

Cel ćwiczenia:

Porównanie metod Jacobiego i Gaussa-Seidela, poprzez rozwiązanie układu równań dla $N = 124$. Przedstawienie graficzne różnicy pomiędzy dokładnym rozwiązaniem, a jego przybliżeniami w kolejnych iteracjach wybierając kilka zestawów punktów startowych

Teoria wykorzystana w zadaniu:

Metoda Jacobiego jest zbieżna, gdy macierz A jest silnie diagonalnie dominująca, co oznacza, że element na głównej diagonalu musi być większy niż suma pozostałych elementów w danym wierszu. Metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna gdy macierz jest symetryczna i dodatnio określona.

Dzięki zastosowaniu iteracyjnej metody Jacobiego uzyskujemy następujący wzór dla zadanej macierzy:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$
$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i - x_{i-1}^n - 0.15x_{i-2}^n - x_{i+1}^n - 0.15x_{i+2}^n}{3}$$

Dzięki zastosowaniu iteracyjnej metody Gaussa-Seidela: uzyskujemy następujący wzór:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=i-1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}}$$
$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i - x_{i-1}^{n+1} - 0.15x_{i-2}^{n+1} - x_{i+1}^n - 0.15x_{i+2}^n}{3}$$

Do określenia zbieżności zastosowana została norma euklidesowa wektorów.

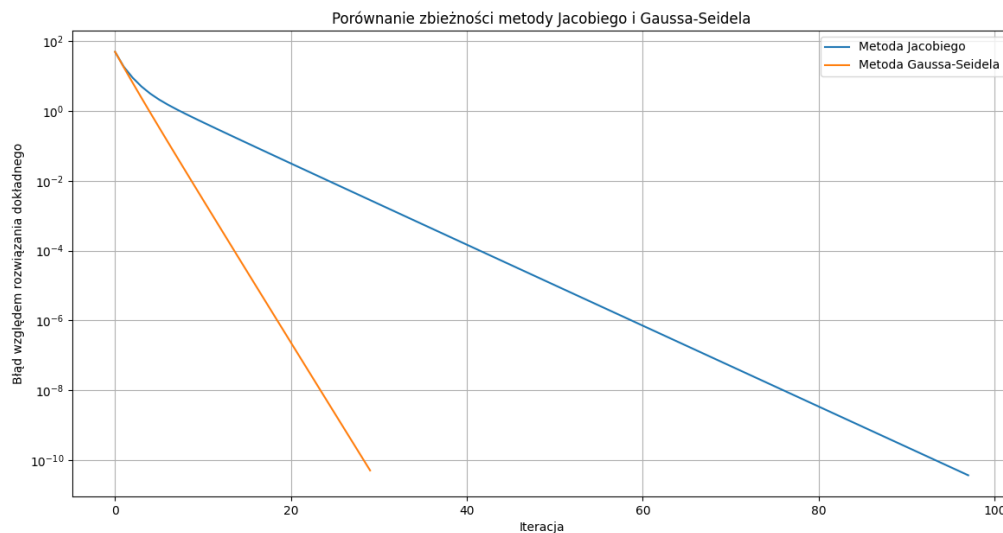
Wyniki:

Dokładne rozwiązanie: [0.42310535 0.64900491 0.54452691 0.56902007 0.5661899]

