TẬP ĐOÀN BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

BÀI GIẢNG
GIẢI TÍCH HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

HÀ NỘI-2013

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Trong hoạt động khoa học và kỹ thuật thường gặp nhiều vấn đề có liên quan đến hàm nhiều biến số và các ứng dụng của chúng. Do vậy, giải tích hàm nhiều biến số là một môn học đang giữ một vị trí quan trọng trong các lĩnh vực ứng dụng và trong hệ thống các môn học của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông. Các kiến thức và phương pháp tiếp cận của giải tích hàm nhiều biến số đã hỗ trợ hiệu quả các kiến thức nền tảng cho các môn học như vật lý, xác suất thống kê, toán kỹ thuật, toán rời rạc và các môn chuyên ngành khác.

Bài giảng "Giải tích hàm nhiều biến số" được biên soạn lại theo chương trình qui định của Học viện cho hệ đại học chuyên ngành Điện tử-Viễn thông-Công nghệ thông tin với hình thức đào tạo theo tín chỉ. Do đối tượng sinh viên rất đa dạng với trình độ cơ bản khác nhau, chúng tôi đã cố gắng tìm cách tiếp cận đơn giản và hợp lý để trình bày nội dung theo phương pháp dễ hiểu hơn, nhằm giúp cho sinh viên nắm được các kiến thức cơ bản nhất.

Để vừa ôn tập, vừa tự kiểm tra kiến thức và để hình dung được mức độ của một đề thi hết môn, sau mỗi phần lý thuyết quan trọng chúng tôi thường đưa ra các ví dụ minh họa chi tiết. Nội dung được chia thành 4 chương. Chương 1 dành cho phép tính vi phân của hàm nhiều biến số. Chương 2 và 3 trình bày chi tiết về tích phân đường và tích phân mặt. Phương trình vi phân và các phương pháp giải được đưa ra trong chương 4. Các khái niệm và công thức được trình bày tương đối đơn giản và được minh họa bằng nhiều ví dụ với các hình vẽ sinh động. Các chứng minh khó được lược bớt có chọn lọc để giúp cho giáo trình không quá cồng kềnh nhưng vẫn đảm bảo được, để tiện cho sinh viên học tập chuyên sâu và tra cứu phục vụ quá trình học tập các môn học khác. Cuối mỗi chương học đều có các bài tập để sinh viên tự giải nhằm giúp các em hiểu sâu sắc hơn về lý thuyết và rèn luyện kỹ năng thực hành.

Tác giả hy vọng rằng giáo trình này có ích cho các em sinh viên và các bạn đồng nghiệp trong quá trình học tập và giảng dạy về môn học giải tích hàm nhiều biến số. Tác giả cũng cám ơn mọi ý kiến góp ý để giáo trình bài giảng này được hoàn thiện hơn nhằm nâng cao chất lượng dạy và học môn học này.

11/2013, Tác giả: PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

CHƯƠNG 1. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1.1. Không gian $\mathcal{R}^n$

1.1.1. Các phép toán

Cho hai véc tơ

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}^n, y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathcal{R}^n.$$

Khi đó, ta nhắc lại các phép toán quen thuộc trong không gian n chiều $\mathcal{R}^n$:

+ Phép cộng và trừ:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, ..., x_n \pm y_n).$$

+ Phép nhân véc tơ với 1 số thực:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \quad \forall \lambda \in \mathcal{R}.$$

+ Phép nhân vô hướng 2 véc tơ:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Khi đó, ta có véc tơ x vuông góc với y khi và chỉ khi $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = 0$.

+ Góc giữa 2 véc tơ $x \neq 0$ và $y \neq 0$ xác định bởi công thức:

$$\cos(x, y) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}}.$$

1.1.2. Chuẩn và hàm khoảng cách.

Cho véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}^n$. Khi đó, *chuẩn* của véc tơ x là một số thực được ký hiệu bởi $\|x\|$ và được xác định bởi

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Chuẩn có các tính chất cơ bản sau:

+ $\|x\| \geq 0 \;\; \forall x \in \mathcal{R}^n$ và $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

+ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \;\; \forall x \in \mathcal{R}^n, \lambda \in \mathcal{R}$.

+ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall x, y \in \mathcal{R}^n$.

Khi đó, khoảng cách giữa $x \in \mathcal{R}^n$ và $y \in \mathcal{R}^n$ được xác định bởi công thức

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

1.1.3. Tôpô.

Cho $x \in \mathcal{R}^n, \epsilon > 0$. Khi đó

+ $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathcal{R}^n : \|y - x\| < \epsilon\}$ gọi là *hình cầu mở* có tâm tại điểm x và bán kính là ϵ.

+ $\bar{B}(x, \epsilon) = \{y \in \mathcal{R}^n : \|y - x\| \leq \epsilon\}$ gọi là *hình cầu đóng* có tâm tại điểm x và bán kính là ϵ.

+ Điểm $x \in M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là điểm *trong*, nếu tồn tại một hình cầu mở $B(x, \epsilon)$ sao cho $B(x, \epsilon) \subseteq M$. Tập hợp các điểm trong của M được gọi là *phần trong* của M và ký hiệu bởi $intM$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là tập mở, nếu $intM = M$.

+ Cho $M \subseteq \mathcal{R}^n$. Điểm x được gọi là điểm *biên* của M, nếu với mọi $\epsilon > 0$ thì $B(x, \epsilon)$ chứa những điểm thuộc M và những điểm không thuộc M. Tập hợp các điểm biên của M được ký hiệu là ∂M.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là một tập *đóng*, nếu $\partial M \subseteq M$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là *bị chặn* bởi $\alpha > 0$, nếu $\|x\| \leq \alpha \ \ \forall x \in M$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là tập *compact*, nếu M là tập đóng và bị chặn.

1.2. Hàm số nhiều biến

Cho $\emptyset \neq D \subseteq \mathcal{R}^n$. Khi đó, ánh xạ

$$f : D \to \mathcal{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \longmapsto y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}$$

được gọi là một *hàm số nhiều biến*, Tập D được gọi là *miền xác định* của hàm số f. Các số $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các *biến số* của hàm số f.

Ví dụ 1.1. *Cho $R > 0$. Tìm miền xác định của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}.$$

Giải.

Theo định nghĩa, miền xác định D được xác định bởi

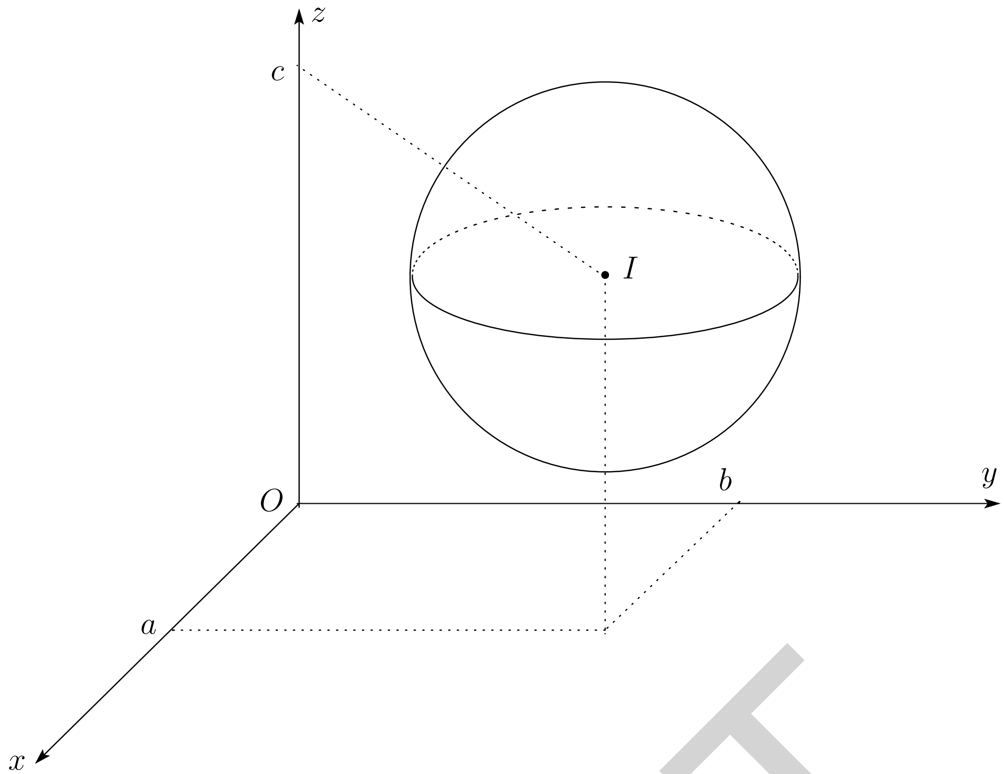
$$\begin{aligned} D =& \{x \in \mathcal{R}^n : \ R^2 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 \geq 0\} \\ =& \{x \in \mathcal{R}^n : \ \|x - 0\|^2 \leq R^2\} \\ =& \bar{B}(0, R). \end{aligned}$$

Dưới đây là một số mặt bậc 2 thường gặp trong không gian $\mathcal{R}^3$.

1.2.1. Mặt cầu

Phương trình:

$$(S) = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : \ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2\}.$$



Hình 1: Mặt cầu.

Khi đó, điểm $I(a, b, c)$ gọi là *tâm* và R gọi là *bán kính* của mặt cầu (S).

1.2.2. Mặt Elipxoit

Phương trình:

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oxy)\ z = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$(Oyz)\ x = 0 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

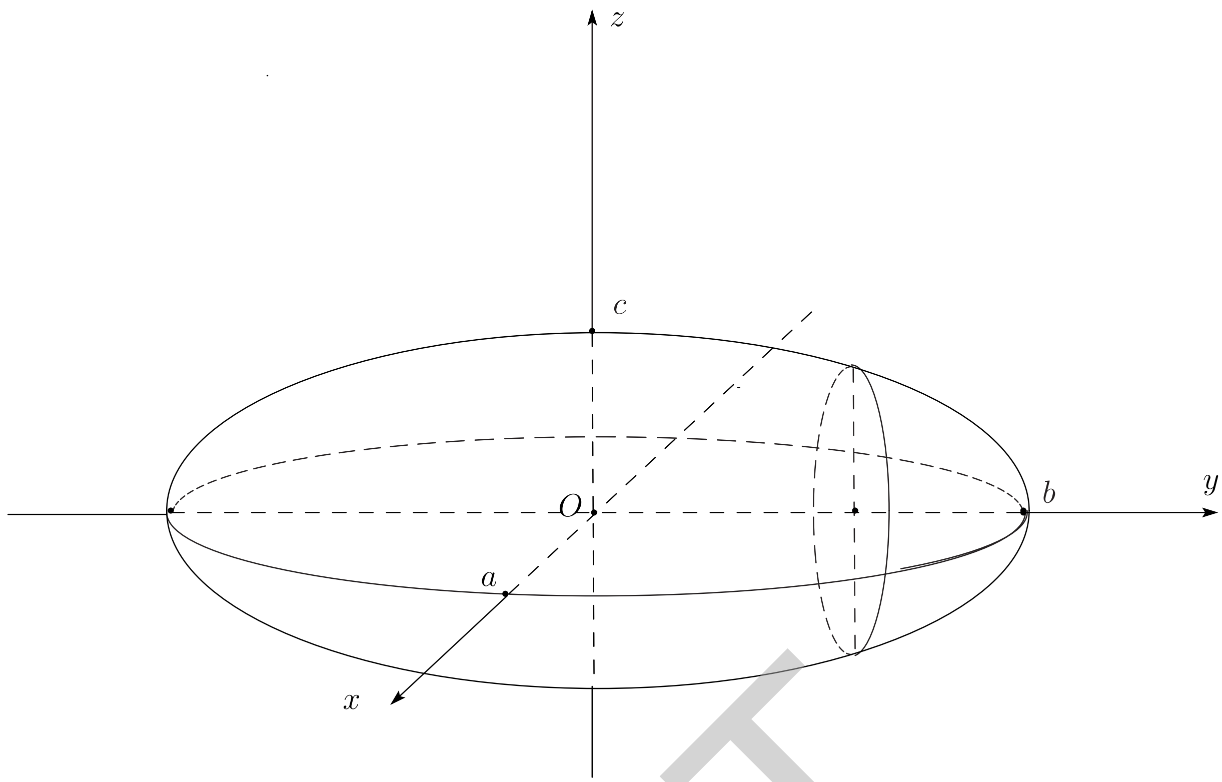
1.2.3. Mặt hypeboloit 1 tầng

Phương trình:

$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oxy)\ z = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Hình 2: Mặt elipxoit.

$$(Oyz)\ x = 0 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1.2.4. Mặt hypeboloit 2 tầng

Phương trình:

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\ (a, b, c > 0).$$

Điều kiện

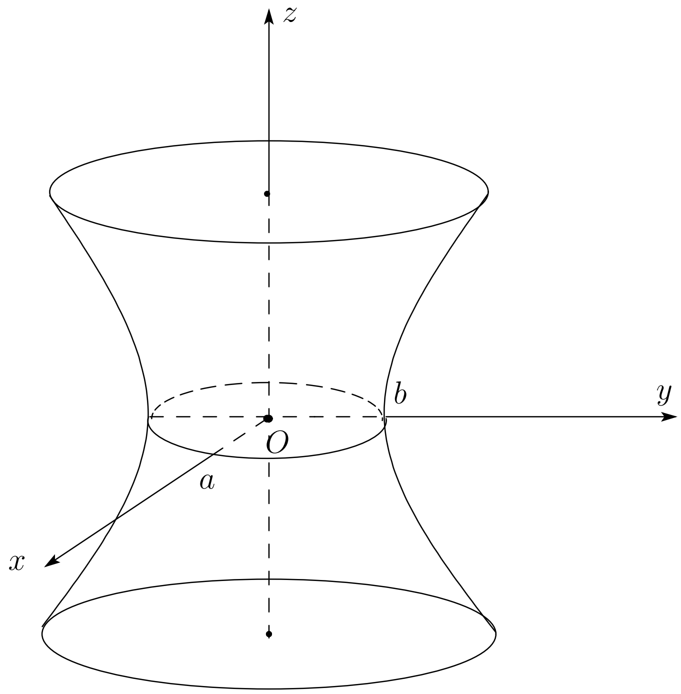
$$\frac{z^2}{c^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow z \in (-\infty, -c] \cup [c, +\infty).$$

Các mặt cắt

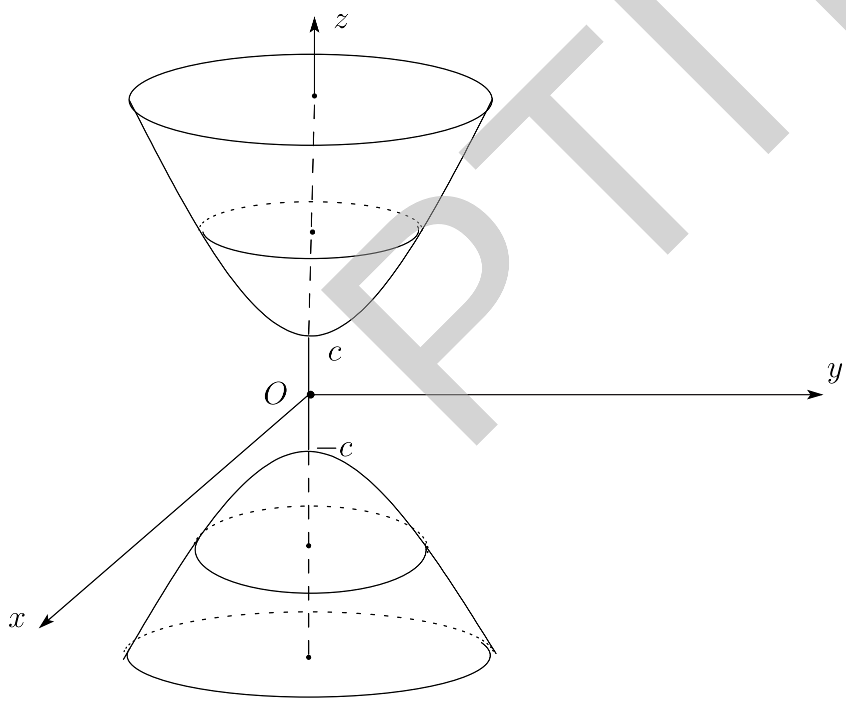
$$(Oyz)\ x = 0 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

$$(P)\ z = h > c : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$



Hình 3: Mặt hypeboloit 1 tầng.



Hình 4: Mặt hypeboloit 2 tầng.

1.2.5. Mặt paraboloit-eliptic

Phương trình:

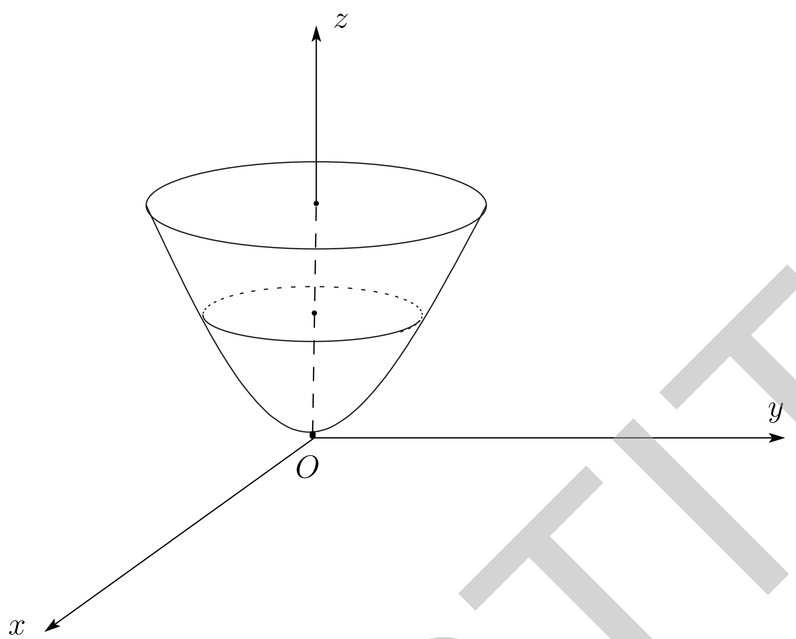
$$(PE): \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \ (p, q > 0),$$

với điều kiện $z \geq 0$. Các mặt cắt

$$(Oyz)\ x = 0 : y^2 = 2qz.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : x^2 = 2pz.$$

$$(P)\ z = h > 0 : \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h.$$



Hình 5: Mặt hypeboloit-eliptic.

1.2.6. Mặt trụ

Phương trình:

$$(T_z) : f(x, y) = 0 \text{ song song với trục } Oz,$$

$$(T_y) : g(x, z) = 0 \text{ song song với trục } Oy,$$

$$(T_x) : f(y, z) = 0 \text{ song song với trục } Ox,$$

trong đó $f, g, h : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$.

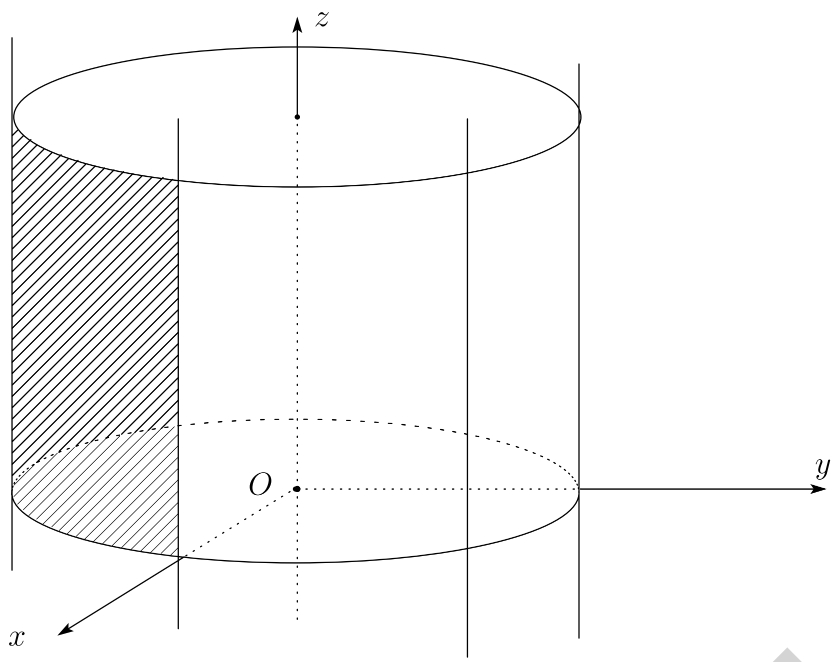
1.2.7. Mặt nón bậc hai

Phương trình:

$$(N) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\ (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oyz)\ x = 0 : y = \pm\frac{b}{c}z.$$



Hình 6: Mặt trụ song song Oz.

$$(Oxz)\ y = 0 : x = \pm\frac{a}{c}z.$$

$$(P)\ z = h > 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

1.3. Giới hạn hàm nhiều biến số

Để hiểu về giới hạn hàm nhiều biến số trong không gian $\mathcal{R}^n$, ta có thể nghiên cứu thông qua giới hạn của hàm hai biến số. Một dãy điểm $\{M_n\} \subset \mathcal{R}^2$ được gọi là *dần tới* điểm $M_0 \in \mathcal{R}^2$, viết tắt là $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$, nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên $n(\epsilon)$ sao cho

$$M_n \in B(M_0, \epsilon)\ \ \forall n \geq n(\epsilon).$$

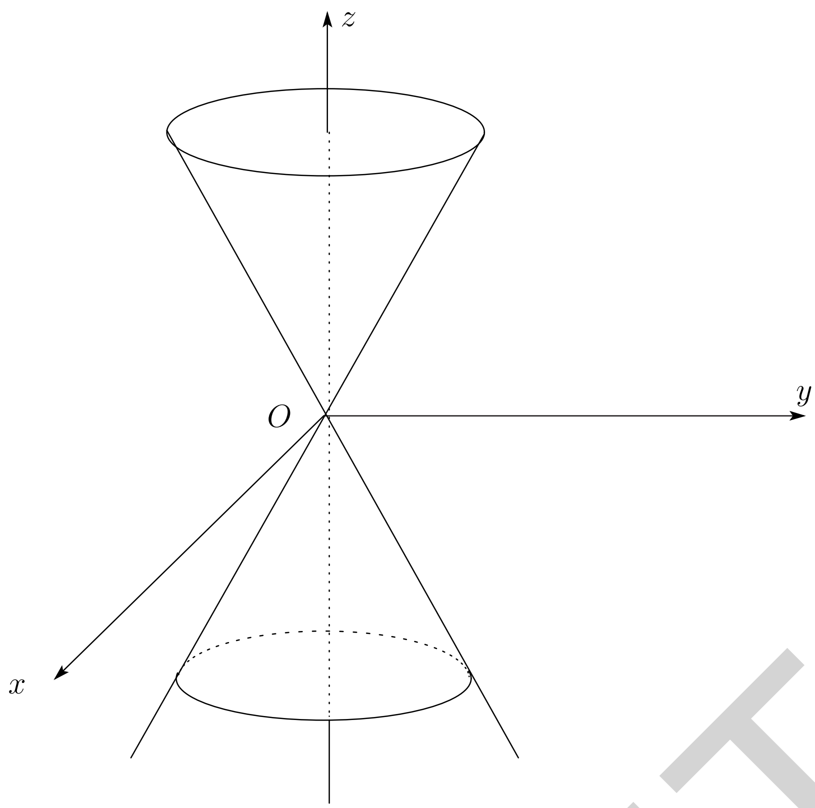
Trong trường hợp đặc biệt: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ thì điểm $M_n(x_n, y_n) \to M_0(x_0, y_0)$ khi $n \to \infty$.

Cho một hàm 2 biến số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0 \in \mathcal{R}^2$ có thể trừ điểm M_0. Khi đó, số m được gọi là giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi (x, y) dần tới $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = m$, nếu với mọi dãy điểm bất kỳ $\{M_n\} \subset \mathcal{R}^2$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = m.$$

Ta có thể chứng minh được rằng: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = m$ khi và chỉ khi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M \in B(M_0, \delta) \Rightarrow |f(M) - m| < \epsilon.$$



Hình 7: Mặt nón bậc hai.

Ví dụ 1.2. *Tìm giới hạn*

$$I_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^2 + y^2}.$$

Giải.

Hàm số $f(x,y) = \frac{x^2 y}{2x^2+y^2}$ xác định trên $D = \mathcal{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Từ bất đẳng thức

$$\frac{x^2}{2x^2 + y^2} \le \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \ \ \forall (x,y) \in D,$$

ta có $|f(x,y)| \le \frac{1}{2}|y|$ với mọi $(x,y) \in D$. Do đó

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{2x^2 + y^2} \right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|y| = 0.$$

Vậy $I_1 = 0$.

Ví dụ 1.3. *Tìm giới hạn*

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2 + y^2}.$$

Giải.

Hàm số $f(x,y) = \frac{xy}{2x^2+y^2}$ xác định trên $D = \mathcal{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Ta xét 2 trường hợp đặc biệt sau:

+ Điểm $(x, y) \in d : y = x$. Khi đó $(x, y) \to (0, 0)$ khi và chỉ khi $x \to 0$. Khi đó, ta có

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2 + x^2} = \frac{1}{3}.$$

+ Điểm $(x, y) \in d : y = 3x$. Khi đó $(x, y) \to (0, 0)$ khi và chỉ khi $x \to 0$. Khi đó, ta có

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x^2 + 9x^2} = \frac{3}{11}.$$

Do vậy I_2 không tồn tại.

1.4. Hàm số liên tục

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và điểm $M_0 \in D$. Khi đó,

+ Hàm số f liên tục tại điểm M_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

+ Hàm số f liên tục trên miền D nếu f liên tục tại mọi điểm $M \in D$.

+ Hàm số f liên tục đều trên miền D nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\forall (x, y), (x', y') \in D : \|(x, y) - (x', y')\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon.$$

Bằng cách dùng định nghĩa, ta có nhận xét sau.

Nhận xét 1.4. + *Nếu hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ liên tục đều trên miền D, thì f liên tục trên miền D. Điều ngược lại không đúng.*

+ *Nếu f liên tục trên miền D và D là tập compact, thì f liên tục đều trên miền D.*

+ *Nếu f liên tục trên miền compact D, thì f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền D.*

1.5. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến số

Cho hàm số $z = f(x)$ xác định trên miền $D \subseteq \mathcal{R}^n$ và điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in D$.

1.5.1. Đạo hàm riêng

Nếu hàm một biến số $x_1 \longmapsto f(x_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ có đạo hàm tại x_1, thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f theo ẩn x_1* tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu

$$f'_{x_1}(\bar{x}) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}).$$

Bằng cách hiểu tương tự, ta cũng có các *đạo hàm riêng của f theo ẩn x_i* $(i = 1, 2, ..., n)$ tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu

$$f'_{x_i}(\bar{x}) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).$$

Ví dụ 1.5. *Tìm các đạo hàm riêng của hàm số sau:*

$$f(x,y) = x^2 \tan(x^3 + 2y).$$

Giải.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\tan(x^3+2y) + x^2.\frac{1}{\cos^2(x^3+2y)}.3x^2 = 2x\tan(x^3+2y) + \frac{3x^4}{\cos^2(x^3+2y)}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2.\frac{1}{\cos^2(x^3+2y)}.2 = \frac{2x^2}{\cos^2(x^3+2y)}.$$

1.5.2. Hàm khả vi

Cho hàm nhiều biến $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ và điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in D$.

+ Với mỗi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, đặt

$$\Delta_{x_i} = x_i - \bar{x}_i.$$

Khi đó

$$\Delta_f = f(\bar{x}_1 + \Delta_{x_1}, \bar{x}_2 + \Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n + \Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

được gọi là *số gia của hàm số* tại điểm $\bar{x}$.

+ Nếu số gia của hàm số có dạng

$$\Delta_f = A_1\Delta_{x_1} + A_2\Delta_{x_2} + ... + A_n\Delta_{x_n} + \alpha_1\Delta_{x_1} + \alpha_2\Delta_{x_2} + ... + \alpha_n\Delta_{x_n},$$

trong đó $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ chỉ phụ thuộc vào $\bar{x}$, không phụ thuộc vào $\Delta_x = (\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n})$ và

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \alpha_k = 0 \ \ \forall k = 1, 2, ..., n,$$

thì hàm số f được gọi là *khả vi* tại điểm $\bar{x}$. Khi đó

$$df = A_1\Delta_{x_1} + A_2\Delta_{x_2} + ... + A_n\Delta_{x_n}$$

được gọi là *vi phân toàn phần* của f tại điểm $\bar{x}$.

+ Hàm số f được gọi là khả vi trên miền D, nếu f khả vi tại mọi điểm $\bar{x} \in D$.

Định lý 1.6. *Nếu hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\bar{x} \in D$, thì f sẽ khả vi tại điểm $\bar{x}$ và*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})\Delta_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})\Delta_{x_2} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\Delta_{x_n}.$$

Chứng minh: Theo định nghĩa, ta có

$$\begin{aligned}\Delta_f =& f(\bar{x}_1+\Delta_{x_1},\bar{x}_2+\Delta_{x_2},...,\bar{x}_n+\Delta_{x_n})-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)\\ =& f(\bar{x}_1+\Delta_{x_1},\bar{x}_2+\Delta_{x_2},...,\bar{x}_n+\Delta_{x_n})-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2+\Delta_{x_2},...,\bar{x}_n+\Delta_{x_n})\\ &+\cdots\\ &+f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...\bar{x}_{n-1},\bar{x}_n+\Delta_{x_n})-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n).\end{aligned}$$

Theo công thức số gia giới nội, tồn tại các số $\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\in(0,1)$ sao cho

$$\begin{aligned}&f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i+\Delta_{x_i},...,\bar{x}_n+\Delta_{x_n})-f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1}+\Delta_{x_{i+1}},...,\bar{x}_n+\Delta_{x_n})\\ &\qquad=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i+\theta_i\Delta_{x_i},...,\bar{x}_n+\Delta_{x_n})\Delta_{x_i}.\end{aligned}$$

Do các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm $\bar{x}$ nên

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i+\theta_i\Delta_{x_i},...,\bar{x}_n+\Delta_{x_n})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})+\alpha_i(\Delta_x),$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta_x}\alpha_i(\Delta_x)=0\ \ \forall i=1,2,...,n$. Do vậy, định lý được chứng minh.

