HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

PGS.TS. LÊ BÁ LONG

Bài giảng

TOÁN KỸ THUẬT

dùng cho sinh viên ngành điện tử - viễn thông

HÀ NỘI 2013

LỜI NÓI ĐẦU

Tập bài giảng Toán kỹ thuật được biên soạn lại trên cơ sở giáo trình toán chuyên ngành dành cho sinh viên ngành điện tử viễn thông của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông đã được tác giả và TS. Vũ Gia Tê biên soạn từ năm 2005. Giáo trình này đã được Học viện ban hành và sử dụng làm tài liệu chính để giảng dạy và học tập từ năm 2005 đến năm 2012. Năm 2012 Học viện ban hành đề cương chi tiết môn học theo hướng tín chỉ. Với hình thức đào tạo này đòi hỏi sinh viên phải tự học tập nghiên cứu nhiều hơn. Tập bài giảng này được biên soạn lại cũng nhằm đáp ứng yêu cầu đó

Nội dung chương 4 “phương trình đạo hàm riêng” của giáo trình cũ được thay bằng khái niệm quá trình ngẫu nhiên, chuỗi Markov và quá trình dừng. Đây là những nội dung toán học rất cần thiết trong việc ứng dụng để xử lí các tín hiệu ngẫu nhiên và trong các bài toán về chuyển mạch.

Tập bài giảng bao gồm 4 chương. Mỗi chương chứa đựng các nội dung thiết yếu và được coi là các công cụ toán học đắc lực, hiệu quả cho sinh viên, cho kỹ sư đi sâu vào lĩnh vực điện tử viễn thông. Nội dung tập bài giảng đáp ứng đầy đủ những yêu cầu của đề cương chi tiết môn học đã được Học viện duyệt.

Chúng tôi chọn cách trình bày phù hợp với người tự học theo hình thức tín chỉ. Trong từng chương chúng tôi cố gắng trình bày một cách tổng quan để đi đến các khái niệm và các kết quả. Cố gắng chứng minh các định lý mà chỉ cần đòi hỏi những công cụ vừa phải không quá sâu xa hoặc chứng minh các định lý mà trong quá trình chứng minh giúp người đọc hiểu sâu hơn bản chất của định lý và giúp người đọc dễ dàng hơn khi vận dụng định lý. Các định lý khó chứng minh sẽ được chỉ dẫn đến các tài liệu tham khảo khác. Sau mỗi kết quả đều có ví dụ minh họa, chúng tôi đã đưa thêm nhiều ví dụ hơn so với giáo trình trước đây. Hy vọng rằng qua nhiều ví dụ sinh viên sẽ dễ dàng tiếp thu kiến thức hơn. Cuối từng phần thường có những nhận xét bình luận về việc mở rộng kết quả hoặc khả năng ứng dụng chúng. Tuy nhiên chúng tôi không đi quá sâu vào các ví dụ minh hoạ mang tính chuyên sâu về viễn thông vì sự hạn chế của chúng tôi về lĩnh vực này và cũng vì vượt ra khỏi mục đích của cuốn tài liệu. Hệ thống bài tập cuối mỗi chương khá đa dạng và đầy đủ từ dễ đến khó giúp sinh viên luyện tập và tự kiểm tra sự tiếp thu kiến thức của mình.

Thứ tự của từng Ví dụ, Định lý, Định nghĩa, được đánh số theo từng loại và chương. Chẳng hạn Ví dụ 3.2, Định nghĩa 3.1 là ví dụ thứ hai và định nghĩa đầu tiên của chương 3… Nếu cần tham khảo đến ví dụ, định lý, định nghĩa nào đó thì chúng tôi chỉ rõ số thứ tự của ví dụ, định lý, định nghĩa tương ứng. Các công thức được đánh số thứ tự theo từng chương.

Một số nội dung trong tập bài giảng sinh viên đã được học trong các học phần giải tích 1, giải tích 2, nhưng đảm bảo tính chất hệ thống tác giả cũng trình bày lại. Vì vậy với thời lượng ứng với 3 tín chỉ của môn học giảng viên khó có đủ thời gian để trình bày hết các nội dung của tập bài giảng ở trên lớp. Tác giả đánh dấu (*) cho các nội dung này và dành cho sinh viên tự học.

Vì nhận thức của tác giả về chuyên ngành Điện tử Viễn thông còn hạn chế nên không tránh khỏi nhiều thiếu sót trong việc biên soạn tài liệu này, cũng như chưa đưa ra hết các công cụ toán học cần thiết cần trang bị cho các cán bộ nghiên cứu về chuyên ngành điện tử viễn thông. Tác giả rất mong sự đóng góp của các nhà chuyên môn để tập tài liệu được hoàn thiện hơn.

Tuy tác giả đã rất cố gắng, song do thời gian bị hạn hẹp, nên các thiếu sót còn tồn tại trong tập bài giảng là điều khó tránh khỏi. Tác giả rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn bè, đồng nghiệp, các học viên xa gần. Xin chân thành cám ơn.

Tác giả xin bày tỏ lời cám ơn tới PGS.TS Phạm Ngọc Anh, TS. Vũ Gia Tê, Ths. Lê Bá Cầu, Ths. Lê Văn Ngọc đã đọc bản thảo và cho những ý kiến phản biện quý giá.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ sự cám ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích, động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để hoàn thành tập tài liệu này.

Hà Nội 8/2013

Tác giả

MỤC LỤC

CHƯƠNG I

HÀM BIẾN SỐ PHỨC

Số phức khởi đầu được sử dụng để tính toán một cách đơn giản, tuy nhiên lý thuyết hàm biến phức ngày càng chứng tỏ là một công cụ rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực của khoa học và kỹ thuật. Hầu hết các lời giải độc đáo của các bài toán quan trọng trong lý thuyết truyền nhiệt, truyền dẫn, tĩnh điện, và thủy động lực đều được sử dụng phương pháp các hàm biến phức. Đối với vật lý hiện đại, hàm biến phức trở thành một bộ phận thiết yếu của vật lý lý thuyết. Chẳng hạn các hàm sóng trong cơ học lượng tử là các hàm biến phức.

Dĩ nhiên khi thực hiện một thí nghiệm hoặc phép đo nào đó thì kết quả mà chúng ta nhận được là các giá trị thực, nhưng để phát biểu lý thuyết về kết quả này thường phải sử dụng đến số phức. Có một điều kỳ lạ rằng nếu lý thuyết chính xác thì các phân tích toán học với hàm biến phức luôn dẫn đến lời giải là thực. Vì vậy hàm biến phức thực sự là một công cụ không thể thiếu của khoa học kỹ thuật hiện đại.

Trong chương này chúng ta tìm hiểu những vấn đề cơ bản của giải tích phức: Lân cận, miền, giới hạn, liên tục, đạo hàm của hàm biến phức, tích phân phức, chuỗi số phức, chuỗi lũy thừa, chuỗi Laurent … Để nghiên cứu các vấn đề này chúng ta thường liên hệ với những kết quả ta đã đạt được đối với hàm biến thực. Mỗi hàm biến phức $f(z)$ tương ứng với hai hàm hai biến thực $u(x,y)$, $v(x,y)$. Hàm biến phức $f(z)$ liên tục khi và chỉ khi $u(x,y)$, $v(x,y)$ liên tục. Hàm $f(z)$ khả vi khi và chỉ khi $u(x,y)$, $v(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 1 thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Tích phân phức tương ứng với hai tích phân đường loại 2 của các hàm $u(x,y)$, $v(x,y)$ … như vậy ta có thể chuyển các tính chất giải tích của hàm biến phức về tính chất tương ứng của hàm thực hai biến và các tính chất này đã được học trong giải tích 2.

Ngoài ra xuất phát từ những tính chất đặc thù của hàm biến phức chúng ta còn có các công thức tích phân Cauchy, khai triển hàm biến phức thành chuỗi Taylor, chuỗi Laurent, tính thặng dự của hàm số tại điểm bất thường cô lập và ứng dụng lý thuyết thặng dư để giải quyết những bài toán cụ thể. Cuối cùng ta xét phép biến đổi Z là một ứng dụng cụ thể của khai triển Laurent.

1.1 TẬP SỐ PHỨC

1.1.1 Các dạng của số phức và các phép toán của số phức

Rất nhiều bài toán trong khoa học kỹ thuật và trong thức tế được qui về giải phương trình đại số cấp hai:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0).$$

Phương trình này có nghiệm thực khi $\Delta = b^2 - ac \geq 0$, tuy nhiên trường hợp phương trình không có nghiệm thực, ứng với $\Delta = b^2 - ac < 0$, cũng thường gặp và có nhiều ứng dụng. Vì vậy người ta mở rộng trường số thực đã có lên trường số mới sao cho trong trường số này phương trình cấp hai trên luôn có nghiệm.

Phương trình cấp hai với $\Delta < 0$ đơn giản nhất có dạng $x^2 + 1 = 0$. Nếu ta đưa vào số mới i (đơn vị ảo) sao cho $i^2 = -1$ thì phương trình trên có thể phân tích thành

$$x^2 + 1 = x^2 - i^2 = \left(x - i\right)\left(x + i\right) = 0.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = \pm i$.

Mở rộng trường số thực $\mathbb{R}$ để phương trình trên có nghiệm ta được trường số phức $\mathbb{C}$, mỗi phần tử của nó được gọi là số phức. Trường số phức $\mathbb{C}$ có cấu trúc trường với phép cộng, phép nhân được mở rộng từ các phép toán của trường số thực.

A. Dạng tổng quát của số phức

$z = x + iy$, trong đó x, y là các số thực.

x là phần thực của z, ký hiệu $\operatorname{Re} z$.

y là phần ảo của z, ký hiệu $\operatorname{Im} z$.

Khi $y = 0$ thì $z = x$ là số thực; $x = 0$, $z = iy$ gọi là số thuần ảo.

Số phức $x - iy$, ký hiệu $\bar{z}$, được gọi là ***số phức liên hợp*** với số phức $z = x + iy$.

Nhận xét 1.1: Một số tài liệu ký hiệu phần tử đơn vị ảo là j, lúc đó số phức viết dưới dạng tổng quát $z = x + jy$ và số phức liên hợp tương ứng là $z^* = x - jy$.

Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo của chúng bằng nhau.

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2; \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Mở rộng các phép toán của trường số thực ta có các phép toán tương ứng sau của các số phức.

B. Các phép toán của số phức

Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, ta định nghĩa:

a) **Phép cộng**: Tổng của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = z_1 + z_2$ và được xác định như sau:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right) \tag{1.2}$$

b) **Phép trừ**: Ta gọi số phức $-z = -x - iy$ là số phức đối của $z = x + iy$.

Số phức $z = z_1 + (-z_2)$ được gọi là hiệu của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = z_1 - z_2$.

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right) \tag{1.3}$$

c) **Phép nhân**: Tích của hai số phức z_1 và z_2 là số phức được ký hiệu $z_1 z_2$ và được xác định như sau:

$$\left(x_1+iy_1\right)\left(x_2+iy_2\right)=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+i\left(x_1y_2+y_1x_2\right) \tag{1.4}$$

d) **Phép chia**: Nghịch đảo của số phức $z=x+iy\neq 0$ là số phức ký hiệu $\frac{1}{z}$ hay z^{-1}, thỏa mãn điều kiện $zz^{-1}=1$. Đặt $z^{-1}=a+ib$, theo công thức (1.1) và (1.4) ta được

$$\begin{cases} xa-yb=1 \\ ya+xb=0 \end{cases} \Rightarrow\ a=\frac{x}{x^2+y^2},\ b=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Vậy

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2} \tag{1.5}$$

Số phức $z=z_1z_2^{-1}$ ($z_2\neq 0$) được gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z=\frac{z_1}{z_2}$. Áp dụng công thức (1.4)-(1.5) ta có

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.6}$$

Ví dụ 1.1: Cho $z=x+iy$, tính z^2, $z\overline{z}$.

Giải: $z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$, $z\overline{z}=x^2+y^2$.

Ví dụ 1.2: Tìm các số thực x, y là nghiệm của phương trình

$$5\left(x+y\right)\left(1+i\right)-\left(x+2i\right)\left(3+i\right)=3-11i.$$

Giải: Khai triển và đồng nhất phần thực, phần ảo hai vế và áp dụng công thức (1.1) ta được

$$\begin{cases} 2x+5y+2=3 \\ 4x+5y-6=-11 \end{cases} \Rightarrow\quad x=-3,\ y=\frac{7}{5}.$$

Tính chất 1.1:

- $z_1+z_2=z_2+z_1$; $z_1z_2=z_2z_1$ *tính giao hoán.*
- $z_1+\left(z_2+z_3\right)=\left(z_1+z_2\right)+z_3$; $z_1\left(z_2z_3\right)=\left(z_1z_2\right)z_3$ *tính kết hợp.*
- $z_1\left(z_2+z_3\right)=z_1z_2+z_1z_3$ *tính phân bố của phép nhân đối với phép cộng.*
- $z_1z_2=0\Leftrightarrow z_1=0$ hoặc $z_2=0$.
- $z\overline{z}\in\mathbb{R}$, $z\overline{z}\geq 0$ và $z\overline{z}=0\Leftrightarrow z=0$.
- $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$; $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$. **(1.7)**

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. **(1.8)**

- $\mathrm{Re}z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$. **(1.9)**

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$. **(1.10)**

Ví dụ 1.3: Viết các số phức sau dưới dạng $z = x + iy$

a) $(3 - 2i)(1 + 3i)$,

b) $\dfrac{-5 + 5i}{4 - 3i}$,

c) $\dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i}$,

d) $\dfrac{3 - 2i}{-1 + i}$.

Giải:

a) $(3 - 2i)(1 + 3i) = 3 + 6 + i(-2 + 9) = 9 + 7i$,

b) $\dfrac{-5 + 5i}{4 - 3i} = \dfrac{-5(1 - i)(4 + 3i)}{16 + 9} = \dfrac{-5((4 + 3) + i(-4 + 3))}{25} = \dfrac{-7}{5} + \dfrac{i}{5}$,

c) $\dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i} = \dfrac{i - 1 - i + 1 + i}{1 + i} = \dfrac{i}{1 + i} = \dfrac{i(1 - i)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$

hoặc $\dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i} = \dfrac{i(1 + i + i^2 + i^3 + i^4)}{1 + i} = \dfrac{i}{1 + i}\dfrac{1 - i^5}{1 - i} = \dfrac{i - i^6}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$.

d) $\dfrac{3 - 2i}{-1 + i} = \dfrac{(3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \dfrac{-5 - i}{2} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{i}{2}$.

Ví dụ 1.4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} z + iw = 1 \\ 2z + w = 1 + i \end{cases}$.

Giải: Nhân i vào phương trình thứ nhất và cộng vào phương trình thứ hai ta được

$$(2 + i)z = 1 + 2i \;\Rightarrow\; z = \frac{1 + 2i}{2 + i} = \frac{(1 + 2i)(2 - i)}{5} = \frac{4 + 3i}{5},$$

$$\Rightarrow\; w = i(z - 1) = i\left(\frac{-1 + 3i}{5}\right) = -\frac{3 + i}{5}.$$

Ta cũng có thể giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer như sau

$$D = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2i\,;\; D_z = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1+i & 1 \end{vmatrix} = 2 - i\,;\; D_w = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1+i \end{vmatrix} = i - 1\,.$$

$$\Rightarrow z = \frac{2-i}{1-2i} = \frac{(2-i)(1+2i)}{5} = \frac{4+3i}{5},\; w = \frac{i-1}{1-2i} = \frac{(i-1)(1+2i)}{5} = \frac{-3-i}{5}\,.$$

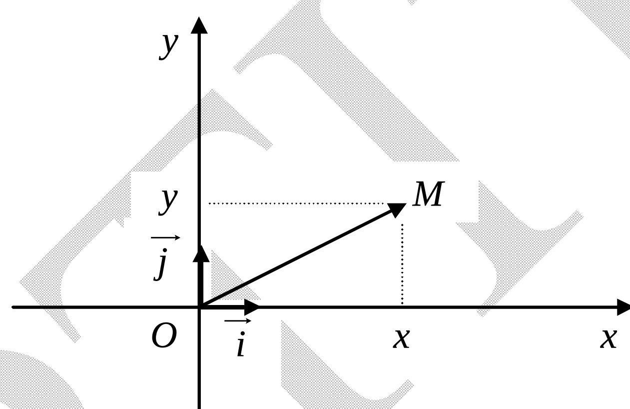
Ví dụ 1.5: Giải phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Giải: $z^2 + 2z + 5 = \left(z+1\right)^2 + 4 = \left(z+1\right)^2 - \left(2i\right)^2 = \left(z+1-2i\right)\left(z+1+2i\right)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$.

C. Biểu diễn hình học của số phức, mặt phẳng phức

Xét mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, véc tơ đơn vị trên hai trục tương ứng là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Mỗi điểm M trong mặt phẳng hoàn toàn được xác định bởi tọa độ $(x;y)$ của nó xác định bởi $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (Hình 1.1).



Hình 1.1: *Mặt phẳng phức*

Số phức $z = x + iy$ cũng hoàn toàn được xác định bởi phần thực x và phần ảo y của nó. Vì vậy có tương ứng 1-1 giữa các số phức và các điểm trong mặt phẳng.

Người ta đồng nhất mỗi điểm có tọa độ $(x;y)$ với số phức $z = x + iy$, lúc đó mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng phức. Trục hoành Ox biểu diễn các số thực nên được gọi là trục thực, trục tung Oy biểu diễn các số thuần ảo nên được gọi là trục ảo.

Tập hợp các véc tơ trong mặt phẳng với phép toán cộng véc tơ, phép nhân một số thực với véc tơ tạo thành không gian véc tơ. Khi ta đồng nhất điểm *M* hay véc tơ $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(x;y)$ với số phức $z = x + iy$ thì hai phép toán trên hoàn toàn tương thích với phép cộng hai số phức và phép nhân số thực với số phức.

$\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1)$ tương ứng với số phức $z_1 = x_1 + iy_1$.

$\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2)$ tương ứng với số phức $z_2 = x_2 + iy_2$.

Thì $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ tương ứng với số phức $z_1 + z_2$ và $k\overrightarrow{OM_1}$ tương ứng với số phức kz_1.

Ngoài ra trong tập hợp các số phức còn có phép nhân và phép chia hai số phức, điều này cho phép biểu diễn thêm nhiều phép biến đổi hình học mà không có đối với các phép toán của véc tơ.

D. Dạng lượng giác và dạng mũ của số phức

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, ta chọn $\overrightarrow{Ox}$ làm trục cực khi đó điểm $M(x;y)$ có tọa độ cực $(r;\phi)$ xác định bởi

$$r = OM \ , \quad \varphi = \left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right) \text{ thỏa mãn } \begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \tag{1.11}$$

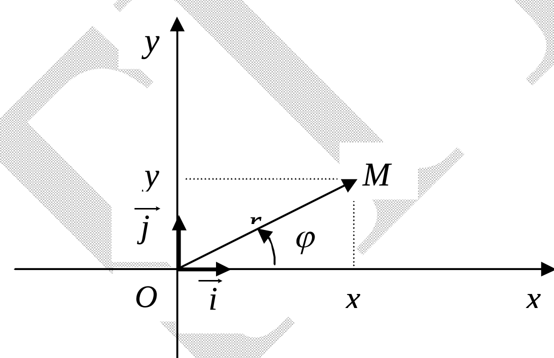
Ta ký hiệu và gọi

$$|z| = r = OM = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1.12}$$

là mô đun và

$$\mathrm{Arg}z = \varphi + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \tag{1.13}$$

là argument của số phức $z = x + iy$.