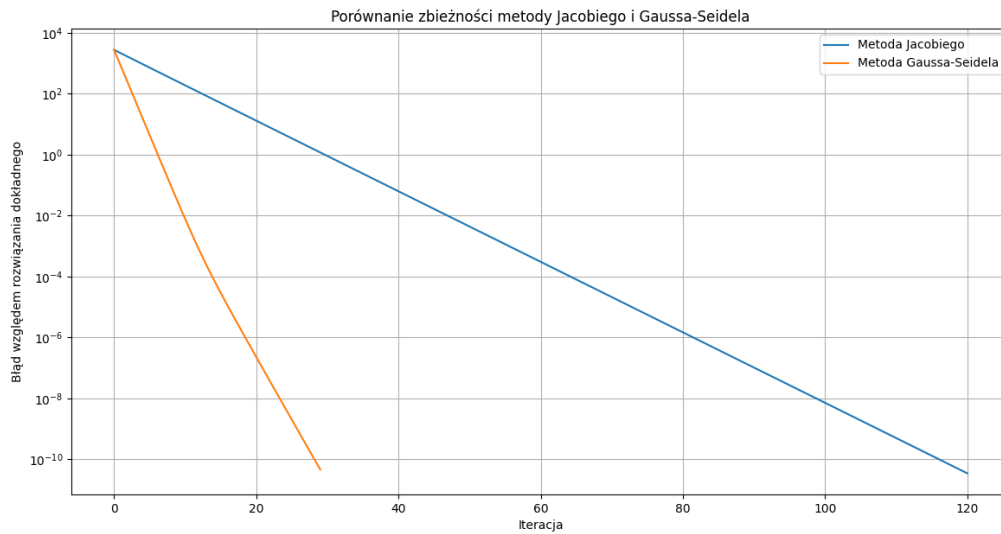
Rozwiązanie metodą Jacobiego: [0.42310535 0.64900491 0.54452691 0.56902007 0.5661899]

Rozwiązanie metodą Gaussa-Seidela: [0.42310535 0.64900491 0.54452691 0.56902007 0.5661899]

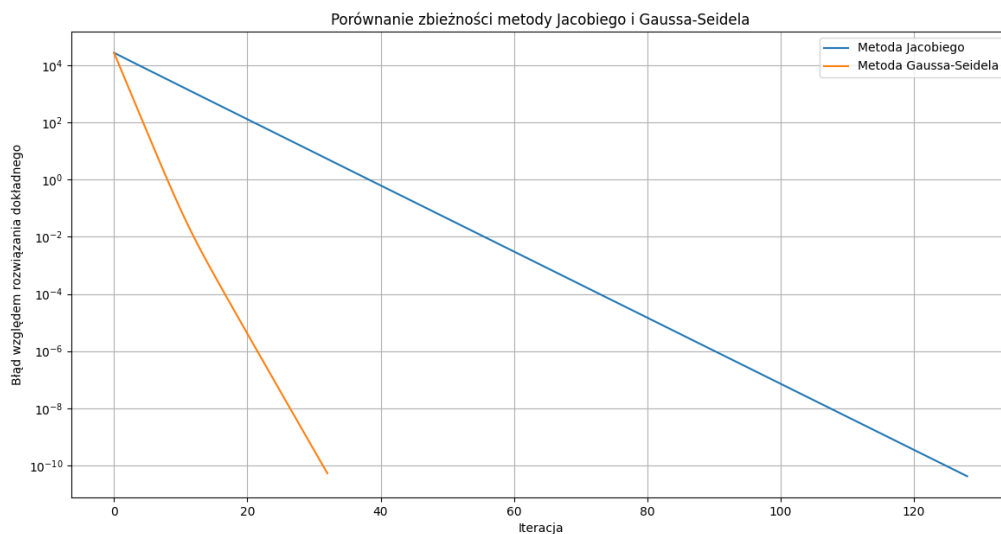
Dla wektora początkowego złożonego z wartości 0:



Wykres dla wektora początkowego złożonego z wartości 250:



Wykres dla wektora początkowego złożonego z wartości 2500:



Wnioski:

Zastosowanie obu metod doprowadziło do otrzymania identycznego wyniku, który sprawdziłem przy użyciu biblioteki numerycznej scipy. Na wykresie widoczna jest sporo różnica w szybkości, na korzyść metody Gaussa-Seidela, która korzysta z najbardziej aktualnych wartości, w przeciwieństwie do Jacobiego, która bazuje na wektorze z poprzedniej iteracji. Dla zadanej dokładności, metoda Gaussa-Seidela była trzykrotnie szybsza (przy wektorze startowym złożonym z 0). Gdy zmieniłem wektor startowy to metoda Gaussa-Seidela zmieniła się nie wiele, natomiast metoda Jacobiego wzrastała znacznie wraz z zwiększaniem wartości tego wektora. Metoda Gaussa-Seidela jest lepsza dla tego typu macierzy, gdyż wykonuje znacznie mniejszą ilość iteracji.