Nhận xét 1.7. *Trong trường hợp hàm 3 biến số $f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm (x_0,y_0,z_0), theo định lý trên, ta có*

$$\Delta_f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta_x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta_y+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta_z+\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z.$$

Đặt $\rho=\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2}$ và $\epsilon=\frac{1}{\rho}(\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z)$. Khi đó, theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có

$$|\epsilon|=\frac{1}{\rho}|\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z|\le\frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2)}}{\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2}}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Do đó

$$\lim_{(\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z)\to 0}\epsilon=0$$

và

$$\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z=o(\rho).$$

Như vậy

$$\Delta_f\approx\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta_x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta_y+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta_z+o(\rho).$$

Khi các số $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ khá nhỏ, ta có

$$\Delta_f\approx\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta_x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta_y+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta_z.\tag{1.1}$$

Ví dụ 1.8. *Dùng vi phân, tính xấp xỉ giá trị biểu thức sau:*

$$S = \arctan \frac{1,02}{0,95}.$$

Giải: Từ

$$S = \arctan \frac{1 + 0,02}{1 - 0,05}$$

ta đặt $x_0 = 1, y_0 = 1, \Delta_x = 0,02, \Delta_y = -0,05$ và $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$. Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Theo công thức (1.1) cho hàm số có 2 biến, ta có

$$\Delta_f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta_y.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
S &= \Delta_f + f(x_0,y_0) \\
&\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta_y + f(x_0,y_0) \\
&= f(1,1) + \frac{1.0,02 + 1.0,05}{2} \\
&= \frac{\pi}{4} + 0,035 \\
&= 0,82 rad.
\end{aligned}$$

1.6. Đạo hàm theo phương

Cho véc tơ $d \in \mathcal{R}^n$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda},$$

thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm theo phương* d của hàm f tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu bởi $D_d f(\bar{x})$.

Ví dụ 1.9. *Tìm đạo hàm theo phương* $D_d f(\bar{x})$ *của hàm số* $f(x,y,z) = 2x + 3y + z^2$, *trong đó* $d = (1,2,0), \bar{x} = (3,-1,1)$

Giải:

Theo định nghĩa, đạo hàm $D_d f(\bar{x})$ được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned}
D_d f(\bar{x}) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(1 + 3\lambda, -1 + 2\lambda, 1) - f(3, -1, 1)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{2(1 + 3\lambda) + 3(-1 + 2\lambda) + 1^2 - (2.3 + 3.(-1) + 1^2)}{\lambda} \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Dựa vào định nghĩa, ta có nhận xét sau:

Nhận xét 1.10. *Giả sử $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một hệ cơ sở trực chuẩn trong $\mathcal{R}^n$, hàm số $f(x)$ tồn tại các đạo hàm riêng trên D và $\bar{x} \in D$. Khi đó*

$$D_{e_i} f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \;\; \forall i = 1, 2, ..., n.$$

1.7. Quan hệ giữa đạo hàm theo phương và đạo hàm riêng

Cho hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ khả vi tại điểm $\bar{x} \in D$. Khi đó, đạo hàm theo phương $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ được xác định bởi công thức:

$$D_d f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) d_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) d_n. \tag{1.2}$$

Chứng minh: Theo định nghĩa, hàm số f khả vi tại điểm $\bar{x}$ hay

$$\Delta_f = A_1 \Delta_{x_1} + A_2 \Delta_{x_2} + ... + A_n \Delta_{x_n} + \alpha_1 \Delta_{x_1} + \alpha_2 \Delta_{x_2} + ... + \alpha_n \Delta_{x_n},$$

trong đó $\Delta_f = f(\bar{x} + \Delta_x) - f(\bar{x})$, $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $\lim\limits_{\Delta_x \to 0} \alpha_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Dùng công thức trên với $\Delta_{x_i} = \lambda d_i$, ta có

$$\begin{aligned}
D_d f(\bar{x}) &= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} (A_1 d_1 + ... + A_n d_n + \alpha_1 d_1 + ... + \alpha_n d_n) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) d_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) d_n.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.11. *Tìm đạo hàm theo phương $d = (-1, 3)$ tại điểm $\bar{x} = (e, e^2)$ của hàm số*

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y).$$

Giải.

Tính các đạo hàm theo phương

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y}.$$

Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = \frac{2x}{x^2+y}(\bar{x}) = \frac{1}{e},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) = \frac{1}{x^2+y}(\bar{x}) = \frac{1}{2e^2}.$$

Theo công thức (1.2), ta có

$$\begin{aligned} D_d f(\bar{x}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})d_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})d_2 \\ &= \frac{1}{e}(-1) + \frac{1}{2e^2}3 \\ &= \frac{3}{2e^2} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

1.8. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Cho hàm véc tơ $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ và hàm số $g : f(D) \to \mathcal{R}$. Khi đó hàm số $h = gof : D \to \mathcal{R}$ được xác định bởi

$$gof(x) = g\big(f(x)\big)$$

được gọi là *hàm hợp* của 2 hàm số g và f. Nếu các hàm số g, hàm số trong tọa độ thành phần của f và các đạo hàm riêng của chúng liên tục tại điểm $x = (x_1, ..., x_n)$ và $f(x)$ tương ứng. Khi đó các đạo hàm riêng của hàm hợp h được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial g}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ &... \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + ... + \frac{\partial g}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_n}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Chứng minh:

Theo định nghĩa, ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta g}{\Delta_{x_1}} =& \frac{g\big(f(x+\Delta_x)\big) - g\big(f(x)\big)}{\Delta_{x_1}} \\
=& \frac{g\big(f(x_1+\Delta_{x_1}, ..., x_n+\Delta_{x_n})\big) - g\big(f(x_1, ..., x_n)\big)}{\Delta_{x_1}} \\
=& \frac{g\big(f(x_1+\Delta_{x_1}, ..., x_n+\Delta_{x_n})\big) - g\big(f(x_1, x_2+\Delta_{x_2}, ..., x_n+\Delta_{x_n})\big)}{\Delta_{x_1}} \\
& + ... + \frac{g\big(f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n+\Delta_{x_n})\big) - g\big(f(x_1, ..., x_n)\big)}{\Delta_{x_1}} \\
=& \frac{g\big(f(x_1+\Delta_{x_1}, ...)\big) - g\big(f(x_1, x_2+\Delta_{x_2}, ...)\big)}{f(x_1+\Delta_{x_1}, ..., x_n+\Delta_{x_n}) - f(x_1, x_2+\Delta_{x_2}, ..., x_n+\Delta_{x_n})} \\
& \times \frac{f(x_1+\Delta_{x_1}, ...) - f(x_1, x_2+\Delta_{x_2}, ...)}{\Delta_{x_1}} \\
& + ... + \frac{g\big(f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n+\Delta_{x_n})\big) - g\big(f(x_1, ..., x_n)\big)}{f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n+\Delta_{x_n}) - f(x_1, ..., x_n)} \\
& \times \frac{f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n+\Delta_{x_n}) - f(x_1, ..., x_n)}{\Delta_{x_1}}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Do giả thiết liên tục của các hàm số và cho $\Delta_{x_1} \to 0$, ta nhận được

$$\frac{\partial h}{x_1} = \frac{\partial g}{f_1}\frac{\partial f_1}{x_1} + \frac{\partial g}{f_2}\frac{\partial f_2}{x_2} + ... + \frac{\partial g}{f_m}\frac{\partial f_m}{x_1}.$$

Bằng cách làm tương tự, ta nhận được điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.12. *Tìm đạo hàm riêng* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *của hàm số sau*

$$f(x, y) = (u^2+1)\log_2 v, u = xy, v = 2x+y.$$

Giải:

Theo công thức (1.3), ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= 2u\log_2 v.y + \frac{u^2+1}{v\ln 2}.2 \\
&= 2xy^2\log_2(2x+y) + \frac{2(x^2y^2+1)}{(2x+y)\ln 2}.
\end{aligned}
$$

1.9. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

Cho hàm véc tơ $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$. Các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

được gọi là các *đạo hàm riêng cấp 1*. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 1

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f''_{x_i x_j}(x), \quad i, j = 1, 2, ..., n \ (i \neq j) \ \text{ hoặc } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = f''_{x_i^2}(x)$$

được gọi là các *đạo hàm riêng cấp 2*. Bằng cách hiểu tương tự, ta cũng có các đạo hàm riêng n.

Ví dụ 1.13. *Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số*

$$f(x, y) = (x^2 + y^3)\sin 2y.$$

Giải:

Các đạo hàm riêng cấp 1 là

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x\sin 2y, \\ f'_y &= 3y^2\sin 2y + 2(x^2 + y^3)\cos 2y. \end{aligned}$$

Các đạo hàm riêng cấp 2 là

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= 2\sin 2y, \\ f''_{xy} &= 4x\cos 2y, \\ f''_{y^2} &= 6y\sin 2y + 6y^2\cos 2y + 6y^3\cos 2y - 4(x^2 + y^3)\sin 2y \\ &= 2(3y - 2x^2 - 2y^3)\sin 2y + y^2(1 + y)\cos 2y. \end{aligned}$$

Định lý 1.14. *(Schwarz)*

Nếu hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$, thì

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0).$$

Chứng minh: Đặt

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x + \Delta_x, y) - f(x, y), \\ h(x, y) &= f(x, y + \Delta_y) - f(x, y). \end{aligned}$$

Khi đó, ta dễ dàng thử lại rằng

$$g(x, y + \Delta_y) - g(x, y) = h(x + \Delta_x, y) - h(x, y). \tag{1.5}$$

Theo định lý Lagrange, ta có

$$\begin{aligned} g(x, y + \Delta_y) - g(x, y) &= g'_y(x, y + \theta_y\Delta_y).\Delta_y \ \text{ với } \ 0 < \theta_y < 1 \\ &= \Delta_y\Big(f'_y(x + \Delta_x, y + \theta_y\Delta_y) - f'_y(x, y + \theta_y\Delta_y)\Big) \\ &= \Delta_x\Delta_y f''_{yx}(x + \theta_x\Delta_x, y + \theta_y\Delta_y) \ \text{ với } \ 0 < \theta_x < 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Tương tự, ta cũng có

$$h(x+\Delta_x, y) - h(x,y) = \Delta_x\Delta_y f''_{xy}(x+\alpha_x\Delta_x, y+\alpha_y\Delta_y) \text{ với } 0 < \alpha_x, \alpha_y < 1. \tag{1.7}$$

Từ các đẳng thức (1.5), (1.6) và (1.7), ta có

$$f''_{yx}(x+\theta_x\Delta_x, y+\theta_y\Delta_y) = f''_{xy}(x+\alpha_x\Delta_x, y+\alpha_y\Delta_y).$$

Do các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục và cho $(\Delta_x, \Delta_y) \to 0$, ta có định lý được chứng minh.

Cho hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$. Khi đó vi phân toàn phần

$$df = f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + ... + f'_{x_n}dx_n$$

được gọi là *vi phân cấp 1* của hàm f. Vi phân toàn phần của df nếu tồn tại, được gọi là *vi phân cấp 2* của hàm f và được ký hiệu d^2f hay

$$d^2f = d(df) = d(f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + ... + f'_{x_n}dx_n).$$

Bằng cách hiểu tương tự, ta có *vi phân cấp* n của hàm số f.

$$d^nf = d(d^{n-1}f).$$

Trong trường hợp hàm 2 biến $f(x,y)$ và các đạo hàm bậc 2 liên tục, theo định lý Schwarz, ta có công thức

$$d^2f = f''_{x^2}dx^2 + f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2.$$

1.10. Công thức Taylor của hàm 2 biến số

Cho hàm hai biến $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$. Nếu hàm f có các đạo hàm riêng cấp $n+1$ liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta_{x_0}, y_0+\Delta_{y_0}) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + ... + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0) \\ + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta_x, y_0+\theta\Delta_y). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Đặt

$$g(t) = f(x_0 + t\Delta_{x_0}, y_0 + t\Delta_{y_0}).$$

Khi đó $g(t)$ là hàm một biến số và

$$g(1) - g(0) = f(x_0+\Delta_{x_0}, y_0+\Delta_{y_0}) - f(x_0,y_0).$$

Theo công thức Taylor cho hàm một biến số $g(t)$, ta có

$$g(1) - g(0) = \frac{1}{1!}g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + ... + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0) + \frac{1}{n!}g^{(n+1)}(\theta) \text{ với } 0 < \theta < 1.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
&g'(0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta_x + f'_y(x_0, y_0)\Delta_y = df(x_0, y_0)\\
&g''(0) = f''_{x^2}(x_0, y_0)\Delta_x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta_x\Delta_y + f''_{y^2}(x_0, y_0)\Delta_{y^2} = df(x_0, y_0)\\
&...\\
&g^{(n)}(0) = d^n f(x_0, y_0)\\
&g^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y).
\end{aligned}$$

Trong trường hợp đặc biệt $n = 1$, ta có công thức

$$f(x_0 + \Delta_{x_0}, y_0 + \Delta_{y_0}) - f(x_0, y_0) = df(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y) \text{ với } 0 < \theta < 1$$

được gọi là *công thức số gia giới nội* của hàm $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0).

Ví dụ 1.15. *Khai triển hàm số*

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

theo công thức Taylor trong lân cận của điểm $M_0(1, -2)$.

Giải: Theo công thức (1.8), ta tính các đạo hàm riêng cấp 1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 4x - y - 6,\\
\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -x - 2y - 3,
\end{aligned}$$

và các đạo hàm riêng cấp 2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= 4,\\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\partial y} &= -1,\\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= -2.
\end{aligned}$$

Tính các giá trị của hàm số và đạo hàm tại M_0

$$f(M_0) = 5, \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = -2.$$

Khi đó, công thức (1.8) có dạng

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(M_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y+2) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}(x-1)(y+2) + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}(y+2)^2\right) \\ =& 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2. \end{aligned}$$

1.11. Hàm ẩn

Cho hàm véc tơ $F : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$. Khi đó, hệ thức giữa 2 biến x, y có dạng

$$F(x,y) = 0.$$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm ẩn* của hệ thức trên, nếu $y = f(x)$ thỏa mãn hệ thức trên.

Ví dụ 1.16. *Từ hệ thức*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ta xác định được 2 hàm ẩn

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

trên đoạn $[-a, a]$.

Định lý 1.17. *Cho $(x_0, y_0) \in D$ và F thỏa mãn 3 điều kiện sau:*
(i) $F(x_0, y_0) = 0$. (ii) F'_y liên tục trên tập mở U chứa điểm (x_0, y_0).
(iii) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Khi đó tồn tại hàm ẩn $y = f(x)$ xác định trong lân cận $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Hơn nữa,
+ f liên tục trên miền V.
+ f' liên tục trên miền V và được xác định bởi

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}(x,y).$$

Chứng minh: *+ Tồn tại hàm ẩn $y = f(x)$.*
Từ giả thiết $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, ta có thể giả sử rằng

$$F'_y(x_0, y_0) > 0.$$

Do $F'_y(x, y)$ liên tục trên tập mở U chứa (x_0, y_0) nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho

$$F'_y(x,y) > 0, \quad \forall (x,y) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha].$$

Khi đó

$$F'_y(x_0, y) > 0, \quad \forall y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha].$$

Vậy hàm số $F(x_0, y)$ đồng biến trên $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$. Nhưng giả thiết $F(x_0, y_0) = 0$ và hàm số F liên tục, nên ta có

$$F(x_0, y_0 - \alpha) < 0 \ \text{ và } \ F(x_0, y_0 + \alpha) > 0.$$

Do F liên tục, nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$F(x, y_0 - \alpha) < 0 \ \text{ và } \ F(x, y_0 + \alpha) > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Như vậy, mỗi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tồn tại $y \in (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$ sao cho $F(x, y) = 0$. Mặt khác $F(x, \cdot)$ tăng ngặt theo y, nên tồn tại duy nhất $y = f(x)$.

+ *Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

$$f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha).$$

Lấy $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bất kỳ, tồn tại $y_1 \in (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$ sao cho

$$y_1 = f(x_1) \ \text{ và } \ F(x_1, y_1) = 0.$$

Theo chứng minh trên, với mọi $\alpha_1 > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho phương trinh ẩn $F(x, y) = 0$ xác định duy nhất hàm ẩn

$$f_1 : (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \to (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1).$$

Chọn $\alpha_1 < \epsilon$ sao cho

$$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha).$$

Khi đó

$$f_1(x) = f(x), \quad \forall x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1).$$

Do vậy, vợi mọi x thỏa mãn $|x - x_1| < \delta_1$, ta có

$$|f_1(x) - y_1| = |f(x) - f(x_1)| < \alpha_1 < \epsilon.$$

Hay f liên tục tại x_1. + *Chứng minh rằng $y = f(x)$ khả vi trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và $x + h \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ta có

$$F(x, f(x)) = 0 \ \text{ và } \ F(x + h, f(x + h)) = 0.$$

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) = 0.$$

Hay

$$h.F'_x(x+\theta h, f(x)+\theta(f(x+h)-f(x)) + \big(f(x+h)-f(x)\big).F'_y\big(x+\theta h, f(x)+\theta(f(x+h)-f(x))\big).$$

Do đó

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{F'_x(x+\theta h, f(x)+\theta(f(x+h)-f(x))}{F'_y\big(x+\theta h, f(x)+\theta(f(x+h)-f(x))\big)}.$$

Cho $h \to 0$, ta nhận được

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}(x, y).$$

Ví dụ 1.18. *Cho hệ thức*

$$e^z = x + y + z.$$

Tìm các đạo hàm riêng của hàm z theo các ẩn x, y.

Giải: Đặt

$$F(x, y, z) = e^z - x - y - z.$$

Khi đó, ta có

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{1-e^z} = \frac{1}{e^z - 1},$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{1}{e^z - 1}.$$

1.12. Cực trị của hàm nhiều biến

1.12.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ và điểm $M_0 \in D$.

+ Điểm M_0 được gọi là *điểm cực tiểu* của hàm f trên miền D, nếu tồn tại hình cầu $B(M_0, \epsilon) \subseteq D$ sao cho

$$f(M_0) \le f(M), \ \ \forall M \in B(M_0, \epsilon).$$

+ Điểm M_0 được gọi là *điểm cực đại* của hàm f trên miền D, nếu tồn tại hình cầu $B(M_0, \epsilon) \subseteq D$ sao cho

$$f(M_0) \ge f(M), \ \ \forall M \in B(M_0, \epsilon).$$

+ Điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị*.

1.12.2. Cực trị không điều kiện

Dưới đây là điều kiện cần của cực trị.

Định lý 1.19. *(Fermat)*

Nếu hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và có các đạo hàm riêng trong lân cận của điểm M_0, thì

$$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0.$$

Chứng minh: Đặt

$$\varphi(x) = f(x, y_0).$$

Theo định nghĩa, x_0 là điểm cực trị của hàm số φ. Theo định lý Fermat cho hàm một biến φ, ta có

$$\varphi'(x_0) = 0.$$

Hay $f'_x(M_0) = 0$. Bằng cách làm tương tự, ta cũng có $f'_y(M_0) = 0$. Định lý được chứng minh.

Điểm M_0 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

được gọi là *điểm dừng* của hàm số f. Trong trường hợp tổng quát, định lý Fermat chỉ ra rằng một điểm cực trị là điểm dừng. Xong chiều ngược lại, một điểm dừng chưa chắc đã là một điểm cực trị. Như vậy, khi nào thì điểm dừng sẽ là điểm cực trị? Định lý dưới đây khẳng định điều này.

Định lý 1.20. *Cho điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm số $f(x, y)$ và hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của điểm M_0. Đặt*

$$A = f"_{x^2}(M_0), B = f"_{xy}(M_0), C = f"_{y^2}(M_0), \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó,

(i) Nếu $\Delta > 0$, thì hàm số không đạt cực trị tại điểm M_0.

(ii) Nếu $\Delta = 0$, thì hàm số $f(x, y)$ có thể đạt cực trị tại M_0 hoặc không đạt cực trị tại điểm M_0.

(iii) Nếu $\Delta < 0$ và

+ *$A > 0$, thì M_0 là điểm cực tiểu.*
+ *$A < 0$, thì M_0 là điểm cực đại.*

Chứng minh: (i) Giả sử $\Delta > 0$. Theo công thức Taylor cho hàm hai biến số, ta có

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y),$$

trong đó $0 < \theta < 1$. Do M_0 là điểm dừng, nên $df(x_0, y_0) = 0$. Khi đó

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\Big(A_0\Delta_x^2 + 2B_0\Delta_x\Delta_y + C_0\Delta_y^2\Big),$$

trong đó

$$\begin{cases} A_0 = f"_{x^2}(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y), \\ B_0 = f"_{xy}(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y), \\ C_0 = f"_{y^2}(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y). \end{cases}$$

Do vậy, tam thức bậc hai

$$g(x) = A_0x^2 + 2B_0x + C_0$$

đổi dấu qua 2 nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Tồn tại α, β sao cho

$$g(\alpha) > 0, g(\beta) < 0$$

và

$$\lim_{(\Delta_x, \Delta_y)\to 0}(A_0\alpha^2 + 2B_0\alpha + C_0) = g(\alpha) > 0, \lim_{(\Delta_x, \Delta_y)\to 0}(A_0\beta^2 + 2B_0\beta + C_0) = g(\beta) < 0.$$

Khi đó, tồn tại $\epsilon_0 > 0$ sao cho

$$A_0\alpha^2 + 2B_0\alpha + C_0 > 0 \text{ và } A_0\beta^2 + 2B_0\beta + C_0 < 0, \ \ \forall(\Delta_x, \Delta_y) \in B(O, \epsilon_0).$$

Với mọi $0 < \epsilon < \epsilon_0$, ta chọn $\delta > 0$ sao cho

$$\begin{cases} \delta < \frac{\epsilon}{2}, \\ |\delta\alpha| < \frac{\epsilon}{2}, \\ |\delta\beta| < \frac{\epsilon}{2}. \end{cases}$$

Xét 2 điểm $(\delta\alpha, \delta)$ và $(\delta\beta, \delta)$. Khi đó, ta dễ thử lại rằng

$$\begin{aligned} &(\delta\alpha, \delta) \in B(O, \epsilon_0), \\ &(\delta\beta, \delta) \in B(O, \epsilon_0), \\ &f(x_0 + \delta\alpha, y_0 + \delta) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\delta^2(A_0\alpha^2 + 2B_0\alpha + C_0) > 0, \\ &f(x_0 + \delta\beta, y_0 + \delta) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\delta^2(A_0\beta^2 + 2B_0\beta + C_0) < 0. \end{aligned}$$

Theo định nghĩa, điểm M_0 không là điểm cực trị.

(ii) Giả sử $\Delta = 0$. Với hàm số

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

cho ta $\Delta = 0$ tại điểm $O(0,0)$ và điểm O là điểm cực tiểu.

Với hàm số

$$f(x,y) = x^3 + y^3$$

cho ta $\Delta = 0$ tại điểm $O(0,0)$ và điểm O là không là điểm cực trị.

(iii) Giả sử $\Delta < 0$ và $A > 0$. Theo giả thiết liên tục của các đạo hàm riêng cấp 2, ta có

$$\lim_{(\Delta_x,\Delta_y)\to 0} \Delta_0 = \Delta < 0 \ \text{ và } \ \lim_{(\Delta_x,\Delta_y)\to 0} A_0 = A > 0.$$

Hay tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho

$$\Delta_0 < 0, A_0 > 0 \ \ \forall (\Delta_x, \Delta_y) \in B(O,\epsilon).$$

Khi đó

$$f(x_0+\Delta_x, y_0+\Delta_y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\Big(A_0\Delta_x^2 + 2B_0\Delta_x\Delta_y + C_0\Delta_y^2\Big) \geq 0,$$

với mọi $(\Delta_x, \Delta_y) \in B(O,\epsilon)$. Vậy điểm M_0 là điểm cực tiểu. Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có trường hợp $\Delta < 0$ và $A < 0$. Như vậy, định lý được chứng minh.

Ví dụ 1.21. *Tìm cực trị của hàm số*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Giải: Tìm các điểm dừng hay giải hệ phương trình

$$f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0,$$

ta nhận được các nghiệm $(0,0), (-1,-1), (1,1)$. Để tìm điều kiện đủ của cực trị, ta tính các đạo hàm riêng cấp 2

$$f"_{x^2} = 12x^2 - 2, f"_{xy} = -2, f"_{y^2} = 12y^2 - 2.$$

+ Xét tại điểm $(-1,-1)$.

Ta có

$$A = 10, B = -2, C = 10, \Delta = B^2 - AC < 0.$$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(-1,-1)$ và giá trị cực tiểu $f(-1,-1) = -2$.

+ Xét tại điểm $(1,1)$.

Ta có

$$A = 10, B = -2, C = 10, \Delta = B^2 - AC < 0.$$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(1,1)$ và giá trị cực tiểu $f(-1,-1) = -2$.

+ Xét tại điểm $(0,0)$.

Ta có

$$A = -2, B = -2, C = -2, \Delta = B^2 - AC = 0.$$

Để tìm hiểu sự tồn tại cực trị, ta xét số gia của hàm số tại điểm $(0,0)$:

$$\Delta_f = f(\Delta_x, \Delta_y) - f(0,0) = \Delta_x^4 + \Delta_y^4 - \Delta_x^2 - \Delta_y^2 - 2\Delta_x\Delta_y.$$

Nếu $0 < \Delta_x = \Delta_y < \sqrt{\frac{3}{2}}$, thì

$$\Delta_f = 2\Delta_x^4 - 4\Delta_x^2 < 2\Delta_x^4 - 3\Delta_x^2 = 2\Delta_x^2(\Delta_x^2 - \frac{3}{2}) < 0.$$

Nếu $0 < \Delta_x = -\Delta_y$, thì

$$\Delta_f = \Delta_x^4 + \Delta_x^4 - \Delta_x^2 - \Delta_x^2 + 2\Delta_x^2 = 2\Delta_x^4 > 0.$$

Theo định nghĩa, điểm $(0,0)$ không là điểm cực trị. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại 2 điểm $(-1,-1)$, điểm $(1,1)$ và $f_{\min} = -2$.

1.12.3. Cực trị có điều kiện

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên tập mở $D \subseteq \mathcal{R}^2$. một đường cong có phương trình $\varphi(x,y) = 0$. Người ta gọi cực trị của hàm số $f(x,y)$ trong đó các biến x, y bị ràng buộc bởi hệ thức $\varphi(x,y) = 0$ là *cực trị có điều kiện*.

Định lý 1.22. *(điều kiện cần)*

Giả sử điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị có điều kiện của hàm số $f(x,y)$ với rằng buộc $\varphi(x,y) = 0$. Các hàm số $f(x,y)$ và $\varphi(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) Các đạo hàm riêng của các hàm số f, φ liên tục trên một lân cận của điểm (x_0, y_0).

(ii) $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0, \varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó, tồn tại λ (gọi là nhân tử Lagrange) sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh: Hàm số $f(x,y)$ với rằng buộc $\varphi(x,y) = 0$ đạt cực trị tại điểm (x_0, y_0), nên $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Giả sử $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$, theo định lý hàm ẩn, tồn tại hàm ẩn $y = y(x)$ từ phương trình $\varphi(x, y) = 0$. Khi đó, hàm số $z = f(x, y(x))$ đạt cực trị tại điểm x_0. Theo định lý Fermat, ta có $z'(x_0) = 0$. Hay

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0.$$

Mặt khác, từ phương trình $\varphi(x, y(x)) = 0$ tại điểm (x_0, y_0), ta có

$$\varphi'_x(x_0, y_0) + \varphi'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0.$$

Kết hợp 2 hệ thức trên, ta có

$$\Big(f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0)\Big) + \Big(f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0)\Big).y'(x_0) = 0.$$

Vì $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ nên tồn tại $\lambda \in \mathcal{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Định lý được chứng minh.

Hàm số

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

được gọi là *hàm Lagrange*. Bây giờ ta xét điều kiện đủ cho cực trị có điều kiện. Với mỗi λ_0 cố định, ta cần xét xem điểm dừng có điều kiện (x_0, y_0) có là điểm cực trị của hàm $f(x, y)$ với ràng buộc $\varphi(x, y)$ không? Từ hệ thức

$$\begin{aligned} \Delta F(x_0, y_0, \lambda_0) =& f(x, y) - f(x_0, y_0) + \lambda_0\Big(\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\Big) \\ =& f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ =& \Delta f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Như vậy, với mỗi λ_0 cố định, nếu điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm $L(x, y, \lambda_0)$ thì (x_0, y_0) cũng là điểm cực trị của hàm $f(x, y)$. Cực trị của hàm $L(x, y, \lambda_0)$ là cực trị không điều kiện, do vậy điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị hay không, hoàn toàn phụ thuộc vào dấu của

$$d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0)dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dy^2.$$

Do $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)dy = 0$ và ta chỉ xét các điểm (x, y) sao cho $\varphi(x, y) = 0$. Khi đó, thay

$$dy = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}dx$$

vào biểu thức $d^2 f(x_0, y_0, \lambda_0)$, ta nhận được

$$d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0) = G(x_0, y_0, \lambda_0) dx^2.$$

Do đó,

+ Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì điểm (x_0, y_0) là điểm cực tiểu có điều kiện.

+ Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì điểm (x_0, y_0) là điểm cực đại có điều kiện.

Ví dụ 1.23. *Tìm cực trị của hàm số* $f(x, y) = xy$ *với ràng buộc* $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Hàm Lagrange có dạng

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

+ Tìm điểm dừng có điều kiện: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ta nhận được 4 nghiệm

$$A_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), A_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), A_3(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}), A_4(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Với mọi điểm (x, y) thuộc miền ràng buộc hay $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, ta có

$$2xdx + 2ydy = 0 \quad \text{và } F"_{x^2} = 2\lambda, F"_{xy} = 1, F"_{y^2} = 2\lambda.$$

Ta xét tại các điểm:

+ Điểm $A_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} d^2 F(A_1) &= dx^2 + 2dxdy + dy^2 \\ &= (dx + dy)^2 \\ &= 4dx^2. \end{aligned}$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm A_1 và giá trị cực tiểu $f(A_1) = -\frac{1}{2}$.

+ Bằng cách làm tương tự, hàm số đạt cực tiểu tại điểm A_2 và giá trị cực tiểu $f(A_2) = -\frac{1}{2}$. Hàm số đạt cực đại tại các điểm A_3, A_4 và giá trị cực đại $f(A_3) = f(A_4) = \frac{1}{2}$.

1.13. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

1.13.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ và điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$.
+ Hàm số f được gọi là *đạt giá trị lớn nhất* tại điểm M_0 trên miền D, nếu

$$f(M_0) \geq f(M), \;\; \forall M \in D.$$

+ Hàm số f được gọi là *đạt giá trị nhỏ nhất* tại điểm M_0 trên miền D, nếu

$$f(M_0) \leq f(M), \;\; \forall M \in D.$$

Chú ý rằng mọi hàm $f(x, y)$ liên tục trên một miền đóng và bị chặn $D \subseteq \mathcal{R}^2$ đều tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên miền D.