Hình 1.2: *Mô đun và Argument của số phức*

Góc φ của số phức $z = x + iy \neq 0$ được xác định theo công thức sau

$$\begin{cases} \tan\varphi = y / x \\ \cos\varphi = x / \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \tag{1.14}$$

Giá trị của $\mathrm{Arg}z$ nằm giữa $-\pi$ và π được gọi là argument chính, ký hiệu $\arg z$. Vậy

$$-\pi < \arg z \leq \pi .$$

Từ công thức (1.11) ta có

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \tag{1.15}$$

gọi là ***dạng lượng giác của số phức***.

Áp dụng khai triển Mac Laurin

$$\cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}\ , \quad \sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi + i\sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{n}}{n!} = e^{i\varphi}.$$

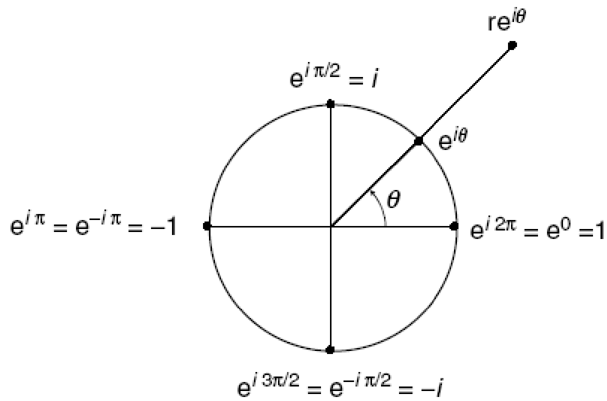
Vậy ta có công thức Euler

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \tag{1.16}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.17}$$

Từ (1.15)-(1.16) ta có thể viết ***số phức dưới dạng mũ***

$$z = |z|e^{i\varphi} \tag{1.18}$$



Hình 1.3: *Dạng cực của số phức. Đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức được biểu diễn bởi* $e^{i\theta}$. *Số phức bất kỳ có dạng* $re^{i\theta}$

Tính chất 1.2:

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ **(1.19)**

- $z\bar{z} = |z|^2, \ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$ **(1.20)**

- $|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \ |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$ **(1.21)**

- $\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \ \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$ **(1.22)**

- $z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} |x| \le |z| \\ |y| \le |z| \end{cases}$ và $|z| \le |x| + |y|$ **(1.23)**

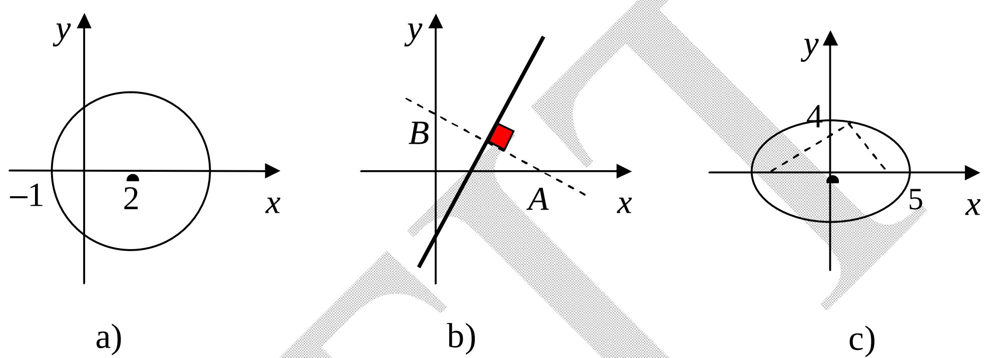
Ví dụ 1.6:

a. Tập các số phức z thỏa mãn $\left|z-2\right|=3$ tương ứng với tập các điểm có khoảng cách đến $I(2;0)$ bằng 3, tập hợp này là đường tròn tâm I bán kính 3.

b. Tập các số phức z thỏa mãn $\left|z-2\right|=\left|z-i\right|$ tương ứng với tập các điểm cách đều $A(2;0)$ và $B(0;1)$ đó là đường trung trực của đoạn AB có phương trình $4x-2y-3=0$.

c. Tập các số phức z thỏa mãn $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=10$ tương ứng với tập các điểm có tổng khoảng cách đến $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$ bằng 10, đó là đường elip có phương trình

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$



Hình 1.4: *Đồ thị các đường của ví dụ* 1.6

Ví dụ 1.7: Áp dụng công thức (1.22) và số phức viết dưới dạng mũ (1.18) ta có thể kiểm chứng lại các công thức cộng góc của các hàm lượng giác:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}&=\left[\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right]\left[\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right]\\&=\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)+i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2\right),\end{aligned}$$

Đồng nhất phần thực và phần ảo tương ứng theo công thức (1.1) ta được

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$

E. Lũy thừa và căn của số phức

1) Lũy thừa

Lũy thừa bậc n của số phức z là số phức $z^n=\underbrace{zz\cdots z}_{n\ \text{lÇn}}$; $n\in\mathbb{N}^*$

Từ công thức (1.21)-(1.22) ta có

$$z^n=\left|z\right|^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right)\text{ với }\operatorname{Arg}z=\varphi+k2\pi\qquad\textbf{(1.24)}$$

Đặc biệt, khi $|z| = 1$ ta có

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \tag{1.25}$$

Gọi (1.25) là ***Công thức Moivre***.

Ví dụ 1.8: Tính $(1+i)^8$.

Giải: Ta có $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, do đó $(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i8\frac{\pi}{4}} = 16e^{i2\pi} = 16 \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.9: Tính $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$.

Giải:

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = \left[2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{10} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^9(-1+i\sqrt{3}).$$

Vậy ta cũng có $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^9 = 2^9 \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.10: Tính các tổng

$$S = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi, \quad T = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi.$$

Giải: Đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, trường hợp $z \neq 1$ ta có

$$S + iT = z + z^2 + \cdots + z^n = z(1 + z + \cdots + z^{n-1}) = z\frac{z^n - 1}{z-1} = \frac{z^{n+1} - z}{z-1}$$

$$= \frac{\left(z^{n+1} - z\right)\overline{\left(z-1\right)}}{\left(z-1\right)\left(\overline{z-1}\right)} = \frac{z^n z\overline{z} - z\overline{z} - z^{n+1} + z}{z\overline{z} - \left(z + \overline{z}\right) + 1} = \frac{z^n - 1 - z^{n+1} + z}{1 - \left(z + \overline{z}\right) + 1}$$

$$= \frac{\left(\cos n\varphi - 1 - \cos(n+1)\varphi + \cos\varphi\right) + i\left(\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin\varphi\right)}{2\left(1 - \cos\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\cos n\varphi - 1 - \cos(n+1)\varphi + \cos\varphi}{2\left(1-\cos\varphi\right)}, \quad T = \frac{\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin\varphi}{2\left(1-\cos\varphi\right)}.$$

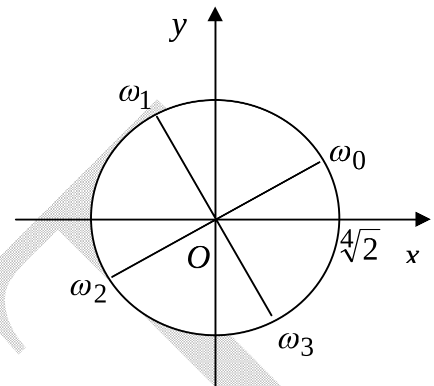
2) Căn của số phức

Số phức ω được gọi là căn bậc n của z nếu $\omega^n = z$, ký hiệu $\omega = \sqrt[n]{z}$ hay $\omega = z^{\frac{1}{n}}$.

Biểu diễn dưới dạng mũ: $z = re^{i\varphi}$, $\omega = \rho e^{i\theta}$ ta có $\omega^n = \rho^n e^{in\theta}$; do đó

$$z = \omega^n \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \textbf{(1.26)}$$

Vì Argument của một số phức xác định sai khác một bội số nguyên của 2π nên với mỗi số phức $z \neq 0$ có đúng n căn bậc n. Các căn bậc n này có cùng mô đun và Argument nhận các giá trị ứng với $k = 0, 1, ..., n-1$. Vì vậy các căn bậc n nằm trên đỉnh của *n*-giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{r}$.



Hõnh 1.5: Cỏc c□n b□c b□n $\sqrt[4]{1+i}$

Ví dụ 1.11: Tính $\sqrt[4]{1+i}$

Giải: $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

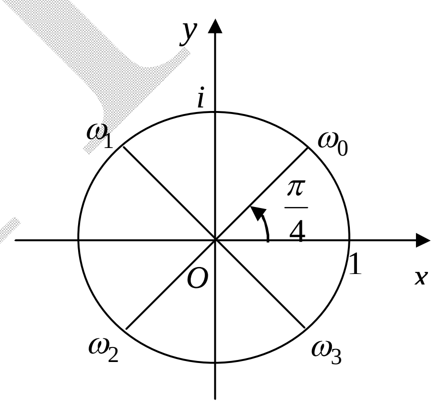
Các căn bậc 4 tương ứng là:

$$\omega_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$\omega_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2})\right) = i\omega_0,$$

$$\omega_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{16} + \pi)\right) = -\omega_0,$$

$$\omega_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2})\right) = -i\omega_0.$$



Hõnh 1.6: Cỏc c□n b□c b□n $\sqrt[4]{-1}$

Ví dụ 1.12: Giải phương trình $z^4 + 1 = 0$

Giải: Nghiệm của phương trình là căn bậc 4 của $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ tương ứng là:

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

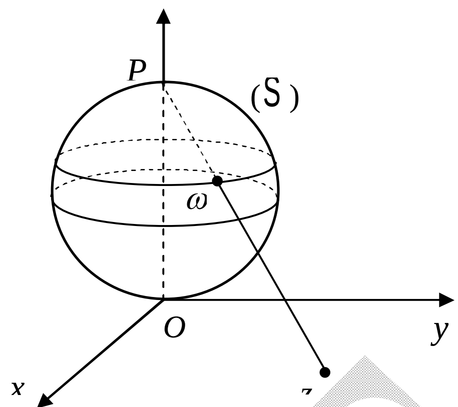
$$\omega_1 = i\omega_0 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ \omega_2 = -\omega_0 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ \omega_3 = -i\omega_0 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

1.1.2 Tập số phức mở rộng, mặt cầu phức

Trong 1.1.1.3 ta đã có một biểu diễn hình học của tập các số phức $\mathbb{C}$ bằng cách đồng nhất mỗi số phức $z = x + iy$ với điểm M có tọa độ $(x;y)$ trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy.

Mặt khác nếu ta dựng mặt cầu (S) có cực nam tiếp xúc với mặt phẳng Oxy tại O, khi đó mỗi điểm z thuộc mặt phẳng Oxy sẽ tương ứng duy nhất với điểm ω là giao điểm của tia Pz và mặt cầu (S), P là điểm cực bắc của (S).

Vậy mỗi điểm trên mặt phẳng Oxy được xác định bởi một điểm trên mặt cầu (S) ngoại trừ điểm cực bắc P.



Hình 1.7*: Mặt cầu phức*

Ta gán cho điểm cực bắc này số phức vô cùng ∞. Tập hợp số phức $\mathbb{C}$ thêm số phức vô cùng được gọi là tập số phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$. Như vậy toàn bộ mặt cầu (S) là một biểu diễn hình học của tập số phức mở rộng.

Quy ước: $\dfrac{z}{0} = \infty\ (z \neq 0),\ z \cdot \infty = \infty\ (z \neq 0),\ z + \infty = \infty,\ \infty - z = \infty.$

1.1.3 Lân cận, miền

A. Lân cận

Khái niệm $\varepsilon-$lân cận của một điểm trong mặt phẳng phức được định nghĩa hoàn toàn tương tự với $\varepsilon-$lân cận trong $\mathbb{R}^2$, đó là hình tròn có tâm tại điểm này và bán kính bằng ε.

$\varepsilon-$lân cận của $z_0 \in \mathbb{C}$ và $N-$lân cận $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ lần lượt là

$$B_\varepsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - z_0| < \varepsilon \right\} \tag{1.27}$$

$$B_N(\infty) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| > N \right\} \cup \{\infty\} \tag{1.28}$$

B. Điểm trong, tập mở

Giả sử E là một tập các điểm của mặt phẳng phức hoặc mặt cầu phức. Điểm z_0 được gọi là ***điểm trong*** của E nếu tồn tại một lân cận của z_0 nằm hoàn toàn trong E.

Tập chỉ gồm các điểm trong được gọi là ***tập mở***.

C. Điểm biên

Điểm z_1, có thể thuộc hoặc không thuộc E, được gọi là ***điểm biên*** của E nếu mọi lân cận của z_1 đều có chứa các điểm thuộc E và các điểm không thuộc E.

Tập hợp các điểm biên của E được gọi là biên E, ký hiệu ∂E.

Hình tròn mở $\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z - z_0 \right| < r \right\}$ và phần bù của hình tròn đóng $\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z - z_0 \right| > r \right\}$ là các tập mở có biên lần lượt là $\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z - z_0 \right| = r \right\}$ và $\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z - z_0 \right| = r \right\} \cup \left\{ \infty \right\}$.

Hình tròn đóng $\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z - z_0 \right| \le r \right\}$ không phải là tập mở vì các điểm trên biên $\left| z - z_0 \right| = r$ không phải là điểm trong.

D. Tập liên thông, miền

Tập con D của mặt phẳng phức hay mặt cầu phức được gọi là ***tập liên thông*** nếu với bất kỳ 2 điểm nào của D cũng có thể nối chúng bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D.

Một tập mở và liên thông được *gọi là **miền***.

Miền D cùng biên ∂D của nó được gọi là miền đóng, ký hiệu $\overline{D}$, vậy $\overline{D} = D \cup \partial D$. Miền chỉ có một biên được gọi là ***miền đơn liên***, trường hợp ngược lại gọi là ***miền đa liên***.

Ta chỉ xét các miền hoặc miền đóng có biên là đường cong trơn hoặc trơn từng khúc.

Qui ước hướng dương trên biên của miền là hướng mà khi ta đi trên biên theo hướng đó thì miền D ở bên tay trái.

Miền D được gọi là ***miền bị chặn*** nếu tồn tại $R > 0$ sao cho $\left| z \right| \le R,\ \forall z \in D$.

1.2 HÀM BIẾN PHỨC

1.2.1 Định nghĩa hàm biến phức

Định nghĩa 1.1: *Một hàm biến phức xác định trên tập con D của $\mathbb{C}$ hoặc $\overline{\mathbb{C}}$ là một quy luật cho tương ứng mỗi số phức $z \in D$ với một hoặc nhiều số phức w, ta ký hiệu*

$$w = f(z),\ z \in D.$$

Biến z được gọi là biến độc lập hay đối số, còn w là biến phụ thuộc hay giá trị của hàm. Nếu với mỗi z chỉ cho tương ứng duy nhất một giá trị w thì $f(z)$ được gọi là hàm đơn trị, lúc này f là ánh xạ từ D vào $\mathbb{C}$ hoặc $\overline{\mathbb{C}}$. Trường hợp ngược lại f được gọi là hàm đa trị.

Hàm số $w = f(z) = z^2 + 3$ là một hàm đơn trị, còn hàm số $w = f(z) = \sqrt[3]{z}$ là một hàm đa trị.

Tập D trong định nghĩa trên được gọi là tập xác định. Ta chỉ xét tập xác định D là một miền, vì vậy D được gọi là miền xác định.

Thông thường người ta cho hàm biến phức dưới dạng công thức xác định ảnh $f(z)$, khi đó miền xác định D là tập các số phức z sao cho biểu thức $f(z)$ có nghĩa.

Hàm số $w = f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$ có miền xác định là $D = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} \middle| z \ne \pm i \right\}$.

Một hàm biến phức có thể được biểu diễn bởi hai hàm thực của hai biến (x,y) như sau:

$$\begin{cases} w = f(z) = f(x+iy) \\ w = u + iv = u(x,y) + iv(x,y) \end{cases} ; \quad \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{1.29}$$

Chẳng hạn, hàm số $w = f(z) = z^2 + 3 = (x+iy)^2 + 3 = (x^2 - y^2 + 3) + i2xy$ có

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 3 \\ v = 2xy \end{cases}.$$

Trường hợp hàm biến phức biến số thực, nghĩa là miền xác định $D \subset \mathbb{R}$, ta ký hiệu $w = f(t)$, biến số là t thay cho biến số z.

Trường hợp miền xác định D là tập số tự nhiên hoặc tập con của tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ thì ta có dãy số phức $z_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu dãy số là $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hay $(z_n)_{n=0}^{\infty}$.

Nếu $z_n = f(n);\ n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, ta ký hiệu $(z_n)_{n=n_0}^{\infty}$.

1.2.2 Giới hạn, liên tục

Định nghĩa 1.2: *Dãy số phức* $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ *hội tụ về số phức* L, *ký hiệu* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$, *nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - L| = 0$, *nghĩa là*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : n \ge N \ \Rightarrow |z_n - L| < \varepsilon \tag{1.30}$$

Dãy số $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ *có giới hạn là* ∞, *ký hiệu* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, *nếu*

$$\forall A > 0, \exists N > 0 : \forall n \ge N \ \Rightarrow |z_n| > A \tag{1.31}$$

Giả sử $z_n = x_n + iy_n$, $L = a + ib$. Khi đó từ (1.23) suy ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \tag{1.32}$$

Thật vậy:

Từ bất đẳng thức $|z_n - L| \le |x_n - a| + |y_n - b|$ suy ra $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$.

Bất đẳng thức $\begin{cases} |x_n - a| \le |z_n - L| \\ |y_n - b| \le |z_n - L| \end{cases}$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$.

Định nghĩa 1.3: *Ta nói hàm biến phức $w = f(z)$ xác định trong một lân cận của z_0 có giới hạn là L khi z tiến đến z_0, ký hiệu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$, nếu với mọi lân cận $B_\varepsilon(L)$ tồn tại lân cận $B_\delta(z_0)$ sao cho với mọi $z \in B_\delta(z_0)$, $z \ne z_0$ thì $f(z) \in B_\varepsilon(L)$.*

Định nghĩa này phát biểu cho tất cả các trường hợp z_0, L là các số phức hữu hạn hoặc ∞. Cụ thể:

- Trường hợp z_0, $L \in \mathbb{C}$ là hai số phức hữu hạn:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon \qquad \textbf{(1.33)}$$

Từ (1.23), (1.27) và tương tự (1.32) ta có:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases} \qquad \textbf{(1.34)}$$

Trong đó $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = u_0 + iv_0$.

- Trường hợp $z_0 = \infty$, $L \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall z,\ |z| > N \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon \qquad \textbf{(1.35)}$$

- Trường hợp $z_0 \in \mathbb{C}$, $L = \infty$:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall N > 0, \exists \delta > 0 : \forall z,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > N \qquad \textbf{(1.36)}$$

- Trường hợp $z_0 = \infty$, $L = \infty$:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0, \exists N > 0 : \forall z,\ |z| > N \Rightarrow |f(z)| > M \qquad \textbf{(1.37)}$$

Định lý 1.1: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ khi và chỉ khi với mọi dãy $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n \to z_0$ thì $f(z_n) \to L$.

Như vậy giới hạn của hàm số khi $z \to z_0$ không phụ thuộc vào đường đi khi z tiến đến z_0.

Định nghĩa 1.4: *Hàm biến phức $w = f(z)$ xác định trong miền chứa điểm z_0 được gọi là liên tục tại z_0 nếu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Hàm biến phức $w = f(z)$ *liên tục tại mọi điểm của miền* D *được gọi là liên tục trong* D.

Từ (1.34) suy ra rằng một hàm biến phức liên tục khi và chỉ khi hai hàm thực hai biến xác định bởi (1.29) là liên tục. Do đó ta có thể áp dụng các tính chất liên tục của hàm thực hai biến cho tính chất liên tục của hàm biến phức.

1.2.3 Hàm khả vi, phương trình Cauchy-Riemann

Giả sử $z = x + iy$ là một điểm thuộc miền xác định D của hàm biến phức đơn trị $w = f(z)$.

