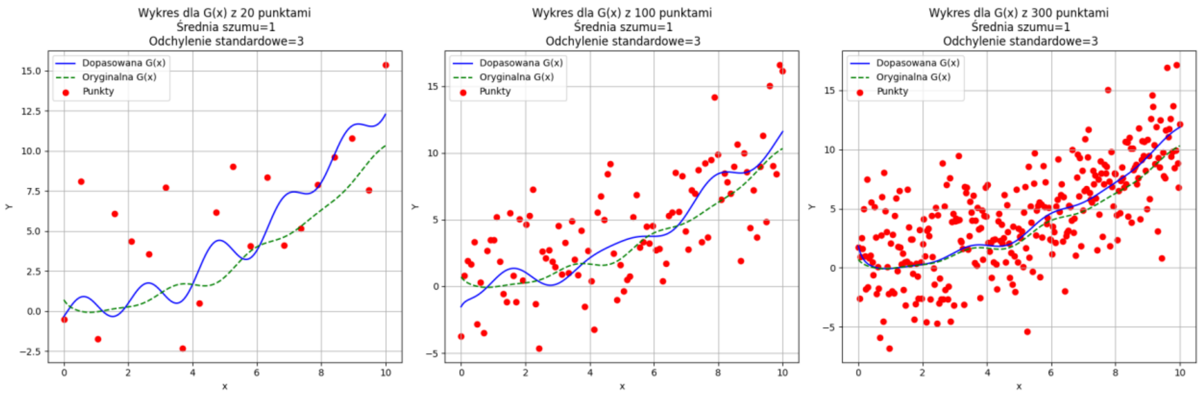
Wyniki:



Optymalne wartości dla F(x): a: 0.10093369426913554, b: 4.023059455796112, c: 3.088743272259955, d: 5.632839737726501

Wartości otrzymane przy użyciu funkcji curve_fit() = [0.10093369 4.02305945 3.08874327 5.63283974]

Odchylenie standardowe i średni szum na stałym poziomie:

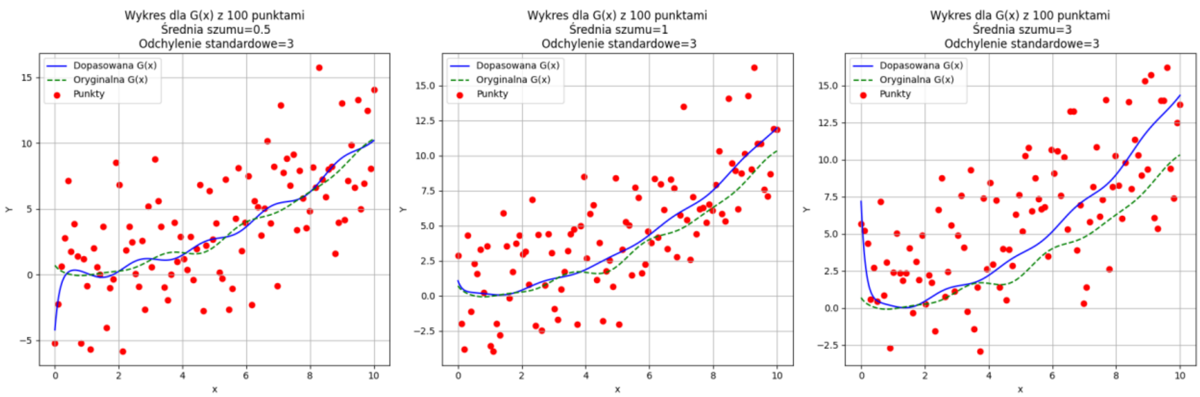


Optymalne wartości dla G(x): a: 0.1341547830300174, b: -1.0087778048977085, c: -0.34962978385128674, d: 0.01322066182593451

Optymalne wartości dla G(x): a: 0.11633151047426854, b: 0.273678824881055, c: -0.7712004261399633, d: -0.7615813854418079