1.13.2. Phương pháp tìm

Ta nhận thấy rằng: Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất tai điểm $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathcal{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in intD$, thì (x_0, y_0) sẽ là điểm cực trị không điều kiện. Khi đó, điểm này cũng là điểm dừng của hàm số $f(x, y)$. Do vậy, ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đồ thị hàm số $f(x, y)$ trên miền D như sau:
Bước 1. Tìm các điểm dừng không điều kiện trên miền D: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n)$.
Bước 2. Tìm các điểm dừng có điều kiện trên miền biên ∂D hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên ∂D: $(x_{n+1}, y_{n+1}), (x_{n+2}, y_{n+2}), ...(x_m, y_m)$.
Bước 3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x, y)$ trên miền D xác định bởi công thức:

$$f_{LN} = \max\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), ...f(x_m, y_m)\},$$

$$f_{NN} = \min\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), ...f(x_m, y_m)\}.$$

Ví dụ 1.24. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x, y) = 8x^2 + 3y^2 - (2x^2 + y^2 + 1)^2,$$

trên miền $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Giải: Miền D là một hình tròn đơn vị. Do đó, D là đóng và bị chặn. Hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D, nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền D.
+ Tìm các điểm dừng không điều kiện: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ 2y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0, \end{cases}$$

cho ta các điểm dừng:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_5 = 0. \end{cases}$$

+ Xét hàm số $f(x, y)$ trên miền biên $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Thay $y^2 = 1 - x^2$ vào hàm số $f(x, y)$, ta nhận được

$$f(x, y) = 8x^2 + 3(1 - x^2) - (2x^2 + 1 - x^2 - 1)^2 = x^2 - x^4 - 1,$$

với $x \in [-1, 1]$. Dễ dàng thấy rằng: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $(x^2 = \frac{1}{2}, y^2 = \frac{1}{2})$, nhỏ nhất tại $(x = 0, y^2 = 1)$ hoặc $(x^2 = 1, y = 0)$.

+ Kết luận: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $f(x, y)$ được xác định bởi:

$$f_{LN} = \max\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), ...\} = f(0, 0) = -1,$$
$$f_{NN} = \min\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), ...\} = f(x_4, y_4) = f(x_5, y_5) = 0.$$

Ví dụ 1.25. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x, y) = e^x(x + y)(x - y + 4),$$

trên tam giác OAB, với $A(-5, 0), B(0, 5)$.

Giải: + Tìm các điểm dừng không điều kiện: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x(x^2 - y^2 + 6x + 4y + 4) = 0 \\ e^x(-2y + 4) = 0, \end{cases}$$

cho ta các điểm dừng:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Điểm $(x_1, y_1) \in (OAB)$ thỏa mãn. Điểm (x_2, y_2) không thuộc miền ràng buộc.

+ Xét hàm số $f(x, y)$ trên biên $OA : y = 0, \quad x \in [-5, 0]$. Thay $y = 0$ vào hàm số $f(x, y)$, ta nhận được

$$f(x, 0) = e^x(x^2 + 4x),$$

với $x \in [-5, 0]$. Ta có $f'(x, 0) = e^x(x^2 + 6x + 4)$. Vì loại điểm (x_2, y_2) và để tiện cho việc sử dụng, ta ký hiệu các điểm dừng và 2 điểm đầu mút của đoạn OA là

$$\begin{cases} x_2 = -3 - \sqrt{5} \\ y_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -5 \\ y_4 = 0. \end{cases}$$

+ Xét hàm số $f(x,y)$ trên biên $OB: x=0,\ \ y\in[0,5]$. Thay $x=0$ vào hàm số $f(x,y)$, ta nhận được

$$f(x,0) = -y^2+4y,$$

với $y\in[0,5]$. Ta có $f'(0,y) = -2y+4$. Khi đó, ta có thêm điểm đầu mút $(x_5=0, y_5=5)$.
+ Xét hàm số $f(x,y)$ trên biên $AB: y=x+5,\ \ x\in[-5,0]$. Thay $y=x+5$ vào hàm số $f(x,y)$, ta nhận được

$$f(x,x+5) = e^x(-2x-5),$$

với $x\in[-5,0]$. Ta có $f'(x,x+5) = e^x(-2x-7)$. Khi đó, ta có thêm điểm dừng $(x_6=-\frac{7}{2}, y_6=\frac{3}{2})$.
+ Kết luận: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $f(x,y)$ được xác định bởi:

$$f_{LN} = \max\{f(x_1,y_1), f(x_2,y_2), ..., f(x_6,y_6)\} = f(x_1,y_1) = f(x_3,y_3) = 0,$$
$$f_{NN} = \min\{f(x_1,y_1), f(x_2,y_2), ..., f(x_6,y_6)\} = f(x_2,y_2) = e^{-3-\sqrt{5}}(-2\sqrt{5}-10).$$

Bài tập chương 1

Bài 1.1. Cho hàm số $z=z(x,y)$ được xác định bởi phương trình ẩn:

$$x = e^{2z}(z+y^2+2y).$$

Tính vi phân toàn phần $dz(x,y)$.
Bài 1.2. Tính gần đúng số

$$I = \sqrt{e^{-0.02}+2.11^3}.$$

Bài 1.3. Cho hàm ẩn $z=z(x,y)$ xác định bởi phương trình

$$z = x^3\sin(yz) + 3xe^{\frac{y^2}{z}}.$$

Tính gần đúng giá trị của z tại điểm $(0.98, 0.01)$.
Bài 1.4. Cho hàm số

$$z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \arctan\frac{y}{x}.$$

a) Rút gọn biểu thức: $A = z''_{x^2} + z''_{y^2}$.
b) Tính giá trị của $d^2z(0,1)$.
Bài 1.5. Cho hàm ẩn $z=z(x,y)$ xác định bởi phương trình ẩn

$$z = x^2y + 2xe^{\frac{y}{z}}.$$

Tính gần đúng giá trị của z tại điểm $(0.99, 0.02)$.
Bài 1.6. Tìm cực trị không điều kiện của các hàm số sau:

a) $z = xye^{x-y}$.

b) $z = e^{2x}(x^2 + y^2 - 2)$.

c) $z = xy^2 + x^4 + y^4$.

d) $z = xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

e) $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$.

f) $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

g) $z = e^x(x + y)(x - y + 4)$.

Bài 1.7. Tìm các hằng số A, B, C để hàm số

$$z = 2x^3 + 3xy - 2y^3 + Ax + By + C,$$

đạt cực trị tại các điểm $M_1(1, -1)$ và $z(1, -1) = 0$.

Bài 1.8. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + 2xy + \frac{1}{4}y^4$$

với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Bài 1.9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $z = x^2 + y^2 - 2x^2y + 1$ trên miền $D = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Bài 1.10. Cho hàm số $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

a) Tìm cực trị của z.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền $D = \{(x, y) :\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Hướng dẫn giải bài tập chương 1

Bài 1.1. Sử dụng công thức $dz = z'_x dx + z'_y dy$, với

$$z'_x = \frac{e^{-2z}}{2(y+1)^2 + 2z - 1}, z'_y = \frac{-2(y+1)}{2(y+1)^2 + 2z - 1}.$$

Bài 1.2. Đặt hàm số $f(x, y) = \sqrt{2^{2x} + y^3}$. Khi đó $I = f(-0.02, 2.11)$ và

$$I \approx f(0, 2) + df(0, 2) = 3 - \frac{1}{3} \times 0.01 + 2 \times 0.11 = 3.2167.$$

Bài 1.3. Theo công thức:

$$z(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta_x + z'_y(x_0, y_0)\Delta_y,$$

trong đó $(x_0, y_0) = (1, 0), \Delta_x = -0.02, \Delta_y = 0.01$. Khi đó, $z(0.98, 0.01) \approx 2.97$.

Bài 1.4. Cho hàm số

$$z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan\frac{y}{x}.$$

a) Rút gọn biểu thức: $I = z''_{x^2} + z''_{y^2}$.

b) Tính giá trị của $d^2z(0, 1)$.

Ta có

$$z''_{x^2} = \frac{-x^2 + 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$z''_{y^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$z''_{xy} = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Khi đó, ta có $I = 0, d^2z(0, 1) = dx^2 + 2dxdy - dy^2$.

Bài 1.5. Theo công thức:

$$z(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta_x + z'_y(x_0, y_0)\Delta_y,$$

trong đó $(x_0, y_0) = (1, 0), \Delta_x = -0.01, \Delta_y = 0.02$. Khi đó, $z(0.99, 0.02) \approx 2.02$.

Bài 1.6. a) $z = xye^{x-y}$.

b) $z = e^{2x}(x^2 + y^2 - 2)$.

$$\begin{cases} z'_x = y(x+1)e^{x-y} = 0 \\ z'_y = x(1-y)e^{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta = {z''_{xy}}^2 - z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_1, y_1) = 1 > 0, \Delta(x_2, y_2) = -1 < 0 \Rightarrow z_{min} = z(x_2, y_2) = -e^{-2}.$$

c) $z = xy^2 + x^4 + y^4$.

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 + y^2 = 0 \\ z'_y = 2y(x + 2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}, \end{cases} \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y_3 = -\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta = {z''_{xy}}^2 - z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_2, y_2) > 0, \Delta(x_3, y_3) > 0, \Delta(x_1, y_1) = 0.$$

Xét tại (x_1, y_1).

$$z(0, 0) = 0, z(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4} < 0\ \forall n \geq n_0, z(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4} < 0\ \forall n \geq n_0.$$

Như vậy, hàm số không có cực trị.

d) $z = xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0, \end{cases}$$

$$z(0,0)=0, z(\frac{1}{n},\frac{1}{n})>0\ \forall n\geq n_0, z(\frac{1}{n},-\frac{1}{n})<0\ \forall n\geq n_0.$$

Như vậy, hàm số không có cực trị.

e) $z=3x^2y+y^3-18x-30y$.

$$\begin{cases} z'_x=6xy-18=0 \\ z'_y=3y^2+3x^2-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=3, \end{cases} \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-3, \end{cases} \begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1, \end{cases} \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta={z''_{xy}}^2-z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_1,y_1)=\Delta(x_2,y_2)<0, \Delta(x_3,y_3)=\Delta(x_4,y_4)>0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại (x_2,y_2) và đạt cực tiểu tại (x_1,y_1).

f) $z=x^4+y^4-4xy+1$.

$$\begin{cases} z'_x=4x^4-4y=0 \\ z'_y=4y^3-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0, \end{cases} \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=1, \end{cases} \begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=-1. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta={z''_{xy}}^2-z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_3,y_3)=\Delta(x_2,y_2)<0, \Delta(x_1,y_1)=0.$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại (x_2,y_2) và đạt cực tiểu tại (x_3,y_3). Hàm số không đạt cực trị tại (x_1,y_1).

g) $z=e^x(x+y)(x-y+4)$.

$$\begin{cases} z'_x=e^x(x^2-y^2+6x+4y+4)=0 \\ z'_y=e^x(-2y+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=2, \end{cases} \begin{cases} x_2=-4 \\ y_2=2. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta={z''_{xy}}^2-z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_1,y_1)>0, \Delta(x_2,y_2)<0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại (x_2,y_2).

Bài 1.7. Tìm các hằng số A,B,C để hàm số

$$z=2x^3+3xy-2y^3+Ax+By+C,$$

đạt cực trị tại các điểm $M_1(1,-1)$ và $z(1,-1)=0$.

$$\begin{cases} z'_x(1,-1)=0 \\ z'_y(1,-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=3, \end{cases} \quad z(1,-1)=0\Rightarrow C=5.$$

Thử lại: Thỏa mãn.

Bài 1.8. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + 2xy + \frac{1}{4}y^4$$

với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{4}, (x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}});$$

$$\lambda = \frac{3}{4}, (x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

$$d^2L(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{4}) = -6dx^2 < 0, d^2L(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{4}) = -6dx^2 < 0$$

$$d^2L(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}) = 10dx^2 > 0, d^2L(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}) = 10dx^2 > 0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ và cực tiểu tại $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Bài 1.9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $z = x^2 + y^2 - 2x^2y + 1$ trên miền $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}).$$

Tại biên $x^2 + y^2 = 1$, ta có $z(x,y) = f(y) = 2(y^3 - y + 1)$ với $|y| \leq 1$.

$$f(-1) = f(1) = 2, f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}), f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Vậy hàm số đạt nhỏ nhất là $2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$ và lớn nhất là $2(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Bài 1.10. Cho hàm số $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

a) Tìm cực trị của z:

$$z_{\min} = -\frac{9}{8} \text{ tại } (-\frac{1}{2}, -1), (\frac{1}{2}, -1), (-\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, 1).$$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền $D = \{(x,y):\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$: Xét trên các biên và các điểm cực trị trên miền D.

1 dfgfg

2 dđfg

CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

2.1. Tích phân phụ thuộc tham số

2.1.1. Tích phân xác định

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ thỏa mãn $f(x,y)$ khả tích theo biến x trên $[a,b]$ với mỗi $y\in[c,d]$. Khi đó, hàm số

$$g(y) := \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

được gọi là *hàm tích phân phụ thuộc vào tham số* y. Hàm số $g(y)$ xác định trên $[c,d]$ và có các tính chất sau:

Định lý 2.1. *(Tính chất liên tục) Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$, thì hàm số $g(y)$ liên tục trên đoạn $[c,d]$.*

Chứng minh. Với mọi $y_0\in(c,d), \Delta_y\in(c,d)$ sao cho $y=y_0+\Delta_y\in(c,d)$. Từ giả thiết $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ suy ra $f(x,y)$ liên tục đều trên miền đó. Theo định nghĩa của hàm liên tục đều, với mọi $\epsilon>0$ tồn tại $\delta>0$, với mọi Δ_y thỏa mãn $|\Delta_y|<\delta$, ta có

$$|f(x,y_0+\Delta_y)-f(x,y_0)|<\frac{\epsilon}{b-a}\quad\forall x\in[a,b].$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}|g(y)-g(y_0)| &= |g(y_0+\Delta_y)-g(y_0)|\\ &= \left|\int\limits_a^b[f(x,y_0+\Delta_y)-f(x,y_0)]dx\right|\\ &\le \int\limits_a^b|f(x,y_0+\Delta_y)-f(x,y_0)|dx\\ &< \int\limits_a^b\frac{\epsilon}{b-a}dx\\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Theo định nghĩa, hàm $g(y)$ liên tục tại y_0. Vậy, hàm số $g(y)$ liên tục trên (c,d). Ta dễ dàng chứng minh được rằng $g(y)$ cũng liên tục phải tại c và liên tục trái tại d. □

Kết quả trên có thể được tổng quát hơn bởi định lý dưới đây.

Chú ý 2.2. *Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$, các hàm số $\alpha(y),\beta(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và*

$$a \le \alpha(y) \le b, a \le \beta(y) \le b \ \ \forall y \in [c,d]$$

thì hàm số

$$g(y) := \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

liên tục trên đoạn $[c,d]$.

Ví dụ 2.3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$g(y) := \int\limits_0^1 \frac{y^2 f(x)}{x^2+y^2}dx$$

liên tục trên $(0,+\infty)$.

Bài giải: Giả sử $y_0 > 0$, tồn tại số c,d sao cho $0 < c < y_0 < d < +\infty$. Ký hiệu $D := [0,1]\times[c,d]$. Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$, nên hàm dưới dấu tích phân $\frac{y^2 f(x)}{x^2+y^2}$ liên tục trên D. Theo định lý 2.1, hàm $g(y)$ liên tục trên $[c,d]$, nên hàm $g(y)$ liên tục tại y_0. Vậy $g(y)$ liên tục trên khoảng $(0,+\infty)$.

Định lý 2.4. *(Tính chất khả vi) Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục theo biến x trên $[a,b]$ với mỗi $y\in[c,d]$ và đạo hàm riêng $f'_y(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $D=[a,b]\times[c,d]$. Khi đó*

$$g(y) := \int\limits_a^b f(x,y)dx \Rightarrow g'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Chứng minh. Từ giả thiết $f'_y(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật D, suy ra $f'_y(x,y)$ liên tục đều trên miền D. Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ (số δ chỉ phụ thuộc vào ϵ) sao cho

$$|\Delta_y| < \delta, (x, y+\Delta_y) \in D \Rightarrow |f'_y(x,y+\Delta_y) - f'_y(x,y)| < \frac{\epsilon}{b-a} \ \ \forall x\in[a,b], y\in[c,d].$$

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{g(y+\Delta_y)-g(y)}{\Delta_y} - \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx\right| &= \left|\int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta_y)-f(x,y)}{\Delta_y}dx - \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx\right| \\
&\le \int\limits_a^b \left|\frac{f(x,y+\Delta_y)-f(x,y)}{\Delta_y} - f'_y(x,y)\right|dx \\
&= \int\limits_a^b |f'_y(x,y+\theta\Delta_y) - f'_y(x,y)|dx \\
&< \int\limits_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

với $\theta \in (0,1)$. Do đó

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{g(y+\Delta_y)-g(y)}{\Delta_y} = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$$

hay

$$g'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx.$$

□

Định lý 2.4 được tổng quát bởi kết quả dưới đây.

Chú ý 2.5. *Nếu hàm $f(x,y)$ có đạo hàm riêng $f'_y(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $D = [a,b] \times [c,d]$, các hàm số $\alpha(y), \beta(y)$ khả vi trên $[c,d]$ và*

$$a \le \alpha(y) \le b, a \le \beta(y) \le b \ \ \forall y \in [c,d]$$

thì hàm số

$$g(y) := \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

khả vi trên đoạn $[c,d]$ và

$$g'(y) := \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y).\beta'(y) - f(\alpha(y),y).\alpha'(y).$$

Ví dụ 2.6. Tìm đạo hàm của hàm số

$$g(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 - \sin^2 x)dx \ \ (y > 1).$$

Bài giải: Hàm số $f(x,y) = \ln(y^2 - \sin^2 x)$ liên tục trên miền $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times (1, +\infty)$ và có đạo hàm riêng

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{y^2 - \sin^2 x}, \quad y > 1$$

liên tục trên miền D. Khi đó theo định lý 2.4, hàm $g(y)$ khả vi trên $(1, +\infty)$ và

$$g'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2y}{y^2 - \sin^2 x} dx = 2y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(y^2-1) + \cos^2 x}.$$

Đổi biến $t = \tan x$, ta có

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{y^2 + (y^2-1)t^2} \\ &= \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}} arctan \frac{\sqrt{y^2-1}t}{y}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2y\sqrt{y^2-1}}. \end{aligned}$$

Định lý 2.7. *(Tích phân) Cho hàm $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $D = [a,b] \times [c,d]$. Khi đó*

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx \Rightarrow \int_c^d g(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

(Chứng minh của định lý này được trình bày ở phần tích phân kép).

Ví dụ 2.8. Cho $0 < a < b$, hãy tính tích phân sau:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Bài giải: Thay

$$x^b - x^a = \ln x \int_a^b x^y dy$$

vào tích phân I, ta có

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx.$$

Theo định lý 2.7, ta có

$$I = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

2.1.2. Tích phân suy rộng

Cho hàm 2 biến $f(x, y)$ xác định trên $D = [a, +\infty] \times [c, d]$. Khi đó, hàm số

$$g(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

được gọi là *tích phân suy rộng phụ thuộc vào tham số* y.

• Hàm số $g(y)$ được gọi là *hội tụ* với mỗi $y \in [c, d]$, nếu

$$\forall \epsilon_y > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon_y) > 0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \epsilon_y.$$

• Hàm số $g(y)$ được gọi là *hội tụ đều* trên đoạn $[c, d]$, nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \epsilon \quad \forall y \in [c, d].$$

Định lý dưới đây cho ta điều kiện đủ về điều kiện hội tụ đều của hàm $g(y)$.

Định lý 2.9. *(Dấu hiệu Weierstrass) Nếu hàm* $\int\limits_a^{+\infty} h(x)dx$ *hội tụ và*

$$|f(x, y)| \leq h(x) \quad \forall (x, y) \in D$$

thì hàm số $g(y)$ *hội tụ đều trên* $[c, d]$.

Chứng minh. Theo tích chất của tích phân suy rộng, ta có

$$\left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| \leq \int\limits_b^{+\infty} |f(x, y)|dx \leq \int\limits_b^{+\infty} h(x)dx.$$

Vì $\int\limits_b^{+\infty} h(x)dx$ hội tụ, nên

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} h(x)dx \right| < \epsilon.$$

Do vậy

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \epsilon.$$

$\square$

Ví dụ 2.10. Chứng minh rằng hàm số

$$g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y+x)}{2+3x^2+y^2}dx$$

hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Bài giải: Ta có

$$\left|\frac{\sin(x+y)}{2+3x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2+3x^2}.$$

Mặt khác $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2+3x^2}dx$ hội tụ. Theo định lý 2.9, hàm số $g(y)$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Tính chất liên tục của hàm số $g(y)$ được khẳng định bởi định lý dưới đây.

Định lý 2.11. *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền D và hàm số $g(y)$ hội tụ đều trên đoạn $[c,d]$, thì $g(y)$ liên tục trên đoạn $[c,d]$.*

Chứng minh. Do $g(y)$ hội tụ đều trên $[c,d]$, nên

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall y \in [c,d]. \tag{2.1}$$

Theo Định lý 2.1, với $b > a$ hàm số $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ liên tục trên $[c,d]$ hay với $y \in [c,d]$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall \Delta_y: \; y + \Delta_y \in [c,d], \; |\Delta_y| < \delta \Rightarrow \left|\int_a^b f(x,y+\Delta_y)dx - \int_a^b f(x,y)dx\right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.2}$$

Từ (2.1) và (2.2), suy ra

$$\begin{aligned}
|g(y+\Delta_y) - g(y)| &= \left|\int_a^{+\infty} f(x,y+\Delta_y)dx - \int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right| \\
&= \left|\int_a^b [f(x,y+\Delta_y) - f(x,y)]dx - \int_b^{+\infty} f(x,y)dx + \int_b^{+\infty} f(x,y+\Delta_y)dx\right| \\
&\leq \left|\int_a^b [f(x,y+\Delta_y) - f(x,y)]dx\right| + \left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right| + \left|\int_b^{+\infty} f(x,y+\Delta_y)dx\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Theo định nghĩa, hàm số $g(y)$ liên tục trên $[c,d]$. □

Ví dụ 2.12. Chứng minh rằng hàm số

$$g(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{2 + x^y}$$

liên tục trên $(2, +\infty)$.

Bài giải: Ta lấy $y_0 > 2$, tồn tại số thực a sao cho $y_0 > a > 2$. Khi đó, với mọi $x \geq 1, y > a$, ta có

$$\frac{x}{2 + x^y} \leq \frac{x}{2 + x^a}.$$

Mặt khác

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2 + x^a} : \frac{1}{x^{a-1}}\right) = 1 \ \ (\text{vì } a - 1 > 1)$$

và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-1}}$ hội tụ, theo dấu hiệu so sánh ta suy ra tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{2+x^y}$ hội tụ. Do vậy, theo Định lý 2.9 ta có $g(y)$ hội tụ đều trên $(2, +\infty)$.

Hơn nữa hàm dưới dấu tích phân $\frac{x}{2+x^y}$ liên tục trên miền $[1, +\infty) \times [a, +\infty)$. Theo Định lý 2.11, hàm số $g(y)$ liên tục tại y_0. Do đó, $g(y)$ liên tục trên $(2, +\infty)$.

Định lý 2.13. *Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D và hàm số $g(y)$ hội tụ đều trên đoạn $[c, d]$, thì*

$$\int\limits_c^d g(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx \right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Chứng minh. Do hàm số $g(y)$ hội tụ đều trên $[c, d]$, nên

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow |\int\limits_b^{+\infty} f(x, y)dx| < \epsilon \ \ \forall y \in [c, d].$$

Khi đó, theo định lý 2.7 ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx - \int_c^d g(y)dy\right| &= \left|\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy - \int_c^d g(y)dy\right| \\
&= \left|\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx - g(y)\right]dy\right| \\
&= \left|\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy\right| \\
&= \left|\int_c^d \left[\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy\right| \\
&\le \int_c^d \left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|dy \\
&\le \frac{\epsilon}{d-c}.(d-c) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Theo định nghĩa của giới hạn, ta có

$$\int_c^d g(y)dy = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx.$$

□

Ví dụ 2.14. Cho $b > a > 0$, tính tích phân sau:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx.$$

Bài giải: Ta nhận thấy

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-yx}dy.$$

Do vậy, ta có thể viết

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\int_a^b e^{-yx}dy\right)dx.$$

Xét tích phân phụ thuộc tham số

$$g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx}dx \quad \text{với} \quad y \in [a,b].$$

Ta có $e^{-yx} \leq e^{-ax} \ \ \forall y \in [a, b], x \in [0, +\infty]$ và $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$ $(a > 0)$ hội tụ. Theo định lý 2.9, tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}dx$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Hơn nữa, hàm dưới dấu tích phân e^{-yx} liên tục trên miền $[0, +\infty) \times [a, b]$ cho nên theo Định lý 2.13, ta có thể viết

$$I = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}dx \right) dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}.$$

Định lý 2.15. *Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền D thỏa mãn các giả thiết sau:*

- *$f(x, y)$ liên tục theo biến x trên $[a, +\infty)$ với mỗi $y \in [c, d]$,*
- *$f'_y(x, y)$ liên tục trên miền D,*
- *$g(y)$ hội tụ với mỗi $y \in [c, d]$,*
- *$\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ hội tụ đều trên đoạn $[c, d]$.*

Khi đó

$$g(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx \Rightarrow g'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx \ \ y \in [c, d].$$

Chứng minh. Theo giả thiết hàm số $f'_y(x, y)$ thỏa mãn các giả thiết của định lý 2.13, nên

$$\begin{aligned}
\int\limits_c^y \Big(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx \Big) dy &= \int\limits_a^{+\infty} \Big(\int\limits_c^y f'_y(x, y)dy \Big) dx \\
&= \int\limits_a^{+\infty} [f(x, y) - f(x, c)]dx \\
&= \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx - K,
\end{aligned}$$

trong đó $K = \int\limits_a^{+\infty} f(x, c)dx$ (const) vì $g(c)$ hội tụ. Lấy đạo hàm 2 vế của đẳng thức trên, ta có

$$\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx = \Big(\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx \Big)'$$

hay

$$g'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx \ \ y \in [c, d].$$

□

Ví dụ 2.16. Tìm đạo hàm của hàm số

$$g(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{[1 - \cos(xy)]dx}{xe^{2x}} \quad \text{với} \ \ y \in (0, +\infty).$$

Từ đó tính $g(y)$.

Bài giải: Đặt hàm số

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{xe^{2x}}.$$

Khi đó,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(xy)}{xe^{2x}} = 0.$$

Ta xác định thêm giá trị của hàm $f(x, y)$ tại điểm $x = 0$, bằng cách đặt $f(0, y) = 0$. Khi đó, $f(x, y)$ liên tục trên $D = [0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Hơn nữa

$$f'_y(x, y) = e^{-2x}. \sin xy, \quad |f'_y(x, y)| \leq e^{-2x} \quad \forall (x, y) \in D.$$

Vì tích phân $\int\limits_1^{+\infty} e^{-2x} dx$ hội tụ, nên theo định lý 2.9, tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}. \sin xy dx$$

hội tụ đều trên miền $[0, +\infty)$. Khi đó, theo định lý 2.15, ta có

$$g'(y) = \int\limits_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2x} \sin xy dx = \frac{y}{4 + y^2}.$$

Lấy nguyên hàm 2 vế, ta có

$$g(y) = \frac{1}{2} \ln(4 + y^2) + C.$$

Thay $y = 0$ vào $g(y)$, ta nhận được

$$C = - \ln 2.$$

Vậy

$$g(y) = \frac{1}{2} \ln(4 + y^2) - \ln 2.$$

2.2. Tích phân kép

2.2.1. Định nghĩa

Cho hàm hai biến số $z = f(x, y)$ xác định trên miền đóng bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$.

• Chia miền D tùy ý (ký hiệu P) thành n mảnh nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$ có các diện tích tương ứng là $\Delta D_1, \Delta D_2, ..., \Delta D_n$.

• Chọn một điểm tùy ý $(x_i, y_i) \in D_i \ \ \forall i = 1, 2, ..., n$.

Khi đó, tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta D_i$$

được gọi là *tổng tích phân* của hàm $f(x, y)$ trên miền D. Ta định nghĩa *đường kính* của tập hợp D_i được xác định bởi

$$diam(D_i) = \sup\{AB : \ A \in D_i, B \in D_i\}.$$

Ký hiệu

$$\Delta_P = \max\{diam(D_1), diam(D_2), ..., diam(D_n)\}.$$

Nếu giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

tồn tại, không phụ thuộc vào phép chia P và phép chọn điểm (x_i, y_i) thì I được gọi là *tích phân kép* của hàm $f(x, y)$ trên miền D và được ký hiệu là

$$\iint\limits_D f(x, y) dx dy.$$

D được gọi là miền lấy tích phân. Nếu tích phân trên tồn tại, ta nói rằng hàm số $f(x, y)$ khả tích trên miền D. Người ta chứng minh được rằng, nếu $f(x, y)$ liên tục trên miền D đóng và chị chặn thì hàm $f(x, y)$ khả tích trên miền D.

2.2.2. Điều kiện khả tích.

Đặt

$$m_i = \inf\{f(x, y) : \ (x, y) \in D_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x, y) : \ (x, y) \in D_i\}.$$

Khi đó

$$m_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta D_i$$

được gọi là *tổng Darboux dưới* của hàm $f(x, y)$ ứng với phép phân hoạch P.

$$M_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta D_i$$

được gọi là *tổng Darboux trên* của hàm $f(x, y)$ ứng với phép phân hoạch P.

Định lý 2.17. *Hàm số $f(x, y)$ khả tích trên miền D khi và chỉ khi*

$$\lim_{\Delta_P \to 0} (M_P - m_P) = 0.$$

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử $f(x, y)$ khả tích trên miền D. Hay tồn tại

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P,$$

tức là

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall P : \ |\Delta_P| < \delta \Rightarrow |\sigma_P - I| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Mặt khác, từ định nghĩa của inf và sup, tồn tại phân hoạch P sao cho

$$\sigma_P - \frac{\epsilon}{4} < m_P \text{ và } M_P < \sigma_P + \frac{\epsilon}{4}.$$

Khi đó

$$I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_P - \frac{\epsilon}{4} < m_P \leq M_P < \sigma_P + \frac{\epsilon}{4} < I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Do vậy

$$|m_P - I| < \frac{\epsilon}{2} \text{ và } |M_P - I| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |M_P - m_P| = |M_P - I + I - m_P| \leq |M_P - I| + |I - m_P| < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Cho $\lim\limits_{\Delta_P \to 0}(M_P - m_P) = 0$. Đặt

$$I_* = \sup\{m_P : \ P\}, \ I^* = \inf\{M_P : \ P\}.$$

Khi đó, từ

$$m_P \leq I_* \leq I^* \leq M_P \ \ \forall P$$

suy ra $I^* = I_*$, đặt $I_* = I$. Theo định nghĩa,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P : |P| < \delta \Rightarrow I - \epsilon = I_* - \epsilon < m_P \leq \sigma_P \leq M_P < I^* + \epsilon = I + \epsilon.$$

Do đó

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P : |\Delta_P| < \delta \Rightarrow |\sigma_P - I| < \epsilon$$

hay $\lim\limits_{\Delta_P} \sigma_P = I$. □

Hệ quả 2.18. *Cho $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập compact. Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D, thì f sẽ khả tích trên miền D.*

2.2.3. Các tính chất.

Tích phân kép cũng có tính chất tương tự như tích phân xác định với các giả thiết là các tích phân dưới đây đều tồn tại.