Với số gia của biến $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ thỏa mãn $z + \Delta z \in D$, ta được số gia của hàm

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Định nghĩa 1.5: *Nếu* $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ *có giới hạn hữu hạn khi* $\Delta z \to 0$ *thì ta nói hàm* $w = f(z)$ *khả vi (hay có đạo hàm) tại* z, *giới hạn đó được gọi là đạo hàm tại* z, *ký hiệu* $f'(z)$ *hoặc* $w'(z)$. *Vậy*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1.38}$$

Rõ ràng nếu hàm số có đạo hàm tại z thì liên tục tại z.

Ví dụ 1.13: Cho $w = z^2 + C$, tính $w'(z)$.

Giải: $\Delta w = \left((z + \Delta z)^2 + C\right) - (z^2 + C) = 2z\Delta z + \Delta z^2 \Rightarrow \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = 2z + \Delta z$,

Do đó $w'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$.

Định lý 1.2: Nếu hàm biến phức $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi tại $z = x + iy$ thì phần thực $u(x,y)$ và phần ảo $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \tag{1.39}$$

Ngược lại, nếu phần thực $u(x,y)$, phần ảo $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann thì $w = f(z)$ khả vi tại $z = x + iy$ và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y). \tag{1.40}$$

Chứng minh: Hàm biến phức $w = f(z)$ có đạo hàm tại $z = x + iy$, do đó tồn tại giới hạn

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

không phụ thuộc đường đi của Δz tiến đến 0.

Xét trường hợp $\Delta z = \Delta x$ ta có:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x,y) - u(x,y)\big) + i\big(v(x+\Delta x,y) - v(x,y)\big)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \qquad \textbf{(1.41)}$$

Tương tự nếu $\Delta z = i\Delta y$ thì:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\big(u(x,y+\Delta y) - u(x,y)\big) + i\big(v(x,y+\Delta y) - v(x,y)\big)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad \textbf{(1.42)}$$

So sánh (1.41)-(1.42) ta có điều kiện (1.39).

Ngược lại, từ giả thiết $u(x,y)$, $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) suy ra

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \eta_1|\Delta z|$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta_2|\Delta z|$$

trong đó $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ và $\eta_1, \eta_2 \to 0$ khi $|\Delta z| \to 0$.

Do đó $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\eta_1 + i\eta_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}$

Thay $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

Ta được $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + (\eta_1 + i\eta_2)\dfrac{|\Delta z|}{\Delta z} \to \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, khi $|\Delta z| \to 0$.

Ví dụ 1.14: Hàm $w = z^2 + C = (x^2 - y^2) + C + i(2xy)$ ở ví dụ 1.13 có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

do đó hàm khả vi tại mọi điểm và $w'(z) = 2x + i2y = 2z$.

Ví dụ 1.15: Hàm $w = \bar{z} = x - iy$ có $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$, các đạo hàm riêng không thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann, do đó hàm không khả vi tại bất kỳ điểm nào.

Định nghĩa 1.6: *Hàm đơn trị $w = f(z)$ khả vi trong một lân cận của z được gọi là giải tích (analytic) hay chỉnh hình (holomorphe) tại z.*

Nếu $f(z)$ khả vi tại mọi điểm của D thì ta nói $f(z)$ giải tích trong D.

$f(z)$ giải tích trong miền đóng $\overline{D}$ nếu nó giải tích trong một miền chứa $\overline{D}$.

Khái niệm khả vi và đạo hàm của hàm biến phức được định nghĩa tương tự như trường hợp hàm thực và công thức tính đạo hàm của biến phức có thể tính qua các đạo hàm riêng (1.40), vì vậy các tính chất và quy tắc tính đạo hàm đã biết đối với hàm thực vẫn còn đúng đối với hàm biến phức. Cụ thể

$$\left(f(z) \pm g(z)\right)' = f'(z) \pm g'(z). \tag{1.43}$$

$$\left(f(z)g(z)\right)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z). \tag{1.44}$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}\ ,\quad g(z) \neq 0. \tag{1.45}$$

$$\left(f\left(u(z)\right)\right)' = f'(u).u'(z). \tag{1.46}$$

1.2.4 Các hàm biến phức sơ cấp cơ bản

A. Hàm lũy thừa $w = z^n$, n nguyên dương ≥ 2.

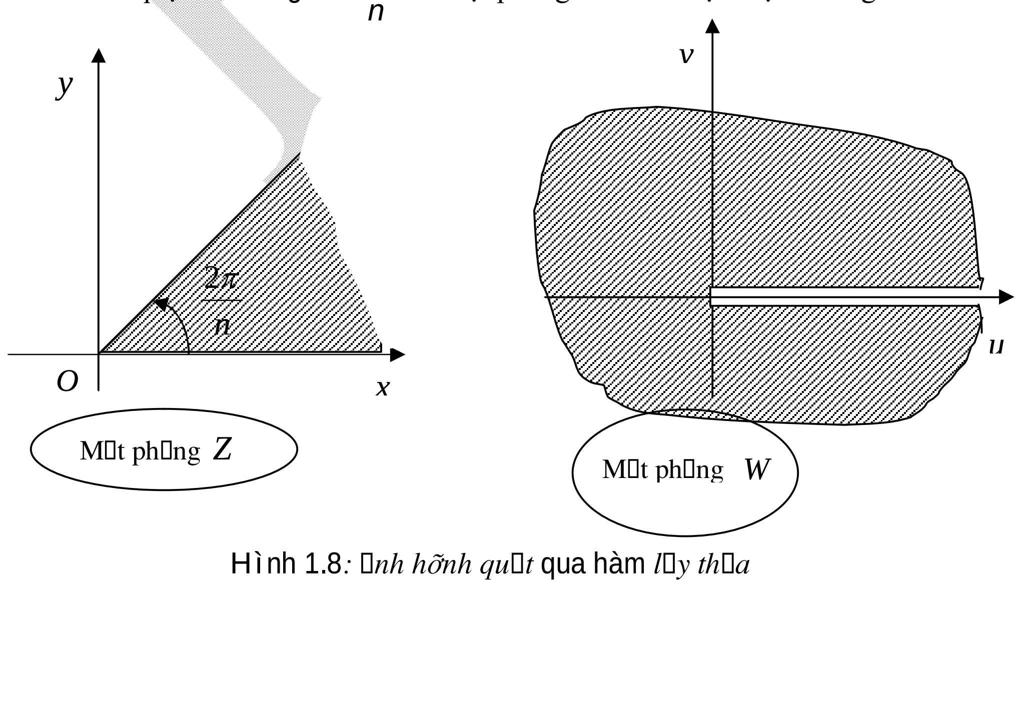
Hàm số lũy thừa xác định và giải tích với mọi z, có đạo hàm $w = nz^{n-1}$.

Nếu $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ thì $w = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$.

Vậy ảnh của đường tròn $|z| = R$ là đường tròn $|w| = R^n$.

Ảnh của tia $\operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi$ là tia $\operatorname{Arg} w = n\varphi + k2\pi$.

Ảnh của hình quạt $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ là mặt phẳng w bỏ đi trục thực dương.



Hình 1.8: Ảnh hình quạt qua hàm lũy thừa

B. Hàm căn $w = \sqrt[n]{z}$

Hàm căn bậc n : $w = \sqrt[n]{z}$ là hàm ngược của hàm lũy thừa bậc n . Mọi số phức khác 0 đều có đúng n căn bậc n , vì vậy hàm căn là một hàm đa trị.

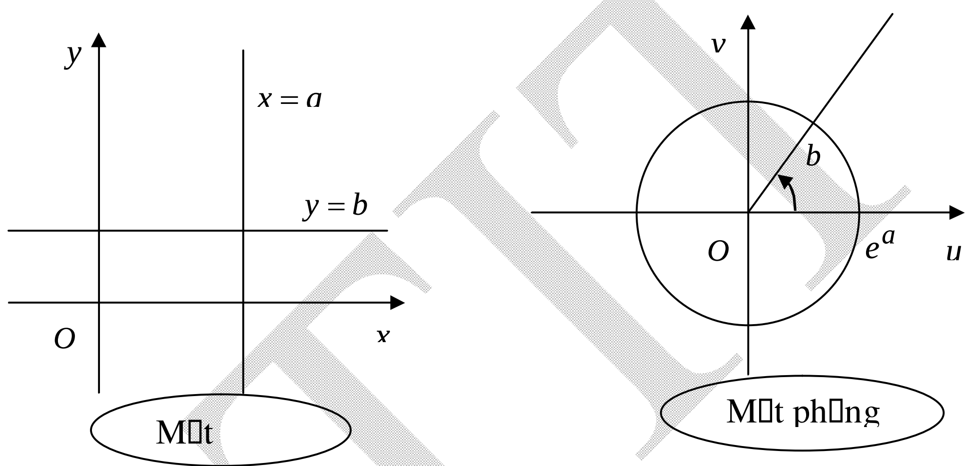
C. Hàm mũ $w = e^z$

Từ công thức Euler (1.16) ta có thể định nghĩa hàm mũ xác định như sau

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \qquad \textbf{(1.47)}$$

♦ $\left|e^z\right| = e^x$, $\mathrm{Arg}(e^z) = y + k2\pi$.

♦ Hàm mũ giải tích tại mọi điểm và $\left(e^z\right)' = e^z$.



Hình 1.9: Ảnh đường thẳng qua hàm mũ

♦ $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$, $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$, $e^{z+ik2\pi} = e^z, \forall k \in \mathbb{Z}$. **(1.48)**

♦ $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$.

♦ Qua phép biến hình $w = e^z$, ảnh của đường thẳng $x = a$ là đường tròn $\left|w\right| = e^a$, ảnh của đường thẳng $y = b$ là tia $\mathrm{Arg}\,w = b + k2\pi$.

Ảnh của băng $0 < y < 2\pi$ là mặt phẳng w bỏ đi nửa trục thực dương.

D. Hàm lôgarit

Hàm lôgarit là hàm ngược của hàm mũ xác định như sau: $w = \mathrm{Ln}\,z \Leftrightarrow z = e^w$

$$w = \mathrm{Ln}\,z = u + iv \;\Leftrightarrow\; z = e^w = e^{u+iv} = e^u\left(\cos v + i\sin v\right) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} e^u = \left|z\right| \\ v = \arg z + k2\pi \end{cases}$$

$$w = \mathrm{Ln}\,z \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathrm{Re}\,w = \ln\left|z\right| \\ \mathrm{Im}\,w = \arg z + k2\pi \end{cases} \qquad \textbf{(1.49)}$$

Điều này chứng tỏ hàm lôgarit phức là hàm đa trị. Ứng với mỗi z có vô số giá trị của w, những giá trị này có phần thực bằng nhau còn phần ảo hơn kém nhau bội số nguyên của 2π. Ứng với mỗi k ở trên ta có một nhánh của hàm lôgarit.

Để tiện cho việc khảo sát, đôi khi người ta tách hàm $w = \text{Ln}z$ thành các nhánh đơn trị như sau. Trong công thức (1.49) nếu ta cố định $k = k_0$ khi đó

$$w = \ln|z| + i\left(\arg z + k_0 2\pi\right)$$

trở thành một nhánh đơn trị của hàm lôgarit. Nhánh này biến miền $-\pi < \arg z < \pi$ của mặt phẳng Z thành băng $\left(2k_0 - 1\right)\pi < \text{Im}w < \left(2k_0 + 1\right)\pi$ của mặt phẳng *W*. Nhánh đơn trị ứng với $k = 0$ được gọi là nhánh đơn trị chính và được ký hiệu $\ln z$. Vậy

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

trong đó $\ln$ ở vế trái là hàm lôgarit chính biến phức và ln ở vế phải là hàm lôgarit biến thực.

- $\text{Ln}\left(-1\right) = \ln|-1| + i\left(\arg(-1) + k2\pi\right) = \left(2k+1\right)\pi i$ và $\ln\left(-1\right) = i\pi$.
- $\text{Ln}\left(z_1 z_2\right) = \text{Ln}\left(z_1\right) + \text{Ln}\left(z_2\right)$, $\text{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \text{Ln}\left(z_1\right) - \text{Ln}\left(z_2\right)$, $\text{Ln}z^n = n\,\text{Ln}z$.

Các nhánh đơn trị của hàm lôgarit giải tích trên nửa mặt phẳng phức Z bỏ đi nửa trục thực âm $(x < 0)$.

Ví dụ 1.16: Tìm lôgarit chính của $1 + i$.

Giải: Vì $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, do đó $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{4}i$.

E. Các hàm lượng giác phức

Mở rộng công thức Euler (1.17) cho các đối số phức ta được các hàm lượng giác phức

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \textbf{(1.50)}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}; \; \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \; z \neq k\pi.$$

Tính chất 1.3:

Các hàm lượng giác phức còn giữ được nhiều tính chất của hàm lượng giác thực.

- Hàm $\cos z$, $\sin z$ tuần hoàn chu kỳ 2π, hàm $\tan z$, $\cot z$ tuần hoàn chu kỳ π.
- Các hàm lượng giác phức giải tích trong miền xác định

$$\left(\sin z\right)' = \cos z, \; \left(\cos z\right)' = -\sin z$$

$$\left(\tan z\right)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \; \left(\cot z\right)' = \frac{-1}{\sin^2 z}.$$

- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- Các công thức cộng góc, hạ bậc, tổng thành tích, tích thành tổng vẫn còn đúng

Tuy nhiên có những tính chất của hàm lượng giác thực không còn đúng đối với hàm lượng giác phức. Chẳng hạn hàm lượng giác thực bị chặn nhưng hàm lượng giác phức không bị chặn (ta có thể chứng minh điều này bằng cách áp dụng định lý Louville):

Từ đẳng thức $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ suy ra $|\cos x| \le 1,\ |\sin x| \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

nhưng $$\cos ni = \frac{e^{-n} + e^{n}}{2} > 1,\ |\sin ni| = \left|\frac{e^{-n} - e^{n}}{2i}\right| > 1 \text{ khi } n > 1.$$

F. Các hàm lượng giác hyperbolic phức

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad \textbf{(1.51)}$$

Tính chất 1.4:

- Các hàm lượng giác hyperbolic phức giải tích trong miền xác định

$$(\sinh z)' = \cosh z\ ,\ (\cosh z)' = \sinh z\ ,$$

$$(\tanh z)' = \frac{1}{\cosh^2 z}\ ,\ (\coth z)' = \frac{-1}{\sinh^2 z}.$$

- $\cosh z + \sinh z = e^z$, $\cosh z - \sinh z = e^{-z}$, $\sin iz = i\sinh z$, $\cos iz = \cosh z$.
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, $\sinh 2z = 2\cosh z \sinh z$, $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$.

1.3 TÍCH PHÂN PHỨC, CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

Trong mục này ta nghiên cứu tích phân phức của các hàm đơn trị.

1.3.1 Định nghĩa và các tính chất

Khái niệm tích phân phức dọc theo một đường cong được định nghĩa tương tự tích phân đường loại 2.

Giả sử hàm biến phức đơn trị $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ xác định trong miền *D* và *L* là đường cong (có thể đóng kín) nằm trong *D* có điểm mút đầu là *A* mút cuối là *B*.

Chia *L* thành *n* đoạn bởi các điểm $A \equiv z_0, z_1, z_2, ..., z_n \equiv B$ nằm trên *L* theo thứ tự tăng dần của các chỉ số.

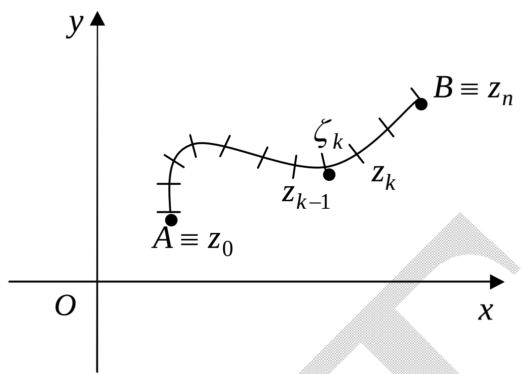
Chọn trên mỗi cung con $\overparen{z_{k-1}, z_k}$ của đường cong *L* một điểm bất kỳ $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$.

Đặt $z_k = x_k + iy_k$,

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}; k = 1, 2, ..., n.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k \quad \textbf{(1.52)}$$

được gọi là ***tổng tích phân*** của hàm $f(z)$ trên L ứng với phân hoạch $z_0, z_1, ..., z_n$ và cách chọn các điểm $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Tổng này nói chung phụ thuộc vào hàm $f(z)$, đường L, cách chia L bởi các điểm z_k và cách chọn các điểm ζ_k (xem hình 1.7).



Hình 1.7: Tổng tích phân

Khi $\max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta z_k\right| \to 0$ tổng S_n tiến tới giới hạn $I \in \mathbb{C}$ không phụ thuộc cách chia đường L và chọn các điểm ζ_k ta nói hàm $f(z)$ khả tích trên cung $\overset{\frown}{AB}$ và I được gọi là tích phân của hàm $f(z)$ dọc theo đường cong L từ A đến B, ký hiệu $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$. Vậy

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta z_k\right|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k \qquad \textbf{(1.53)}$$

Mặt khác, tổng tích phân (1.52) có thể phân tích thành tổng của 2 tổng tích phân đường loại 2.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[u\left(\xi_k,\eta_k\right) + iv\left(\xi_k,\eta_k\right)\right]\left(\Delta x_k + i\Delta y_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u\left(\xi_k,\eta_k\right)\Delta x_k - v\left(\xi_k,\eta_k\right)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=1}^{n}\left[v\left(\xi_k,\eta_k\right)\Delta x_k + u\left(\xi_k,\eta_k\right)\Delta y_k\right] \qquad \textbf{(1.54)}$$

Tương tự (1.32), áp dụng (1.23) ta có

$$\max_{1\le k\le n}\left|\Delta z_k\right| \to 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta x_k\right| \to 0 \\ \max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta y_k\right| \to 0 \end{cases}$$

Vì vậy tích phân phức (1.53) tồn tại khi và chỉ khi hai tích phân đường loại 2 có tổng tích phân (1.54) tồn tại và có đẳng thức

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f\left(z\right)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} udx - vdy + i\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} vdx + udy \qquad \textbf{(1.55)}$$

Mặt khác, nếu hàm $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ liên tục trên D và đường L trơn từng khúc thì tồn tại hai tích phân đường loại 2 ở vế phải của (1.55) (ta đã biết trong Giải tích 2), do đó tồn tại tích phân phức tương ứng.

Từ đẳng thức (1.55) suy ra rằng tích phân phức có các tính chất tương tự như các tính chất của tích phân đường loại 2.