Optymalne wartości dla G(x): a: 0.11536904081565569, b: 0.20416281864601704, c: 0.3601392643083875, d: 1.4783853935001103

Odchylenie standardowe i liczba punktów na stałym poziomie:

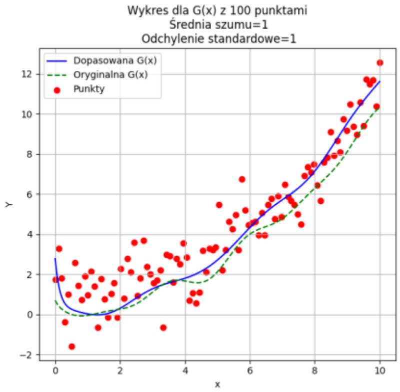


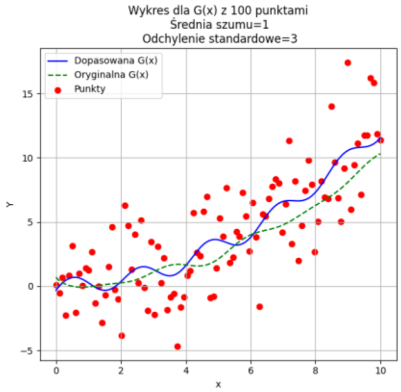
Optymalne wartości dla G(x): a: 0.10463519031798363, b: -0.32664128631716133, c: 0.12973817994073233, d: -4.339013001427645

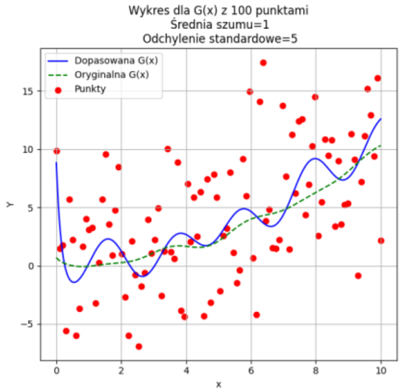
Optymalne wartości dla G(x): a: 0.12032289870137293, b: -0.10925575230696769, c: 0.09123224043729375, d: 0.967785991226797

Optymalne wartości dla G(x): a: 0.14478114780604562, b: -0.18927404722451713, c: 0.10355270594435535, d: 7.084626908394611

Średni szum i liczba punktów na stałym poziomie:







Optymalne wartości dla G(x): a: 0.11541454587653688, b: -0.026518201021877852, c: 0.2347994907389519, d: 2.5448524349721566

Optymalne wartości dla G(x): a: 0.12292125054856481, b: -0.7071673247620354, c: -0.09682362264685185, d: -0.22892809788178026

Optymalne wartości dla G(x): a: 0.11476176521709215, b: 1.3913939407354303, c: -0.6171426213246926, d: 9.458521640816135

Wnioski:

Wynik dla przypadku a obliczony na podstawie metody najmniejszych kwadratów jest zgodny z wynikiem sprawdzonym przy użyciu biblioteki numerycznej scipy. Na podstawie stworzonych wykresów można zauważyć, że czym większa ilość punktów, gdy średni szum oraz odchylenie standardowe jest stałe, tym dopasowana funkcja jest bardziej podobna do oryginalnej. Gdy stałe są punkty i średni szum to czym większe jest odchylenie standardowe tym wykres bardziej różni się od oryginalnego. Natomiast gdy stałe są punkty i odchylenie standardowe to im mniejsza średnia wartość szumu tym wykres jest bardziej podobny do oryginalnej zadanej funkcji. Czym dopasowany wykres G(x) był bardziej podobny do oryginalnego G(x), tym bardziej optymalne wartości zbliżały się do zadanych.

Uwaga do zadania:

Jeżeli, widoczność zamieszczonych wykresów na oglądanym urządzeniu nie jest wystarczająco dobra, to umieszczam je dodatkowo w przesłanym folderze.