- Nếu $f(x, y) = 1$, thì $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ là diện tích của miền D.
- $\iint\limits_D [f(x, y) + g(x, y)]dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy + \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$
- $\iint\limits_D [f(x, y) - g(x, y)]dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy - \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$
- $\iint\limits_D kf(x, y)dxdy = k\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ với $k = const$.
- Nếu D chia thành 2 mảnh nhỏ D_1, D_2 sao cho $int(D_1 \cap D_2) = \emptyset$, thì

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy.$$

• Nếu $f(x, y) \leq g(x, y) \ \ \forall (x, y) \in D$, thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy \leq \iint_D g(x, y)dxdy.$$

• *(Định lý giá trị trung bình)* Nếu $f(x, y)$ liên tục trên miền D đóng và bị chặn có diện tích $dt(D) \in (0, +\infty)$, thì tồn tại điểm $(x^0, y^0) \in D$ sao cho

$$f(x^0, y^0) = \frac{1}{dt(D)} \iint_D f(x, y)dxdy.$$

2.2.4. Định lý Fubini.

Trong mục này, ta sẽ trình bày phương pháp tính tích phân kép, trước hết ta xét miền D là một hình chữ nhật $D = [a, b] \times [c, d]$.

Định lý 2.19. *Cho hàm số $f(x, y)$ khả tích trên D. Khi đó*

i) Nếu hàm số $f(x, y)$ khả tích trên $[c, d]$ với mỗi $x \in [a, b]$, thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

ii) Nếu hàm số $f(x, y)$ khả tích trên $[a, b]$ với mỗi $y \in [c, d]$, thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Chứng minh. i) Ta chia miền D bởi phép chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_m = d.$$

Đặt

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j, D_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \ \forall i = 1, 2, ..., n-1, j = 1, 2, ..., m-1,$$

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : \ (x, y) \in D_{ij}\}, M_{ij} = \sup\{f(x, y) : \ (x, y) \in D_{ij}\}.$$

Ta có

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij} \ \ \forall (x, y) \in D_{ij}.$$

Lấy $x = \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, ta có

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij} \ \ \forall y \in [y_j, y_{j+1}]$$

và

$$m_{ij}\Delta y_j \leq \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}\Delta y_j \ \ \forall j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \leq \int\limits_c^d f(\xi_i, y)dy \leq \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j \ \ \forall i = 0, 1, ..., n-1.$$

Nhân các vế với Δx_i và cộng các bất đẳng thức trên, ta có

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \left(\int\limits_c^d f(\xi_i, y)dy \right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j.$$

Ta đặt

$$\Delta_x = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}\}, \Delta_y = \{\Delta y_0, \Delta y_1, ..., \Delta y_{m-1}\}, \Delta_P = \max\{\Delta_x, \Delta_y\}.$$

Khi đó,

$$\lim_{\Delta_P} m_P \leq \lim_{\Delta_x} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \left(\int\limits_c^d f(\xi_i, y)dy \right) \leq \lim_{\Delta_P} M_P.$$

Vì $f(x, y)$ khả tích trên D, nên theo Định lý 2.17, ta có

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

ii) Được chứng minh tương tự. $\square$

Chú ý 2.20. *Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D, thì f(x,y) liên tục trên $[a, b]$ với mỗi $y \in [c, d]$ và trên $[c, d]$ với mỗi $x \in [a, b]$. Khi đó, theo Định lý 2.19, ta có*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Như vậy Định lý 2.7 được chứng minh.

Ví dụ 2.21. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D x^2 y dxdy,$$

trong đó $D = [0, 1] \times [0, 2]$.

Bài giải: Theo Định lý 2.19, ta có

$$I = \iint\limits_D x^2 y dx dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^2 x^2 y dy \right) dx = \int\limits_0^1 x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 dx$$

$$= \int\limits_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Hệ quả 2.22. *Giả sử miền*

$$D = \{(x,y):\ a \le x \le b, \phi(x) \le y \le \varphi(x)\}$$

bị chặn và các hàm số $\phi(x), \varphi(x)$ khả tích trên $[a,b]$, $\phi(x) \le \varphi(x)\ \ \forall x \in [a,b]$, hàm số $f(x,y)$ khả tích trên D và khả tích trên $[\phi(x), \varphi(x)]$ với mỗi $y \in [c,d]$. Khi đó

$$\iint\limits_D f(x,y) dx dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

Chứng minh. Giả thiết cho $\phi(x), \varphi(x)$ bị chặn trên $[a,b]$, nên tồn tại c, d sao cho $c \le \phi(x) \le \varphi(x)\ \ \forall x \in [a,b]$. Khi đó, ta đặt $E = [a,b] \times [c,d]$ và

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{nếu } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{nếu } (x,y) \in E \setminus D. \end{cases}$$

Rõ ràng $F(x,y)$ khả tích trên E. Theo định lý 2.19, ta có

$$\iint\limits_D f(x,y) dx dy = \iint\limits_E F(x,y) dx dy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d F(x,y) dy) dx.$$

Nhưng với mỗi $x \in [a,b]$, ta có

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{nếu } y \in [\phi(x), \varphi(x)], \\ 0 & \text{nếu } y \notin [\phi(x), \varphi(x)]. \end{cases}$$

Do vậy

$$\iint\limits_D f(x,y) dx dy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^{\phi(x)} F(x,y) dy) dx + \int\limits_a^b (\int\limits_{\phi(x)}^{\varphi(x)} F(x,y) dy) dx + \int\limits_a^b (\int\limits_{\varphi(x)}^{d} F(x,y) dy) dx.$$

$$= \int\limits_a^b (\int\limits_{\phi(x)}^{\varphi(x)} F(x,y) dy) dx = \int\limits_a^b (\int\limits_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y) dy) dx.$$

$\square$

Ví dụ 2.23. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,\ D \text{ được giới hạn bởi các đường } \ x = 2, y = x, xy = 1.$$

Bài giải: Dễ nhận thấy rằng miền D được viết dưới dạng:

$$D = \{(x, y):\ 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}.$$

Theo Hệ quả 2.22, ta có

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int\limits_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

Hệ quả 2.24. *Giả sử miền*

$$D = \{(x, y):\ c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \varphi(y)\}$$

bị chặn và các hàm số $\phi(y), \varphi(y)$ khả tích trên $[c, d]$, $\phi(y) \leq \varphi(y)\ \ \forall y \in [c, d]$, hàm số $f(x, y)$ khả tích trên D và khả tích trên $[\phi(y), \varphi(y)]$ với mỗi $x \in [a, b]$. Khi đó

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\phi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Chứng minh tương tự như Hệ quả 2.22.

Ví dụ 2.25. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y} dy}{4 - y} \right) dx.$$

Bài giải: Nếu tính tích phân $\int\limits_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y} dy}{4-y}$, thì việc tính này rất khó. Tích phân I thỏa mãn các giả thiết của các Hệ quả 2.22 và 2.24. Do đó, ta dùng cách tính thông qua việc *đổi thứ tự* của tích phân. ta có

$$D = \{(x, y):\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

có thể được viết lại dưới dạng

$$D = \{(x, y):\ 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y}\}.$$

Khi đó

$$I = \iint\limits_D \frac{xe^{2y}}{4 - y} dxdy = \int\limits_0^4 \left(\int\limits_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y} dx}{4 - y} \right) dy = \int\limits_0^4 \frac{e^{2y}}{4 - y} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{2} e^{2y} dy = \frac{e^8}{4}.$$

2.2.5. Công thức đổi biến.

Xét tích phân kép

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy,$$

với hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền D. Giả sử phép đổi biến

$$(x, y) \to (u, v) : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

thỏa mãn các giả thiết:

i) Phép đổi biến trên là một song ánh từ D' vào miền D hay $(x, y) \in D \Leftrightarrow (u, v) \in D'$.

ii) Các hàm số $x(u, v)$ và $y(u, v)$ liên tục trên miền D' của hệ trục tọa độ $(O'uv)$.

iii) Định thức Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \ \ \forall (u, v) \in D'.$$

Khi đó

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u, v), y(u, v)\big)|J| dudv. \tag{2.3}$$

Chứng minh. Thực hiện phép phân hoạch P' miền D' gồm các đường thẳng song song với các trục $O'u$ và $O'v$ thành các mảnh nhỏ $D'_1, D'_2, ..., D'_n$ với độ dài phân hoạch $\Delta_{P'}$, chọn điểm tùy ý $(u_i, v_i) \in D'_i \ \ \forall i = 1, 2, ..., n$. Qua song ánh, phân hoạch P' thành phân hoạch P của miền D với độ dài phân hoạch Δ_P và điểm (u_i, v_i) thành điểm $(x_i, y_i) \in D_i$. Khi đó, theo định nghĩa ta có

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S_{D_i},$$

trong đó S_{D_i} là diện tích của miền D_i.

Bây giờ, ta xét mối quan hệ giữa S_{D_i} và diện tích của miền $S_{D'_i}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng D'_i được tạo bởi hình chữ nhật có 4 đỉnh $(a, b), (a+\Delta_u, b), (a+\Delta_u, b+\Delta_v), (a, b+\Delta_v)$. Qua song ánh, miền D_i có 4 đỉnh tương ứng $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ hay

$$\begin{cases} x_1 = x(a, b) \\ y_1 = y(a, b) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x(a + \Delta_u, b) \\ y_2 = y(a + \Delta_u, b) \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = x(a + \Delta_u, b + \Delta_v) \\ y_3 = y(a + \Delta_u, b + \Delta_v) \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = x(a, b + \Delta_v) \\ y_4 = y(a, b + \Delta_v). \end{cases}$$

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x(a,b) & y_1 &= y(a,b) \\
x_2 &\approx x(a,b) + \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)\Delta_u & y_2 &= \approx y(a,b) + \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)\Delta_u \\
x_3 &\approx x(a,b) + \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)\Delta_u + \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)\Delta_v & y_3 &= \approx y(a,b) + \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)\Delta_u + \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)\Delta_v \\
x_4 &\approx x(a,b) + \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)\Delta_v & y_4 &= \approx y(a,b) + \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)\Delta_v.
\end{aligned}
$$

Khi đó,

$$
x_2 - x_1 \approx x_3 - x_4 \qquad x_4 - x_1 \approx x_3 - x_2
$$

$$
y_2 - y_1 \approx y_3 - y_4 \qquad y_4 - y_1 \approx y_3 - y_2.
$$

Diện tích của D_i được tính xấp xỉ bởi trị tuyệt đối của

$$
\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a,b) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a,b) \end{vmatrix} \Delta_u\Delta_v = J\Delta_u\Delta_v.
$$

Như vậy $S_{D_i} = |J|S_{D'_i}$. Thay S_{D_i} vào tích phân I, ta nhận được

$$
I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S_{D_i} = \lim_{\Delta_{P'} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\big(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)\big)|J|S_{D'_i} = \iint\limits_{D'} f(u,v)|J|dudv.
$$

□

Ví dụ 2.26. Tính tích phân

$$
I = \iint\limits_{D} xydxdy,
$$

trong đó miền D được giới hạn bởi các đường cong

$$
y = x,\ y = 2x,\ y^2 = x,\ y^2 = 3x.
$$

Bài giải: Dễ thấy rằng, miền D có thể được viết được dưới dạng:

$$
D = \{(x,y):\ 0 < x \le y \le 2x,\ x \le y^2 \le 3x\},
$$

hay

$$
D = \{(x,y):\ 1 \le \frac{y}{x} \le 2,\ 1 \le \frac{y^2}{x} \le 3\}.
$$

Khi đó, đặt

$$
\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{u}{v^2} \\ y = \frac{u}{v}. \end{cases}
$$

Ta có các hàm số $x(u,v), y(u,v)$ thỏa mãn các giả thiết của công thức (2.3) với $D' = [1,3]\times[1,2]$ và $|J| = |\frac{u}{v^4}|$.

$$I = \int_1^3 (\int_1^2 \frac{u^3 dv}{v^7}) du = \frac{105}{32}.$$

2.2.6. Công thức đổi biến trong tọa độ cực.

Trong mục này, ta xét một trường hợp đặc biệt của phương pháp đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Định thức J được xác định bởi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r.$$

Ta biến đổi

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow (r,\varphi) \in D'.$$

Khi đó, ta có

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi. \tag{2.4}$$

Ví dụ 2.27. Tính tích phân

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

trong đó $D = \{(x,y):\ x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$.

Bài giải: Chuyển sang hệ trục toạ độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi \geq 0 \\ \sin\varphi \geq 0 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Theo công thức (2.4), ta có

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}}) d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{d(r^2+1)}{2\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

2.2.7. Ứng dụng của tích phân kép.

• *Tính thể tích.*

Thể tích của vật thể hình trụ tạo bởi mặt $z = f(x, y) \geq 0 \;\; \forall (x, y) \in D$, liên tục trên miền D và các đường sinh song song với Oz được tính bởi công thức

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y) dxdy. \tag{2.5}$$

Ví dụ 2.28. Tính thể tích của hình tạo bởi các mặt:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = x^2, \\ y = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Bài giải: Theo giả thiết, ta xác định

$$D = \{(x, y): \; y = x^2, y = 1\}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Theo công thức (2.5), ta có

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2) dxdy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx$$

$$= \int\limits_{0}^{1} 2(\frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} + y^2 \sqrt{y}) dy = \frac{88}{105}.$$

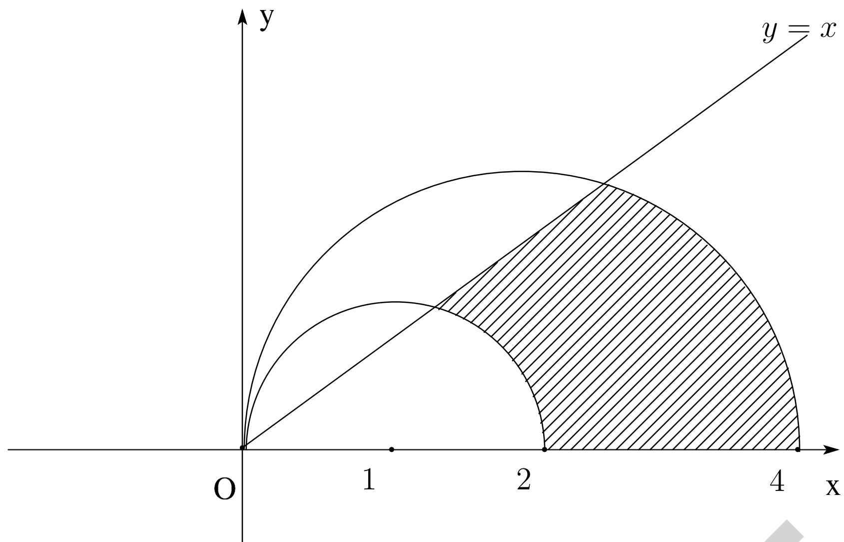
• *Tính diện tích hình phẳng.*

Từ định nghĩa của tích phân, ta dễ nhận thấy rằng diện tích miền $D \subset \mathbb{R}^2$ được xác định bởi công thức

$$S_D = \iint\limits_{D} dxdy. \tag{2.6}$$

Ví dụ 2.29. Tính diện tích của miền D tạo bởi các đường cong:

$$(D) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ (x-2)^2 + y^2 = 4, \\ y = x, \\ y = 0. \end{cases}$$



Hình 1: Hình vẽ của ví dụ 2.29

Bài giải: Chuyển sang hệ trục tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Dễ nhận thấy rằng $(x, y) \in D$ khi và chỉ khi

$$(r, \varphi) \in \{(r, \varphi) : \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi\}.$$

Khi đó, theo công thức đổi biến trong hệ tọa độ cực, ta có

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{3(\pi+2)}{4}.$$

• *Tính diện tích mặt cong.*

Như cách xây dựng định nghĩa của tích phân kép trên miền D, diện tích của mặt cong (S) được tính như sau

Định lý 2.30. *Cho mặt cong $(S) : \ z = f(x, y) \ \ (x, y) \in D$ có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tồn tại và liên lục trên miền D. Khi đó,*

$$dt(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} dxdy.$$

Ví dụ 2.31. Cho $a > 0$, tính diện tích của mặt cong

$$az = xy$$

trên miền $D = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bài giải: Đặt $f(x, y) = \frac{xy}{a}$. Khi đó $f'_x(x, y) = \frac{y}{a}$, $f'_y(x, y) = \frac{x}{a}$. Theo định lý 2.30, diện tích mặt (S) được tính như sau:

$$dt(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2} dxdy.$$

Đổi biến sang hệ tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (r, \varphi) \in D_0 = \{(r, \varphi) : \ 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Theo công thức đổi biến sang hệ tọa độ cực, ta có

$$dt(S) = \frac{1}{a} \iint\limits_{D_0} \sqrt{a^2 + r^2} r dr d\varphi = \frac{1}{a} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 + r^2} r dr = \frac{2\pi}{a} \int\limits_0^a \sqrt{a^2 + r^2} r dr$$

$$= \frac{\pi}{a} \int\limits_0^a (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 + r^2) = \frac{3\pi}{2a} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{3a^2\pi(2\sqrt{2} - 1)}{2}.$$

• Ý *nghĩa cơ học của tích phân kép.*

Cho bản mặt không đồng chất D trong mặt phẳng (Oxy) có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ là một hàm số liên tục trên miền D. Khi đó

+) Khối lượng của bản mặt D được xác định bởi

$$m_D = \iint\limits_D \rho(x, y) dxdy.$$

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục Ox là

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) dxdy.$$

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục Oy là

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y) dxdy.$$

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục gốc tọa độ O là

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy.$$

+) Tọa độ trọng tâm $G(x_g, y_G)$ được xác định bởi:

$$x_G = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy,$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy.$$

Ví dụ 2.32. Cho bản mặt

$$D = \{(x,y): \ x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$$

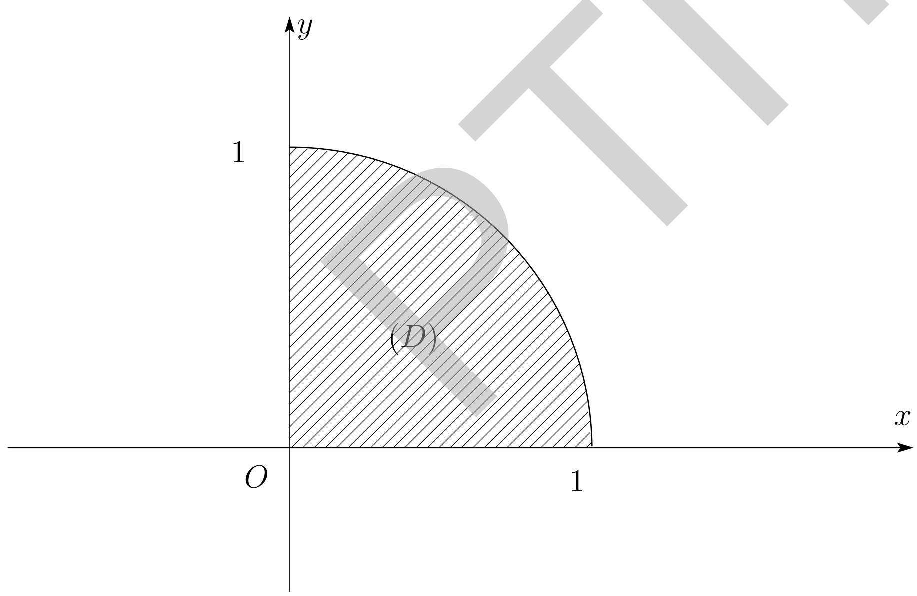
có khối lượng riêng $\rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tính

i) Khối lượng riêng m_D.

ii) Tọa độ trọng tâm của D.

iii) Mômen quán tính của D đối với các trục Ox, Oy và điểm O.

Bài giải: i) Khối lượng của bản mặt D được xác định bởi công thức



Hình 2: Hình vẽ của ví dụ 2.32

$$m_D = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Đổi biến sang hệ tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (r, \varphi) \in D_0 = \{(r, \varphi): \ 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Theo công thức đổi biến sang hệ tọa độ cực, ta có

$$m_D = \iint\limits_{D_0} r^2 dr d\varphi = \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{6}.$$

ii) Theo công thức tọa độ trọng tâm $G(x_g, y_G)$ được xác định bởi:

$$x_G = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\rho(x, y) dxdy = \frac{6}{\pi} \iint\limits_D x\sqrt{x^2 + y^2} dxdy.$$

Bằng cách đổi sang hệ tọa độ cực như i), ta có

$$x_G = \frac{6}{\pi} \iint\limits_{D_0} r^3 \cos\varphi dr d\varphi = \frac{3}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{3}{2\pi} \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi}.$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\rho(x, y) dxdy = \frac{3}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = -\frac{3}{2\pi} \cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi}.$$

Như vậy, tọa độ trọng tâm của bản mặt D là $G(\frac{3}{2\pi}, \frac{3}{2\pi})$.

iii) Bằng cách áp dụng các công thức tính I_x, I_y, I_O và sử dụng công thức đổi sang hệ trục tọa độ cực, ta có

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục Ox là

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) dxdy = \iint\limits_D y^2 \sqrt{x^2 + y^2} dxdy = \iint\limits_{D_0} r^4 \sin^2\varphi dr d\varphi$$

$$= \frac{1}{5} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{10} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{10} (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{20}.$$

Bằng cách tính tương tự, ta có

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục Oy là

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y) dxdy = \frac{\pi}{20}.$$

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục gốc tọa độ O là

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy = \frac{\pi}{10}.$$

2.3. Tích phân bội ba.

2.3.1. Định nghĩa.

Cho hàm 3 biến số $f(x, y, z)$ xác định trên miền khối $D \subseteq \mathbb{R}^3$ đóng và bị chặn.

+ Phân hoạch P khối D thành các khối nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$. Ký hiệu Δ_{D_i} là thể tích của khối D_i $i = 1, 2, ..., n$ và $diamD_i$ là đường kính của khối D_i theo nghĩa

$$diamD_i = \sup\{||u - v|| : \ u, v \in D_i\}.$$

Khi đó độ dài phân hoạch được xác định bởi

$$\Delta_P = \max\{diamD_1, diamD_2, ..., diamD_n\}.$$

+ Chọn một điểm bất kỳ $M_i(x_i, y_i, z_i) \in D_i$ $\ i = 1, 2..., n$.

Khi đó, tổng

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_{D_i}$$

được gọi là *tổng tích phân bội 3* của hàm $f(x, y, z)$ trên khối D. Nếu giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

tồn tại, không phụ thuộc vào phân hoạch P và phép chọn điểm M_i, thì I được gọi là tích phân bội 3 của hàm số $f(x, y, z)$ trên miền khối D và được ký hiệu bởi

$$I = \iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz.$$

Chú ý 2.33. Nếu hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trên miền D đóng và bị chặn trên $Oxyz$, thì tồn tại I (hay ta còn nói hàm $f(x, y, z)$ *khả tích* trên D).

2.3.2. Công thức tính.

Nếu miền D được cho bởi:

$$D = \{(x, y, z) : \ (x, y) \in D_0, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

Khi đó

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D_0} dxdy \int\limits_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{2.7}$$

Trong trường hợp đặc biệt: Nếu miền D được cho bởi

$$D = \{(x, y, z) : \ a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\},$$

ta có

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

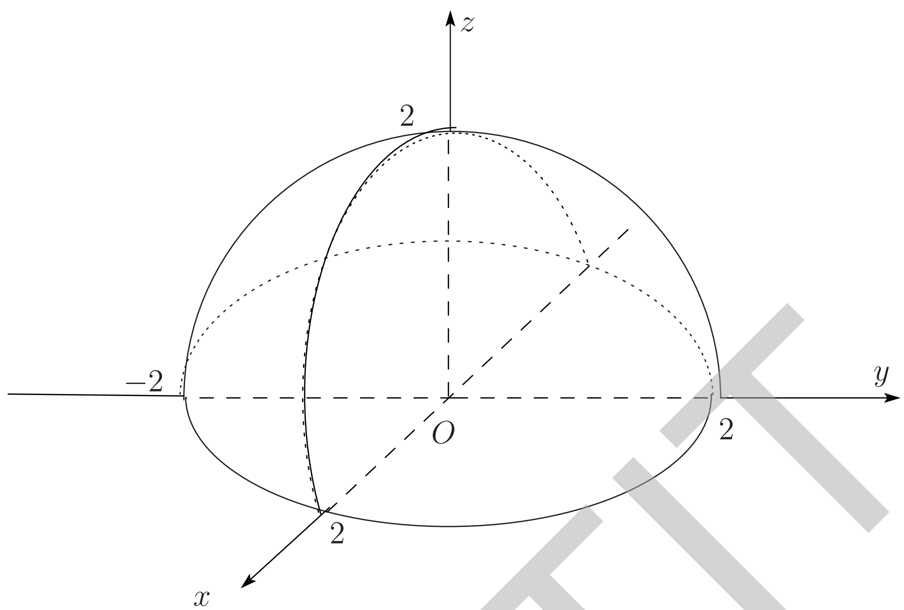
Các công thức tương tự, khi giao hoán vị trí của x, y, z.

Ví dụ 2.34. Tính

$$I = \iiint\limits_D (2z^3 + z)dxdydz,$$

trong đó $D = \{(x, y, z): \ 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$.

Bài giải: Đặt D_0 là hình chiếu của D trên Oxy. Khi đó



Hình 3: Hình vẽ của ví dụ 2.34

$$D_0 = \{(x, y): \ x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Theo công thức (2.7), ta có

$$I = \iint\limits_{D_0} dxdy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (2z^3 + z)dz = \iint\limits_{D_0} (\frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{2}z^2)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D_0} \big((4 - x^2 - y^2)^2 + 4 - x^2 - y^2\big)dxdy$$

Đổi biến sang hệ tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$(x, y) \in D_0 \Leftrightarrow (r, \varphi) \in D_1 = \{(r, \varphi): \ 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

Theo công thức đổi biến sang hệ tọa độ cực, ta có

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} \left((4-r^2)^2 + 4 - r^2\right) r dr d\varphi = \pi \int\limits_0^2 (r^5 - 9r^3 + 20r) dr$$

$$= \pi(\frac{1}{6}r^6 - \frac{9}{4}r^4 + 10r^2)\Big|_0^2 = \frac{44\pi}{3}.$$

2.3.3. Phương pháp đổi biến.

Vấn đề đặt ra là: Nếu ta đổi biến từ $(x, y, z) \to (u, v, w)$ bởi công thức

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

thì tích phân bội 3

$$I = \iiint\limits_D f(x, y, z) dx dy dz$$

được thay đổi như thế nào? Sự thay đổi của I được khẳng định bởi định lý dưới đây.

Định lý 2.35. *Nếu các hàm số x, y, z theo các ẩn (u, v, w) thỏa mãn các điều kiện:*

i) Tồn tại một song ánh $G : (u, v, w) \in D_0 \mapsto (x, y, z) \in D$.

ii) Các hàm số x, y, z liên tục trên tập mở chứa D_0.

iii) Định thức Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w. \end{vmatrix} \neq 0 \ \ \forall (u, v, w) \in D_0.$$

Khi đó

$$I = \iiint\limits_{D_0} f(x, y, z) |J| du dv dw,$$

trong đó $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$.

Chú ý 2.36. Trong trường hợp đổi biến đặc biệt $(u, v, w) \equiv (r, \varphi, z)$ và

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, \end{cases}$$

(còn gọi là công thức đổi biến từ hệ tọa độ đề các vuông góc sang *hệ tọa độ trụ*). Khi đó, ta dễ dàng tính được $J = r$. Do vậy, ta có công thức

$$\iiint\limits_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint\limits_{D_0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Ví dụ 2.37. Cho miền khối

$$D = \{(x, y, z): \ 4 \geq z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_D (3x^2 + 3y^2 + 2z^2)dxdydz.$$

Bài giải: Dùng công thức đổi biến sang hệ tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Ta có

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (r, \varphi, z) \in \{(r, \varphi, z): \ 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq z \leq 4\}.$$

Do vậy

$$I = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^4 (3r^2 + 2z^2)rdz = 2\pi \int_0^2 dr \int_r^4 (3r^2 + 2z^2)rdz$$

$$= 2\pi \int_0^2 (3r^3 z + \frac{2}{3}rz^3)\Big|_r^4 dr = 2\pi \int_0^2 (-\frac{11}{3}r^4 + 6r^3 + \frac{16r}{3})dr = \frac{336\pi}{15}.$$

Chú ý 2.38. Trong trường hợp đổi biến đặc biệt $(u, v, w) \equiv (r, \varphi, \theta)$ và

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

(còn gọi là công thức đổi biến từ hệ tọa độ đề các vuông góc sang *hệ tọa độ cầu*). Khi đó, ta dễ dàng tính được $J = -r^2\sin\varphi$. Do vậy, ta có công thức

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{D_0} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2|\sin\varphi|drd\varphi d\theta.$$

Ví dụ 2.39. Cho miền khối

$$D = \{(x, y, z): \ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_D (x^2 + y^2 + 2z^2)dxdydz.$$

Bài giải: Dùng công thức đổi biến sang hệ tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (r,\varphi,\theta) \in \{(r,\varphi,\theta) : \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r^2\sin^2\varphi + 2r^2\cos^2\varphi) r^2 |\sin\varphi| dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r^4(1+\cos^2\varphi)|\sin\varphi| dr \\ &= \frac{64\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{16\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\sin\varphi + \sin 3\varphi) d\varphi \\ &= \frac{16\pi}{5}(-5\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{256\pi}{15}. \end{aligned}$$

Bài tập chương 2

Bài 2.1. Cho hai hàm eliptic đầy đủ

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \ \ F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}} \ \text{ với } x \in (0,1).$$

1) Tính các đạo hàm $E'(x), F'(x)$.

2) Biểu diễn $E'(x), F'(x)$ qua $E(x)$ và $F(x)$.

3) Chứng minh rằng:

$$E''(x) + \frac{1}{x}E'(x) + \frac{1}{1-x^2}E(x) = 0.$$

4) Chứng minh rằng:

$$\int_0^x tF(t)dt = E(x) - (1-x^2)F(x).$$

5) Chứng minh rằng:

$$\int_0^x tE(t)dt = \frac{1}{3}(1+x^2)E(x) - (1-x^2)F(x).$$

Bài 2.2. Đổi thứ tự của tích phân sau:

1) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

2) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)dx.$

3) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} f(x,y)dx.$

4) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{2} f(x,y)dy.$

5) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$

6) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$

7) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$

8) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy.$

Bài 2.3. Dùng phương pháp dưới dấu tích phân để tính

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0).$$

Bài 2.4. Tính các tích phân kép

$I_1 = \iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}dxdy$, trong đó D là tam giác nối các đỉnh $O, A(10,1), B(1,1)$.

$I_2 = \iint\limits_D |x + 2y|dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ -1 \leq x \leq 2, |y| \leq 1\}$.