- $$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(f(z)+g(z)\right)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)dz\,, \qquad \textbf{(1.56)}$$
- $$\int_{\overset{\frown}{AB}} kf(z)dz = k\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz\,;\ k-\text{const}\,, \qquad \textbf{(1.57)}$$
- $$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz\,, \qquad \textbf{(1.58)}$$
- $$\left|\int_{L} f(z)dz\right| \le \int_{L} \left|f(z)\right|ds\,. \qquad \textbf{(1.59)}$$

vế phải của bất đẳng thức (1.59) là tích phân đường loại 1 dọc theo cung *L* và có vi phân cung:

$$ds = |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,.$$

Đặc biệt, nếu $\left|f(z)\right| \le M,\ \forall z \in L$ và $\boldsymbol{l}$ là độ dài của đường cong *L* thì

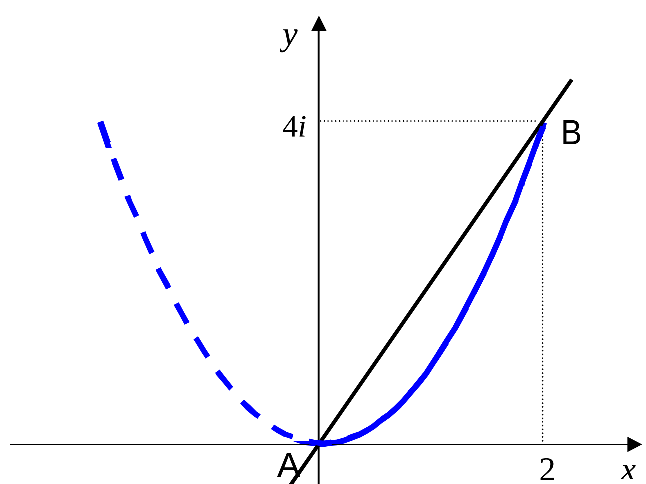
$$\left|\int_{L} f(z)dz\right| \le M\cdot \boldsymbol{l} \qquad \textbf{(1.60)}$$

Khi *A* trùng với *B* thì *L* là đường cong kín (ta chỉ xét các đường cong kín không tự cắt, gọi là đường Jordan). Tích phân trên đường cong kín *L* lấy theo chiều dương của *L* được ký hiệu $\oint_{L} f(z)dz$, trường hợp lấy theo chiều âm ta ký hiệu $-\oint_{L} f(z)dz$.

Ví dụ 1.17: Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} z^2dz\,;\ A=0,\ B=2+4i$

1. Dọc theo parabol $y = x^2,\ \ 0 \le x \le 2$.
2. Dọc theo đường thẳng nối *A* và *B*.

Giải:



Hình 1.8: Đường cong của ví dụ 1.17

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} z^2dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x+iy)^2(dx+idy) = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2-y^2)dx - 2xydy + i\int_{\overset{\frown}{AB}} 2xydx + (x^2-y^2)dy$$

1. Nếu lấy tích phân dọc theo $y = x^2$ thì $dy = 2xdx$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \left[\left(x^2 - x^4\right) - 4x^4\right]dx + i\int_0^2 \left[2x^3 + \left(x^2 - x^4\right)2x\right]dx = -\frac{88}{3} - \frac{16}{3}i\,.$$

2. Nếu lấy tích phân dọc theo đường thẳng nối từ *A* đến *B* thì $y = 2x$, $dy = 2dx$

$$I = \int_0^2 \left[x^2 - (2x)^2 - 2x(2x)2\right]dx + i\int_0^2 \left[2x(2x) + 2\left(x^2 - (2x)^2\right)\right]dx = -\frac{88}{3} - \frac{16}{3}i\,.$$

Qua ví dụ trên ta nhận thấy giá trị của tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ *A* đến *B*. Các định lý sau cho điều kiện cần và đủ để tích phân phức không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nối hai đầu mút của đường.

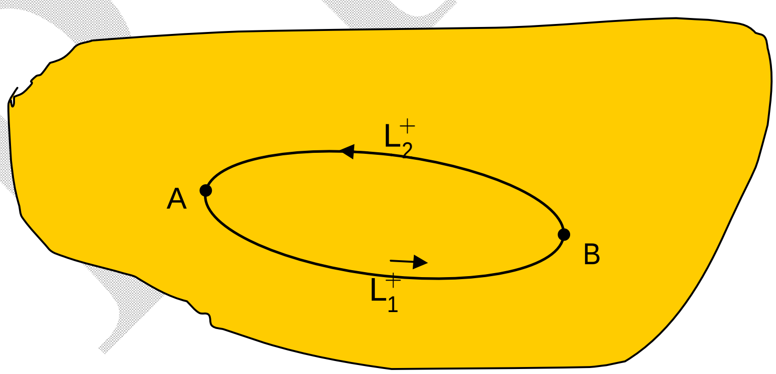
1.3.2 Định lý tích phân Cauchy và tích phân không phụ thuộc đường đi

Định lý 1.3: Điều kiện cần và đủ để tích phân của hàm $f(z)$ trong miền D không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là tích phân của $f(z)$ dọc theo mọi đường cong kín bất kỳ (không tự cắt nhau) trong D phải bằng 0.

Chứng minh: Giả sử L_1^+, L_2^- là hai đường cong nối *A*, *B* trong D. Ta xét đường cong kín *L* gồm L_1^+, L_2^+, trong đó L_2^+ là cung ngược chiều của L_2^-.

$$0 = \oint_L f(z)dz = \int_{L_1^+} f(z)dz + \int_{L_2^+} f(z)dz = \int_{L_1^+} f(z)dz - \int_{L_2^-} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \int_{L_1^+} f(z)dz = \int_{L_2^-} f(z)dz\,.$$



Hình 1.9*: Tớch phõn khụng ph□ thu□c □□□ng l□y tớch phõn*

Ngược lại, giả sử *L* là đường cong kín nằm trong D. Chọn hai điểm khác nhau *A*, *B* nằm trên *L*, ký hiệu L_1^+, L_2^- là các cung của *L* nối từ *A* đến *B* khi đó

$$\oint_L f(z)dz = \int_{L_1^+} f(z)dz - \int_{L_2^-} f(z)dz = 0\,.$$

Định lý 1.4: Nếu hàm biến phức $w = f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D thì tích phân của $f(z)$ dọc theo mọi đường cong kín *L* bất kỳ trong D đều bằng 0.

Chứng minh: Áp dụng định lý Green chuyển tích phân đường loại 2 về tích phân kép và công thức (1.55) ta có

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i\oint_L vdx + udy = \iint_\Delta \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó Δ là hình phẳng giới hạn bởi đường cong kín L nằm trong D.

Vì $w = f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D nên các hàm dưới dấu tích phân trong hai tích phân kép ở vế phải bằng 0 do thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Vậy $\oint_L f(z)dz = 0$.

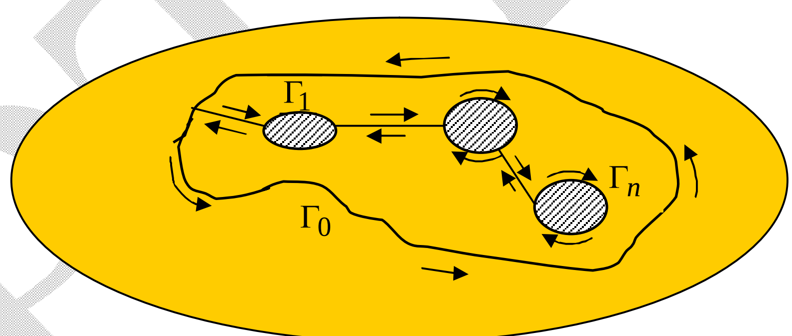
Hệ quả 1.1: Nếu $w = f(z)$ giải tích trong miền kín đơn liên $\overline{D}$ và khả tích trên biên ∂D thì $\oint_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Chứng minh: Tồn tại miền đơn liên $G \supset \overline{D}$ và $f(z)$ giải tích trong G. Áp dụng định lý 1.4 cho hàm $f(z)$ trong G và tích phân lấy trên đường cong kín $\partial D \subset G$.

Hệ quả 1.2: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền kín đa liên $\overline{D}$ có biên ngoài là Γ_0 và biên trong là $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ và khả tích trên các biên thì

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz \qquad \textbf{(1.61)}$$

Chứng minh:



Hình 1.10: Tích phân biên ngoài và biên trong

Cắt $\overline{D}$ theo các lát cắt nối Γ_0 với Γ_1, ..., Γ_n ta được một miền đơn liên (xem hình 1.10). Theo hệ quả 1.1 tích phân trên biên của miền này bằng 0 và chú ý rằng lúc đó tích phân trên đường nối Γ_0 với Γ_1, ..., Γ_n được lấy hai lần ngược chiều nhau vì vậy tích phân trên biên bằng $\oint_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz = 0$. Chuyển vế ta được đẳng thức cần chứng minh.

Có thể chứng minh được rằng hệ quả 1.1 và hệ quả 1.2 còn đúng khi $f(z)$ giải tích trong D và liên tục trong $\overline{D}$.

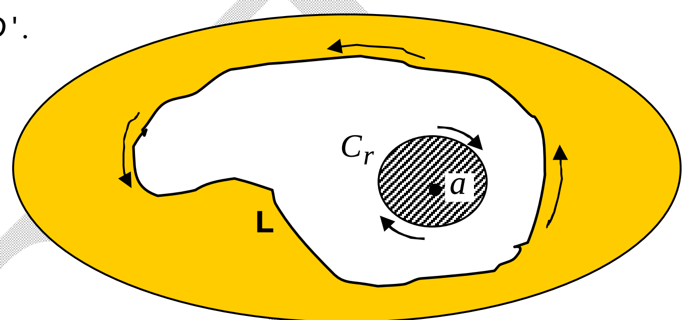
Ví dụ 1.18: Tính tích phân $I_n = \oint\limits_L \dfrac{dz}{(z-a)^n}$; $n \in \mathbb{Z}$

trong đó *L* là đường cong kín bất kỳ không đi qua a.

Giải: Gọi D là miền được giới hạn bởi *L*.

- Nếu $a \notin D$ thì $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ giải tích trong D nên $I_n = 0$.
- Nếu $a \in D$. Gọi $C_r = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-a| = r \right\}$ là đường tròn tâm a bán kính r. Chọn r đủ bé để $C_r \subset D$. Xét D' là miền nhị liên có được bằng cách lấy miền D bỏ đi hình tròn tâm a bán kính r. D' có biên ngoài là *L*, biên trong là C_r.

$f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ giải tích trong D'.



Hình 1.11: *Chuy□n tớch phõn tròn □□□□ng* L *v□ □□□□ng* C_r

Theo hệ quả 1.2 ta có

$$I_n = \oint\limits_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint\limits_{C_r} \frac{dz}{(z-a)^n}.$$

Phương trình tham số của $C_r : z = a + re^{it}$; $0 \le t \le 2\pi$. Do đó

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^n e^{int}} dt = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} idt & \text{khi } n = 1 \\ \displaystyle\frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt & \text{khi } n \ne 1 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i & \text{khi } n = 1 \\ 0 & \text{khi } n \ne 1. \end{cases} \quad \textbf{(1.62)}$$

1.3.3 Nguyên hàm và tích phân bất định

Hàm $F(z)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm biến phức $f(z)$ nếu $F'(z) = f(z)$.

Tương tự như hàm thực, ta có thể chứng minh được rằng nếu $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ thì $F(z) + C$ (với mọi hằng số *C* tùy ý) cũng là một nguyên hàm của $f(z)$ và mọi nguyên hàm của $f(z)$ đều có dạng như thế.

Tập hợp các nguyên hàm của $f(z)$ được gọi là tích phân bất định của $f(z)$, ký hiệu $\int f(z)dz$.

Định lý 1.5: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D, $z_0 \in D$, khi đó tích phân dọc theo cung nối điểm z_0 đến điểm z không phụ thuộc đường đi nằm trong *D*. Hàm biến phức xác định như sau

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz := \int_{\overset{\frown}{z_0 z}} f(z)dz$$

là một nguyên hàm của $f(z)$. Trong đó vế phải của đẳng thức trên là tích phân phức được lấy theo đường cong bất kỳ nằm trong D nối z_0 đến z.

Định lý 1.6 (Công thức Newton - Lepnitz): Giả sử $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ trong miền đơn liên D. Khi đó, với mọi $z_0, z_1 \in D$ ta có:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0) \qquad \textbf{(1.63)}$$

Ví dụ 1.19: $\int e^z dz = e^z + C$, $\int z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + C$, $\int \sin z dz = -\cos z + C$;

$$\int_0^{2+4i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_0^{2+4i} = \frac{8}{3}(1+2i)^3 = -\frac{88}{3} - \frac{16}{3}i$$ (xem ví dụ 1.17).

Hàm $f(z) = z\sin(z^2)$ có một nguyên hàm là $-\dfrac{1}{2}\cos(z^2)$ do đó

$$\int_0^{\pi i} z\sin(z^2)dz = -\frac{1}{2}\cos(z^2)\Big|_0^{\pi i} = \frac{1}{2}\left(\cos 0 - \cos(-\pi^2)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\pi^2)\right)$$

1.3.4 Công thức tích phân Cauchy

Định lý 1.7: Giả sử $f(z)$ giải tích trong miền $\overline{D}$ (có thể đa liên) và khả tích trên biên ∂D. Khi đó, với mọi $a \in D$ ta có:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad \textbf{(1.64)}$$

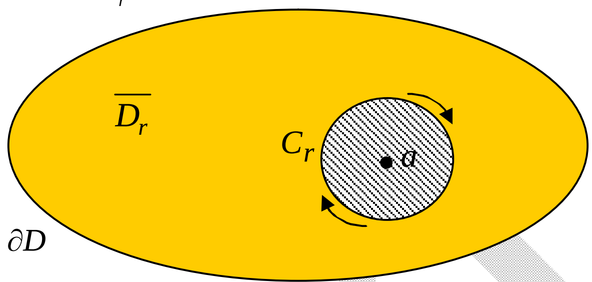
Hoặc

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) \qquad \textbf{(1.65)}$$

Chứng minh: Với mọi $\varepsilon > 0$ chọn r đủ bé để đường tròn tâm a bán kính r : $C_r \subset D$ và $\left|f(z) - f(a)\right| < \varepsilon$ với mọi $z : |z-a| \le r$ (điều này có được vì $f(z)$ liên tục tại a). Gọi $\overline{D_r}$ là miền có được bằng cách bỏ đi hình tròn $C_r = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z - a \right| < r \right\}$ từ miền D. Biên của $\overline{D_r}$ gồm biên ∂D của D và C_r.

Hàm $\dfrac{f(z)}{z-a}$ giải tích trong miền $\overline{D_r}$, áp dụng hệ quả 1.2 ta được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z-a}dz = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$



Hình 1.12: *Chuy□n tóch phõn tròn* biên ∂D *v□ □□□ng* C_r

Mặt khác, từ (1.62) ta có

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz - f(a) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z-a}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(a)}{z-a}dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz \right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| |dz| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2r\pi = \varepsilon$$

Vì $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý cho trước nên

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz - f(a) \right| = 0 \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Nhận xét 1.2: *Công thức* (1.64) *được gọi là* ***công thức tích phân Cauchy***.

1. Công thức tích phân Cauchy nói lên rằng giá trị của hàm giải tích $f(z)$ hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó ở trên biên.
2. Công thức (1.64) còn đúng khi $f(z)$ giải tích trong miền D và liên tục trong $\overline{D}$.
3. Khi $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ có biên ∂D là đường cong trơn từng khúc, nếu $a \notin \overline{D}$ thì $\dfrac{f(z)}{z-a}$ giải tích trong $\overline{D}$ do đó

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = 0.$$

Kết hợp với công thức (1.65) ta có

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{nÕu } a \in \overline{D} \\ 0 & \text{nÕu } a \notin \overline{D} \end{cases} \quad \textbf{(1.66)}$$

1.3.5 Đạo hàm cấp cao của hàm giải tích

Định lý 1.8: Hàm $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ thì có đạo hàm mọi cấp trong D và với mọi $a \in D$ ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \textbf{(1.67)}$$

Hoặc

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \textbf{(1.68)}$$

trong đó *C* là đường cong kín bất kỳ bao quanh a nằm trong *D*.

Chứng minh: Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp

Ta chứng minh công thức với trường hợp $n = 1$.

Áp dụng công thức (1.64) ta có

$$\frac{f(a+\Delta z) - f(a)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\Delta z} \left(\frac{1}{\xi - a - \Delta z} - \frac{1}{\xi - a} \right) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a - \Delta z)(\xi - a)} d\xi$$

Đặt $2d = \min_{\xi \in C} |\xi - a|$; cho $|\Delta z| < d \Rightarrow \frac{1}{|\xi - a|} < \frac{1}{d}, \quad \frac{1}{|\xi - a - \Delta z|} < \frac{1}{d}$.

$$\Rightarrow \left| \frac{f(a+\Delta z) - f(a)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^2} d\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_C \frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi - a - \Delta z)(\xi - a)^2} d\xi \right| \le \frac{M \cdot \boldsymbol{l}}{2\pi d^3} \cdot |\Delta z| \text{ t}$$

rong đó $|f(\xi)| \le M, \forall \xi \in C$; đường cong kín *C* có độ dài là $\boldsymbol{l}$.

Cho $\Delta z \to 0$ ta được $f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$.

Giả sử công thức đúng đến $n-1$, ta chứng minh công thức đúng đến n .

$$\frac{f^{(n-1)}(a+\Delta z) - f^{(n-1)}(a)}{\Delta z} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\Delta z} \left(\frac{1}{(\xi - a - \Delta z)^n} - \frac{1}{(\xi - a)^n} \right) d\xi$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a - \Delta z)^n (\xi - a)^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\xi - a - \Delta z)^k (\xi - a)^{n-1-k} \right) d\xi$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n-1)}(a+\Delta z) - f^{(n-1)}(a)}{\Delta z} - \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f(\xi)\left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-1-k}}{(\xi-a-\Delta z)^n(\xi-a)^n}-\frac{n}{(\xi-a)^{n+1}}\right)d\xi$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f(\xi)\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left((\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-k}-(\xi-a-\Delta z)^n\right)}{(\xi-a-\Delta z)^n(\xi-a)^{n+1}}d\xi$$

Chọn $\left|\Delta z\right|^n < d^n \ \Rightarrow 2^n d^n \le \left|\xi-a\right|^n \le \left|\xi-a-\Delta z\right|^n + \left|\Delta z\right|^n$

$$\Rightarrow \left|\xi-a-\Delta z\right|^n \ge 2^n d^n - \left|\Delta z\right|^n > 2^n d^n - d^n > 2d^n > d^n \Rightarrow \frac{1}{\left|\xi-a-\Delta z\right|^n} < \frac{1}{d^n}.$$

Do đó

$$\left|\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f(\xi)\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left((\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-k}-(\xi-a-\Delta z)^n\right)}{(\xi-a-\Delta z)^n(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right|$$

$$\le \frac{(n-1)!}{2\pi i}\cdot\frac{M}{d^{2n+1}}\oint_C\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left((\xi-a-\Delta z)^k(\xi-a)^{n-k}-(\xi-a-\Delta z)^n\right)\right|\left|d\xi\right| \to 0 \text{ khi } \Delta z \to 0.$$

Trong đó *M* là chặn trên của $f(z)$ trên *C*.

Theo nguyên lý quy nạp công thức đúng với mọi *n*.

Nhận xét 1.3:

1. Định lý trên suy ra rằng đạo hàm của một hàm giải tích là một hàm giải tích.
2. Kết hợp định lý 1.5 và định lý 1.8, ta suy ra rằng: điều kiện cần và đủ để hàm đơn trị có nguyên hàm trong miền *D* là giải tích trong *D*.
3. Tương tự công thức (1.66) ta có công thức tương ứng với (1.68)

$$\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i\,\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} & \text{nÕu } a\in\overline{D}\\ 0 & \text{nÕu } a\notin\overline{D}\end{cases}\qquad\textbf{(1.69)}$$

Ví dụ 1.20: Tính tích phân $I=\oint_C\frac{\cos\pi z}{(z+1)z^2}dz$, trong đó *C* là đường tròn: $\left|z-1\right|=3$.

Giải: Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta có thể phân tích $\frac{1}{(z+1)z^2}$ thành tổng các phân thức hữu tỷ tối giản $\frac{1}{(z+1)z^2}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z+1}$.

Do đó $I = \oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{(z+1)z^2}dz = -\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z}dz + \oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z^2}dz + \oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z+1}dz$.

Các điểm $z = 0$ và $z = -1$ đều nằm trong hình tròn giới hạn bởi *C*. Áp dụng công thức (1.66) và (1.69) ta có:

$$I = -2\pi i \cos \pi z \Big|_{z=0} + 2\pi i \left(\cos \pi z\right)' \Big|_{z=0} + 2\pi i \cos \pi z \Big|_{z=-1} = -4\pi i .$$

1.3.6 Bất đẳng thức Cauchy và định lý Louville

Từ công thức (1.69) suy ra rằng, nếu đường tròn $C_R : |z-a| = R$ nằm trong *D* và $|f(z)| \le M$ với mọi $z \in C_R$ thì

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint\limits_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M2R\pi}{R^{n+1}}$$

hay $$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!M}{R^n};\quad n = 0,\ 1,\ ... \qquad \textbf{(1.70)}$$

Bất đẳng thức (1.70) *được gọi là* ***bất đẳng thức Cauchy***.

Định lý 1.9 (định lý Louville): Nếu $f(z)$ giải tích trong toàn mặt phẳng và bị chặn thì nó là một hàm hằng.

Chứng minh: Theo giả thiết, tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(z)| \le M$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy (1.70) với $n = 1$, ta được $\left|f'(a)\right| \le \frac{M}{R}$ với mọi $R > 0$ suy ra $f'(a) = 0$ với mọi $a \in \mathbb{C}$.

Áp dụng công thức Newton - Leibniz, ta có

$$f(z) - f(z_0) = \int\limits_{z_0}^{z} f'(z)dz = 0 \Rightarrow f(z) = f(z_0),\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Nhận xét 1.4: Hai hàm lượng giác phức $\cos z$ và $\sin z$ giải tích tại mọi điểm và không phải hàm hằng do đó không bị chặn.

1.4 CHUỖI BIẾN SỐ PHỨC

1.4.1 Chuỗi số phức

Cho dãy số phức $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, tổng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ được gọi là một chuỗi số phức có số hạng tổng quát thứ $n+1$ là u_n.

Tổng $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ $n+1$ của chuỗi trên.

Nếu dãy các tổng riêng $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn là $S \in \mathbb{C}$ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ và S được gọi là tổng của chuỗi, ký hiệu $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Trong trường hợp ngược lại, dãy $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ không có giới hạn hoặc có giới hạn bằng ∞ thì ta nói chuỗi phân kỳ.

Tương tự sự hội tụ của dãy số phức (công thức 1.32), mỗi chuỗi số phức $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi hai chuỗi số thực tương ứng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tu; trong đó $u_n = a_n + ib_n$. Đồng thời ta có đẳng thức

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n \; ; \; a_n, b_n \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(1.71)}$$

Với nhận xét này, ta có thể áp dụng các kết quả đã biết đối với chuỗi số thực cho các chuỗi số phức. Chẳng hạn:

♦ Điều kiện cần để chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ là $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Thật vậy, Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ suy ra hai chuỗi số thực tương ứng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tụ. Theo điều kiện cần hội tụ của chuỗi số thực ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ và $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, do đó $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

♦ Nếu chuỗi các môđun $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Khi đó ta nói chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

Vì $|a_n| \le |u_n|$ và $|b_n| \le |u_n|$, do đó từ chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ hội tụ suy ra hai chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ hội tụ. Theo tính chất hội tụ tuyệt đối của chuỗi số thực ta cũng có $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

- Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi các môđun $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ không hội tụ thì ta nói chuỗi bán hội tụ.

1.4.2 Chuỗi luỹ thừa

Chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \textbf{(1.72)}$$

trong đó c_n, a là các hằng số phức và z là biến số phức, được gọi là chuỗi luỹ thừa tâm a.

Rõ ràng rằng mọi chuỗi luỹ thừa tâm a bất kỳ có thể đưa về chuỗi luỹ thừa tâm 0 bằng cách đặt $Z = z - a$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n \qquad \textbf{(1.73)}$$

Ví dụ 1.21: Xét chuỗi luỹ thừa cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Tổng riêng thứ n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-z^n}{1-z} & \text{nếu } z \neq 1 \\ n & \text{nếu } z = 1 \end{cases}$$

Nếu $|z| \geq 1$ thì $|z^n| \geq 1$ với mọi n, dó đó z^n không thể tiến đến 0 khi $n \to \infty$, và khi $|z| < 1$ thì z^n tiến đến 0 khi $n \to \infty$. Vậy

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & \text{khi } |z| < 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{khi } |z| \geq 1 \end{cases} \qquad \textbf{(1.74)}$$

Ví dụ 1.22: Với mọi $r < 1$, chứng minh rằng

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\varphi\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\varphi\right)^2 = \frac{1}{1 - 2r^2\cos\varphi + r^4}.$$

Giải: Xét $Z = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\varphi + i \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{in\varphi}$

Đặt $z = r^2 e^{i\varphi}$, vì $r < 1$ do đó $|z| < 1$. Áp dụng công thức (1.74) ta được

$$Z = \frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}}.$$

$$Z\overline{Z} = \frac{1}{1-r^2e^{i\varphi}} \cdot \overline{\frac{1}{1-r^2e^{i\varphi}}} = \frac{1}{1-r^2e^{i\varphi}} \cdot \frac{1}{1-r^2e^{-i\varphi}}$$

$$= \frac{1}{1 - r^2(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + r^4} = \frac{1}{1 - 2r^2\cos\varphi + r^4},$$

Mặt khác $\quad z\overline{z} = |z|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}\cos n\varphi\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}\sin n\varphi\right)^2.$

Vậy $\quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}\cos n\varphi\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}\sin n\varphi\right)^2 = \frac{1}{1 - 2r^2\cos\varphi + r^4}.$

Định lý 1.10 (định lý Abel):

1. Nếu chuỗi (1.73) hội tụ tại $z_0 \neq 0$ thì hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $\{z : |z| < |z_0|\}$.
2. Từ đó suy ra rằng nếu chuỗi (1.73) phân kỳ tại z_1 thì phân kỳ tại mọi điểm z : $|z| > |z_1|$.

Chứng minh: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ hội tụ suy ra $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$, vì vậy tồn tại $M > 0$ sao cho $|c_n z_0^n| \le M$, $\forall\, n = 0, 1, 2, ...$ Do đó

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n|\left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| \le M \cdot \frac{|z^n|}{|z_0^n|}$$

Chuỗi $\quad \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \frac{|z^n|}{|z_0^n|} \quad$ hội tụ khi $|z| < |z_0|$.

Suy ra chuỗi $\quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad$ hội tụ tuyệt đối khi $|z| < |z_0|$,

Từ định lý trên ta thấy rằng với chuỗi (1.73) sẽ có ba khả năng sau:

1) Không tồn tại $z_0 \neq 0$ để chuỗi (1.73) hội tụ tại z_0, trường hợp này chuỗi (1.73) chỉ hội tụ tại $z = 0$. Ta đặt

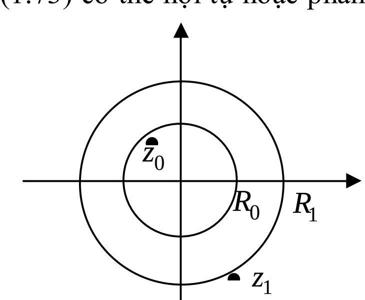
$$R = 0. \tag{75}$$

2) Không tồn tại z_1 để chuỗi (1.73) phân kỳ tại z_1, trường hợp này chuỗi (1.73) hội tụ tại mọi z. Ta đặt

$$R = \infty. \tag{1.76}$$

3) Tồn tại $z_0 \neq 0$ để chuỗi (1.73) hội tụ tại z_0 và tồn tại z_1 để chuỗi (1.64) phân kỳ tại z_1. Theo định lý 1.10 ta suy ra rằng chuỗi (1.73) hội tụ khi $|z| < |z_0| = R_0$, phân kỳ khi $|z| > |z_1| = R_1$. Trong hình vành khăn $z : R_0 < |z| < R_1$, chuỗi (1.73) có thể hội tụ hoặc phân kỳ.

- Nếu $R_0 = R_1$ thì ta đặt $R = R_0 = R_1$.



♦ Nếu $R_0 < R_1$, ta xét $z_2 = \dfrac{R_0 + R_1}{2} = R_2$

- Nếu chuỗi (1.73) hội tụ tại z_2, ta z_2 xem đóng vai trò như z_0.
- Nếu chuỗi (1.73) phân kỳ tại z_2, ta z_2 xem đóng vai trò như z_1.

Trong cả hai trường hợp thì ta đã thu hẹp hình vành khăn mà trong đó ta chưa biết chuỗi (1.73) hội tụ hay phân kỳ xuống còn một nửa.

Tiếp tục quá trình này, cuối cùng ta tìm được số R sao cho:

Chuỗi (1.73) hội tụ khi $|z| < R$, phân kỳ khi $|z| > R$. **(1.77)**

Số R xác định theo công thức (1.75) hoặc (1.76) hoặc (1.77) *được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa* (1.73).

Định lý sau đây cho ta tiêu chuẩn để tìm bán kính hội tụ R.

Định lý 1.11: Nếu

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \text{ (tiêu chuẩn D'Alembert)}$$

hoặc

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \text{ (tiêu chuẩn Cauchy)}$$

thì

$$R = \begin{cases} 0 \ \text{ nếu } \ \rho = \infty \\ \dfrac{1}{\rho} \ \text{ nếu } \ 0 < \rho < \infty \\ \infty \ \text{ nếu } \ \rho = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.78)}$$

là bán kính hội tụ của chuỗi (1.73).

Nhận xét 1.5: Giả sử chuỗi (1.73) có bán kính hội tụ là $R > 0$:

1. Có thể chứng minh được chuỗi (1.73) hội tụ đều trong mọi hình tròn $|z| \le R_1$, với R_1 bất kỳ thỏa mãn $R_1 < R$.
2. Tại các điểm trên đường tròn $|z| = R$ chuỗi (1.73) có thể hội tụ hay phân kỳ.
3. Như vậy để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa tâm a bất kỳ dạng (1.72) ta thực hiện các bước sau:

   - Đổi biến $Z = z - a$ để đưa về chuỗi lũy thừa tâm 0 dạng (1.73),
   - Tìm bán kính hội tụ R theo công thức (1.78),
   - Xét sự hội tụ khi $|Z| = R$, và từ đó suy ra miền hội tụ.

Ví dụ 1.23: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{b^n+n}$; $b>1$.

Giải: Đặt $Z=z-i$, ta được chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{b^n+n}$ là chuỗi lũy thừa tâm 0 có dạng (1.73).

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\frac{\dfrac{1}{b^{n+1}+(n+1)}}{\dfrac{1}{b^n+n}}=\frac{b^n+n}{b^{n+1}+(n+1)}=\frac{b^n\left(1+\dfrac{n}{b^n}\right)}{b^n\left(b+\dfrac{n+1}{b^n}\right)}=\frac{1+\dfrac{n}{b^n}}{b+\dfrac{n+1}{b^n}}.$$

Do đó $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\dfrac{1}{b}$. Vậy bán kính hội tụ $R=b$.

Khi $|Z|=b$ thì $\left|\dfrac{Z^n}{b^n+n}\right|=\dfrac{|Z|^n}{b^n+n}=\dfrac{b^n}{b^n+n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, do đó $\dfrac{Z^n}{b^n+n}$ không thể hội tụ về 0 khi $n\to\infty$. Vậy chuỗi phân kỳ theo điều kiện cần của chuỗi hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi cần tìm là hình tròn mở tâm i bán kính b: $|z-i|<b$.

Định lý 1.12: Giả sử chuỗi (1.72) có bán kính hội tụ R. Khi đó tổng của chuỗi

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

là một hàm giải tích trong hình tròn hội tụ $|z-a|<R$,

có đạo hàm $f'(z)$ nhận được bằng cách lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi

$$f'(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1} \qquad \textbf{(1.79)}$$

và một nguyên hàm được xác định bằng cách lấy tích phân từng số hạng của chuỗi

$$F(z)=\int_a^z f(z)dz\ ;\ F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^z c_n(z-a)^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}. \qquad \textbf{(1.80)}$$

$f'(z)$, $F(z)$ cũng có bán kính hội tụ là R.

Định lý được chứng minh tương tự trường hợp chuỗi lũy thừa biến số thực trong Giải tích 1.

1.4.3 Chuỗi Taylor, Chuỗi Mac Laurin

1.4.3.1 Khái niệm và tính chất

Giả sử chuỗi luỹ thừa tổng quát $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ có bán kính hội tụ R, theo định lý 1.12 ta có hàm tổng $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ giải tích trong hình tròn hội tụ $|z-a|<R$.

Lấy lần lượt đạo hàm các cấp của hàm tổng theo công thức (1.79) ta được

$f'(z)=c_1+2c_2(z-a)+\cdots+nc_n(z-a)^{n-1}+\cdots$

$f''(z)=2c_2+3\cdot 2c_3(z-a)+\cdots+n(n-1)c_n(z-a)^{n-2}+\cdots$

... ...

$f^{(n)}(z)=n!c_n+(n+1)!c_{n+1}(z-a)+\cdots$

Thay $z=a$ ta được:

$$c_0=f(a),\ c_1=f'(a),\ c_2=\frac{f''(a)}{2!},\ ...,\ c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ ... \qquad \textbf{(1.81)}$$

Thay vào chuỗi (1.72) ta được

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \textbf{(1.82)}$$

Chuỗi (1.82) được gọi là ***chuỗi Taylor*** của hàm $f(z)$ tại a.

Chuỗi Taylor tại điểm $a=0$ được gọi là ***chuỗi Mac Laurin***.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \qquad \textbf{(1.83)}$$

Định lý 1.13:

1. Chuỗi luỹ thừa bất kỳ là chuỗi Taylor của hàm tổng của nó trong hình tròn hội tụ.
2. Ngược lại, mọi hàm $f(z)$ giải tích tại a có thể được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận $|z-a|<R$. Bán kính hội tụ R là số thực dương lớn nhất sao cho $f(z)$ giải tích trong lân cận $|z-a|<R$.

Chứng minh: Phần 1 của định lý được suy ra từ định lý 1.12 và công thức (1.81).

Để chứng minh phần 2 của định lý ta giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong hình tròn tâm a bán kính R: $B_R=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z-a|<R\right\}$.

Với bất kỳ $z\in B_R$, chọn R_1 sao cho: $|z-a|<R_1<R$ (xem hình 1.13).

Ký hiệu C_{R_1} là đường tròn tâm a bán kính R_1.

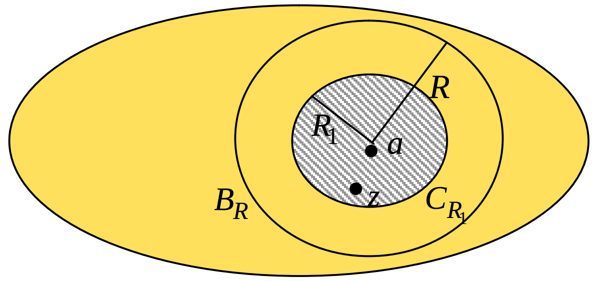
Áp dụng công thức tích phân Cauchy (1.64) cho hàm $f(z)$ tại điểm z nằm trong đường tròn C_{R_1}, ta có $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R_1}} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Mặt khác

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)}$$

$$= \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}\right)}$$

$$= \frac{1}{(\xi - a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}$$



Hình 1.13

Vì $\left|\dfrac{z-a}{\xi - a}\right| = \dfrac{|z-a|}{R_1} < 1$ đều với mọi $\xi \in C_{R_1}$ do đó chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}$ hội tụ đều với mọi $\xi \in C_{R_1}$. Vì vậy có thể chuyển dấu tích phân vào trong dấu tổng của chuỗi, đồng thời sử dụng công thức (1.69) ta được:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R_1}} f(\xi) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} \right) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right) (z-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.$$

Nhận xét 1.6:

1. Nếu hàm $f(z)$ giải tích tại a thì hàm có thể khai triển duy nhất thành chuỗi luỹ thừa tâm a, đó chính là chuỗi Taylor của $f(z)$ tại a. Vì vậy, nếu có thể bằng một phương pháp khác, ta có khai triển $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ thì $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

2. Chuỗi Mac Laurin là chuỗi lũy thừa tâm 0.

Ví dụ 1.24: Khai triển hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ thành chuỗi Mac Laurin.

Giải: Rõ ràng rằng hàm $f(z)$ không giải tích tại 1 và -2, vì vậy hàm số khai triển được thành chuỗi Mac Laurin trong hình tròn $|z| < 1$.

Ta có $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+2}\right)$ và $\dfrac{d^n}{dz^n}\left(\dfrac{1}{z+a}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(z+a)^{n+1}}$

Do đó $\quad \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^n}{3}\left(\dfrac{1}{(z-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(z+2)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=0} = \dfrac{1}{3}\left(-1 + \dfrac{1}{(-2)^{n+1}}\right).$

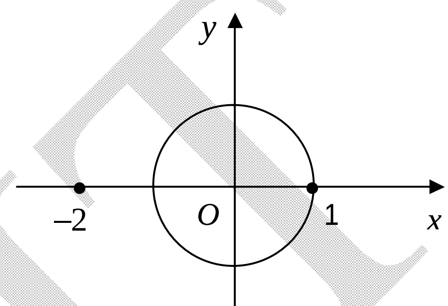
Vậy hàm $f(z)$ có chuỗi Mac Laurin

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(-1 + \frac{1}{(-2)^{n+1}}\right) z^n .$$

Mặt khác ta cũng có thể khai triển hàm $f(z)$ thành tổng của chuỗi lũy thừa tâm 0 bằng cách sử dụng hàm tổng của chuỗi cấp số nhân (1.74):

Nếu $|z| < 1$ thì:

- $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow \dfrac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- $|z| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$



Hình 1.14

do đó $\dfrac{1}{z+2} = \dfrac{1}{2\left(1 + \dfrac{z}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} .$$

Vậy $f(z) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1 + \frac{1}{(-2)^{n+1}}\right) z^n .$

1.4.3.2 Khai triển thành chuỗi Mac Laurin của các hàm số sơ cấp cơ bản

a. Hàm mũ $f(z) = e^z$

Với mọi n, $f^{(n)}(z) = e^z \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$. Vậy

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.84}$$

Hàm mũ giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

b. Hàm $f(z) = \sin z$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!}\right] = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}\left(1 - (-1)^k\right)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} . \tag{1.85}$$

c. Hàm $f(z) = \cos z$

$$\cos z = \left(\sin z\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \qquad \textbf{(1.86)}$$

Hàm sin, cosin giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

d. Hàm $f(z) = \sinh z$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)^k}{k!}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad \textbf{(1.87)}$$

Hàm giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

Tương tự

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \qquad \textbf{(1.88)}$$

e. Hàm $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n .$$

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$ vì hàm số không giải tích tại -1.

f. Nhánh chính của hàm lôgarit và hàm lũy thừa

Vì hàm $\ln(1+z)$ là một nguyên hàm của $\dfrac{1}{z+1}$ nên

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}. \qquad \textbf{(1.89)}$$

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Hàm lũy thừa $m \in \mathbb{R}$:

$$\left(1+z\right)^m = 1 + \frac{mz}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n + \cdots \qquad \textbf{(1.90)}$$

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Đặc biệt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = \left(1+z\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}z + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}z^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}z^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} z^n .$$

Định nghĩa 1.7: *Điểm a được gọi là không điểm của hàm giải tích $f(z)$ nếu $f(a) = 0$.*

Khai triển Taylor của $f(z)$ tại không điểm a có dạng

$$f(z) = c_n (z-a)^n + c_{n+1} (z-a)^{n+1} + \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k .$$

Số tự nhiên n bé nhất sao cho $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$ thì được gọi là cấp của không điểm a.

Nếu n là cấp của không điểm a thì

$$f(z) = (z-a)^n \phi(z), \text{ với } \phi(a) = c_n \neq 0. \qquad \textbf{(1.91)}$$

$\phi(z)$ là tổng của một chuỗi luỹ thừa có cùng bán kính hội tụ với chuỗi Taylor của $f(z)$ tại a nên giải tích trong lân cận của a.