$I_3 = \iint\limits_D x\sqrt{4 - y^2}dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$.

$I_4 = \iint\limits_D x\sqrt{|y + x^2|}dxdy$, trong đó $D = [0,2] \times [-4,0]$.

$I_5 = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ 1 \leq x^2 + y^2,\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

$I_6 = \iint\limits_D e^{x^2+2y^2}dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

$I_7 = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + xy + y^2}dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$.

$I_8 = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường cong $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

$I_9 = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$, với D giới hạn bởi đường cong $x^2 + y^2 = 2x$.

$I_{10} = \iint\limits_D \sqrt{2y - x^2 - y^2}dxdy$, với D là miền giới hạn bởi đường cong $x^2 + y^2 = 2y$.

Bài 2.5. Dùng tích phân kép, tính diện tích các miền phẳng giới hạn bởi:

1) $xy = 2,\ xy = 4,\ y = x,\ y = 4x.$

2) $xy = 2,\ xy = 6,\ y^2 = 2x,\ y^2 = 4x.$

3) $x + y = 2,\ x + y = 4,\ y = x,\ y = 3x.$

4) $y^2 = x, y^2 = 2x, x^2 = 2y, x^2 = 4y.$

5) Hoa hồng 4 cánh $r = a\sin 2\varphi$ với $a > 0$.

6) $r = \cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi$.

7) $y^2 = x^3, y^2 = (6-x)^3$.

8) Một nhịp xicloit $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Bài 2.6. Dùng tích phân kép, tính thể tích vật thể được giới hạn bởi:

1) $3x + y = 6,\ 3x + 2y = 12,\ x + y + z = 6,\ y = 0,\ z = 0$.

2) $z = y^2,\ z = 0,\ x = 0, x = 1, y = 1, y = -1$.

3) $z = x,\ z = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x$.

4) $z = x + y,\ z = x^2 + y^2$.

5) $z = x^2 + y^2,\ z^2 = xy$.

6) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9},\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$.

7) $z^2 = x^2 + y^2,\ 2z = x^2 + y^2 + z^2$.

8) $2x = y^2 + z^2,\ (y^2 + z^2)^2 = 4(y^2 - z^2), x = 0$.

9) $\frac{x}{3} + (\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4})^2 = 1,\ x = 0$.

10) $z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ x^2 \le y \le 1$.

Bài 2.7. Dùng tích phân kép, tính diện tích của bề mặt:

1) Phần mặt phẳng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ nằm giữa các mặt phẳng tọa độ.

2) Mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

3) Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 \le 2x$.

4) Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5) $z = xy$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 \le 4$.

6) Mặt parapoloid $y^2 + z^2 = 4x$ nằm giữa mặt trụ $y^2 = x$ và mặt phẳng $x = 3$.

7) Mặt trụ $z = \sqrt{4x}$ với $(x, y) \in \{(x, y) :\ x \ge 0, y^2 \le 4x, x \le 1\}$.

Bài 2.8. Tính tọa độ trọng tâm, mômen quán tính đối với trục Ox, Oy, điểm O của bản mặt đồng chất giới hạn bởi các đường cong:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, y \ge 0, x \ge 0$.

2) $y = 2x^2,\ y = 2$.

3) $y = x^2 - 2x + 1,\ y = -x + 3,\ y = 0$.

4) $y = x^2,\ x = y^2$.

5) Tứ giác với các đỉnh $(4, 4),\ (5, 7),\ (10, 10), (12, 4)$.

Bài 2.9. Tính các tích phân bội 3

1) $\iiint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdydz$ với $D = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le z \le 9\}$.

2) $\iiint\limits_D \cos(\pi\sqrt{x^2 + y^2}) dxdydz$ với $D = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le z^2 \le 4\}$.

3) $\iiint\limits_D z^2 dxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2+z^2 \le 4z\}$.

4) $\iiint\limits_D (x+y+z)^2 dxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le 3a^2,\ x^2+y^2 \le 2az\}$.

5) $\iiint\limits_D xyzdxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2\}$.

6) $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le x\}$.

7) $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ 3(x^2+y^2)+z^2 \le 3a^2\}$.

Hướng dẫn giải bài tập chương 2

Bài 2.1.

1) $E'_x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2\sin^2\varphi)'_x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} d\varphi = -\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin^2\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}$.

2) $E'_x = F(x) - xE(x)$.

4) $\int_0^x tF(t)dt - \int_0^x t\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-t^2\sin^2\varphi}}$.

Bài 2.2. 1) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

2) $\int_0^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} f(x,y)dy$.

3) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$.

4) $\int_0^2 dy \int_{-1\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dx$.

5) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

6) $\int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y)dx$.

7) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$.

8) $\int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx$.

Bài 2.3. $\ln\frac{b+1}{a+1}$.

Bài 2.4.

$I_1 = 6$.

$I_2 = 11$.

$I_3 = 3\pi$.

$I_4 = \frac{104}{15}$.

$I_5 = \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$I_6 = \pi(e-1)$.

$I_7 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

$I_8 = 8\pi - \frac{32}{9}$.

$I_9 = \frac{8\pi}{3} + \frac{32}{9}$.

$I_{10} = \pi$.

Bài 2.5.

1)$2(\arctan 4 - \frac{\pi}{4})$.

2)$\frac{4}{3}\ln 2$.

3)4.

4)$\frac{2}{5}$.

5)$\frac{\pi a^2}{2}$.

6)$\frac{3\pi}{4}$.

7)$2(18\sqrt{3} - 135)$.

8)3π.

Bài 2.8.

1) $I_{Ox} = \frac{ab^3}{16}$, $I_{Oy} = \frac{a^3 b}{16}$, $I_O = \frac{(a^2+b^2)ab}{16}$.

2) $I_{Ox} = \frac{16}{3}$, $I_{Oy} = 0$.

1 dfgfg

2 dđfg

3 dđfgdd

CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT

3.1. Tích phân đường loại 1.

3.1.1. Định nghĩa.

Cho hàm hai biến số $z = f(x, y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$

+ Phân hoạch P cung $\overset{\frown}{AB}$ bởi n điểm

$$A = C_0, C_1, C_2, ..., C_n = B.$$

Ký hiệu Δ_i là độ dài các cung $\overset{\frown}{C_{i-1}C_i}$ $\forall i = 1, 2, ..., n$ và $\Delta_P = \max\{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n\}$.

+ Chọn một điểm tùy ý $M_i \in \overset{\frown}{C_{i-1}C_i}$.

Khi đó

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_i$$

được gọi là *tổng tích phân đường loại 1* của hàm $f(x, y)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Nếu giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

tồn tại, không phụ thuộc vào phép phân hoạch P và chọn điểm M_i, thì I được gọi là *tích phân đường loại 1* của hàm $f(x, y)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$ (hay ta còn nói $f(x, y)$ khả tích trên cung $\overset{\frown}{AB}$) và được ký hiệu là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds$. Người ta chứng minh được rằng nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc (cung xác định hàm số khả vi liên tục từng khúc) và hàm $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì hàm số $f(x, y)$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$.

Dựa vào định nghĩa, ta có các tính chất:

3.1.2. Tính chất.

+ $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)ds.$

+ $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 1ds = |\overset{\frown}{AB}|$ là độ dài của cung $\overset{\frown}{AB}$.

+ Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ thì $m_{\overset{\frown}{AB}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y)ds$ là khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$.

3.1.3 Công thức tính.

a) Cung $\overset{\frown}{AB}$ có dạng tổng quát

Trường hợp 1: Cho cung trơn từng khúc $\overset{\frown}{AB}$ có dạng $y = \varphi(x)$ $x \in [a, b]$ và hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx. \tag{3.1}$$

Trường hợp 2: Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng $x = \phi(y) \;\; y \in [c, d]$ và hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{c}^{d} f(\phi(y), y)\sqrt{1 + \phi'^2(y)}dy. \tag{3.2}$$

Chứng minh: Ta chứng minh cho trường hợp 1, trường hợp 2 là tương tự. Theo định nghĩa, giả sử $C_i(x_i, y_i), \Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}, \Delta_{y_i} = y_i - y_{i-1} \;\; \forall i = 1, 2, ..., n$. Khi Δ_{x_i} đủ nhỏ, ta có

$$\Delta_i \approx C_{i-1}C_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \Delta_{x_i}\sqrt{1 - \frac{\Delta_{y_i}}{\Delta_{x_i}}}.$$

Theo công thức số gia giới nội

$$\frac{\Delta_{y_i}}{\Delta_{x_i}} = \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}}{\Delta_{x_i}} = \varphi'(\xi_i) \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \;\; \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \varphi(\xi_i))\sqrt{1 - \varphi'^2(\xi_i)}\Delta_{x_i}.$$

Đặt $\Delta_x = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_n\}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds = \lim_{\Delta_x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \varphi(\xi_i))\sqrt{1 - \varphi'^2(\xi_i)}\Delta_{x_i} = \int\limits_{a}^{b} f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx.$$

Ví dụ 3.1. Tính tích phân $\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds$, trong đó $A(2, 0), B(0, 1)$.

Bài giải.

+ Phương trình đường thẳng AB có dạng

$$y = 1 - \frac{x}{2}.$$

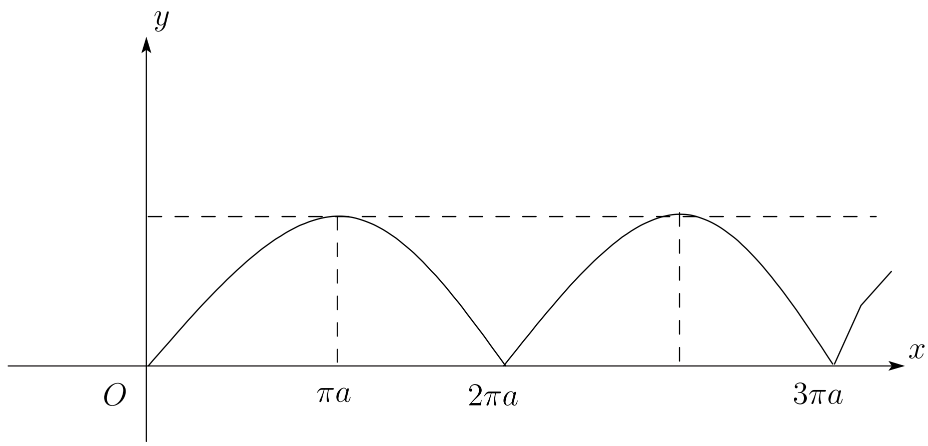
+ Theo công thức tính (3.1)

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds = \int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2\sqrt{1 + y'^2}dx = \int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2\sqrt{1 + \frac{1}{4}}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2 dx = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

b) Cung $\widetilde{AB}$ có dạng tham số trong mặt phẳng

Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng tham số

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta. \tag{3.3}$$



Hình 1: Hình vẽ của ví dụ 3.2

và hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\widetilde{AB}$. Bằng cách thay $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ vào công thức (3.2), ta có

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt.$$

Ví dụ 3.2. Tính tích phân $\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds$, trong đó $\widetilde{AB}$ là một nhịp của cung cycloide

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Bài giải.

Theo công thức (3.3), ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds &= \int\limits_0^{2\pi} a^2\big(1 - \cos t\big)^2\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} a^2\big(1 - \cos t\big)^2 a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}dt \\
&= \sqrt{2}a^3\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^5}dt \\
&= 8a^3\int\limits_0^{2\pi} \sin^5\frac{t}{2}dt \\
&= \frac{256a^3}{15}.
\end{aligned}$$

c) Cung $\widetilde{AB}$ có dạng tham số trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Cho cung trơn từng khúc $\overset{\frown}{AB}$ có dạng tham số

$$\overset{\frown}{AB}\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad \alpha \leq t \leq \beta. \\ x = z(t) \end{cases} \tag{3.4}$$

và hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Bằng cách hiểu tương tự như trong trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ trong mặt phẳng, ta có

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt.$$

Ví dụ 3.3. Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + y^2 + z^2)ds$, trong đó $\overset{\frown}{AB}$ là đoạn xoắn có phương trình tham số

$$\overset{\frown}{AB}\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at, \quad a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Bài giải.

Theo công thức (3.4), ta có

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2(1 = t^2)$$

và

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = a\sqrt{2}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 + t^2)a\sqrt{2}dt \\ &= a^3\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 + t^2)dt \\ &= 2\sqrt{2}a^3(1 + \frac{4}{3}\pi^2). \end{aligned}$$

d) Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho dưới dạng tọa độ cực bởi phương trình

$$r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2.$$

Khi đó,

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2}d\varphi. \tag{3.5}$$

Ví dụ 3.4. Tính độ dài đoạn cong xác định bởi

$$\widetilde{OA}\begin{cases} x^2 + y^2 = cz, \\ \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}, \quad \text{với } O(0,0,0), A(2,2,4). \end{cases}$$

Bài giải.

Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, khi đó phương trình đoạn cong $\widetilde{OA}$ có dạng:

$$r^2 = cz, \tan\varphi = \tan\frac{z}{c}.$$

Từ $0 \le z \le 4$, suy ra rằng $0 \le \varphi \le \frac{4}{\varphi}$. Do đó,

$$\widetilde{OA}\begin{cases} x = c\sqrt{\varphi}\cos\varphi, \\ y = c\sqrt{\varphi}\sin\varphi, \\ z = c\varphi, \quad \text{với } \ 0 \le \varphi \le \frac{4}{c}. \end{cases}$$

Theo công thức (3.4) và tính chất của tích phân đường loại 1, độ dài cung $\widetilde{OA}$ được tính bởi

$$\begin{aligned} |\widetilde{AB}| &= \int\limits_{\widetilde{AB}} ds \\ &= \int\limits_{0}^{\frac{4}{c}} \sqrt{x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2}d\varphi \\ &= \int\limits_{0}^{\frac{4}{c}} c\Big(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi}\Big)d\varphi \\ &= 2\sqrt{c}(1 + \frac{8}{3c}). \end{aligned}$$

e) Tọa độ trọng tâm của dây cung.

Cho cung $\widetilde{AB}$ có khối lượng riêng xác định bởi hàm số $f(x,y)$. Khi đó, tọa độ trọng tâm G của cung $\widetilde{AB}$ được cho bởi công thức:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\int\limits_{\widetilde{AB}} xf(x,y)ds, \\ y_G = \frac{1}{m}\int\limits_{\widetilde{AB}} yf(x,y)ds, \end{cases} \tag{3.6}$$

trong đó, m là khối lượng của cung $\widetilde{AB}$.

Ví dụ 3.5. Xác định tọa độ trọng tâm của một nhịp của cung cycloide đồng chất

$$\overset{\frown}{AB}\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad a > 0, 0 \le t \le \pi.$$

Bài giải.

Cung $\overset{\frown}{AB}$ là đồng chất hay ta có thể giả thiết rằng $f(x, y) = c$ (hằng số). Theo công thức (3.6), tọa độ trọng tâm G của cung $\overset{\frown}{AB}$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xf(x, y)ds = \frac{c}{m} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xds = \frac{4a}{3}, \\ y_G = \frac{1}{m} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} yf(x, y)ds = \frac{c}{m} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} yds = \frac{4a}{3}. \end{cases}$$

3.2. Tích phân đường loại 2.

3.2.1. Định nghĩa.

Cho hàm véc tơ $\vec{F} = (P, Q, R)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Người ta còn viết F dưới dạng $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ hay

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Phép phân hoạch (P) cung $\overset{\frown}{AB}$ bởi các điểm

$$A_0 = A, A_1, ..., A_n = B.$$

Chọn $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i} \subset \overset{\frown}{AB}$ với mỗi $i = 1, 2, ..., n$. Giả sử rằng $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta_{x_i}, \Delta_{y_i}, \Delta_{z_i})$. Khi đó,

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$$

được gọi là tổng tích phân đường loại 2 của hàm véc tơ $\vec{F}$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$ xác định bởi phân hoạch (P). Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta_{x_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0, \max \Delta_{y_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0, \max \Delta_{z_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0$, tổng tích phân I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào phép phân hoạch (P) và phép chọn điểm M_i, thì I được gọi là *tích phân được loại 2* của hàm véc tơ $\vec{F}$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$ và ký hiệu

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Theo cách viết truyền thống, người ta còn viết dưới dạng

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Trong trường hợp đặc biệt khi cung $\widetilde{AB}$ là đường cong kín, tích phân đường loại 2 trên cung $\widetilde{AB}$ được viết

$$\oint\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

3.2.2. Nhận xét.

Khi cung $\widetilde{AB}$ trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), hàm véc tơ $\vec{F} = (P, Q)$, tích phân đường loại 2 của hàm $\vec{F}$ trên cung $\widetilde{AB}$ được ký hiệu bởi

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Đặc biệt khi cung $\widetilde{AB}$ là một đoạn $[a,b]$ nào đó trên $\mathbb{R}$, hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tích phân đường loại 2 của hàm f trên $\widetilde{AB}$ trở thành tích phân xác định.

3.2.3. Tích chất cơ học của tích phân được loại 2.

Để tính công sinh ra từ một điểm M chuyển động dọc theo cung $\widetilde{AB}$ từ điểm A tới điểm B dưới tác dụng của một lực $\vec{F} = \vec{F}(M)$, ta thực hiện phép phân hoạch (P) như trong định nghĩa trên. Phép chia cung $\widetilde{AB}$ min tới mức ta có thể coi cung $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ như đoạn thẳng, lực tác dụng vào chất điểm trên trên cung $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ không đổi và bằng $\vec{F}(M_i)$. Khi đó, công sinh ra trên cung $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ xấp xỉ với tích vô hướng $\vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Vậy I_n xác định bởi định nghĩa trên xấp xỉ với công sinh ra trên cung $\widetilde{AB}$. Do đó, giá trị của tích phân đường loại 2 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ chính là công sản sinh khi chất điểm M chuyển động dọc theo quỹ đạo $\widetilde{AB}$ từ điểm A tới điểm B.

3.2.4. Cách tính tích phân được loại 2.

Cho cung $\widetilde{AB}$ trơn và xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t : a \to b, A\big(x(a), y(a), z(a)\big), B\big(x(b), y(b), z(b)\big). \end{cases} \tag{3.7}$$

Các hàm số $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ liên tục trên $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t + Rz'_t\Big)dt.$$

Chứng minh.

Giả sử phân hoạch (P) trong định nghĩa được xác định bởi

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b.$$

Gọi $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i), z_i = z(t_i)$, và $A_i(x_i, y_i, z_i)$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ sao cho

$$\begin{cases} \Delta_{x_i} = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \\ \Delta_{y_i} = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \\ \Delta_{z_i} = z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \end{cases}$$

trong đó $\Delta_{t_i} = t_i - t_{i-1}$. Khi đó, điểm $M_i\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big) \in \widetilde{A_{i-1}A_i}$ và

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(P\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)x'(\tau_i) + Q\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)y'(\tau_i) + R\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)z'(\tau_i)\Big)\Delta_{t_i}. \end{aligned}$$

Vế phải là tổng tích phân của hàm số

$$P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)$$

trên đoạn $[a, b]$. Đặt $\Delta_P = \max\{\Delta_{t_i} : i = 1, 2, ..., n\}$. Cho $\Delta_{t_i} \to 0$, ta có

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t + Rz'_t\Big)dt.$$

Ví dụ 3.6. *Tính* $I = \int\limits_{\widetilde{AB}} (ydx + zdy + xdz)$, *trong đó* $a > 0, \widetilde{AB} : \{x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, t : 0 \to 2\pi\}$.

Bài giải.

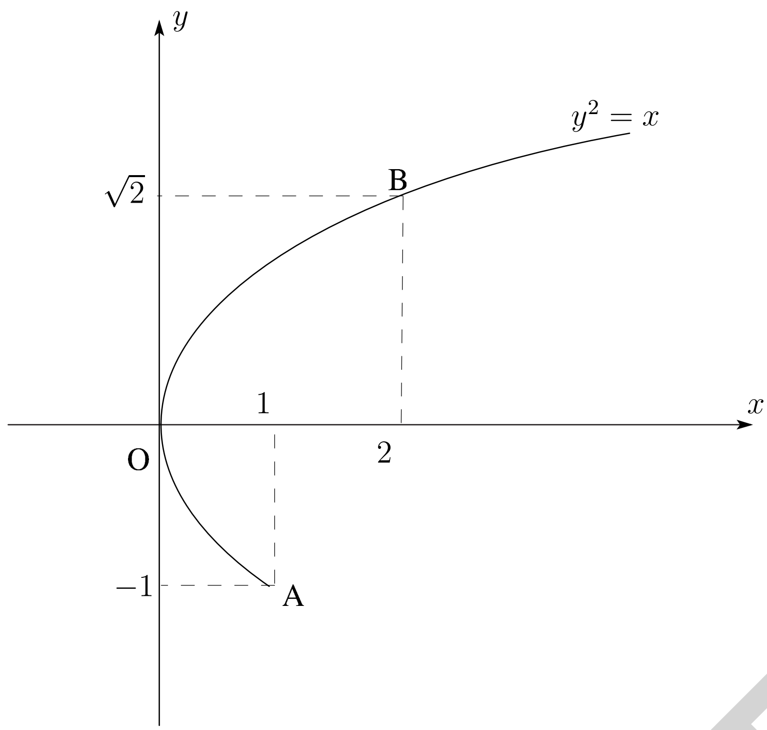
Theo công thức (3.7), ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} \Big(a\sin t(-a\sin t) + bt(a\cos t) + a\cos t.b\Big)dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \Big(-a^2\sin^2 t + ab(1+t)\cos t\Big)dt \\ &= -\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)dt + ab\int\limits_0^{2\pi}(1+t)\cos t dt \\ &= -\pi a^2. \end{aligned}$$

3.2.5. Chú ý.

Cho cung $\widetilde{AB} \subset (Oxy)$ trơn và xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t : a \to b. \end{cases} \tag{3.8}$$



Hình 2: Hình vẽ của ví dụ 3.7

Các hàm số $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ liên tục trên $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t\Big)dt.$$

Ví dụ 3.7. Tính

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} x^2dx + xydy,$$

trong đó $\widetilde{AB} : x = y^2, A(1,-1), B(2,\sqrt{2})$.

Bài giải.

Theo công thức (3.8), nếu cung $\widetilde{AB} : x = \varphi(y), y \in [a,b]$, tích phân đường loại 2 được xác định bởi

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} \Big(P(\varphi(y), y)\varphi'_y + Q(\varphi(y), y) \Big) dy$$
$$= \int\limits_{-1}^{\sqrt{2}} (y^4 2y + y^3) dy$$
$$= \int\limits_{-1}^{\sqrt{2}} (2y^5 + y^3) dy$$
$$= (\frac{1}{3}y^6 + \frac{1}{4}y^4)\Big|_{-1}^{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{37}{12}.$$

Ví dụ 3.8. Tính

$$\oint\limits_{(E)} y^2dx - x^2dy,$$

trong đó $a > 0, b > 0, (E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Bài giải.

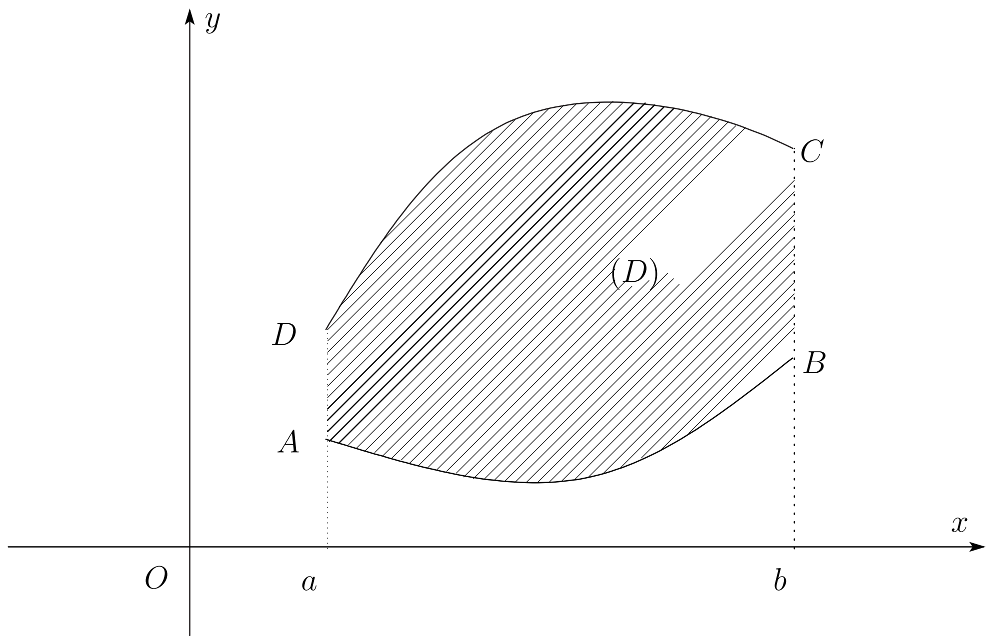
Ta chuyển đường elip (E) về dạng tham số. Đặt

$$x = a\cos t, y = b\sin t \quad \text{với} \quad t : 0 \to 2\pi.$$

Theo công thức (3.8), ta có

$$\oint\limits_{(E)} y^2dx - x^2dy = \int\limits_{0}^{2\pi} \Big(b^2\sin^2 t(-a\sin t) - a^2\cos^2 t(b\cos t) \Big) dt$$
$$= -ab\int\limits_{0}^{2\pi} (b\sin^3 t + a\cos^3 t) dt$$
$$= -\frac{ab}{4}\int\limits_{0}^{2\pi} \Big(b(3\sin t - \sin 3t) + a(3\cos t + \cos 3t) \Big) dt$$
$$= -\frac{ab}{4}\Big(b(-3\cos t + \frac{1}{3}\cos 3t) + a(3\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t) \Big)\Big|_{0}^{2\pi}$$
$$= 0.$$

3.2.6. Công thức Green.



Hình 3: Hình vẽ của *Trường hợp 1*.

Cho miền D trong mặt phẳng $\mathcal{R}^2$ là một miền liên thông, bị chặn và biên ∂D là một hay nhiều đường cong kín trơn từng khúc. Các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $D \cup \partial D$. Công thức Green được phát biểu như sau:

$$\iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Chứng minh.

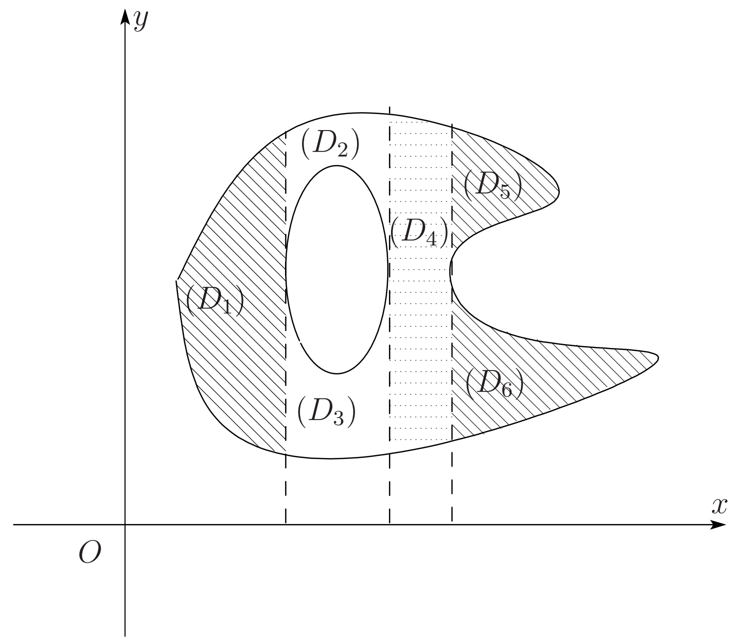
Ta xét các trường hợp của D như sau:

Trường hợp 1. $D = \{(x,y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$.

Theo định lý Fubini, ta có

$$\begin{aligned}
-\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= -\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\
&= \int\limits_{a}^{b} \Big(P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))\Big) dx \\
&= \int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\widetilde{CD}} P(x,y)dx \\
&= \int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\overline{BC}} P(x,y)dx + \int\limits_{\widetilde{CD}} P(x,y)dx + \int\limits_{\overline{DA}} P(x,y)dx \\
&= \oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

.



Hình 4: Hình vẽ của *Trường hợp 1*.

Bằng cách làm tương tự, ta cũng có

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{\partial D} Q(x,y)dy. \tag{3.10}$$

Từ (3.9) và (3.10) kéo theo công thức Green được chứng minh.

Trường hợp 2. Miền (D) là miền đa liên.

+ Ta chia miền (D) thành các miền nhỏ $(D_1), (D_2), ...(D_n)$ bởi các đường thẳng song song với trục Oy

+ Theo trường hợp 1, công thức Green đúng với các miền nhỏ (D_i) với $i = 1, 2, ..., n$ hay

$$\iint\limits_{D_i} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \oint\limits_{\partial D_i} Pdx + Qdy \ \ \forall i = 1, 2, .., n.$$

+ Tổng các tích phân đường của $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ trên cùng một dây cung theo hai chiều ngược nhau bằng không. Do đó,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy &= \iint\limits_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy + ... + \iint\limits_{D_n} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy \\ &= \oint\limits_{\partial D_1} Pdx + Qdy + ... + \oint\limits_{\partial D_n} Pdx + Qdy \\ &= \oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.9. Dùng công thức Green để tính tích phân đường sau

$$K = \oint\limits_{\partial C} (xy + e^x \sin x + x + y)dx + (xy - e^{-y} + x - \sin y)dy,$$

trong đó $(C) : x^2 + y^2 \leq 2x$.

Bài giải.

Đặt $P(x, y) = xy + e^x \sin x + x + y, Q(x, y) = xy - e^{-y} + x - \sin y$. Khi đó,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (y + 1) - (x + 1) = y - x.$$

Theo công thức Green, ta có

$$\begin{aligned} K &= \iint\limits_{(C)} (y - x)dxdy \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} (\sin\varphi - \cos\varphi)r^2 dr \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi - \cos\varphi)\cos^3\varphi d\varphi \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

3.2.7. Định lý 4 mệnh đề tương đương.

Cho các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền đơn liên $D \subset \mathcal{R}^2$ (miền không có lỗ thủng nào). Khi đó, các mênh đề sau tương đương:

(i) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \ \ \forall (x, y) \in D$.

(ii) $\oint\limits_{\partial D_1} Pdx + Qdy = 0 \ \ \forall D_1 \subset D$.

(iii) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào 2 điểm A, B, với mọi $\overset{\frown}{AB} \subset D$.

(iv) Tồn tại $u(x, y)$ xác định trên D sao cho $du = Pdx + Qdy$.