Định lý 1.14: Giả sử $f(z)$ giải tích tại a và không đồng nhất bằng 0 trong bất kỳ lân cận nào của a, khi đó nếu a là không điểm của $f(z)$ thì tồn tại một lân cận của a sao cho trong lân cận này không có một không điểm nào khác.

Chứng minh: Vì a là không điểm của $f(z)$ nên có thể biểu diễn dưới dạng (1.91) trong đó hàm giải tích $\phi(z)$ thỏa mãn $\phi(a) \neq 0$. Vì vậy tồn tại một lân cận của a để trong lân cận này $\phi(z) \neq 0$, do đó $f(z)$ cũng khác 0.

Hệ quả 1.3: Nếu $f(z)$ giải tích tại a và tồn tại dãy không điểm $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \neq a$, có giới hạn là a khi $n \to \infty$ thì $f(z)$ đồng nhất bằng 0 trong một lân cận nào đó của a.

Định lý 1.15 (định lý về tính duy nhất): Nếu $f(z), g(z)$ là hai hàm giải tích trong miền *D* và trùng nhau trên một dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \neq a$, hội tụ về a trong *D* thì $f(z) = g(z), \ \forall z \in D$.

1.4.4 Chuỗi Laurent và điểm bất thường

Có thể xảy ra trường hợp hàm $f(z)$ không giải tích tại a nhưng giải tích trong một lân cận của a bỏ đi điểm a:

$$0 < |z-a| < R$$

hoặc giải tích trong hình vành khăn

$$r < |z-a| < R .$$

Trong trường hợp này hàm $f(z)$ không thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa (chuỗi Taylor) tại a. Tuy nhiên, có thể khai triển được dưới dạng chuỗi Laurent tại a như sau.

1.4.4.1 Chuỗi Laurent

Định nghĩa 1.8: *Giả sử hàm* $f(z)$ *giải tích trong hình vành khăn* $K = \{z : r < |z-a| < R\}$; $0 \le r < R \le \infty$. *Khi đó chuỗi sau được gọi là chuỗi Laurent của hàm* $f(z)$ *tại a,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{, với } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \qquad \textbf{(1.92)}$$

trong đó C là đường cong kín bất kỳ nằm trong hình vành khăn K bao quanh a (xem hình 1.15).

Tổng $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ được gọi là phần đều

và $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ được gọi là phần chính của chuỗi Laurent (1.92).

Định lý 1.16 (định lý tồn tại và duy nhất của chuỗi Laurent):

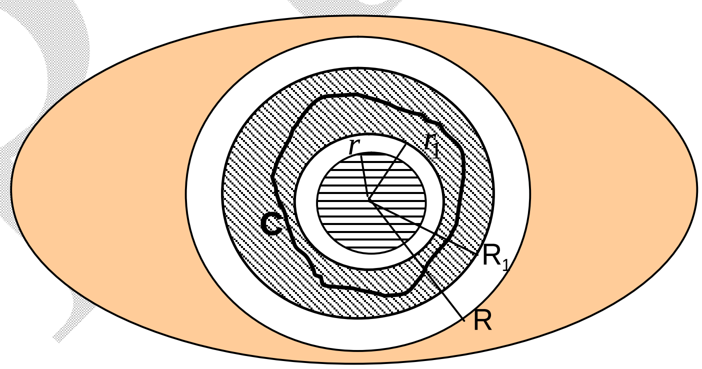
1. Mọi hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K : r < |z-a| < R$ đều có thể khai triển thành chuỗi Laurent (1.92).

2. Ngược lại, chuỗi bất kỳ có dạng $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ hội tụ trong hình vành khăn K:

$$r < |z-a| < R;\ 0 \le r < R \le \infty$$

có hàm tổng là $f(z)$ thì chuỗi này là chuỗi Laurent của hàm tổng $f(z)$ trong hình vành khăn K.

Chứng minh:



Hình 1.15

1. Với mọi $z_0 \in K : r < |z_0 - a| < R$ do đó tồn tại r_1, R_1 sao cho

$$r < r_1 < |z_0 - a| < R_1 < R.$$

Gọi là K_1 hình vành khăn: $r_1 < |z_0 - a| < R_1$ thì $f(z)$ cũng giải tích trong K_1.

Áp dụng hệ quả 1.2 và công thức (1.66) đối với hàm $f(z)$ tại $z_0 \in K_1$ ta có

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

trong đó C_{R_1}, C_{r_1} lần lượt là đường tròn tâm a bán kính $R_1,\ r_1$.

- Xét hàm $f_1(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, tương tự cách chứng minh định lý 1.13 ta có

$$f_1(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}f(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right)(z_0-a)^n$$

Đặt $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ thì $f_1(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_0-a)^n$.

- Xét hàm $f_2(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, tương tự chứng minh định lý 1.13 ta xét

$$\frac{-1}{z-z_0}=\frac{1}{(z_0-a)-(z-a)}=\frac{1}{(z_0-a)\left(1-\dfrac{z-a}{z_0-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(z_0-a)^n}.$$

Vì $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|=\frac{r_1}{|z_0-a|}<1$ đều với mọi $z\in C_{r_1}$, do đó chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(z_0-a)^n}$ hội tụ đều với mọi $z\in C_{r_1}$. Vì vậy có thể chuyển dấu tích phân vào trong dấu tổng của chuỗi:

$$f_2(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}f(z)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(z_0-a)^n}\right)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}f(z)(z-a)^{n-1}dz\right)\frac{1}{(z_0-a)^n}$$

Đặt $c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}f(z)(z-a)^{n-1}dz$ thì

$$f_2(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z_0-a)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z_0-a)^{-n}.$$

Thay chỉ số $-n$ mà n chạy qua $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ bởi chỉ số n chạy qua $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$ trong công thức trên, cuối cùng ta được.

$$f(z_0)=f_1(z_0)+f_2(z_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z_0-a)^n,\quad \forall z_0\in K.$$

Với đường cong C bất kỳ bao quanh a nằm trong hình vành khăn K, ta có thể chọn r_1, R_1 thỏa mãn $r < r_1 < R_1 < R$ sao cho đường cong kín C cũng vẫn nằm hoàn toàn trong K_1. Lúc đó:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad \text{với mọi } n \geq 0,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad \text{với mọi } n < 0.$$

2. Ngược lại, giả sử chuỗi $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ hội tụ trong hình vành khăn K:

$$0 \leq r < |z-a| < R \leq \infty.$$

Với mỗi $z \in K$, chọn $r_1 < R_1$ thích hợp sao cho $r_1 < |z-a| < R_1$, khi đó chuỗi hội tụ đều trong $\overline{K_1}$: $r_1 \leq |z-a| \leq R_1$. Chọn đường cong kín C nằm hoàn toàn trong K_1 bao quanh điểm a. Áp dụng công thức (1.62) ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{c_k (z-a)^k}{(z-a)^{n+1}}dz = c_n.$$

Như vậy chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ là chuỗi Laurent của hàm tổng $f(z)$.

Nhận xét 1.7:

1) Các hệ số c_n trong (1.92) không bằng $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ vì $f(z)$ không giải tích tại a.

2) Hình vành khăn $K: r < |z-a| < R$ với $0 \leq r < R \leq \infty$ có các trường hợp riêng:

- Khi $r = 0$ thì K là hình tròn mở tâm a bán kính R bỏ đi điểm a: $0 < |z-a| < R$.
- Khi $R = \infty$ thì K là miền ngoài của hình tròn tâm a bán kính r: $|z-a| > r$.

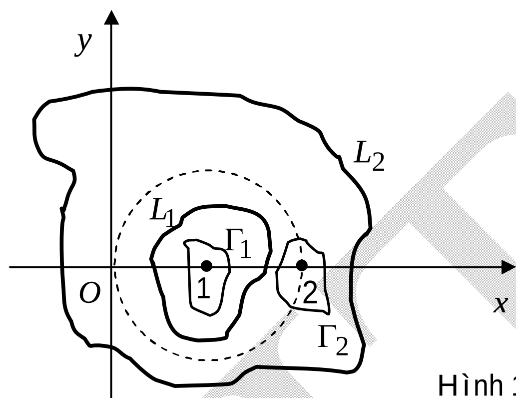
3) Hình vành khăn K trong định lý 1.16 là hình vành khăn tâm a lớn nhất mà $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn này. Vì vậy trên C_R và C_r có ít nhất một điểm mà $f(z)$ không giải tích tại đó.

4) Từ tính duy nhất của chuỗi Laurent suy ra rằng nếu hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K: r < |z-a| < R$ và chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ có tổng là $f(z)$ thì chuỗi này là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$.

5) Sử dụng tính chất tồn tại và duy nhất của chuỗi Laurent ta có thể xây dựng phép biến đổi Z ở mục 1.6.

Ví dụ 1.25: Khai triển hàm $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ thành chuỗi Laurent có tâm tại $z=1$.

Giải: Rõ ràng rằng hàm $f(z)$ không giải tích tại 1 và 2. Vì vậy, khi khai triển theo chuỗi Laurent tâm tại 1 thì chỉ khai triển được trong hai miền: $0<|z-1|<1$ hoặc $|z-1|>1$



Hình 1.16

a. Khai triển Laurent trong miền $0<|z-1|<1$:

Chọn đường cong kín L_1 bao quanh 1 nằm trong miền này: $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{L_1}\dfrac{\frac{1}{z-2}}{(z-1)^{n+2}}dz$.

- $n+2\le 0 \Rightarrow c_n=0$ (theo định lý 1.4).
- $n=-1 \Rightarrow c_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{L_1}\dfrac{\frac{1}{z-2}}{z-1}dz=\dfrac{1}{z-2}\Big|_{z=1}=-1$ (theo công thức 1.58).
- $n\ge 0 \Rightarrow c_n=\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{1}{z-2}\right)^{(n+1)}\Bigg|_{z=1}=\dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+2}}=-1$

(xem công thức 1.68)

Vậy $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$.

b. Khai triển Laurent trong miền $|z-1|>1$:

Chọn đường cong kín L_2 bao quanh 1 nằm trong miền này.

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{1}{(z-2)(z-1)^{n+2}}dz .$$

Chọn Γ_1, Γ_2 lần lượt là 2 đường cong kín nằm trong L_2 bao quanh 1 và 2.

Áp dụng công thức (1.61) hệ quả 1.2 của định lý 1.4 ta có:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2} \frac{1}{(z-2)(z-1)^{n+2}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)}dz$$

Áp dụng công thức (1.69) ta được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}}dz = \begin{cases} 0 & \text{nÕu } n \le -2 \\ \left.\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{1}{(z-2)}\right)^{(n+1)}\right|_{z=1} & \text{nÕu } n \ge -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{nÕu } n \le -2 \\ -1 & \text{nÕu } n \ge -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)}dz = \left.\frac{1}{(z-1)^{n+2}}\right|_{z=2} = 1, \text{ với mọi } n\,.$$

Vậy $c_n = \begin{cases} 1 & \text{nÕu } n \le -2 \\ 0 & \text{nÕu } n \ge -1 \end{cases} \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$.

Ta cũng có thể khai triển Laurent của hàm $f(z)$ cách phân tích thành tổng của các phân thức hữu tỉ tối giản

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

- Trong miền $0 < |z-1| < 1$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n\,.$$

- Trong miền $|z-1| > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|z-1|} < 1$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}\,.$$

1.4.4.2 Điểm bất thường cô lập

Định nghĩa 1.9: *Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $0<|z-a|<R$ và không giải tích tại a thì a được gọi là điểm bất thường cô lập hay kỳ dị cô lập của hàm $f(z)$.*

Theo định lý 1.16 ta có thể khai triển hàm giải tích trong hình vành khăn ứng với điểm bất thường cô lập thành chuỗi Laurent. Có ba trường hợp xảy ra:

a. Nếu chuỗi Laurent của hàm chỉ có phần đều, nghĩa là

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$

do đó tồn tại $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$.

Đặt $f(a)=c_0$ thì $f(z)$ giải tích trong hình tròn $|z-a|<R$. Điểm a được gọi là ***điểm bất thường bỏ được***.

b. Nếu phần chính chỉ có một số hữu hạn các số hạng, nghĩa là

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$

trong đó $c_{-n}\neq 0$ thì a được gọi là ***cực điểm** và n **được gọi là cấp của cực điểm***.

Cực điểm cấp 1 được gọi là *cực điểm đơn*.

c. Nếu phần chính có vô số số hạng thì a được gọi là ***điểm bất thường cốt yếu***.

Người ta còn chứng minh được rằng điểm bất thường cô lập a là:

- bỏ được khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.
- cực điểm khi và chỉ khi tồn tại giới hạn là vô cùng $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.
- cốt yếu khi và chỉ khi không tồn tại $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Ví dụ 1.26:

- $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\cdots \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin z}{z}=1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\dfrac{z^6}{7!}+\cdots$

  Vậy $z=0$ là điểm bất thường bỏ được của hàm số $\dfrac{\sin z}{z}$.

- Hàm $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ trong ví dụ 1.25 có $z=1$ là cực điểm cấp 1.
- Hàm $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots+\dfrac{1}{n!z^n}+\cdots$ có $z=0$ là điểm bất thường cốt yếu.

Định lý 1.17: Giả sử hai hàm $f(z)$, $g(z)$ giải tích tại a và a là không điểm lần lượt cấp n, m của $f(z)$ và $g(z)$. Khi đó a là điểm bất thường của $\dfrac{f(z)}{g(z)}$:

- bỏ được nếu $n \geq m$
- cực điểm cấp $m - n$ nếu $n < m$.

1.5 THẶNG DƯ VÀ ỨNG DỤNG

1.5.1 Định nghĩa thặng dư

Giả sử $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K = \{z \mid 0 < |z - a| < R\}$ có a là điểm bất thường cô lập. Từ hệ quả 1.2 ta suy ra rằng tích phân lấy theo mọi đường cong kín C bất kỳ bao điểm a nằm trong hình vành khăn K là một số phức không phụ thuộc vào đường C. Ta gọi số phức này là ***thặng dư của*** $f(z)$ ***tại*** a, ký hiệu

$$\left[\operatorname{Res} f(z); a\right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \qquad \textbf{(1.93)}$$

1.5.2 Cách tính thặng dư

a. Từ công thức khai triển Laurent của hàm trong hình vành khăn $K: 0 < |z - a| < R$ (công thức (1.92)), ta có

$$\left[\operatorname{Res} f(z); a\right] = c_{-1} \qquad \textbf{(1.94)}$$

trong đó c_{-1} là hệ số của số hạng ứng với $\dfrac{1}{z-a}$ trong khai triển Laurent của hàm $f(z)$.

Chẳng hạn, từ ví dụ 24 ta có $\left[\operatorname{Res} \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}; 1\right] = -1$

b. Thặng dư tại cực điểm đơn

Nếu a là cực điểm đơn của $f(z)$ thì

$$\left[\operatorname{Res} f(z); a\right] = \lim_{z \to a} (z - a) f(z) \qquad \textbf{(1.95)}$$

Thật vậy, khai triển Laurent của $f(z)$ tại a có dạng $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z-a} + f_1(z)$, trong đó $f_1(z)$ là phần đều của khai triển.

Nhân hai vế cho $(z - a)$ và lấy giới hạn khi $z \to a$, ta được:

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = c_{-1} + \lim_{z \to a} (z - a) f_1(z) = c_{-1}.$$

Đặc biệt, nếu $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ thỏa mãn điều kiện $\phi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ thì

$$\left[\operatorname{Res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}; a\right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad \textbf{(1.96)}$$

Thật vậy $\left[\operatorname{Res}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)};a\right]=\lim\limits_{z\to a}(z-a)\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{(z-a)}}=\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

Ví dụ 1.27: $\left[\operatorname{Res}\dfrac{1}{(z-1)(z-2)};2\right]=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{1}{z-1}=1;$

$$\left[\operatorname{Res}\cot z;0\right]=\frac{\cos z}{(\sin z)'}\bigg|_{z=0}=1;\quad \left[\operatorname{Res}\frac{z-3}{z^2+1};i\right]=\frac{z-3}{(z^2+1)'}\bigg|_{z=i}=\frac{i-3}{2i}=\frac{1+3i}{2}.$$

c. Thặng dư tại cực điểm cấp m

Giả sử a là cực điểm cấp m của $f(z)$ thì

$$\left[\operatorname{Res} f(z);a\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \qquad \textbf{(1.97)}$$

Thật vậy, khai triển Laurent của $f(z)$ tại a có dạng $f(z)=\dfrac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\dfrac{c_{-1}}{z-a}+f_1(z)$, trong đó $f_1(z)$ là phần đều của khai triển.

Nhân hai vế cho $(z-a)^m$ ta được

$$(z-a)^m f(z)=c_{-m}+\cdots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+(z-a)^m f_1(z).$$

Lấy đạo hàm liên tiếp đến cấp $m-1$ và lấy giới hạn khi $z\to a$, ta được:

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=(m-1)!c_{-1}+\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f_1(z)\right]=(m-1)!c_{-1}.$$

Ví dụ 1.28: $\left[\operatorname{Res}\dfrac{1}{z(z+2)^3};0\right]=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{(z+2)^3}=\dfrac{1}{8},$

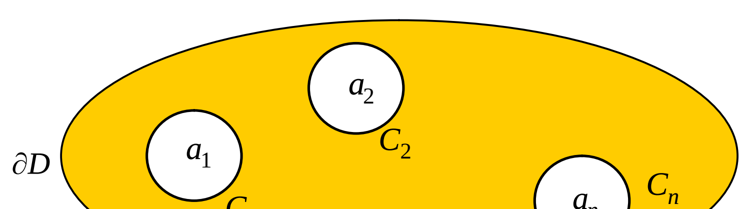
$$\left[\operatorname{Res}\frac{1}{z(z+2)^3};-2\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{z}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -2}\left(\frac{2}{z^3}\right)=-\frac{1}{8}.$$

1.5.3 Ứng dụng của lý thuyết thặng dư

1.5.3.1 Ứng dụng của lý thuyết thặng dư để tính tích phân phức

Định lý 1.18: Cho miền đóng $\overline{D}$ có biên là ∂D. Giả sử $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$, ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1,\dots,a_n\in D$. Khi đó

$$\oint_{\partial D} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} f(z);a_k\right] \qquad \textbf{(1.98)}$$



Chứng minh: Gọi $C_1, \dots, C_n$ là các đường tròn tâm $a_1, \dots, a_n$ có bán kính đủ bé nằm trong D. Gọi $\overline{D'}$ là miền $\overline{D}$ bỏ đi hình tròn có các biên tương ứng là các đường tròn $C_1, \dots, C_n$. Biên của $\overline{D'}$ là ∂D và $C_1, \dots, C_n$.

Áp dụng hệ quả 1.2 cho hàm $f(z)$ giải tích trong $\overline{D'}$ ta có

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{Res} f(z); a_k\right].$$

Ví dụ 1.29: Tính tích phân $I = \oint_C \dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$, trong đó

a. C là đường tròn: $|z| = \dfrac{3}{2}$.

b. C là đường tròn: $|z| = 10$.

Giải: Hàm $\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ có $z = 1$ là cực điểm đơn và $z = -3$ cực điểm kép.

$$\left[\operatorname{Res} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}; 1\right] = \lim_{z \to 1} \frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{e}{16},$$

$$\left[\operatorname{Res} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}; -3\right] = \frac{1}{1!} \lim_{z \to -3} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z-1}\right] = \lim_{z \to -3} e^z \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}\right] = -\frac{5e^{-3}}{16}.$$

a. Khi C là đường tròn $|z| = \dfrac{3}{2}$ thì trong C hàm đã cho chỉ có một cực điểm $z = 1$.

Vậy $I = 2\pi i \dfrac{e}{16} = \dfrac{e\pi i}{8}$.

b. Khi C là đường tròn. $|z| = 10$ thì trong C hàm đã cho có hai cực điểm $z = 1$ và $z = -3$.

Do đó $I = 2\pi i \left(\dfrac{e}{16} - \dfrac{5e^{-3}}{16}\right) = \dfrac{\pi i \left(e^4 - 5\right)}{8e^3}$.

1.5.3.2 Ứng dụng **của lý thuyết thặng dư để tính tích phân thực**

Bổ đề 1.1: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z \geq 0$, trừ ra tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, ..., a_n$ và thoả mãn:

$$\lim_{\operatorname{Im} z \geq 0; z \to \infty} z f(z) = 0 \tag{1.99}$$

Khi đó $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$, trong đó $C_R = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0 \right\}$ (xem hình 1.18).

Chứng minh: Điều kiện (1.99) suy ra: với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $R \geq N$

$$\forall z : \ |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ thì } |zf(z)| < \varepsilon.$$

Có thể chọn $N > 0$ đủ lớn sao cho các điểm bất thường cô lập a_k thỏa mãn $|a_k| < N$, do đó với mọi $R > N$, $f(z)$ giải tích nửa trên đường tròn $C_R : z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$. Vì vậy

$$\left| \int\limits_{C_R} f(z)dz \right| = \left| \int\limits_0^{\pi} f\left(Re^{it}\right) iRe^{it} dt \right| \leq \int\limits_0^{\pi} \left| f\left(Re^{it}\right) iRe^{it} \right| dt < \int\limits_0^{\pi} \varepsilon dt = \varepsilon\pi$$

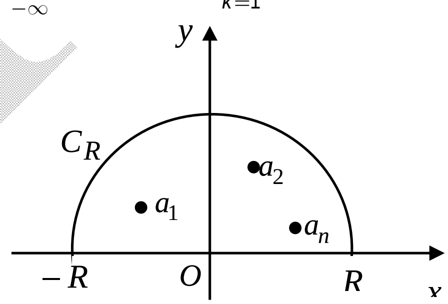
(hoặc xem công thức 1.59). Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f\left(z\right)dz = 0$.

A. Tính tích phân có dạng $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} dx$, trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức thực.

Định lý 1.19: Giả sử $P(z), Q(z)$ là hai đa thức hệ số thực biến phức, bậc của $Q(z)$ lớn hơn bậc của $P(z)$ ít nhất là hai. Nếu $Q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $a_1, ..., a_n$ là các cực điểm nằm trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$ của phân thức $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$. Khi đó

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{Res} R(z); a_k \right] \tag{1.100}$$

Chứng minh:



Hình 1.18*: Cỏc □i□m b□t th□□ng cụ l□p trong n□a tròn c□a hõnh trũn*

Chọn $R > 0$ đủ lớn sao cho các cực điểm $a_1, ..., a_n$ đều ở trong nửa trên đường tròn tâm O bán kính R. Gọi C_R là nửa trên của đường tròn này nằm trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$.

Áp dụng công thức (1.98) của định lý 1.18 ta có đẳng thức sau đúng với mọi $R > 0$ đủ lớn:

$$\int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left[\text{Res } R(z); a_k\right].$$

Tích phân thứ nhất ở vế trái hội tụ. Theo bổ đề 1.1 tích phân thứ hai có giới hạn bằng 0 khi $R \to \infty$ vì thỏa mãn điều kiện (1.99). Vế phải không đổi khi R đủ lớn.

Do đó khi cho $R \to \infty$ ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left[\text{Res } R(z); a_k\right].$$

Ví dụ 1.30: Tính tích phân $I = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Giải: Hàm $R\left(z\right) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ có cực điểm kép $z = i$ nằm trong nửa mặt phẳng $\text{Im}\, z > 0$. Vậy

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \left[\text{Res} \frac{1}{(z^2+1)^2}; i\right] = \pi i \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right] = \pi i \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{\pi}{4}.$$

B. Tính tích phân có dạng $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\beta x dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\beta x dx$

Hai tích phân trên là phần thực và phần ảo của tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\beta x}dx$.

Bổ đề 1.2: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\text{Im}\, z \ge 0$, ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập và thoả mãn:

$$\left|f\left(z\right)\right| \le \frac{M}{R^k},\ \forall z \in C_R;\ k > 0,\ M \text{ là hằng số} \qquad \textbf{(1.101)}$$

thì $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} f\left(z\right)dz = 0$, với mọi $\lambda > 0$,

trong đó $\qquad C_R = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = R,\ \text{Im}\, z \ge 0\right\}$.

Chứng minh: Với mọi $z \in C_R$, đặt $z = Re^{it}$

$$\Rightarrow \int_{C_R} e^{i\lambda z} f\left(z\right)dz = \int_{0}^{\pi} e^{i\lambda Re^{it}} f\left(Re^{it}\right) R\, ie^{it}dt$$

$$\left|\int_{C_R} e^{i\lambda z} f\left(z\right)dz\right| \le \int_{0}^{\pi} \left|e^{i\lambda Re^{it}} f\left(Re^{it}\right) R\, ie^{it}\right| dt \le \frac{M}{R^{k-1}} \int_{0}^{\pi} e^{-\lambda R \sin t} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_{0}^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t} dt$$

Vì $\sin t > \dfrac{t}{\pi}$ khi $0 < t \le \dfrac{\pi}{2}$, do đó

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin t}dt \le \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\lambda R t}{\pi}}dt = \frac{\pi M}{\lambda R^k}\left(1-e^{-\lambda R}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Định lý 1.20: Giải sử $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ là một phân thức hữu tỷ thoả mãn các điều kiện sau:

1. $R(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$ ngoại trừ tại một số hữu hạn các cực điểm $a_1, \dots, a_n$.
2. $R(z)$ có thể có m cực điểm $b_1, \dots, b_m$ trên trục thực và $R(x)e^{i\beta x}$ khả tích tại những điểm này.
3. Bậc của $Q(z)$ lớn hơn bậc của $P(z)$ ít nhất là 1.

Khi đó

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\beta x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} R(z)e^{i\beta z};a_k\right] + \pi i\sum_{k=1}^{m}\left[\operatorname{Res} R(z)e^{i\beta z};b_k\right] \qquad \textbf{(1.102)}$$

Ví dụ 1.31: Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}dx$; $\lambda, a>0$.

Giải: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{x^2+a^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(2\pi i\left[\operatorname{Res}\frac{e^{i\lambda x}}{x^2+a^2};ai\right]\right)=\frac{\pi e^{-\lambda a}}{2a}.$$

Ví dụ 1.32: Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Giải: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right)$.

Hàm $R(z)=\dfrac{1}{z}$ thoả mãn các điều kiện của định lý 1.20, có cực điểm đơn duy nhất $z=0$ trên trục thực, do đó $I=\dfrac{1}{2i}\left(i\pi\left[\operatorname{Res}\dfrac{e^{iz}}{z};0\right]\right)=\dfrac{1}{2i}(i\pi)=\dfrac{\pi}{2}$.

C. Tính tích phân dạng $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\cos nx,\sin mx)dx$.

Đặt $z=e^{ix}$, ta có $\cos nx=\dfrac{z^n+z^{-n}}{2}$, $\sin mx=\dfrac{z^m-z^{-m}}{2i}$, $dx=\dfrac{dz}{iz}$

Khi x biến thiên từ $0 \to 2\pi$ thì $z = e^{ix}$ vạch lên đường tròn đơn vị C theo chiều dương. Vì vậy

$$\int_0^{2\pi} R(\cos nx, \sin mx)dx = \oint_C R\left(\frac{z^n + z^{-n}}{2}, \frac{z^m - z^{-m}}{2i}\right)\frac{dz}{iz} \qquad \textbf{(1.103)}$$

Ví dụ 1.33: Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\sin x}$

Giải:

$$I = \oint_C \frac{1}{5 + \frac{3}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{2dz}{3\left(z^2 + \frac{10i}{3}z - 1\right)} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\frac{2}{3\left(z + \frac{i}{3}\right)(z + 3i)}; -\frac{i}{3}\right] = \frac{\pi}{2},$$

vì hàm số $\frac{2}{3\left(z^2 + \frac{10i}{3}z - 1\right)} = \frac{2}{3\left(z + \frac{i}{3}\right)(z + 3i)}$ chỉ có một cực điểm đơn $z = -\frac{i}{3}$ nằm trong đường tròn đơn vị C.

Ví dụ 1.34: Tính tích phân $K(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{\left|1 - z_0 e^{-ix}\right|^2}dx$, $z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| < 1$

Giải: Đặt $z = e^{-ix} \Rightarrow dz = (-i)zdx$. Khi x tăng từ $-\pi$ đến π thì z vạch nên đường tròn đơn vị theo chiều âm, do đó

$$K(n) = -\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{z^n}{\left|1 - z_0 z\right|^2}\frac{dz}{(-i)z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{(1 - z_0 z)(1 - \overline{z_0 z})}\frac{dz}{z}$$

Mặt khác $\quad z \in C \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Do đó $\quad \frac{z^n}{(1 - z_0 z)(1 - \overline{z_0 z})} \cdot \frac{1}{z} = \frac{z^n}{(1 - z_0 z)\left(1 - \frac{\overline{z_0}}{z}\right)} \cdot \frac{1}{z} = \frac{z^n}{(1 - z_0 z)(z - \overline{z_0})}$.

Trong đường tròn đơn vị C hàm $\frac{z^n}{(1 - z_0 z)(z - \overline{z_0})}$ chỉ có một cực điểm đơn $z = \overline{z_0}$.

Vậy $\quad K(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{(1 - z_0 z)(z - \overline{z_0})}dz = \frac{\left(\overline{z_0}\right)^n}{1 - |z_0|^2}$.

1.6 PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Từ sau Thế chiến thứ II, sự phát triển của công nghệ kỹ thuật số đòi hỏi cần thiết kế và giải quyết các hệ dữ liệu mẫu với thời gian rời rạc (các tín hiệu được lấy mẫu tại những thời điểm rời rạc). Những hệ dữ liệu này thỏa mãn phương trình sai phân, trong đó mỗi thành phần $y(n)$ tại thời điểm n phụ thuộc vào các thành phần tại các thời điểm khác.

Dựa vào tính chất xác định duy nhất của hàm số giải tích trong hình vành khăn $r < |z| < R$ bởi dãy các hệ số trong khai triển Laurent của nó (công thức 1.92 và định lý 1.16), người ta xây dựng phép biến đổi Z và sử dụng để biểu diễn các dãy tín hiệu rời rạc qua các hàm giải tích trong hình vành khăn.

Phép biến đổi Z có rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết xử lý tín hiệu và lọc số, vì nói chung việc khảo sát các hàm giải tích sẽ thuận lợi và dễ dàng hơn so với khảo sát các dãy rời rạc.

1.6.1 Định nghĩa phép biến đổi Z

Định nghĩa 1.10: *Biến đổi Z của dãy tín hiệu* $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *là hàm biến phức*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^n \qquad \textbf{(1.104)}$$

Miền hội tụ của chuỗi (1.104) là miền xác định của biến đổi Z.

Ký hiệu $\qquad X(z) = \mathrm{Z}\{x(n)\}$

Trường hợp dãy tín hiệu $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ chỉ xác định với $n \geq 0$, nghĩa là $x(n) = 0$, $\forall n < 0$, khi đó biến đổi Z của tín hiệu này được gọi là ***biến đổi một phía***.

1.6.2 Miền xác định của biến đổi Z

Để tìm miền xác định của phép biến đổi Z ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Cauchy hoặc tiêu chuẩn D'Alembert (định lý 1.11, công thức (1.78)).

Ta tách chuỗi vô hạn hai phía thành tổng của 2 chuỗi:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(z^{-1}\right)^n = X_1(z) + X_2(z) \qquad \textbf{(1.105)}$$

trong đó $X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(z^{-1}\right)^n$, $X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\left(z^{-1}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} x(-m) z^m$ (đặt $m = -n$).

- Nếu $\quad r = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|x(n+1)|}{|x(n)|}$ (tiêu chuẩn D'Alembert)

hoặc $\qquad r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x(n)|}$ (tiêu chuẩn Cauchy)

thì chuỗi $X_1(z)$ hội tụ khi $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|} < \dfrac{1}{r}$ hay $r < |z|$.

- Nếu $\rho = \lim_{m\to\infty} \dfrac{|x(-m-1)|}{|x(-m)|}$ (tiêu chuẩn D'Alembert)

hoặc $\rho = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|x(-m)|}$ (tiêu chuẩn Cauchy)

thì chuỗi $X_2(z)$ hội tụ khi $|z| < \dfrac{1}{\rho} = R$.

Tóm lại ta có hai tiêu chuẩn sau về miền xác định của $X(z)$.

♦ Tiêu chuẩn D'Alembert

Nếu $$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|x(n+1)|}{|x(n)|} \text{ và } \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x(-n-1)|}{|x(-n)|} \tag{1.106}$$

thì miền xác định của $X(z)$ là $r < |z| < R$.

♦ Tiêu chuẩn Cauchy

Nếu $$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x(n)|} \text{ và } \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x(-n)|} \tag{1.107}$$

thì miền xác định của $X(z)$ là $r < |z| < R$.

♦ Trường hợp $x(n) = 0,\ \forall n > n_0$ thì $r = 0$, do đó miền xác định có dạng $0 < |z| < R$.

$$x(n) = 0,\ \forall n > n_0 \text{ có miền xác định } 0 < |z| < R \tag{1.108}$$

♦ Trường hợp $x(n) = 0,\ \forall n \le n_0 < 0$ thì $R = \infty$, miền xác định có dạng $r < |z|$. Ta gọi là ***phép biến đổi một phía***.

$$x(n) = 0,\ \forall n \le n_0 < 0 \text{ có miền xác định } r < |z| \tag{1.109}$$

Ví dụ 1.35: *Tìm biến đổi* Z *cúa tín hiệu* $x(n) = \begin{cases} 2^n & \text{nÕu } -\infty < n \le 3 \\ 0 & \text{nÕu } n > 3 \end{cases}$

Giải: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{3} 2^n z^{-n} = \dfrac{8}{z^3} + \dfrac{4}{z^2} + \dfrac{2}{z} + 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n}$.

Đổi $m = -n$ vào chuỗi cuối cùng vế phải ở trên ta được:

$$1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^m = \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}, \quad \text{với } |z| < 2.$$

Vậy $X(z) = \dfrac{8}{z^3} + \dfrac{4}{z^2} + \dfrac{2}{z} + \dfrac{2}{2-z}$ với $0 < |z| < 2$.

Mặt khác theo nhận xét trên ta có $x(n) = 0,\ \forall n > 3 \ \Rightarrow r = 0$.

$$x(n) = 2^n,\ \forall n \le 3 \ \Rightarrow x(-n) = 2^{-n},\ \forall n \ge 3 \ \Rightarrow \frac{x(-n-1)}{x(-n)} = \frac{2^{-n-1}}{2^{-n}} = \frac{1}{2}$$

hoặc $$\sqrt[-n]{|x(n)|} = \sqrt[-n]{2^n} = \frac{1}{2},\ \forall n < 0 \ \Rightarrow \ R = 2$$

Vậy biến đổi Z có miền xác định $0 < |z| < 2$.

Ví dụ 1.36: *Tìm biến đổi Z của tín hiệu xác định bởi* $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}$.

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(z^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4z}} = \frac{4z}{4z-3},\ \text{với } \left|\frac{3}{4z}\right| < 1 \text{ hay } |z| > \frac{3}{4}.$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\left(z^{-1}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-n}\left(z^{-1}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{3z}{4}\right)^m \ (\text{đặt } m = -n)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3z}{4}\right)^m - 1 = \frac{1}{1-\frac{3z}{4}} - 1 = \frac{4}{4-3z} - 1 = \frac{3z}{4-3z},\ \text{với } \left|\frac{3z}{4}\right| < 1 \text{ hay } |z| < \frac{4}{3}.$$

Vậy $X(z) = \frac{4z}{4z-3} + \frac{3z}{4-3z} = \frac{7z}{(4z-3)(4-3z)}$, với $\frac{3}{4} < |z| < \frac{4}{3}$.

Ta cũng thấy rằng $r = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x(n)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}} = \frac{3}{4}$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x(-n)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{|-n|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}} = \frac{3}{4} \Rightarrow R = \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 1.37: *Tìm biến đổi Z một phía của tín hiệu* $x(n) = \begin{cases} a^n & \text{nÕu } n \ge 0 \\ 0 & \text{nÕu } n < 0;\ a \ne 0 \end{cases}$

Giải:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad \textbf{(1.110)}$$

có miền xác định $|z| > |a|$, (công thức 1.109).

- Trường hợp $a = 1$ dãy tín hiệu $\eta(n) = \begin{cases} 1 & \text{nÕu } n \ge 0 \\ 0 & \text{nÕu } n < 0 \end{cases}$

có biến đổi Z là $\mathrm{H}(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$.

- Trường hợp $a=-1$, $x(n)=(-1)^n; n\ge 0$ có biến đổi Z là $X(z)=\dfrac{1}{1+z^{-1}}=\dfrac{z}{z+1}$.

Ví dụ 1.38: *Tìm biến đổi Z một phía của tín hiệu* $x(n)=\begin{cases} e^{-anT} & \text{nÕu } n\ge 0 \\ 0 & \text{nÕu } n<0 \end{cases}$

với a là số phức.

Giải: Theo ví dụ 1.37 ta có

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT}z^{-n}=\frac{z}{z-e^{-aT}} \qquad \textbf{(1.111)}$$

có miền xác định $|z|>\left|e^{-aT}\right|$

Trường hợp a là số thực thì $\left|e^{-aT}\right|=e^{-aT}$, do đó miền xác định của biến đổi Z là $|z|>e^{-aT}$.

- Trường hợp $a=i\beta$ là số thuần ảo thì $\left|e^{-i\beta T}\right|=1$, do đó miền xác định của biến đổi Z là $|z|>1$.
- Trường hợp $a=\alpha+i\beta$ thì $\left|e^{-(\alpha+i\beta)T}\right|=e^{-\alpha T}$, do đó miền xác định của biến đổi Z là $|z|>e^{-\alpha T}$.

Ví dụ 1.39: *Tìm biến đổi Z của tín hiệu* $x(n)=\begin{cases} 1 & \text{nÕu } 0\le n\le 5 \\ (1/2)^n & \text{nÕu } n>6 \end{cases}$

Giải: $X(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{5} z^{-n}+\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n$.

Áp dụng công thức $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n=\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ và công thức tổng của chuỗi cấp số nhân ta được

$$X(z)=\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}+\left(\frac{1}{2z}\right)^6\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^m=\frac{z^6-1}{z^6-z^5}+\left(\frac{1}{2z}\right)^6\frac{1}{1-\dfrac{1}{2z}}=\frac{z^6-1}{z^6-z^5}+\frac{1}{(2z)^6-(2z)^5},$$

miền xác định $|z|>\dfrac{1}{2}$.

1.6.3 Tính chất của biến đổi Z

Các tín hiệu $\{x(n)\}$ thường được xét từ thời điểm $n=0$ trở đi. Vì vậy hầu như chỉ xét phép biến đổi Z một phía.