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$ Giả sử $D_1 \subset D$, Theo công thức Green, D là miền đơn liên và giả thiết (i), ta có

$$\oint\limits_{\partial D_1} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Giả sử 2 đường cong bất kỳ nối A với B là $\widetilde{AmB}$ và $\widetilde{AnB}$. Theo giả thiết (ii), ta có

$$\oint\limits_{\widetilde{AmBnA}} Pdx + Qdy = 0.$$

Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AmB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\widetilde{BnA}} Pdx + Qdy = 0.$$

Hay

$$\int\limits_{\widetilde{AmB}} Pdx + Qdy - \int\limits_{\widetilde{AnB}} Pdx + Qdy = 0.$$

Như vậy, tích phân đường loại 2 của $Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong nối điểm A với B.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Giả sử $M(x, y) \in D$ bất kỳ. Đặt

$$u(x, y) = \int\limits_{\widetilde{AM}} Pdx + Qdy \ \text{(có thể sai khác một hằng số).}$$

Theo giả thiết (iii), ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{u(x + \Delta_x, y_u(x, y)}{\Delta_x} \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x}\Big(\int\limits_{\widetilde{AM_1}} Pdx + Qdy - \int\limits_{\widetilde{AM}} Pdx + Qdy \Big) \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int\limits_{x}^{x+\Delta_x} P(z, y)dz,
\end{aligned}$$

trong đó $M_1(x+\Delta_x, y) \in D$. Theo tính chất của tích phân xác định, tồn tại $z = x+\theta\Delta_x, 0 < \theta < 1$ sao cho

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int\limits_{x}^{x+\Delta_x} P(z, y)dz = P(z, y).$$

Khi $\Delta_x \to 0$ thì $z \to x$. Theo tính liên tục của $P(x, y)$, ta cũng có $P(z, y) \to P(x, y)$ và do đó

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y).$$

Bằng cách làm tương tự, ta cũng chứng minh được rằng

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Như vậy, tồn tại $u(x, y)$ xác định trên D sao cho $du = Pdx + Qdy$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Từ giả thiết tồn tại $u(x, u)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$ và các đạo hàm riêng của P, Q liên tục trên D. Khi đó

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Theo định lý Schwarz, ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ví dụ 3.10. *Tính tích phân đường*

$$I = \int\limits_{\widetilde{AB}} \frac{(x+y)dy + (x-y)dx}{x^2 + y^2},$$

trong đó $A(-1, -1), B(1, 1)$.

Giải.

Dễ thử lại rằng $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\forall (x, y) \in \mathcal{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Theo định lý 4 mệnh đề tương đương, tích phân đường I không phụ thuộc vào đường cong nối A với B. Ta có nhiều cách chọn đường cong nối A với B. Dưới đây là một cách chọn

$$(C) : x^2 + y^2 = 2.$$

Đặt $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t \quad t : -\frac{3\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$. Khi đó

$$I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \pi.$$

Hệ quả 3.11. *Nếu các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền $\mathcal{R}^2$ và tồn tại $u(x, y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$, thì*

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C$$

hoặc

$$u(x, y) = \int\limits_{y_0}^{y} P(x_0, y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} Q(x, y)dx + C.$$

Ví dụ 3.12. *Xác định hàm $u(x, y)$, biết*

$$du = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}, u(0, 1) = 5.$$

Giải:

Đặt

$$P(x,y) = \frac{(x+2y)}{(x+y)^2}, Q(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2}.$$

Theo hệ quả 3.11, ta chọn $x_0 = 1, y_0 = 0$ và

$$u(x,y) = \int_1^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy$$
$$= \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + C.$$

Từ $u(0,1) = 5$, ta có

$$\ln(0+1) - \frac{1}{0+1} + C = 5 \Rightarrow C = 6.$$

Vậy

$$u(x,y) = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + 6.$$

Hệ quả 3.13. *Nếu các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền D, $\widetilde{AB} \subset D$ và tồn tại $u(x,y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$, thì*

$$\int_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

Ví dụ 3.14. *Tính tích phân đường*

$$J = \int_{\widetilde{AB}} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 1)dy,$$

trong đó $A(a,0), B(0,a)$.

Giải:

Đặt

$$P(x,y) = e^x \sin y, Q(x,y) = e^x \cos y - 1.$$

Dễ thử lại rằng

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{R}^2.$$

Theo hệ quả 3.13, ta chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$ và

$$u(x,y) = \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy$$
$$= e^x \sin y - y + C.$$

Do vậy

$$J = \int_{\widetilde{AB}} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 1)dy = u(0,a) - u(a,0) = \sin a - a.$$

Ví dụ 3.15. *Tính tích phân đường*

$$J = \int\limits_{\widetilde{AB}} \Big(2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)\Big)dx - x^2\sin(x+y)dy,$$

trong đó $A(\pi, 0), B(0, \pi)$.

Giải.

Đặt

$$P(x,y) = 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y), Q(x,y) = x^2\sin(x+y).$$

Dễ thử lại rằng

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \ \ \forall (x,y) \in \mathcal{R}^2.$$

Bằng cách làm tương tự như ví dụ 3.14, ta nhận được

$$u(x,y) = x^2\cos(x+y).$$

Theo hệ quả 3.13

$$J = \int\limits_{\widetilde{AB}} e^x \sin y dx + (e^x\cos y - 1)dy = u(0,\pi) - u(\pi,0) = \pi^2.$$

Ví dụ 3.16. *Tìm* m, n *để tích phân sau không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nối điểm* $A(0,0)$ *với điểm* $B(1,1)$

$$K = \int\limits_{\widetilde{AB}} \frac{y(1-x^2+my^2)dx + x(1-y^2+nx^2)dy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Từ đó, hãy tính K.

Giải.

Đặt

$$P(x,y) = \frac{y(1-x^2+my^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, Q(x,y) = \frac{x(1-y^2+nx^2)}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Theo định lý 4 mệnh đề tương đương, ta cần tính

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1-x^4+3(m+1)x^2y^2+3(m-1)y^2-my^4}{(1+x^2+y^2)^3}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1+3(n-1)x^2-nx^4+3(n+1)x^2y^2-y^4}{(1+x^2+y^2)^3}.\end{aligned}$$

Các điều kiện của 4 mệnh đề tương đương được thỏa mãn. Do đó, muốn K không phụ thuộc vào đường công nối điểm A với điểm B điều kiện cần và đủ là

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Đồng nhất các hệ số, ta nhận được $m = n = 1$.

Để tính K, ta cần viết phương trình đường thẳng $AB : y = x$. Theo công thức tính tích phân đường, ta nhận được

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{y(1-x^2+y^2)dx + x(1-y^2+x^2)dy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2xdx}{(1+2x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(1+2x^2)}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.3. Tích phân mặt loại 1.

3.3.1. Các khái niệm về mặt.

Một mặt cong S trong $\mathcal{R}^3$ được tạo bởi một ánh xạ liên tục

$$g : D \subset \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3.$$

Giả sử rằng $g(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$. Khi đó

+ Mặt S được gọi là *trơn*, nếu các đạo hàm riêng của các hàm số $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ liên tục trên miền D.

+ Mặt S được gọi là *trơn từng mảnh*, nếu mặt S có thể chia thành hữu hạn các mảnh trơn.

+ *Véc tơ pháp tuyến* của mặt trơn S là $\vec{n} = (A, B, C)$, trong đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \\ B &= \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \\ C &= \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Trong trường hợp đặc biệt $S : z = g(x,y)\ \ (x,y) \in D$. Khi đó, véc tơ pháp tuyến của mặt S là

$$\vec{n} = (-g'_x, -g'_y, 1).$$

+ *Mặt định hướng được:* Mặt trơn S được gọi là định hướng được, nếu với mỗi điểm $M \in S$ xác định được một véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$ (gốc tại điểm M) liên tục trên S.

+ *Diện tích mặt:* Trong không gian $\mathcal{R}^3$, ta xét mặt S có phương trình

$$z = f(x,y)\ \ (x,y) \in D.$$

trong đó, hàm số f và các đạo hàm riêng của nó liên tục trên miền D. Phân hoạch P chia miền D thành n mảnh nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$ có các diện tích tương ứng $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Lấy một điểm tùy ý $N_i(x_i, y_i) \in D_i$. Gọi T_i là một phần của mặt phẳng tiếp xúc với S tại điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S$ và hình chiếu vuông góc trên (Oxy) là miền D_i. Diện tích của mảnh T_i được ký hiệu là ΔT_i. Tương tự, ta cũng có các mảnh nhỏ trên mặt S là $S_1, S_2, ..., S_n$ và các diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Gọi góc tạo bởi giữa trục Oz và véc tơ pháp tuyến của T_i tại điểm M_i là α_i. Khi đó, ta nhận thấy rằng

$$\Delta D_i = \Delta T_i |\cos \alpha_i| \ \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Mặt khác, theo công thức tính véc tơ pháp tuyến ở trên, ta có

$$\vec{n} = \Big(-f'_x(M_i), -f'_y(M_i), 1 \Big).$$

Do đó

$$|\cos \alpha_i| = |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)}}.$$

Khi đường kính của phân hoạch P là $\delta_P = \max\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ (trong đó d_i là đường kính của D_i) đủ nhỏ, thì $\Delta S_i \approx \Delta T_i$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Vì vậy, diện tích của mặt S có thể được tính xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)} \Delta D_i.$$

Dấu bằng xảy ra, khi độ dài phân hoạch $\Delta_P \to 0$. Khi đó, diện tích mặt S được tính bởi công thức

$$dt(S) = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)} \Delta D_i = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy. \tag{3.12}$$

Khi đó, biểu thức

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy$$

được gọi là *vi phân mặt*.

Nếu mặt trơn S được cho dưới dạng phương trình tham số

$$S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \ \ (u, v) \in D.$$

Bằng cách làm tương tự, ta cũng có $dS = \sqrt{AC - B^2} dudv$ và diện tích mặt cong cho bởi công thức

$$dt(S) = \iint_D \sqrt{AC - B^2} dudv, \tag{3.13}$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\
B &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\\
C &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

3.3.2. Định nghĩa.

Trong không gian $\mathcal{R}^3$, cho mặt S và một hàm $f(x, y, z)$ xác định trên mặt S.

+ Một phân hoạch P chia mặt S thành các mảnh nhỏ $S_1, S_2, ..., S_n$ có các diện tích tương ứng $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ và đường kính $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$. Khi đó, $\delta_P = \max\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$ gọi là đường kính của phân hoạch P.

+ Chọn một điểm bất kỳ $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$. Khi đó tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \tag{3.15}$$

được gọi là *tổng tích phân mặt loại 1* của hàm f ứng với phân hoạch P và phép chọn điểm M_i. Xét giới hạn

$$I = \lim_{\delta_P \to 0} \sigma_n.$$

Nếu I tồn tại hữu hạn không phụ thuộc vào phép phân hoạch P và phép chọn các điểm M_i, thì I được gọi là *tích phân mặt loại 1* của hàm f trên mặt S và được ký hiệu là

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dS.$$

Người ta chứng minh được rằng: Nếu mặt S trơn và hàm số f liên tục trên S, thì tồn tại tích phân mặt I.

3.3.3. Cách tính.

(i) Nếu mặt (S) cho bởi phương trình tổng quát

$$(S) : z = z(x, y) \ \text{ với } \ (x, y) \in D,$$

trong đó hàm số z và các đạo hàm riêng liên tục trên tập compact D. Theo định lý giá trị trung bình và công thức (3.12), tồn tại $(x_i, y_i) \in D_i$ sao cho

$$
\begin{aligned}
\Delta S_i &= \iint\limits_{D_i} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy\\
&= \sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}\Delta D_i.
\end{aligned}
$$

Theo (3.15), ta có

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)}\Delta D_i$$

và do đó

$$\begin{aligned}\iint\limits_S f(x, y, z)dS &= \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_n \\ &= \iint\limits_D f\big(x, y, z(x, y)\big)\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}dxdy. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Ví dụ 3.17. *Tính*

$$J = \iint\limits_S (6x + 4y + 3z)dS,$$

trong đó $A(6, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 2), S = \triangle ABC.$

Giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $x + 2y + 3z - 6 = 0$. Dùng công thức (3.16) với $z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y), z'_x = -\frac{1}{3}, z'_y = -\frac{2}{3}$. Miền $D = \triangle OAB$ là hình chiếu của $\triangle ABC$ trên mặt phẳng (Oxy). Khi đó

$$\begin{aligned}J &= \iint\limits_D \Big(6x + 4y + 3.\frac{1}{3}(6 - x - 2y)\Big)\sqrt{1 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2}dxdy \\ &= \frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_D (5x + 2y + 6)dxdy \\ &= \frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (5x + 2y + 6)dx \\ &= 54\sqrt{14}.\end{aligned}$$

(ii) Nếu mặt S cho bởi phương trình tham số

$$S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathcal{R}^2,$$

trong đó các hàm số x, y, z và các đạo hàm riêng liên tục trên tập compact D, hàm số $f(x, y, z)$ cũng liên tục trên S. Từ các công thức (3.13) và (3.15), ta cũng có

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)\sqrt{AC - B^2}dudv, \qquad (3.17)$$

trong đó A, B, C xác định bởi (3.13).

Ví dụ 3.18. *Tính tích phân*

$$K = \iint\limits_S z^2 dS,$$

trong đó S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm ở góc phần tám thứ nhất.

Giải.

Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cầu

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, y = R\sin\theta\sin\varphi, z = R\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Theo công thức (3.17), ta có

$$\sqrt{AC - B^2} = R^2 \sin\theta.$$

Khi đó

$$K = \iint\limits_S z^2 dS = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{\pi R^4}{6}.$$

3.3.4. Tính chất cơ học của tích phân mặt loại 1.

Cho mặt S có khối lượng riêng tại điểm $M \in S$ là $\rho(M)$. Khi đó

(i) Khối lượng riêng của S là

$$m = \iint\limits_S \rho(x, y, z) dS.$$

(ii) Tọa độ trọng tâm của mặt S là $G(x_G, y_G, z_G)$ xác định bởi

$$x_G = \frac{1}{m} \iint\limits_S x\rho(x, y, z) dS,$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iint\limits_S y\rho(x, y, z) dS,$$

$$z_G = \frac{1}{m} \iint\limits_S z\rho(x, y, z) dS.$$

(iii) Mômen quán tính

+ đối với gốc tọa độ là

$$I_0 = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dS.$$

+ đối với trục Ox là

$$I_x = \iint\limits_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dS.$$

+ đối với trục Oy là

$$I_y = \iint\limits_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dS.$$

+ đối với trục Oz là

$$I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dS.$$

3.4. Tích phân mặt loại 2.

3.4.1. Định nghĩa.

Cho mặt trơn S được định hướng bởi véc tơ $\vec{n}(M)$ (với $M \in S$) biến thiên liên tục. Hàm véc tơ $\vec{F} = \big(P(M), Q(M), R(M)\big)$ liên tục trên mặt S.

+ Phân hoạch P chia mặt S thành n mảnh nhỏ $S_1, S_2, ..., S_n$ có diện tích tương ứng $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ và có đường kính là d_i. Ký hiệu $\Delta_P = \max\{d_1 : \; i = 1, 2, ..., n\}$.

+ Trên mỗi mảnh S_i, chọn một điểm bất kỳ $M_i \in S_i$. Gọi $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ là góc tạo bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị định hướng $\vec{n}(M_i)$ của mặt (S) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tương ứng. Khi đó

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} \Big(P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i\Big)\Delta S_i$$

được gọi là tổng tích phân mặt loại 2 của hàm véc tơ $\vec{F}$ ứng với phân hoạch P và phép chọn M_i. Nếu tồn tại hữu hạn giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

không phụ thuộc vào phép phân hoạch P và phép chọn các điểm M_i, thì I được gọi là *thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt S*, còn được gọi là *tích phân mặt loại 2* của $\vec{F}$ trên mặt S và được ký hiệu bởi

$$\iint\limits_S \Big(P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\Big)dS$$

hoặc

$$\iint\limits_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy.$$

3.4.2. Cách tính.

(i) Nếu mặt S cho bởi phương trình tổng quát

$$S : z = z(x, y) \;\; (x, y) \in D,$$

trong đó S là mặt trơn và định hướng được bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Các hàm số $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục trên mặt S. Gọi D_i là hình chiếu vuông góc của S_i trên (Oxy). Theo định nghĩa của tích phân mặt loại 2, ta có

+ Nếu góc γ (góc tạo bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ với tia Oz) là một *góc nhọn* thì

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma dS &= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i\cos\gamma_i\\
&= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(x_i,y_i,z_i)\Delta T_i\cos\gamma_i\\
&= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(x_i,y_i,z_i)\Delta D_i\\
&= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^{n} R\big(x_i,y_i,z(x_i,y_i)\big)\Delta D_i\\
&= \iint\limits_D R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy.
\end{aligned}$$

+ Nếu góc γ (góc tạo bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ với tia Oz) là một *góc tù* thì

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma dS = -\iint\limits_D R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy.$$

Ví dụ 3.19. *Tính*

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

trong đó S là phần trên của mặt phẳng $x+z=1$, nằm trong góc phần tám thứ nhất và được giới hạn bởi các mặt phẳng $x=0, y=4$.

Bài giải.

Gọi D_1, D_2, D_3 là hình chiếu của S trên các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$. Vì S song song với Oy, nên

$$I_3 = \iint\limits_{D_3} ydzdx = 0.$$

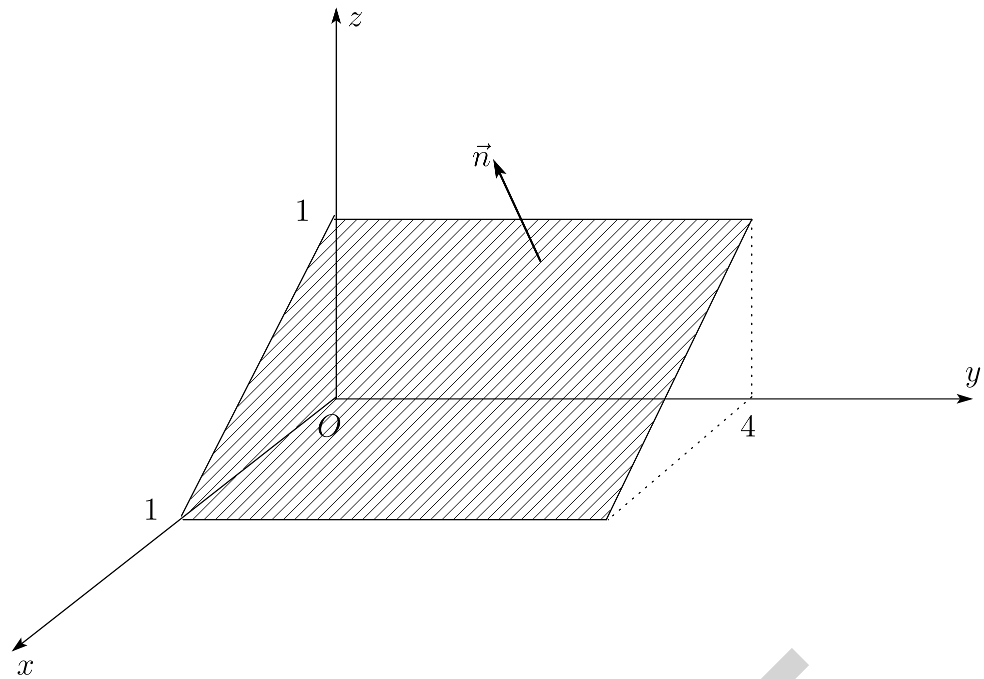
Từ $D_1 = \{(x,y)\in(Oxy):\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 4\}$ và góc tạo bởi $\vec{n}$ với Oz là góc nhọn, ta có

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} zdxdy = \iint\limits_{D_1}(1-x)dxdy = 2.$$

Từ $D_2 = \{(y,z)\in(Oyz):\ 0\le y\le 4, 0\le z\le 1\}$ và góc tạo bởi $\vec{n}$ với Ox là góc nhọn, ta có

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} xdydz = \iint\limits_{D_2}(1-z)dydz = 2.$$

Vậy $I = I_1 + I_2 + I_3 = 4$.



Hình 5: Hình vẽ của *Ví dụ 3.19*.

(ii) Nếu mặt S cho bởi phương trình tham số

$$S : x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) \quad (u,v) \in D,$$

trong đó S là mặt trơn và định hướng được bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Các hàm số $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ liên tục trên mặt S. Với véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ và A, B, C được xác định trong công thức (3.11), ta có

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Theo công thức (3.14) và $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$ nên ta có công thức

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_D (PA + QB + RC)dudv, \tag{3.18}$$

trong đó dấu cộng và trừ được chọn một cách thích hợp với phía của mặt định hướng.

Ví dụ 3.20. *Tính*

$$J = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Giải.

Dùng phép đổi biến trong tọa độ cầu

$$x = R\cos\varphi\sin\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\theta \text{ với } 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} A = R^2\cos\varphi\sin^2\theta, \\ B = R^2\sin\varphi\sin^2\theta, \\ C = R^2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} J &= \iint\limits_D R^3(\cos^2\varphi\sin^3\theta + \sin^2\varphi\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta)d\varphi d\theta \\ &= R^3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \\ &= 4\pi R^3. \end{aligned}$$

3.5. Quan hệ giữa các tích phân.

3.5.1. Công thức Stokes

Cho S là một mặt định hướng trơn từng mảnh, biên ∂S là một đường cong kín trơn từng khúc, các hàm số P, Q, R và các đạo hàm của chúng liên tục trên S. Khi đó

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

trong đó đường lấy tích phân theo *chiều dương* (là chiều đi mà ta nhìn thấy mặt ở bên trái) ứng với mặt S.

Chứng minh.

Giả sử mặt S cho bởi phương trình tham số

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D.$$

Theo công thức Green, ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial S} Pdx &= \int\limits_{\partial D} Px'_u du + Px'_v dv \\ &= \iint\limits_D \Big((Px'_u)'_u - (Px'_v)'_v\Big)dudv. \end{aligned}$$

Để tiện theo dõi, ta xét

$$\begin{aligned}(Px'_u)'_u - (Px'_v)'_v =&(P'_x x'u + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v + Px''_{vu} - \big((P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'zz'_v)x'_v + Px''_{uv}\big)\\ =&- P'_y\,(y'_v x'_u - y'_u x'_v) + P'_x\,(x'_u x'_v - x'_v x'_u) + P'_z\,(z'_u x'_v - z'_v x'_u)\\ =&- P'_y\,(y'_v x'_u - y'_u x'_v) + P'_z\,(z'_u x'_v - z'_v x'_u)\\ =&- P'_y \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + P'_z \frac{D(z,x)}{D(u,v)}.\end{aligned}$$

Do vậy

$$\int\limits_{\partial S} Pdx = \iint\limits_{D} \left(-P'_y \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + P'_z \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right) dudv. \tag{3.19}$$

Bằng cách làm tương tự, ta cũng có

$$\int\limits_{\partial S} Qdy = \iint\limits_{D} \left(-Q'_z \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q'_x \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) dudv, \tag{3.20}$$

$$\int\limits_{\partial S} Rdz = \iint\limits_{D} \left(-R'_x \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R'_y \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right) dudv. \tag{3.21}$$

Cộng các đẳng thức (3.19), (3.20) và (3.21), ta có định lý được chứng minh.

Ví dụ 3.21. *Tính tích phân*

$$I = \int\limits_{\partial C} x^2y^3dx + dy + zdz,$$

trong đó $C = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Giải.

Đặt $D = \{(x,y) \subset (Oxy) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Theo công thức Stokes, ta có

$$I = \int\limits_{D} (-3x^2y^2)dxdy.$$

Đổi biến sang tọa độ cực

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D} (-3x^2y^2)dxdy\\ &= -3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi r dr\\ &= -3\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi dr \int\limits_0^R r^5 dr\\ &= -\frac{R^6}{8}.\end{aligned}$$

3.5.2. Công thức Ostrogradski.

Cho $\Omega \subset \mathcal{R}^3$ là một miền bị chặn có biên là một mặt kín trơn từng mảnh S. Các hàm số P, Q, R và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $\Omega \cup S$. Khi đó, ta có công thức

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của mặt S.

Chứng minh.

Giả sử miền Ω có dạng đơn giản

$$\begin{aligned} \Omega =& \{(x,y,z) : (x,y) \in D_1, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\} \\ =& \{(x,y,z) : (x,z) \in D_2, y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z)\} \\ =& \{(x,y,z) : (y,z) \in D_3, x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z)\}, \end{aligned}$$

trong đó $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ liên tục trên các miền D_1, D_2, D_3 tương ứng. Theo công thức Fubini, ta có

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint\limits_{D_1} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint\limits_{D_1} \left(R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \right) dxdy \\ &= \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy, \\ &= \iint\limits_{S} Rdxdy, \end{aligned} \tag{3.22}$$

trong đó $S_1 : z = z_1(x,y), (x,y) \in D_1$ và $S_2 : z = z_2(x,y), (x,y) \in D_2$. Bằng cách làm tương tự, ta cũng có

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz, \tag{3.23}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{S} Pdxdz. \tag{3.24}$$

Cộng các đẳng thức (3.22), (3.23) và (3.24), ta có công thức được chứng minh.

Nếu miền Ω không có dạng đơn giản nói trên, ta hãy chia miền Ω thành một số hữu hạn các miền đơn giản. Khi đó, công thức Ostrogradski vẫn đúng trong trường hợp này vì tại biên tiếp giáp giữa 2 miền đơn giản do phân chia sẽ có 2 tích phân mặt loại 2 cũng biên nhưng ngược phía nhau nên triệt tiêu lẫn nhau.

Ví dụ 3.22. *Tính*

$$K = \iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Giải.

Dùng công thức Ostrogradski, ta có

$$K = \iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$$

trong đó Ω là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$. Đổi biến sang hệ tọa độ cầu

$$x = R\cos\varphi\sin\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\theta \text{ với } 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ta có

$$K = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \frac{12}{5}\pi R^5.$$

3.6. Véc tơ rôta và trường thế.

+ *Trường véc tơ:* Cho $\Omega \subset \mathcal{R}^3$. Nếu mỗi điểm $M \in \Omega$ cho tương ứng một đại lượng véc tơ $\vec{u}(M)$ nào đó thì ta gọi $(\Omega, \vec{u})$ là một trường véc tơ. Ví dụ như trường vận tốc, từ trường, điện trường,...

+ *Gradient:* Cho hàm số $f : \Omega \subset \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$. Với mỗi điểm $M \in \Omega$, gradient của f là một véc tơ được xác định bởi công thức

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k},$$

trong đó $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ là các véc tơ trực chuẩn trong $Oxyz$.

+ *Véc tơ rôta:* Cho trường véc tơ $\vec{F}(M) = \big(P(M), Q(M), R(M)\big) \in \mathcal{R}^3$. Khi đó, véc tơ rôta (hay còn gọi là *véc tơ xoáy*) của $\vec{F}$ là một véc tơ ký hiệu bởi $\overrightarrow{rot}\vec{F}$ và được xác định bởi công thức

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Nhận xét 3.23. *Từ các định nghĩa trên, ta có một vài nhận xé và ý nghĩa sau:*

(i) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = 0$.

(ii) *Công thức Stokes được viết dưới dạng*

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \overrightarrow{grad}\vec{F}.\vec{n}dS,$$

trong đó $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt định hướng S.

(iii) *Nếu $\vec{F} = (P, Q, R)$ là trường lực liên tục trên cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$, thì*

$$H = \int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$$

là công sinh ra khi chất điểm chuyển động trên cung $\widetilde{AB}$ từ điểm A tới điểm B dưới tác động của lực $\vec{F}$. Nếu $\vec{F}$ là trường vận tốc thì H được gọi là lưu thông của trường lực $\vec{F}$ dọc theo cung $\widetilde{AB}$. (iv) Một cái đĩa tròn $S(M_0, r)$ (tâm M_0, bán kính r) với bán kính r khá nhỏ nằm trong một trường véc tơ $\vec{F} = (P, Q, R)$ của một dòng chất lỏng. Khi đó

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(M) \approx \overrightarrow{rot}\vec{F}(M_0) \ \ \forall M \in S(M_0, r).$$

Theo công thức Stokes, ta có

$$\int\limits_{\partial S(M_0,r)} Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_{S(M_0,r)} \overrightarrow{rot}\vec{F}.\vec{n}dS \approx \iint\limits_{S(M_0,r)} \overrightarrow{rot}\vec{F}(M_0).\vec{n}(M_0)dS = \overrightarrow{rot}\vec{F}(M_0).\vec{n}(M_0).\pi r^2.$$

Do vậy

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(M_0).\vec{n}(M_0) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{\partial S(M_0,r)} Pdx + Qdy + Rdz$$

biểu thị tác động quay của chất lỏng quanh trục $\vec{n}$. Tác động cực đại, khi $vecn$ cùng phương với $\overrightarrow{rot}\vec{F}$. Khi đó, điểm M được gọi là điểm xoáy nếu $\overrightarrow{rot}\vec{F}(M).\vec{n}(M) \neq 0$, điểm không xoáy nếu $\overrightarrow{rot}\vec{F}(M).\vec{n}(M) = 0$.

+ *Trường thế.*

Trường véc tơ $\vec{F}$ xác định trên Ω được gọi là *trường thế*, nếu tồn tại một hàm số $f : \Omega \to \mathcal{R}$ sao cho

$$\overrightarrow{grad}f(M) = \vec{F}(M) \ \ \forall M \in \Omega.$$

Hàm số f được gọi là *hàm thế vị* của trường véc tơ $\vec{F}$. Khi đó, ta dễ kiểm tra lại rằng *$\vec{F}$ là một trường thế khi và chỉ khi $\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$.*

Ví dụ 3.24. *Chứng minh rằng*

$$\vec{F} = (x^2 - 2yz; y^2 - 2zx; z^2 - 2xy)$$

là trường thế và tìm hàm thế vị của nó.

Giải.

Đặt các hàm số

$$P = x^2 - 2yz, Q = y^2 - 2zx, R = z^2 - 2xy.$$

Dễ dàng tính được rằng $\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$. Do đó $\vec{F}$ là một trường thế. Để tìm hàm thế vị, ta áp dụng công thức: Nếu $du = Pdx + Qdy + Rdz$ thì u được xác định bởi công thức

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz.$$

Ta có

$$f(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x}(x^2 - 2y_0z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y}(y^2 - 2xz_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z}(z^2 - 2xy)dz$$
$$= \frac{1}{3}(x^3 + yz^3 + z^3) - 2xy + C_0,$$

trong đó $C_0 = -\frac{1}{3}(x_0^3 + y_0^3 + z_0^3) + 2x_0y_0z_0$.

Bài tập chương 3

1. Tính các tích phân đường sau:

   a) $\int_L xyds$, L là biên của hình chữ nhật $ABCD$, $A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2)$.

   b) $\int_{\widehat{AB}} (xy-1)dx + x^2ydy, A(1,0), B(0,2)$ theo đường $4x + y^2 = 4$.

   c) $\int_{AB} (x-y)ds$, AB là đoạn thẳng nối hai điểm $A(0,0), B(4,3)$.

   d) $\int_L (x^2+y^2)ds$, L là biên của tam giác OAB với $O(0,0), A(1,1), B(-1,1)$.

   e) $\int_L |y|ds$, L là đường cacđiôit: $r = a(1+\cos\phi)(a>0)$.

   f) $\int_L zds$, L là đường $x^2+y^2 = z^2, y^2 = ax$ từ điểm $(0,0,0)$ đến điểm $(a, a, a\sqrt{2})(a>0)$.

2. Tính khối lượng của:

   a) Đường $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), 0 \le x \le a$, biết khối lượng riêng $p(x,y) = \frac{1}{y}$.

   b) Đường $x = a\cos t, y = a\sin t, 0 \le x \le \pi$ biết khối lượng riêng $p(x,y) = |x|$.

   c) Đường đinh ốc $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \le t \le 2\pi$ biết khối lượng riêng $p(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. Tích phân đường $\int (1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx + (\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$ có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân đó từ $A(1,\pi)$ đến $B(2,\pi)$ theo một cung không cắt Oy.

4. Tính:

   a) $\oint_L \frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2+1)^2}$, L là đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

   b) $\int_L ydx - (y+x^2)dy$, L là cung parabon $y = 2x - x^2$ nằm ở trên trục Ox theo chiều kim đồng hồ.

   c) $\int_{\hat{AB}} \sqrt{x}dy - \sqrt{x}ln(x+1)dx$, $\hat{AB}$ là cung đường $y = (x-1)ln(x+1)$ giữa hai điểm có hoành độ 0 và 1.

5. Tính các tích phân mặt:

   a) $\iint\limits_S xyzdxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2+y^2+z^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0$.

   b) $\iint\limits_S xdydz + dxdz + zx^2dxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

   c) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $(x - a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, R \ge 0$.

6. Tính $\oint_L (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (y^2+x^2)dz$ với L là giao tuyến của các mặt

$x^2+y^2+z^2=2ay, x^2+y^2=2by, z>0, a>b>0$ hướng đi trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía $z>0$.

7. Tích các tích phân mặt:

   a) $\iint\limits_S xzdydz+yxdzdx+zydxdy$, S là phía ngoài của biên của hình chóp $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1$.

   b) $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$.

8. Tính trực tiếp các tích phân đường sau rồi kiểm tra lại bằng công thức Green

   a) $\int_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$, L là đường kín gồm hai cung parabon $y=x^2$ và $x=y^2$ theo chiều dương.

   b) $\int_L (2x^3-y^3)dx$, L là đường tròn $x^2+y^2=1$ theo chiều dương.

9. Chứng minh rằng các biểu thức $Pdx+Qdy$ sau đây là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm u: a) $(x^2-2xy^2+3)dx+(y^2-2x^2y+3)dy$. HD: $u=\frac{x^3+y^3}{3}+3(x+y)-x^2y^2+C$.

   b) $(2x-3xy^2+2y)dx+(2x-3x^2y+2y)dy$. HD: $u=x^2+2xy-\frac{3}{2}x^2y^2+y^2+C$.

   c) $[e^{x+y}+\cos(x-y)]dx+[e^{x+y}-\cos(x-y)+2]dy$. HD: $u=e^{x+y}+\sin(x-y)+2y+C$.

   d) $\frac{xdx}{x^2+y^2}+\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}ydy$. HD: $u=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)-\frac{y^2}{2}+C$.

10. Chứng minh các công thức

    a) $div(g\vec{F})=\vec{grad}(g).\vec{F}+g.div\vec{F}$,

    b) $div(\vec{G}\wedge\vec{F})=\vec{F}.\vec{rot}\vec{G}-\vec{G}.\vec{rot}\vec{F}$,

    c) $\vec{rot}(g\vec{F})=\vec{grad}g\wedge\vec{F}+g\vec{rot}\vec{F}$.

11. Tính thông lượng của các trường vector sau: $\vec{F}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k}$ qua phía ngoài của phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$.

12. Tính $\int_L 2xy^2zdx+2x^2yzdy+(x^2y^2-2z)dz$, L là đường $x=\cos t, y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, z=\frac{1}{2}\sin t$ hướng theo chiều tăng của t.

13. Tính các tích phân mặt

    a) $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, S là biên của hình lập phương $\{(x,y,z): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 1\}$.

    b) $\iint\limits_S (z+2x+\frac{4y}{3})dS$, S là phần của mặt phẳng $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

    c) $\iint\limits_S (yz+zx+xy)dS$, S là phần của mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2+y^2-2ax=0 (a>0)$.

14. Tìm khối lượng riêng của mặt S xác định bởi $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), 0 \le z \le 1$, nếu khối lượng riêng $p(x, y, z) = z$.

15. Dùng công thức Ostrogradsky, tính các tích phân mặt sau:

a) $\iint\limits_S xzdydz + yxdzdx + zydxdy$, S là phía ngoài biên của hình chóp $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, z + y + z \le 1$.

b) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

16. Tính các tích phân mặt

a) $\iint\limits_S xyzdxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0$.

b) $\iint\limits_S xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, (R > 0)$.

c) $\iint\limits_S \frac{dydx}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$, S là mặt ngoài của eplipxoit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Đáp số bài tập chương 3

1. Tính các tích phân đường sau:

a) 0.

b) $-\frac{1}{5}$.

c) $\frac{5}{2}$.

d) $\frac{4}{3}(\sqrt{2} + 2)$.

e)? f) $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}(100\sqrt{38} - 72 - 17ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17})$.

2. Tính khối lượng của:

a) 1.

b) $2a^2$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})\right]$.

3. Tích phân đường $\int(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx + (\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$ có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân đó từ $A(1, \pi)$ đến $B(2, \pi)$ theo một cung không cắt Oy. HD: Không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

4. Tính:

a) 0.

b) 4.

c) $\pi - \frac{10}{3}$.

5. Tính các tích phân mặt:

   a) $\frac{2}{15}$.

   b) $\frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}$.

   c) $\frac{4}{3}(a+b+c)\pi^2 R^3$.

6. $-2\pi ab^2$.

7. Tích các tích phân mặt:

   a) $\frac{1}{8}$.

   b) $\frac{12}{5}\pi R^5$.

8. Tính trực tiếp các tích phân đường sau rồi kiểm tra lại bằng công thức Green

   a) $\frac{1}{30}$.

   b) $\frac{3\pi}{4}$ Green $\frac{3\pi}{2}$.

9. Chứng minh rằng các biểu thức $Pdx+Qdy$ sau đây là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm u

   a) HD: $u = \frac{x^3+y^3}{3} + 3(x+y) - x^2y^2 + C$.

   b) HD: $u = x^2 + 2xy - \frac{3}{2}x^2y^2 + y^2 + C$.

   c) HD: $u = e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C$.

   d) HD: $u = \frac{1}{2}ln(x^2+y^2) - \frac{y^2}{2} + C$.

10. Chứng minh các công thức

    a) $div(g\vec{F}) = gdiv(\vec{F}) + gr\vec{a}dg\vec{F}$.

    b)

    c)

11. $\frac{3\pi R^4}{16}$.

12. 0.

13. Tính các tích phân mặt

    a) 9.

    b) $4\sqrt{61}$. c) $\frac{64a^4\sqrt{2}}{15}$.

14. $\frac{2\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}$.

15. Dùng công thức Ostrogradsky, tính các tích phân mặt

    a) $\frac{1}{8}$.

    b) $\frac{12}{5}\pi R^5$.

16. Tính các tích phân mặt

a) $\frac{2}{15}$.

b) $\frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}$.

c) $4\pi(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c})$.

1 dfgfg

2 d®fg

3 dfgfg

4 d®fg

CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Nội dung của chương này sẽ trình bày các khái niệm, phân loại và cách giải một số phương trình vi phân như phương trình vi phân cấp 1 tách biến, Bernoulli, vi phân toàn phần; phương trình vi phân cấp 2; hệ phương trình vi phân cấp 1 thường gặp trong kỹ thuật. Để học tốt chương này, người học cần nắm vững các công thức đạo hàm và tích phân của hàm một biến số.

4.1. Khái niệm chung về phương trình vi phân

Có rất nhiều các mô hình toán học liên quan đến việc nghiên cứu và giải các phương trình vi phân, ta nhắc lại một số mô hình bài toán quen thuộc thường gặp trong chương trình phổ thông liên quan tới phương trình vi phân.

4.1.1. Các bài toán

Bài toán 1. Một vật có khối lượng m được đặt lên một lò xo đàn hồi với hệ số $k > 0$. Hãy xác định quy luật dao động của vật?

Giải. Chọn trục Oy thẳng đứng hướng từ trên xuống, gốc O đặt tại trọng tâm vật ở vị trí cân bằng. Từ đó ta dễ dàng đưa ra phương trình chuyển động của vật theo định luật Newton:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt}.$$

Đặt $a = \frac{k}{m}$ và $b = \frac{\lambda}{m}$ thì ta có phương trình chuyển động của lò xo có dạng thu gọn

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{4.1}$$

Đây là phương trình vi phân bậc 2 tuyến tính.

Bài toán 2. Một thanh kim loại được nung nóng đến 120^0C được đặt trong môi trường luôn có nhiệt độ không đổi 25^0C. Tìm quy luật thay đổi nhiệt độ của thanh kim loại.

Giải. Gọi $y(x)$ là nhiệt độ thanh kim loại tại thời điểm x. Theo định luật Newton về sự giảm nhiệt của vật thì vận tốc giảm nhiệt là $\frac{dy}{dx}$ tỷ lệ với nhiệt độ của vật thể và nhiệt độ $y(x) - 25$ của môi trường tại thời điểm đó. Do vậy, ta có

$$\frac{dx}{dt} = -k(x(t) - 25),\ k > 0, \tag{4.2}$$

là phương trình vi phân cấp 1.

4.1.2. Định nghĩa

Phương trình vi phân là phương trình quan hệ giữa biến độc lập x, hàm số cần tìm y và các đạo hàm $y', y'', ..., y^{(n)}$ của nó. Hay phương trình có dạng như sau:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{4.3}$$

hoặc

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Cấp cao nhất n của đạo hàm của hàm số y được gọi là cấp của phương trình vi phân. Ví dụ như, phương trình vi phân (4.2) là phương trình vi phân cấp 1 và (4.1) là phương trình vi phân cấp 2. *Nghiệm* của phương trình vi phân (4.3) là tất cả các hàm số $y = \varphi(x)$ thỏa mãn phương trình.

4.2. Phương trình vi phân cấp một

4.2.1. Định nghĩa và sự tồn tại nghiệm

Phương trình vi phân cấp một là một phương trình vi phân có dạng

$$F(x, y, y') = 0. \tag{4.4}$$

Phương trình (4.4) được gọi là *giải được* đối với y', nếu nó có thể viết được dưới dạng:

$$y' = f(x, y). \tag{4.5}$$

Bài toán Cauchy: Tìm hàm số $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình (4.4) hoặc (4.5) và điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$.

Ví dụ 4.1. *Giải bài toán Cauchy*

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 1.$$

Giải: Dễ dàng thấy $y = x^3 + C$ là nghiệm của phương trình. Với $x = 0, y = 1$, ta có $C = 1$. Vậy nghiệm của bài toán là $y = x^3 + 1$.

Họ hàm số $y = \varphi(x, C)$, với C là một hằng số tùy ý, được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp 1 trên miền $D \subseteq \mathcal{R}^2$, nếu $y = \varphi(x, C)$ thỏa mãn phương trình (4.4) với mọi hằng số C và tồn tại duy nhất hằng số C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy. Nếu không tìm được nghiệm tổng quát mà tìm được nghiệm dưới dạng một hệ thức dạng ẩn $\phi(x, y, C) = 0$, thì hệ thức này được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân cấp 1. Chú ý rằng, không phải bất kỳ nghiệm nào của phương trình vi phân cũng nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho hằng số C các giá trị cụ thể. Nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kỳ giá trị nào được gọi là *nghiệm kỳ dị* (ta không nghiên cứu sâu về nghiệm này).

Định lý 4.2. *Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền $D \subseteq \mathcal{R}^n$ chứa (x_0, y_0), thì bài toán Cauchy (4.5) và điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ có nghiệm $y = y(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0. Hơn nữa, nếu $\frac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục trên D thì $y = y(x)$ là nghiệm duy nhất.*

Hiện tại, không có một phương pháp tổng quát nào để giải phương trình vi phân cấp 1. Dưới đây, ta xét một số phương trình vi phân cấp 1 thông dụng có thể giải được bằng phương pháp tích phân.

4.2.2. Phương trình tách biến

Phương trình tách biến là một phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0.$$

Phương pháp giải: Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.$$

Nếu có $F'(x) = f(x)$ và $G'(x) = g(x)$, thì ta có tích phân tổng quát có dạng

$$F(x) + G(y) = C.$$

Ví dụ 4.3. *Giải phương trình vi phân*

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0.$$

Giải: Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = 0.$$

Khi đó,

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C_0,$$

hay

$$(1+x^2)(1+y^2) = e^{2C_0} = C > 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm dạng tích phân tổng quát

$$(1+x^2)(1+y^2) = C > 0.$$

Chú ý 4.4. *Nếu phương trình tách biến có dạng*

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

thì ta có thể đưa về phương trình tách biến. Thật vậy, nếu $f_2(x)g_1(y) \neq 0$, bằng cách chia 2 vế cho $f_2(x)g_1(y)$, ta nhận được

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0,$$

đó là phương trình tách biến. Ta xét các nghiệm kỳ dị trong các trường hợp $f_2(x)g_1(y) = 0$.

Ví dụ 4.5. *Giải phương trình vi phân cấp 1*

$$y' = xy(y+2).$$

Giải: Phương trình đã cho được viết dưới dạng:

$$dy = xy(y+2)dx.$$

-Nếu $y(y+2) \neq 0$, phương trình có dạng tách biến

$$\frac{dy}{y(y+2)} - xdx = 0.$$

Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} - \int xdx = 0.$$

Dễ dàng nhận được

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| - x^2 = \ln|C|,\ C \neq 0.$$

Hay

$$\frac{y}{y+2} = Ce^{x^2},\ C \neq 0$$

là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

-Nếu $y(y+2) = 0$, thì $y = 0$ và $y = -2$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4.6. *Giải phương trình* $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Giải: Nếu $x \neq 0,\ y \neq 0$, phương trình trở thành:

$$(\frac{1}{x} + 1)dx = (1 - \frac{1}{y})dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$ln|x| + x = y - ln|y| + C,$$

hay

$$ln|xy| + x - y = C.$$

Với $x = 0,\ y = 0$ cũng thỏa mãn phương trình, chúng biểu diễn hai đường tích phân kì dị.

Chú ý 4.7. *Phương trình dạng*

$$y' = f(ax + by + c)$$

có thể đưa về được dạng tách biến. Điều này hiển nhiên với $b = 0$. Bằng cách sử dụng chú ý 4.5 trong trường hợp $a = 0$. Nếu $ab \neq 0$, thì đặt $z = ax + by + c$. Khi đó, $z' = a + by'$ và phương trình có dạng tách biến với ẩn z

$$z' = bf(z) + a.$$

Phương trình được giải bằng cách sử dụng chú ý 4.5.

Ví dụ 4.8. *Giải phương trình*

$$y' = \cos(x - y - 1).$$

Giải: Đặt $z = x - y - 1$, ta có $y' = 1 - z'$, thay vào phương trình đã cho, ta được

$$1 - z' = \cos z \quad hay\ z' = 1 - \cos z \quad hay\ dz = (1 - \cos z)dx.$$

-Nếu $1 - \cos z \neq 0$, ta có $\frac{dz}{1-\cos z} = dx$. Đây là phương trình tách biến. Lấy tích phân 2 vế, ta nhận được

$$\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx \quad hay \quad -\cot\frac{z}{2} = x + C.$$

Thay $z = x - y - 1$, ta nhận được

$$y = 1 - x - 2\text{arccot}(x + C) + k\pi,\ y \in \mathbb{Z}.$$

-Nếu $1 - \cos z = 0$, thì $z = k2\pi$ hay $y = x - 1 + k2\pi$ là nghiệm. Vậy phương trình có các nghiệm

$$y = x - 1 + k2\pi,$$
$$y = 1 - x - 2\text{arccot}(x + C) + k\pi,\ y \in \mathbb{Z}.$$

4.2.3. Phương trình tuyến tính

Phương trình tuyến tính cấp 1 là phương trình vi phân có dạng:

$$y' + f(x)y = g(x), \tag{4.6}$$

trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các hàm liên tục. Phương trình tuyến tính cấp 1 (4.6) được gọi là thuần nhất nếu $g(x) = 0$, là không thuần nhất nếu $g(x) \neq 0$. Để giải phương trình (4.6), trước hết ta giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + p(x)y = 0. \tag{4.7}$$

Nếu $y \neq 0$ phương trình trở thành

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx,$$

đây là phương trình tách biến có nghiệm:

$$ln|y| = -\int f(x)dx + ln|C|,$$

với $C \neq 0$ là hằng cố tùy ý. Do đó

$$y = Ce^{-\int f(x)dx} \tag{4.8}$$

đây là nghiệm tổng quát của phương trình (4.7). Chú ý rằng $y = 0$ cũng là một nghiệm của (4.7) và là một nghiệm riêng ứng với $C = 0$.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (4.6), ta coi C là hàm số đối với biến x, ta cần tìm $C(x)$ để (4.8) thỏa mãn (4.6). Lấy đạo hàm hai vế của (4.8) rồi thay và (4.6) ta được:

$$e^{-\int f(x)dx}C'(x) - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + f(x)C(x)e^{-intp(x)dx} = g(x),$$

nên

$$\frac{dC(x)}{dx} = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

Vậy

$$C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + K,$$

trong đó K là hằng số tùy ý. Khi đó

$$y = Ke^{-\int f(x)dx} + e^{-\int f(x)dx}\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx, \tag{4.9}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (4.6). Phương pháp giải như trên gọi là phương pháp *phương pháp biến thiên hằng số.*

Ví dụ 4.9. *Giải phương trình*

$$(x^2 + 1)y' + xy = 1,$$

thỏa mãn điều kiện $y|_{x=0} = 2$.

Giải: Phương trình thuần nhất tương ứng:

$$(x^2+1)y' + xy = 0 \text{ hay } \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2+1}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Ta xem C là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta có

$$C' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ nên } \quad C = ln(x+\sqrt{x^2+1}) + K.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \frac{ln(x+\sqrt{x^2+1}) + K}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Thay $x=0, y=2$ vào nghiệm tổng quát, ta nhận được $K=2$ và do đó

$$y = \frac{ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4.2.4. Phương trình Bernoulli

Phương trình vi phân có dạng

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \tag{4.10}$$

trong đó $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục, α là một số thực khác 0 và 1, được gọi là *phương trình Bernoulli*. Với $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì phương trình (4.10) trở thành phương trình tuyến tính. Nếu $y^{\alpha} \neq 0$, chia hai vế của (4.10) cho y^{α}, ta được

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, phương trình (4.10) trở thành

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x).$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một đối với ẩn z.

Ví dụ 4.10. *Giải phương trình*

$$y' + \frac{2}{x}y = 3x^2y^{\frac{4}{3}}.$$

Giải: Đây là phương trình Bernoulli với $\alpha = \frac{4}{3}$. Nếu $y \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho $y^{\frac{4}{3}}$, ta có

$$y^{\frac{4}{3}}y' + \frac{2}{x}y^{1-\frac{4}{3}} = 3x^2.$$

Đặt $z = y^{-\frac{1}{3}}$. Khi đó, $z' = -\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}y'$ và phương trình có dạng

$$z' - \frac{2}{3x}z = -x^2.$$

Đây là phương trình tuyến cấp 1 đối với ẩn z. Giải phương trình này, ta nhận được nghiệm tổng quát

$$z = \left(-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C\right)x^{\frac{2}{3}}.$$

Vậy phương trình đã cho có tích phân tổng quát là

$$y^{-\frac{1}{3}} = \left(-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C\right)x^{\frac{2}{3}}.$$

Ngoài ra, $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý 4.11. *Một số phương trình vi phân, khi coi y là hàm của biến số x thì nhận được phương trình không thuộc dạng đang xét. Do đó, ta có thể coi x là hàm của biến số y để nhận được phương trình quen thuộc.*

Ví dụ 4.12. *Giải phương trình*

$$(x^2y^3 + xy)dy - dx = 0.$$

Giải: Coi x là một hàm số theo ẩn y, phương trình có dạng

$$x' - yx = y^3x^2,$$

là một dạng của phương trình Bernoulli đối với x, ở đây $\alpha = 2$. Nếu $x \neq 0$, chia 2 vế x^2, ta nhận được

$$x^{-2}x' - yx^{-1} = y^3.$$

Đặt $z = x^{-1}$, suy ra $z' = -x^{-2}x'$. Khi đó, phương trình có dạng

$$z' + yz = -y^3,$$

là phương trình tuyến tính cấp 1. Dùng công thức nghiệm tổng quát, ta có

$$z = \left(-y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + C\right).$$

Do vậy, tích phân tổng quát của phương trình ban đầu là

$$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Hơn nữa, $x = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

4.2.5. Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là một phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0, \tag{4.11}$$

trong đó $F(x,y)$, $G(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền đơn liên D thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial x}. \tag{4.12}$$

Nếu $D = \mathcal{R}^2$, theo định lý bốn mệnh đề tương đương, tồn tại một hàm $u(x,y)$ sao cho $du(x,y) = F(x,y)dx + G(x,y)dy$ và phương trình trên có dạng $du(x,y) = 0$. Khi đó, hàm số $u(x,y)$ được xác định bởi công thức

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} F(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} G(x,y)dy + K,$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} F(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} G(x,y)dx + K.$$

Ví dụ 4.13. *Giải phương trình:*

$$i)(3x^2 + 4y^3)dx + (12y^2x + 5y)dy = 0.$$

$$ii)(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0.$$

Giải:

i) Ta thấy $\frac{dF}{dy} = 12y^2 = \frac{dG}{dx}$ nên đây là phương trình vi phân toàn phần. Nên hàm số

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} (3x^2 + 4y^3)dx + \int_{y_0}^{y} (12y^2x + 5y)dy = x^3|_{x_0}^{x} + 4y^3x|_{x_0}^{x} + 4y^3x|_{y_0}^{y} + \frac{5}{2}y^2|_{y_0}^{y} = C.$$

Chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$, ta có tích phân tổng quát dạng

$$x^3 + 4y^3x + 4y^4 + \frac{5}{2}y^2 = C.$$

ii) Với $y \neq 0$, chia 2 vế cho y^2, ta được phương trình vi phân toàn phần

$$(2x - 3y)dx + (\frac{7}{y^2} - 3x)dy = 0.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C.$$

Ngoài ra, $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Chú ý 4.14. *Khi điều kiện (4.12) không thỏa mãn thì phương trình (4.11) không phải phương trình vi phân toàn phần. Nhưng ta có thể tìm một hàm $u(x, y)$ sao cho phương trình $u(x, y)F(x, y)dx + u(x, y)G(x, y)dy = 0$ là phương trình vi phân toàn phần, hàm $u(x, y)$ gọi là thừa số tích phân.*

Ví dụ 4.15. *Giải phương trình vi phân*

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0.$$

Giải: Đặt $F = x^2 - \sin^2 y$ và $G = x \sin 2y$, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2 \sin y \cos y, \frac{\partial G}{\partial x} = \sin 2y.$$

Như vậy, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq \frac{\partial G}{\partial x}$. Tìm thừa số tích phân $u(x, y)$ sao cho

$$\frac{\partial uF}{\partial y} \neq \frac{\partial uG}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}^2.$$

Khi đó, ta có

$$u = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Phương trình vi phân có dạng

$$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right) dx + \frac{\sin 2y}{x} dy = 0,$$

là một phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình này, ta có tích phân tổng quát

$$x + \frac{\sin^2 y}{x} = C.$$

4.3. Phương trình vi phân cấp hai

4.3.1. Định nghĩa và sự tồn tại nghiệm

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{4.13}$$

trong đó F là hàm số xác định trên một miền U trong $\mathcal{R}^4$. Phương trình (4.13) được gọi là *giải được* đối với đạo hàm y'', nếu nó có thể viết dưới dạng

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{4.14}$$

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình (4.14) thỏa mãn các điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0.$$

Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình (4.13) trong miền $D \subseteq \mathcal{R}^3$, nếu nó là nghiệm của phương trình với mọi C_1, C_2 và với mọi điểm $(x_0, y_0, y'_0) \in D$, tồn tại duy nhất cặp số (C_1^0, C_2^0) sao cho $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy. Hệ thức $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình cấp hai dưới dạng hàm ẩn theo y được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình đó.

Sau đây ta cũng đưa ra điều kiện để phương trình (4.14) tồn tại nghiệm và có duy nhất nghiệm.

Định lý 4.16. *Cho phương trình* (4.14). *Nếu* $f(x, y, y')$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ *và* $\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ *liên tục trong một miền* D *nào đó trong* $\mathcal{R}^3$ *và* (x_0, y_0, y'_0) *là một điểm thuộc* D *thì trong một lân cận nào đó của điểm* $x = x_0$*, tồn tại một nghiệm duy nhất* $y = y(x)$ *của phương trình* (4.14) *thỏa mãn các điều kiện*

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Định lý này ta sẽ không chứng minh mà thừa nhận nó. Sau đây, ta sẽ trình bày một số phương pháp giải phương trình vi phân cấp hai.

4.3.2. Phương trình khuyết

a) Phương trình khuyết y, y'*:* $F(x, y'') = 0$

Đặt $y' = z$. Khi đó, ta được $F(x, p') = 0$ là một phương trình vi phân cấp một đối với ẩn z.

Ví dụ 4.17. *Giải phương trình* $x = y''^2 + 1$.

Giải: Đặt $z = y'$, ta được $x = z'^2 + 1$. Phương trình tham số của đường tích phân tổng quát của nó là: $\begin{cases} x = & t^2 + 1, \\ z = & \frac{1}{3}t^3 + t + C_1. \end{cases}$

Do đó, $y = \int z dx = \int (\frac{1}{3}t^3 + t + C_1)(2t)dt = \int (\frac{2}{3}t^4 + 2t^2 + 2C_1 t)dt = \frac{2}{15}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C_1 t^2 + C_2$.

Vậy nghiệm của phương trình có dạng: $\begin{cases} x = & t^2 + 1, \\ z = & \frac{2}{15}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C_1 t^2 + C_2. \end{cases}$

b) Phương trình khuyết y: $F(x, y', y'') = 0$.

Bằng cách đổi biến $z = y'$. Phương trình vi phân có dạng một phương trình vi phân cấp 1: $F(x, z, z') = 0$.

Ví dụ 4.18. *Giải phương trình*

$$y'' + 2y' = e^x y'^2,$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Giải: Đặt $z = y'$. Phương trình có dạng

$$z' + 2z = e^x z^2,$$

là một phương trình Bernoulli đối với ẩn z. Ta có $z = 0$ hay $y = C$ là một họ nghiệm nhưng không thỏa mãn điều kiện ban đầu. Với $z \neq 0$, phương trình có dạng

$$z^{-2}z' + 2z^{-1} = e^x.$$

Đặt $z^{-1} = u$, ta được

$$u' - 2u = -e^x,$$

là một phương trình tuyến tính cấp 1 đối với ẩn u. Ta dễ nhận được nghiệm tổng quát

$$u = e^x + C_1 e^{2x}.$$

Khi đó, ta có

$$y' = \frac{1}{u} = \frac{1}{e^x + C_1 e^{2x}}.$$

Kết hợp điều này với điều kiện $y'(0) = 1$, ta nhận được $C_1 = 0$. Như vậy

$$y = \int \frac{dx}{e^x} + C_2 = e^{-x} + C_2.$$

Từ $y(0) = 1$, kéo theo $C_2 = 2$. Vậy, nghiệm cần tìm là $y = -e^{-x} + 2$.

b) Phương trình khuyết x: $F(y, y', y'') = 0$.

Bằng cách đổi biến $z = y'$. Khi đó, ta có

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

và phương trình có dạng $F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0$ là phương trình vi phân cấp 1 đối với ẩn z.

Ví dụ 4.19. *Giải phương trình*

$$yy'' - y'^2 = y^4,$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Bài giải: Đặt $z = y'$. Ta có $y'' = z\frac{dz}{dy}$ và

$$yz\frac{dz}{dy} - z^2 = y^4.$$

-Nếu $y \neq 0$, thì phương trình có dạng

$$z\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z^2 = y^3,$$

là một phương trình dạng Bernoulli. Đặt $v = z^2$. Khi đó, ta có phương trịnh dang vi phân tuyến tính cấp 1:

$$v' - \frac{2}{y}v = 2y^3.$$

Giải ra

$$v = (y^2 + C_1)y^2.$$

Mà $z^2 = y'^2 = v$. Kết hợp điều này với $y'(0) = 1, y(0) = 1$, ta nhận được $C_1 = 0$ và $y'^4 = y^4$. Vì $y'(0) = 1 > 0$, nên $y' = y^2$. Hay

$$-\frac{1}{y} = x + C_2.$$

Kết hợp với $y(0) = 1$, ta có $C_2 = -1$. Như vậy, nghiệm của phương trình là

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

Ngoài ra, $y = 0$ là nghiệm của phương trình ban đầu, nhưng nó không thỏa mãn các điều kiện ban đầu.

4.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là một phương trình vi phân có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{4.15}$$

trong đó các hàm số $p(x), q(x)$ và $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b). Nếu $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, thì (4.15) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất*. Nếu $f(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$, thì (4.15) có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.16}$$

và được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất*.

4.3.3.1. Cấu trúc nghiệm

Định lý 4.20. *Nếu $y_1 = y_1(x)$ và $y_2 = y_2(x)$ là 2 nghiệm của phương trình thuần nhất* (4.16)*, thì $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ với 2 hằng số bất kỳ C_1 và C_2, cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất* (4.16).

Chứng minh: Ta chỉ cần thay $\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ vào phương trình (4.11) và dựa vào $y_1(x),\ y_2(x)$ là nghiệm của phương trình này, ta có điều phải chứng minh.

Định nghĩa 4.21. *Các hàm số $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên khoảng (a, b), nếu tỉ số $\frac{y_1}{y_1} \neq C$, trong đó C là hằng số trên khoảng (a, b). Trong trường hợp trái lại, hai hàm số ấy được gọi là phụ thuộc tuyến tính.*

Việc xét một hệ hàm phụ thuộc tuyến tính hay độc lập tuyến tính nhiều khi gặp khó khăn, trong trường hợp các hàm đã cho khả vi một số lần cần thiết, việc nghiên cứu đó có thể đơn giản hơn nhờ định thức Vronski dưới đây.

Định nghĩa 4.22. *Giả sử các hàm số $y_1(x),\ y_2(x)$ khả vi trên khoảng (a, b). Khi đó định thức*

$$\begin{aligned} W(y_1(x),\ y_2(x)) =& W(x) \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

được gọi là định thức Vronski của các hàm số trên.

Định lý 4.23. *Nếu hai hàm số $y_1(x),\ y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên (a, b) thì $W(y_1, y_2) = 0$ trên đoạn đó.*

Chứng minh: Thay $y_2(x) = ky_1(x)$ ta vào định thức Vronski ta có điều phải chứng minh.

Định lý 4.24. *Các nghiệm y_1, y_2 của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất* (4.16) *là độc lập tuyến tính trên đoạn (a, b) khi và chỉ khi định thức Vronski $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại mọi điểm trên khoảng đó.*

Chứng minh: Nếu $W(y_1, y_2) \neq 0$ trên (a, b), thì theo định lý 4.23, các hàm số y_1, y_2 là độc lập tuyến tính trên đoạn (a, b). Ngược lại, cho các nghiệm y_1, y_2 của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất (4.16) là độc lập tuyến tính trên đoạn (a, b). Bằng phản chứng, giả sử rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$. Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) = 0, \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Theo định lý 4.20, $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (4.16). Hơn nữa, theo (4) thì nghiệm đó thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = 0, y'(0) = 0.$$

Theo tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy, thì $y = 0$ là nghiệm trên (a, b). Như vậy, $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ trên (a, b), hay y_1 và y_2 phụ thuôc tuyến tính trên (a, b). Điều này trái với giả thiết. Định lý được chứng minh.

Định lý sau đây chỉ ra rằng nếu có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (4.16) thì ta đưa ra được nghiệm tổng quát của phương trình này.

Định lý 4.25. *Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình* (4.16) *thì nghiệm tổng quát của* (4.16) *là*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

trong đó $C_1,\ C_2$ là những hằng số tùy ý.

Chứng minh: Theo định lý 4.20, nếu y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình (4.16) thì $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ cũng là nghiệm của (4.16). Ngược lại, giả sử $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ là một nghiệm của (4.16) với điều kiện ban đầu

$$y_0 = y(x_0), y_0' = y'(x_0), x_0 \in (a, b).$$

Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Vì y_1 và y_2 độc lập tuyến tính trên (a, b), theo định lý 4.24, nên định thức Wronski của hệ phương trình

$$\begin{aligned} W(y_1(x_0),\ y_2(x_0)) =& W(x_0) \\ =& \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Như vậy, tồn tại duy nhất cặp số (C_1, C_2) của hệ phương trình (4) sao cho $C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của phương trình (4.16). Định lý được chứng minh.

Định lý 4.26. *Nếu đã biết một nghiệm riêng $y_1(x) \neq 0$ của phương trình tuyến tính thuần nhất* (4.16)*, ta có thể tìm được một nghiệm riêng $y_2(x)$ của phương trình đó, độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ có dạng $y_2(x) = y_1(x)u(x)$, trong đó*

$$u(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

Chứng minh: Giả sử $y_1 = y_1(x) \neq 0$ trên (a, b) là một riêng của phương trinh thuần nhất (4.16) và $y_2 = y_1(x).u(x)$. Khi đó, ta có

$$y_2' = y_1'u + y_1u',\ y_2'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''.$$

Thay thê y_2' và y_2'' vào (4.16), ta nhận được

$$y_1u'' + [2y_1' + p(x)y_1]u' + [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)] = 0.$$

Vì y_1 là nghiệm của phương trình (4.16), nên $y_1'' + p(x)y_1' + q(x) = 0$ và do đó

$$y_1u'' + [2y_1' + p(x)y_1]u' = 0.$$

Đặt $z = u'$, ta có

$$y_1z' + [2y_1' + p(x)y_1]z = 0,$$

là một phương trình tách biến. Giải phương trình này được nghiệm

$$z = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}.$$

Mà $z = u'$, nên ta có

$$u(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

là điều phải chứng minh.

Định lý dưới đây sẽ đưa việc giải phương trình (4.15) về việc giải phương trình (4.16) và tìm một nghiệm riêng của nó.

Định lý 4.27. *Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất* (4.15) *bằng nghiệm tổng quát* $\bar{y}$ *của phương trình thuần nhất* (4.16) *cộng với một nghiệm riêng nào đó* y_0 *của phương trình* (4.15).

Chứng minh: Theo giả thiết, ta có

$$\bar{y}'' + p(x)\bar{y}' + q(x)y = 0$$
$$y_0'' + p(x)y_0 + q(x)y = f(x).$$

Cộng hai đẳng thức trên, ta nhận được

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

ở đây $y = \bar{y} + y_0$. Vậy y là nghiệm của phương trình (4.15). Vì $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của (4.16), nên y phụ thuộc vào C_1, C_2. Bằng cách làm tương tự như trong chứng minh của định lý 4.25, ta có $y = \bar{y} + y_0$ là nghiệm tổng quát của phương trình (4.15).

Định lý 4.28. *Cho phương trình*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_1(x) + h_2(x). \tag{4.17}$$

Nếu $y_1(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_1(x),$$

và $y_2(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_2(x).$$

thì $y_0 = y_1(x) + y_2(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình vi phân* (4.17).

Chứng minh: Dễ dàng thấy được bằng cách thay trực tiếp y_0 vào phương trình (4.17).

4.3.3.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số là phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{4.18}$$

trong đó p, q là hai hằng số.

a) Phương trình thuần nhất

Xét phương trình dạng thuần nhất của (4.18):

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{4.19}$$

trong đó p, q là hai hằng số. Ta chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình thì ta sẽ tìm được nghiệm tổng quát. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng

$$y = e^{kx},$$

với k là một hằng số. Thay $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ vào phương trình (4.19), ta có

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} > 0$, nên

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{4.20}$$

Phương trình (4.20) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân (4.19). Ta sẽ xét trường hợp nghiệm phức và thực của phương trình (4.20) ứng với $\Delta = p^2 - 4q$.

- Nếu $\Delta > 0$, phương trình (4.20) có *hai nghiệm* k_1, k_2 *thực và khác nhau.* Khi đó phương trình (4.19) có hai nghiệm riêng độc lập với nhau

  $$y_1(x) = e^{k_1x}, \quad y_2(x) = e^{k_2x}.$$

  Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (4.19) là

  $$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x},$$

  với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình (4.20) có *nghiệm kép* $k_1 = k_2$. Ta có một nghiệm riêng $y_1 = k_1x$, và ta xẽ tìm một nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng $y_2 = y_1.u(x) = u(x)e^{k_1x}$. Ta có

  $$\begin{aligned} y_2' &= u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x}, \\ y_2'' &= u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x}, \end{aligned}$$

thay vào phương trình (4.19), ta được

$$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

Vì k_1 là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta có $k_1^2 + pk_1 + q = 0,\ k_1 = -\frac{p}{2}$. Do đó, ta được $e^{k_1x}u'' = 0$ nên $u = ax + b$, với a, b là các hằng số. Chọn $u = x$ hay $y_2 = xe^{k_1x}$. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (4.19) là

$$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x),$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

- Nếu $\Delta < 0$, phương trình (4.20) có *hai nghiệm phức:* $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$. Theo công thức Ơle, hai nghiệm riêng của phương trình là

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 =& e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\\ \bar{y}_2 =& e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).\end{aligned}$$

Vì tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm này cũng là các nghiệm riêng của phương trình (4.19), nên ta lấy

$$\begin{aligned}y_1 =& \frac{1}{2}[\bar{y}_1 + \bar{y}_2] = e^{\alpha x}\cos\beta x,\\ y_2 =& \frac{1}{2i}[\bar{y}_1 - \bar{y}_2] = e^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned}$$

Vì hai nghiệm y_1, y_2 độc lập tuyến tính, nên nghiệm tổng quát của phương trình (4.19) là $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + \sin\beta x)$.

b) Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Ta đã biết rằng nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số (4.18) có dạng

$$y = \bar{y} + y_0,$$

trong đó $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình (4.19) và một nghiệm riêng y_0 của phương trình (4.19). Ngoài phương pháp biến thiên hằng số Lagrange để tìm nghiệm riêng y_0, ta có phương pháp khác để tìm nghiệm riêng y_0 tiện lợi cho trường hợp hệ số hằng số như trong (4.19), đó là phương pháp *hệ số bất định*. Ta xét một số trường hợp sau:
Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó α là một hằng số thực, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

Khi đó, nghiệm riêng y_0 xác định bởi

$$y_0 = \begin{cases} e^{\alpha x}Q_n(x) \text{ nếu } \alpha \text{ không là nghiệm của phương trình đặc trưng,} \\ xe^{\alpha x}Q_n(x) \text{ nếu } \alpha \text{ là 1 nghiệm đơn của phương trình đặc trưng,} \\ x^2e^{\alpha x}Q_n(x) \text{ nếu } \alpha \text{ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng,} \end{cases} \tag{4.21}$$

trong đó, $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n.

Ví dụ 4.29. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' - y' - 2y = 2x^2.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - k - 2 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = -1, k_2 = 2$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' - y' - 2y = 0$ là

$$\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}.$$

+ Tìm nghiệm riêng y_0: Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_n(x) = 2x^2$, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_0 = ax^2 + bx + c.$$

Thay y_0 vào phương trình ban đầu, ta nhận được

$$-2ax^2 + (-2a - 2b)x + (2a - 2b - 2c) = 2x^2, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo lũy thừa của x, ta nhận được

$$\begin{cases} -2a = 2, \\ -2a - 2b = 0, \\ 2a - 2b - 2c = 0, \end{cases} \implies a = -1, b = 1, c = -\frac{3}{2}.$$

Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_0 = -x^2 + x - \frac{3}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \bar{y} + y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - x^2 + x - \frac{3}{2},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 4.30. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' + y' = 3x^2 + 4.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + k = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = 0, k_2 = -1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y''+y' = 0$ là

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

+ Tìm nghiệm riêng y_0: Vì $\alpha = 0 = k_1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_n(x) = 3x^2 + 4$, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_0 = x(ax^2 + bx + c).$$

Thay y_0 vào phương trình ban đầu, ta nhận được

$$3ax^2 + (6a + 2b)x + (2a + c) = 3x^2 + 4, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo lũy thừa của x, ta nhận được

$$\begin{cases} 3a = 3, \\ 6a + 2b = 0, \\ 2a + c = 4, \end{cases} \Longrightarrow a = 1, b = -3, c = 2.$$

Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_0 = x^2 - 3x + 2$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \bar{y} + y_0 = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x + 2,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 4.31. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' + y' + y = xe^x + 2e^{-x}.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + k + 1 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, k_2 == \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + y' + y = 0$ là

$$\bar{y} = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

+ Tìm nghiệm riêng y_{01} của phương trình $y'' + y' + y = xe^x$: Vì $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_n(x) = x$, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_{01} = e^x(ax + b).$$

Thay y_{01} vào phương trình $y'' + y' + y = xe^x$, ta nhận được

$$2axe^x + (2a + 2b)e^x = xe^x, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo lũy thừa của x, ta nhận được

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ 2a + 2b = 0, \end{cases} \implies a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}.$$

Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_{01} = e^x(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$.
+ Tìm nghiệm riêng y_{02} của phương trình $y'' + y' + y = 2e^{-x}$: Vì $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_n(x) = x$, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_{02} = ce^{-x}.$$

Thay y_{02} vào phương trình $y'' + y' + y = 2e^{-x}$, ta nhận được $c = 1$. Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_{02} = e^{-x}$. Do vậy, nghiệm riêng của phương trình ban đầu là

$$y_0 = y_{01} + y_{02}.$$

Nghiệm tổng quát dạng

$$y = \bar{y} + y_0 = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + e^x(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) + e^{-x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$, trong đó α, β là các hằng số thực, $P_n(x), Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, m tương ứng.

Đặt $k = \max\{m, n\}$, $R_k(x)$ và $\bar{R}_k(x)$ là các đa thức bậc k. Khi đó, nghiệm riêng y_0 của phương trình (4.18) được xác định bởi

$$y_0 = \begin{cases} e^{\alpha x}[R_k(x) \cos \beta x + \bar{R}_k(x) \sin \beta x] \text{ nếu } \alpha + i\beta \text{ không là nghiệm của (4.19)}, \\ xe^{\alpha x}[R_k(x) \cos \beta x + \bar{R}_k(x) \sin \beta x] \text{ nếu } \alpha + i\beta \text{ là nghiệm của (4.19)}. \end{cases} \tag{4.22}$$

Ví dụ 4.32. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' + 2y' - 3y = \cos x.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + 2k - 3 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = 1, k_2 = -3$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + 2y' - 3y = 0$ là

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

+ Tìm nghiệm riêng y_0: Vì $\alpha = 0, \beta = 1$ và $\alpha + i\beta = i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên theo công thức (4.22), ta có

$$y_0 = a\cos x + b\sin x.$$

Thay y_0 vào phương trình ban đầu, ta nhận được

$$(-4a + 2b)\cos x + (-2a - 4b)\sin x = \cos x, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo các hệ số của $\cos x$ và $\sin x$, ta nhận được

$$\begin{cases} -4a + 2b = 1, \\ -2a - 4b = 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow a = -\frac{1}{5}, b = \frac{1}{10}.$$

Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_0 = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \bar{y} + y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 4.33. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' + 4y = e^x - \cos 2x.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + 4 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = 2i, k_2 = -2i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + 4y = 0$ là

$$\bar{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

+ Tìm nghiệm riêng y_{01} của phương trình $y'' + 4y = e^x$: Vì $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_{01} = ae^x.$$

Thay y_0 vào phương trình $y'' + 4y = e^x$, ta nhận được $a = \frac{1}{5}$. Vậy, phương trình $y'' + 4y = e^x$ có 1 nghiệm riêng $y_{01} = \frac{1}{5}e^x$.

+ Tìm nghiệm riêng y_{02} của phương trình $y'' + 4y = -\cos 2x$: Vì $\alpha = 0, \beta = 2$ và $\alpha + i\beta = 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên theo công thức (4.22), ta có

$$y_{02} = x(a\cos 2x + b\sin 2x).$$

Thay y_{02} vào phương trình $y'' + 4y = -\cos 2x$, ta nhận được

$$4b\cos 2x - 4a\sin 2x = -\cos 2x, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo các hệ số của $\cos 2x$ và $\sin 2x$, ta nhận được $a = 0, b = -\frac{1}{4}$. Do đó, phương trình $y'' + 4y = -\cos 2x$ có 1 nghiệm riêng $y_{02} = -\frac{1}{4}x\sin 2x$. Theo nguyên lý chồng nghiệm, nghiệm riêng của phương trình ban đầu dạng $y_0 = y_{01} + y_{02}$. Vậy, nghiệm tổng quát là

$$y = \bar{y} + y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\sin 2x,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 4.34. *Bằng cách đặt $y = \frac{u}{x^2}$, hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân*

$$x^2y'' + x(4-x)y' + 2(1-x)y = xe^x.$$

Giải: Lấy đạo hàm của hàm u, ta có

$$u' = y'x^2 + 2xy,$$
$$u'' = y''x^2 + 2xy' + 2xy' + 2y = y''x^2 + 4xy' + 2y.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$u'' - u' = xe^x.$$

+ Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - k = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = 0, k_2 = 1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u'' - u' = 0$ là

$$\bar{u} = C_1 + C_2e^x.$$

+ Tìm nghiệm riêng u_0: Vì $\alpha = 1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên theo công thức (4.21), ta có

$$u_0 = x(ax+b)e^x.$$

Thay u_0 vào phương trình $u'' - u' = xe^x$, ta nhận được $a = \frac{1}{2}, b = -1$. Do đó, phương trình ban đầu có nghiệm tổng quát là

$$y = \frac{u}{x^2} = \frac{C_1}{x^2} + C_2\frac{e^x}{x^2} + e^x(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}),$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

4.4. Hệ phương trình vi phân

4.4.1. Hệ phương trình vi phân cấp 1

Hệ n phương trình vi phân cấp 1 có dạng:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{4.23}$$

được gọi là hệ chuẩn tắc, trong đó x là biến độc lập và $y_1, y_2, ..., y_n$ là các hàm cần tìm. *Bài toán Cauchy đối với hệ phương trình* (4.23): Tìm các nghiệm $(y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x))$ thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$y_i(x_0) = y_{0i}, \quad \forall i = 1, 2, ..., n,$$

trong đó $x_0, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n}$ là những số cho trước. Tập hợp n hàm số

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số tùy ý và $(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in D$, được gọi là *nghiệm tổng quát* của hệ phương trình vi phân (4.23), nếu các hàm số trên thỏa mãn các điều kiện sau:
Điều kiện 1: y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ là nghiệm của (4.23) với mọi $C_1, C_2, ..., C_n$.
Điều kiện 2: Với mọi điểm $(x_0, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n}) \in D$, hệ phương trình

$$y_{0i} = y_i(x_0, C_1, C_2, ..., C_n), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

giải ra được đối với các hằng số $C_1, C_2, ..., C_n$.

Định lý 4.35. *Giả sử các hàm số* $f_i(x, y, y_1, y_2, ..., y_n)$ *và các đạo hàm riêng* $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(x, y_1, y_2, ..., y_n)(i = 1, 2, ..., n)$ *liên tục trên miền* $D \subseteq \mathcal{R}^{n+1}, (x_0, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n}) \in D$. *Khi đó, tồn tại một lân cận của điểm* x_0 *sao cho bài toán Cauchy có duy nhất một nghiệm.*

4.4.2. Phương pháp giải hệ phương trình vi phân cấp 1

Từ hệ phương trình vi phân cấp 1 (4.23), ta biến đổi về một phương trình vi phân đổi với một ẩn x bằng cách khử các hàm ẩn chưa biết còn lại của hệ (4.23) được một phương trình vi phân cấp cao. Giải phương trình vi phân cấp cao đó, sau đó tìm các hàm còn lại. Phương pháp đó gọi là *phương pháp khử*.

Ví dụ 4.36. *Giải hệ phương trình vi phân*

$$\begin{cases} y_1' = \cos x - y_2, \\ y_2' = 4\cos x - \sin x + 3y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

Giải: Lấy đạo hàm 2 vế của phương trình thứ nhất theo x, ta có

$$y_1'' = -\sin x - y_2'.$$

Kết hợp với phương trình thứ 2, ta nhận được

$$\begin{aligned} y_1'' &= -\sin x - 4\cos x + \sin x - 3y_1 + 4y_2 \\ &= -4\cos x - 3y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

Thay $y_2 = \cos x - y_1'$, ta có

$$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0.$$

Khi đó, nghiệm thu được có dạng

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Từ hệ thức $y_2 = \cos x - y_1'$, suy ra

$$y_2 = \cos x - C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x}.$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} \\ y_2 = \cos x - C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x}. \end{cases}$$

4.4.3. Phương pháp giải hệ phương trình vi phân cấp 1 với hệ số hằng số

Hệ phương trình vi phân cấp 1 với hệ số hằng số có nhiều phương pháp giải. Sau đây, ta sẽ trình bày một phương pháp, gọi là *phương pháp Euler*. Không mất tính tổng quát, ta xét hệ phương trình có 3 ẩn hàm x, y, z và biến độc lập t

$$\begin{cases} x'_t = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y'_t = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z'_t = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \tag{4.24}$$

Giả sử nghiệm của hệ phương trình (4.24) có dạng:

$$x = \alpha e^{\lambda t}, x = \beta e^{\lambda t}, x = \gamma e^{\lambda t},$$

trong đó các tham số $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ là các hằng số cần xác định sao cho (x, y, z) là nghiệm của (4.24). Thay (x, y, z) vào hệ phương trình (4.24), ta có

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{11}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{11}\alpha + a_{22}\beta + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

Hệ phương trình (4.25) là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Đẳng thức này là một phương trình bậc 3 đối với ẩn λ và được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ phương trình (4.25). Nghiệm của nó được gọi là *giá trị riêng* của hệ. Ta hạn chế xét phương trình đặc trưng có 3 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Thay lần lượt các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vào hệ phương trình (4.25), ta nhân được các cặp số tương ứng

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3).$$

Khi đó, nghiệm của hệ phương trình (4.24) có dạng

$$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_3 e^{\lambda_3 t} \\ y(t) = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\beta_3 e^{\lambda_3 t} \\ y(t) = C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{cases}$$

Ví dụ 4.37. *Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân*

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Giải: Giải phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

+ Với $\lambda_1 = 1$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (-1-\lambda)\alpha - 2\beta = 0, \\ 3\alpha + (4-1)\beta = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0.$$

Lấy $\alpha = 1, \beta = -1$. Khi đó, ta có các nghiệm riêng

$$x_1 = e^t, y_1 = -e^t.$$

+ Với $\lambda_2 = 2$, tương tự ta có các nghiệm riêng

$$x_2 = 2e^{2t}, y_2 = -3e^{2t}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} \\ y = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t}, \end{cases}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Bài tập chương 4

1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly:

   a)$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

   b)$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$.

   c)$y' \cos 2y - \sin y = 0$.

   d)$y' = \cos(x-y)$.

2. Giải các phương trình vi phân cấp một.

   a)$(y-x)dx + (y+x)dy = 0$.

   b)$(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0$.

   c)$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một:

a)$2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0$.

b)$y' + 2xy = xe^{-x}$.

c)$2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$.

d) $y' + xy = x^3$.

e) $y'\cos^2 x + y = tgx$ thỏa mãi $y(0) = 0$.

4. Tìm nghiệm riêng của phương trình: $ye^y = y'(y^3 + 2xe^y)$ thỏa mãn điều kiện đầu $y(0) = -1$.

5. Tìm nghiệm của phương trình $y' - y = \cos x - \sin x$. thỏa mãn điều kiện bị chặn khi $x \to \infty$.

6. Tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $y' - \frac{y}{x} = x^3$.

b) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$.

7. Tìm nghiệm các phương trình Bernoulli sau:

a)$y' + \frac{y}{x} = x(\frac{e^x}{e^x+1})y^2$.

b) $(x+1)y'' + x(y')^2 = y'$.

c) $x^2y' = y(x+y)$.

d)$ydx + 2xdy = \frac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}dy$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = \pi$.

8. Giải các phương trình sau:

a) $(y^2+1)^{3/2}dx + (y^2 + 3xy\sqrt{1+y^2})dy = 0$.

b) $e^x(2 + 2x - y^2)dx - ye^x dy = 0$.

c) $(y\cos^2 x - \sin x)dy = y\cos x(y\sin x + 1)dx$

d) $(2x + 3x^2y)dx = (3y^2 - x^3dy$.

9. Giải các phương trình:

a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

b) $y'' + 9y = 6e^{3x}$.

c) $y'' - (m-1)y' + my = e^x - x - 1$.

d) $2xy'y'' = y'^2 - 1$. $\quad y = \frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$

e) $\sqrt{y}y'' = y'$. Nghiệm tổng quát:$x = \sqrt{y} - \frac{C_1}{2}ln|2\sqrt{y} + C_1| + C_2$ và ngoài ra $y = c$ cũng là nghiệm.

f) $y'' = y'e^y$.

g) $yy'' + y^2 = 1$

h) $y'^2 + yy'' = yy'$.

10. Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:

$$(x - y + 4)dy + (y + x - 2)dx = 0.$$

11. Giải phương trình $x^2y'' + xy' - 4y = x^2 lnx$ bằng cách đổi biến số $x = e^t$.

12. Bằng cách đặt $y = ux$ hãy giải phương trình: $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}dx = 0$.

13. Tìm nghiệm riêng của phương trình: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ thỏa mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$.

14. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y' - xy = x + x^3$.

15. Chứng minh rằng hệ các vector $\{\cos^2 2x, \sin^2 2x, 2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Tính định thức Wronski của chúng.

16. Giải phương trình:

a) $y'' + y' = x + e^{-x}$.

b) $2y'' + 5y' = 29x\sin x$. Ðs: $y = (-2x + \frac{185}{29})\sin x + (-5 - \frac{16}{29})\cos x$

c) $y'' - 2y' + 5y = x\sin 3x$. Ðs: $y = (\frac{3}{26}x + \frac{57}{26})\cos 3x + (\frac{-1}{13}x + \frac{41}{43})\sin 3x$.

17. Giải hệ phương trình vi phân:

$$a)\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = 6x + 4y, \end{cases} \quad b)\begin{cases} x' = y - 7x \\ y' = -2x - 5y, \end{cases} \quad c)\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y, \end{cases} \quad d)\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = 2y + 3z - x. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải bài tập chương 4

1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly:

a) $ln|xy| + x - y = C$.

b) $\frac{x+y}{xy} + ln|\frac{y}{x}| = C$.

c) $x = ln|\tan\frac{y}{2}| + 2\cos y + C$.

d) $x + \cot\frac{x-y}{2} = C$.

2. Giải các phương trình vi phân cấp một.

   a) $y^2 + 2xy - x^2 = C^2$.

   b) $x(x^2 + y^2) - C^2 y = 0$.

   c) $e^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}} = C(y+2)$.

3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một:

   a) $y = \frac{C}{\sqrt{x^2-x}} - \frac{ln(x-\frac{1}{2})+\sqrt{x^2-x}}{2\sqrt{x^2-x}}$ nếu $x < 0$ hoặc $x > 1$; $y = \frac{C}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{\arcsin(2x-1)}{2\sqrt{x-x^2}}$ nếu $0 < x < 1$.

   b) $y = e^{-x^2}(C + \frac{x^2}{2})$.

   c) $y^2 - 2x = Cy^3$.

   d) $y' + xy = x^3$.

   HD: Nghiệm của phương trình thuần nhất $y = Ce^x$ dùng phương pháp biến thiên hằng số.

   e) $y'\cos^2 x + y = tgx$ thỏa mãi $y(0) = 0$.

   HD: Phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm $y = Ce^{-tgx}$.

4. Tìm nghiệm riêng của phương trình: $ye^y = y'(y^3 + 2xe^y)$ thỏa mãn điều kiện đầu $y(0) = -1$.

   HD: Xem x là ẩn hàm, thay $y' = \frac{1}{x'}$.

5. Tìm nghiệm của phương trình $y' - y = \cos x - \sin x$. thỏa mãn điều kiện bị chặn khi $x \to \infty$.

6. Tìm nghiệm của các phương trình sau:

   a) $y' - \frac{y}{x} = x^3$.

   b) $y = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x} - \cos x$.

7. Tìm nghiệm các phương trình Bernoulli sau:

   a) $y = \frac{1}{Cx - xln(e^x+1)}$.

   b) $(x+1)y'' + x(y')^2 = y'$.

   HD: Đặt $y' = p, z = p^{-1}$ ta được phương trình tuyến tính cấp một:

$$z' + \frac{1}{1+x}z = \frac{x}{x+1}.$$

   Nghiệm tổng quát: $\begin{cases} ln|x^2 + C_1| + \frac{2}{\sqrt{C_1}}\arctan\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2 & \text{nếu } C_1 > 0 \\ ln|x^2 + C_1| + \frac{2}{\sqrt{-C_1}}\arctan\frac{x-\sqrt{-C_1}}{\sqrt{-C_1}+x} + C_2 & \text{nếu } C_1 < 0 \end{cases}$, chú ý $y = C$ là nghiệm kì dị.

c) $x^2y' = y(x+y)$.

HD: đặt $z = y^{-1}$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $z = Cx$, dùng phương pháp biến thiên hàm số.

d)$ydx + 2xdy = \frac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}dy$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = \pi$.

HD: Đưa phương trình về dạng $x' + \frac{2}{y}x = \frac{2}{\cos^2 y}x^{1/2}$. Đặt $z = z^{1/2}$ ta có nghiệm tổng quát của PT: $\tan y + \frac{1}{y}ln|\cos y| + \frac{C}{y} = \sqrt{x}$.

8. Giải các phương trình sau:

a) $(y^2+1)^{3/2}dx + (y^2 + 3xy\sqrt{1+y^2})dy = 0$.

HD: Phương trình là phương trình vi phân toàn phần.

b) $e^x(2+2x-y^2)dx - ye^x dy = 0$.

c) $(y\cos^2 x - \sin x)dy = y\cos x(y\sin x + 1)dx$

d) $(2x + 3x^2y)dx = (3y^2 - x^3dy$.

9. Giải các phương trình:

a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

b) $y'' + 9y = 6e^{3x}$.

c) $y'' - (m-1)y' + my = e^x - x - 1$.

d) $2xy'y'' = y'^2 - 1$. $\quad y = \frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$

e) $\sqrt{y}y'' = y'$. Nghiệm tổng quát:$x = \sqrt{y} - \frac{C_1}{2}ln|2\sqrt{y} + C_1| + C_2$ và ngoài ra $y = c$ cũng là nghiệm.

f) $\int \frac{dx}{e^y + C_1} = \begin{cases} -e^{-y} & \text{nếu } C_1 = 0 \\ \frac{1}{C_1}(y - ln|e^y + C_1|) & \text{nếu } C_1 \neq 0. \end{cases}$ và $y = C$ cũng là một nghiệm.

g) $y^2 + C_1 = (x + C_2)^2$.

h) $y^2 = 2C_1e^x + C_2$.

10. Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:

$$(x - y + 4)dy + (y + x - 2)dx = 0.$$

HD: đặt $x = u+1, y = v-3$ ta được $\frac{dv}{dx} = \frac{u+v}{v-u}$, từ đó ta có $y^2 + x^2 - 2xy - 8y + 4x = C_1$.

11. Giải phương trình $x^2y'' + xy' - 4y = x^2lnx$ bằng cách đổi biến số $x = e^t$.

12. $y = \pm x; arcsin\frac{y}{x} = lnx + C$.

13. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \Leftrightarrow y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$ đặt $u = \frac{y}{x}$. Đáp số: $y = \pm x$.

14. $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}\frac{x^2}{2} + 1$.

15. Chứng minh rằng hệ các vector $\{\cos^2 2x, \sin^2 2x, 2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Tính định thức Wronski của chúng.

16. Giải phương trình:

    a) Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda = 0$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

    Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{y} = y_1 + y_2$ trong đó y_1, y_2 là nghiệm tương ứng của các phương trình: $y'' + y' = x$ và $y'' + y = e^{-x}$.

    Đáp số: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x - xe^{-x}$.

    b) $y = (-2x + \frac{185}{29})\sin x + (-5 - \frac{16}{29})\cos x$

    c) $y = (\frac{3}{26}x + \frac{57}{26})\cos 3x + (\frac{-1}{13}x + \frac{41}{43})\sin 3x$.

17. Nghiệm có dạng:

$$a)\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{10t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2 \sin t) \\ y = e^{-6t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t], \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}, \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + e^{3t}(C_2\cos t + C_3 \sin t) \\ y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t] \\ z = C_1 e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t]. \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

1. Brown, Pearcy A. and Carl, "An introduction to analysis", Graduate Texts in Mathematics, Springer-verlag, 1995.

2. Trim D., " Calculus for engineers", Springer, 2001.

3. Stewart J., "Essential Calculus", Thomson Brooks/Cole, 2006a.

4. Stewart J., "Calculus: Concepts and Contexts", Thomson Brooks/Cole, 2006.

5. Rudin W., "Principles of Mathematical Analysis", 3rd ed, McGraw-Hill, 1976.

6. Wrede R., and Spiegel M., "Theory and Problems of Advanced Calculus", McGraw-Hill, 2002.

7. N.Đ. Trí (chủ biên), "Toán học cao cấp", tập 3, NXB GD, 2003.

8. N.Đ. Bình (chủ biên), "Chuỗi và phương trình vi phân", NXB HK-KT, 2008.