Các tính chất sau cũng chỉ xét với **phép biến đổi Z một phía**.

a. Tuyến tính:

$$Z\left\{Ax(n)+By(n)\right\}=AZ\left\{x(n)\right\}+BZ\left\{y(n)\right\}, A, B \text{ là hằng số.} \tag{1.112}$$

b. Đồng dạng:

$$\text{Nếu } X(z)=Z\left\{x(n)\right\} \text{ thì } Z\left\{a^{-n}x(n)\right\}=X(az). \tag{1.113}$$

c. Tịnh tiến

$$\text{Nếu } X(z)=Z\left\{x(n)\right\} \text{ thì } Z\left\{x(n+1)\right\}=zX(z)-zx(0),$$

$$Z\left\{x(n+m)\right\}=z^{m}X(z)-z^{m}x(0)-z^{m-1}x(1)-\ldots-zx(m-1);\forall m>0 \tag{1.114}$$

d. Trễ

$$\text{Ký hiệu } \eta(n-k)=\begin{cases}1 & \text{nÕu } n\ge k\\ 0 & \text{nÕu } n<k\end{cases} \tag{1.115}$$

$$\text{Nếu } X(z)=Z\left\{x(n)\right\} \text{ thì } Z\left\{x(n-k)\eta(n-k)\right\}=z^{-k}X(z). \tag{1.116}$$

e. Nhân với n

$$\text{Nếu } X(z)=Z\left\{x(n)\right\} \text{ thì } Z\left\{nx(n)\right\}=-z\frac{dX(z)}{dz}. \tag{1.117}$$

f. Dãy tuần hoàn

Xét dãy tín hiệu rời rạc chu kỳ N có dạng $\left\{f(n)\right\}=\left\{\underbrace{f_0 f_1 f_2 \ldots f_{N-1}}_{\text{Chu kú thø nhÊt}}\, f_0 f_1 f_2 \ldots\right\}$,

Đặt $$x(n)=\begin{cases}f_n & \text{nÕu } 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{nÕu } n\ge N\end{cases}$$

$$\text{Nếu } X(z)=Z\left\{x(n)\right\} \text{ thì } Z\left\{f(n)\right\}=\frac{X(z)}{1-z^{-N}},\ \left|z^{N}\right|>1. \tag{1.118}$$

g. Tích chập

Tích chập của hai dãy tín hiệu $\left\{x(n)\right\}$ và $\left\{y(n)\right\}$ là dãy tín hiệu $\left\{z(n)\right\}$ được ký hiệu và xác định như sau

$$z(n)=x(n)*y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-k)y(k) \tag{1.119}$$

Nếu hai dãy tín hiệu $\left\{x(n)\right\}$ và $\left\{y(n)\right\}$ chỉ xác định khi $n\ge 0$ thì tích chập trở thành

$$z(n)=x(n)*y(n)=\sum_{k=0}^{n}x(k)y(n-k)=\sum_{k=0}^{n}x(n-k)y(k)$$

và biến đổi Z một phía có tính chất

$$Z\left\{x(n)*y(n)\right\}=X(z)Y(z) \tag{1.120}$$

Ví dụ 1.40: *Tìm biến đổi* Z *một phía của tín hiệu* $x(n)=\begin{cases}\cos n\omega T & \text{nÕu } n\ge 0\\ 0 & \text{nÕu } n<0\end{cases}$

Giải: $X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cos n\omega T).z^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(e^{in\omega T}+e^{-in\omega T}\right)z^{-n}$.

Theo ví dụ 1.38 ứng với trường hợp số a thuần ảo và áp dụng công thức (1.110) ta được

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(e^{in\omega T}+e^{-in\omega T}\right)z^{-n}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega T}}+\frac{z}{z-e^{-i\omega T}}\right)=\frac{z\left[z-\cos(\omega T)\right]}{z^2-2z\cos(\omega T)+1},$$

miền xác định $|z|>1$.

Ví dụ 1.41: Từ ví dụ 1.37 ta có $Z\left\{a^n\right\}=\frac{1}{1-az^{-1}}$, áp dụng công thức (1.115) ta được

$$Z\left\{na^n\right\}=-z\frac{d}{dz}\left[\left(1-az^{-1}\right)^{-1}\right]=(-z)(-1)\left(1-az^{-1}\right)^{-2}(-a)(-1)z^{-2}=\frac{az}{(z-a)^2}.$$

1.6.4 Biến đổi Z ngược

Theo định lý 1.16 mỗi hàm biến phức $X(z)$ giải tích trong hình vành khăn $r<|z|<R$, ($0\le r<R\le\infty$) đều có thể khai triển duy nhất thành chuỗi Laurent:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n \quad \text{với} \quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{X(z)}{z^{n+1}}dz,$$

C là đường cong kín bao quanh gốc O và nằm trong hình vành khăn $r<|z|<R$.

Đặt $x(n)=c_{-n}$ thì

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \quad \text{với} \quad x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz. \qquad \textbf{(1.121)}$$

Theo (1.121) $\left\{x(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ xác định duy nhất bởi $X(z)$ được gọi là ***biến đổi ngược của biến đổi*** Z *của* $X(z)$. Ký hiệu

$$\left\{x(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}=Z^{-1}\left\{X(z)\right\}.$$

Nhận xét 1.8: 1) Tương tự khai triển Taylor, do tính chất duy nhất của khai triển hàm số giải tích trong hình vành khăn $r<|z|<R$ thành tổng của chuỗi Laurent nên ta có thể sử dụng phương pháp tính trực tiếp theo công thức (1.121) hoặc các phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa để tìm biến đổi ngược của phép biến đổi Z.

2) Theo công thức (1.105), (1.106), (1.107) miền xác định của phép biến đổi Z một phía có dạng $|z|>r$. Vì vậy khi tìm biến đổi ngược Z^{-1} thì hàm ảnh phải giải tích trong miền $|z|>r$.

3) Có thể sử dụng thặng dư để tính các giá trị $x(n)$ theo công thức (1.119).

4) Để tìm phép biến đổi ngược Z^{-1} ta có thể sử dụng các tính chất của phép biến đổi thuận. Chẳng hạn

$$Z^{-1}\left\{AX(z)+BY(z)\right\}=AZ^{-1}\left\{X(z)\right\}+BZ^{-1}\left\{Y(z)\right\} \text{ (tuyến tính)}$$

$$Z^{-1}\left\{X(z)\right\}=x(n)\Rightarrow Z^{-1}\left\{X(az)\right\}=a^{-n}x(n) \text{ (đồng dạng) …}$$

Ví dụ 1.42: Hàm $X(z)=\dfrac{z+2}{2z^2-7z+3}=\dfrac{z+2}{2\left(z^2-\frac{7}{2}z+\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{z-3}$ giải tích tại mọi $z\neq\frac{1}{2}, 3$. Vì vậy ta có thể tìm biến đổi ngược trong 3 miền sau:

a. Miền $0<|z|<\frac{1}{2}$:

$$X(z)=\frac{1}{1-2z}+\frac{-1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}2^nz^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(2^{-n}-\frac{1}{3^{-n+1}}\right)z^{-n}.$$

Vậy $x(n)=\begin{cases}2^{-n}-\dfrac{1}{3^{-n+1}} & \text{nÕu } -\infty<n\le 0\\ 0 & \text{nÕu } n>0\end{cases}.$

b. Miền $\frac{1}{2}<|z|<3$:

$$X(z)=\frac{-1}{2z\left(1-\frac{1}{2z}\right)}+\frac{-1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)}=\frac{-1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{-n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{0}3^{n-1}z^{-n}.$$

Vậy $x(n)=\begin{cases}-3^{n-1} & \text{nÕu } -\infty<n\le 0\\ -2^{-n} & \text{nÕu } n>0\end{cases}.$

c. Miền $3<|z|$: (Biến đổi Z ngược một phía)

$$X(z)=\frac{-1}{2z\left(1-\frac{1}{2z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)}=\frac{-1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{-n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}3^{n}z^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}z^{-n}$$

Vậy $x(n)=\begin{cases}0 & \text{nÕu } -\infty<n\le 0\\ 3^{n-1}-2^{-n} & \text{nÕu } n\ge 1\end{cases}$.

A. Tìm biến đổi Z ngược bằng cách khai triển thành chuỗi hoặc tính thặng dư

Ví dụ 1.43: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Giải: Hàm $X(z)$ không giải tích tại $z=1$ và $z=2$, do đó biến đổi Z ngược một phía của $X(z)$ có dạng $|z|>2$.

Cách 1: Khai triển thành chuỗi

Ta có $$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z(1-2z^{-1})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(2z^{-1})^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}z^{-(n+1)}\text{, khi } |z|>2.$$

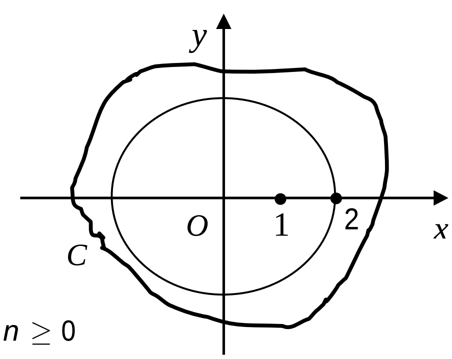
$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z(1-z^{-1})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-(n+1)}\text{, khi } |z|>1.$$

Vậy khi $|z|>2$ ta có khai triển Laurent của hàm $X(z)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}z^{-(n+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}z^{-(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n}-1)z^{-(n+1)}=\sum_{m=2}^{\infty}(2^{m-1}-1)z^{-m}$$

Do đó biến đổi Z ngược của $X(z)$ là

$$x(n)=\begin{cases}0 & \text{nÕu } n\le 1\\ 2^{n-1}-1 & \text{nÕu } n\ge 2\end{cases}$$



Hình 1.18

Cách 2: Dùng thặng dư và sử dụng công thức (1.121) để tìm biến đổi ngược như sau

$$x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}dz\text{ , } n\ge 0$$

trong đó C là đường khép kín bất kỳ nằm trong miền $|z|>2$

Khi $n>0$, sử dụng thặng dư và công thức (1.98) ta được

$$x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}dz=\left[\operatorname{Res}\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)};1\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)};2\right]=-1+2^{n-1}$$

Khi $n=0$ hàm dưới dấu tích phân có 3 điểm bất thường cô lập là 0, 1, và 2, vậy

$$x(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{-1}X(z)dz=\left[\operatorname{Res}\frac{X(z)}{z};0\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{X(z)}{z};1\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{X(z)}{z};2\right]=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}=0\,.$$

Do đó $x(n)=\begin{cases}0 & \text{nếu } n\le 0\\ 2^{n-1}-1 & \text{nếu } n>0\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{nếu } n\le 1\\ 2^{n-1}-1 & \text{nếu } n\ge 2\end{cases}$

Ví dụ 1.44: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z)=\dfrac{z^2+2z}{(z-1)^2}$.

Giải:

Cách 1: Khai triển thành chuỗi trong miền $|z|>1$.

$$\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}\Rightarrow -\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-n)z^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{z^2+2z}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}n(z^2+2z)z^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n+1}+2nz^{-n}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)z^{-m}+\sum_{n=0}^{\infty}2nz^{-n}=\sum_{m=0}^{\infty}(3m+1)z^{-m}\,.$$

Cách 2: Sử dụng công thức (1.121) để tìm biến đổi ngược như sau: Với mọi $n\ge 0$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n+1}+2z^n}{(z-1)^2}dz=\left[\operatorname{Res}\frac{z^{n+1}+2z^n}{(z-1)^2};1\right],$$

$$x(n)=\left[\operatorname{Res}\frac{z^{n+1}+2z^n}{(z-1)^2};1\right]=\frac{d}{dz}\left(z^{n+1}+2z^n\right)\Big|_{z=1}=3n+1,\ \ n\ge 0.$$

Vậy $x(n)=3n+1,\ n\ge 0$.

B. Tìm biến đổi Z ngược của các phân thức hữu tỉ

Để tìm biến đổi Z ngược một phía của các phân thức hữu tỉ dạng $X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ta phân tích thành tổng của các phân thức tối giản sử dụng các tính chất của biến đổi Z.

Ví dụ 1.45: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$.

Giải: Phân tích thành tổng của các phân thức tối giản ta có

$$X(z)=\frac{z}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z+1}\right).$$

Theo công thức (1.108) ví dụ 1.37 ta có $Z^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-1}\right\}=1$, $Z^{-1}\left\{\dfrac{z}{z+1}\right\}=(-1)^n$

$$\Rightarrow Z^{-1}\left\{X(z)\right\}=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right),\ n\geq 0.$$

Ví dụ 1.46: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z)=\dfrac{2z^2}{(z+2)(z+1)^2}$.

Giải: Phân tích thành tổng của các phân thức tối giản ta có

$$X(z)=\frac{2z^2}{(z+2)(z+1)^2}=-\frac{4z}{z+2}+\frac{4z}{z+1}-\frac{2z}{(z+1)^2}.$$

Theo công thức (1.110) ví dụ 1.37 ta có

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\}=(-1)^n,\ Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+2}\right\}=(-2)^n,$$

Áp dụng công thức (1.115) ta có

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z+1)^2}\right\}=Z^{-1}\left\{z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+1}\right)\right\}=-nZ^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\}=-n(-1)^n.$$

$$\Rightarrow Z^{-1}\left\{X(z)\right\}=4(-1)^n-4(-2)^n+2n(-1)^n,\ n\geq 0.$$

Ví dụ 1.47: Tìm biến đổi Z ngược một phía của $X(z)=\dfrac{z^2+z}{(z-2)^2}$.

Giải: Phân tích thành tổng của các phân thức tối giản ta có $\dfrac{z^2+z}{(z-2)^2}=\dfrac{z}{z-2}+\dfrac{3z}{(z-2)^2}$.

Theo công thức (1.110) ví dụ 1.37 ta có $Z^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-2}\right\}=2^n$

Áp dụng công thức (1.117) ta có

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-2)^2}\right\}=\frac{1}{2}Z^{-1}\left\{-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-2}\right)\right\}=\frac{n}{2}Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}=\frac{n}{2}2^n.$$

$$\Rightarrow Z^{-1}\left\{X(z)\right\}=2^n+\frac{3}{2}n2^n=\left(\frac{3}{2}n+1\right)2^n,\ n\geq 0.$$

1.6.5 Ứng dụng biến đổi Z để giải phương trình sai phân

Có thể sử dụng các tính chất của phép biến đổi Z và phép biến đổi ngược để giải các phương trình sai phân.

Ví dụ 1.48: Giải phương trình sai phân bậc hai

$$2x(n+2)-3x(n+1)+x(n)=5\cdot 3^n,\ n\geq 0$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0$ và $x(1)=1$.

Giải: Thực hiện biến đổi Z hai vế của phương trình và áp dụng công thức (1.112) ta được

$$2Z\left\{x(n+2)\right\}-3Z\left\{x(n+1)\right\}+Z\left\{x(n)\right\}=5Z\left\{3^n\right\},$$

Từ công thức (1.114) và ví dụ 1.37 ta có

$$2z^2X(z)-2z^2x(0)-2zx(1)-3\left[zX(z)-zx(0)\right]+X(z)=\frac{5z}{z-3}.$$

Thay điều kiện đầu vào kết quả trên ta được

$$(2z-1)(z-1)X(z)=\frac{z(2z-1)}{z-3}\ \Rightarrow X(z)=\frac{z}{(z-3)(z-1)}.$$

$$X(z)=\frac{z}{(z-3)(z-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z-1}\right).$$

Do đó nghiệm của phương trình sai phân cần tìm là (xem công thức 1.110 ví dụ 1.37 và nhận xét 1.8-4)

$$x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right),\ n\ge 0$$

Ví dụ 1.49: Giải phương trình sai phân bậc hai

$$x(n+2)-2x(n+1)+x(n)=1,\ n\ge 0$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0$ và $x(1)=3/2$.

Giải: Thực hiện biến đổi Z hai vế của phương trình và áp dụng công thức (1.112) ta được

$$\mathcal{Z}\left\{x(n+2)\right\}-2\mathcal{Z}\left\{x(n+1)\right\}+\mathcal{Z}\left\{x(n)\right\}=\mathcal{Z}\left\{1\right\},$$

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)-2\left[zX(z)-zx(0)\right]+X(z)=\frac{z}{z-1}$$

Thay điều kiện đầu vào kết quả trên ta được $X(z)=\dfrac{3z^2-z}{2(z-1)^3}$.

$$x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{3z^2-z}{2(z-1)^3}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{3z^{n+1}-z^n}{2(z-1)^3}dz=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{3z^{n+1}}{2}-\frac{z^n}{2}\right)\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}n^2+n.$$

Ví dụ 1.50: Giải phương trình sai phân bậc hai

$$x(n+2)+b^2x(n)=0,\ n\ge 0$$

với $|b|<1$ và thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=b^2$ và $x(1)=0$.

Giải: Thực hiện biến đổi Z hai vế của phương trình và áp dụng công thức (1.112) ta được

$$\mathcal{Z}\left\{x(n+2)\right\}+b^2\mathcal{Z}\left\{x(n)\right\}=0,$$

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+b^2X(z)=0$$

Thay điều kiện đầu vào kết quả trên ta được $X(z)=\dfrac{b^2z^2}{z^2+b^2}$.

$$x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b^2z^2}{z^2+b^2}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{b^2z^{n+1}}{(z-ib)(z+ib)}dz$$

$$x(n)=\left.\frac{b^2z^{n+1}}{z+bi}\right|_{z=bi}+\left.\frac{b^2z^{n+1}}{z-bi}\right|_{z=-bi}=\frac{b^{n+2}i^n}{2}+\frac{b^{n+2}(-i)^n}{2}$$

$$=\frac{b^{n+2}e^{in\pi/2}}{2}+\frac{b^{n+2}e^{-in\pi/2}}{2}=b^{n+2}\cos\frac{n\pi}{2}\ ,\ n\ge 0\,.$$

Ví dụ 1.51: Giải hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases}x(n+1)=4x(n)+2y(n)\\ y(n+1)=3x(n)+3y(n),\quad n\ge 0\end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=0$ và $y(0)=5$.

Giải: Thực hiện biến đổi Z ta được hệ phương trình ảnh

$$\begin{cases}zX(z)-x(0)z=4X(z)+2Y(z)\\ zY(z)-y(0)z=3X(z)+3Y(z)\end{cases},$$

Thay điều kiện đầu ta được $\begin{cases}(z-4)X(z)-2Y(z)=0\\ 3X(z)-(z-3)Y(z)=-5z\,.\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có nghiệm ảnh

$$X(z)=-\frac{10z}{(z-6)(z-1)}=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-6}\ ;\ Y(z)=\frac{5z(z-4)}{(z-6)(z-1)}=\frac{2z}{z-6}+\frac{3z}{z-1}\,.$$

$$x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}=2-2\cdot 6^n\ ;\ y(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}=3+2\cdot 6^n\,.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. Nếu hàm biến phức $w=f(z)$ có đạo hàm tại z_0 thì có đạo hàm mọi cấp tại z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.2. Hàm biến phức $w=f(z)$ giải tích tại z_0 thì có thể khai triển thành tổng của chuỗi lũy thừa tâm z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.3. Hàm biến phức $w=f(z)$ có đạo hàm khi và chỉ khi phần thực và phần ảo $u(x,y), v(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 1.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.4. Nếu z_0 là điểm bất thường cô lập của hàm biến phức $w=f(z)$ thì có thể khai triển Laurent của hàm số này tại z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.5. Tích phân của hàm biến phức giải tích $w=f(z)$ trong miền đơn liên D không phụ thuộc đường đi nằm trong D.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.6. Tích phân trên một đường cong kín của hàm biến phức giải tích $w = f(z)$ trong miền đơn liên D luôn luôn bằng không.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

1.7. Thặng dư của hàm biến phức $w = f(z)$ tại z_0 là phần dư của khai triển Taylor của hàm này tại z_0.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

1.8. Hàm biến phức $w = f(z)$ có nguyên hàm khi và chỉ khi giải tích.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

1.9. Giả sử hàm biến phức $w = f(z)$ chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập, khi đó tích phân của $w = f(z)$ dọc theo đường cong kín C (không đi qua các điểm bất thường) bằng tổng các thặng dư của $w = f(z)$ nằm trong đường C .

Đúng $\square$ Sai $\square$.

1.10. Có thể tìm được một hàm biến phức bị chặn, không phải hàm hằng và giải tích tại mọi điểm.

Đúng $\square$ Sai $\square$.

1.11 Rút gọn các biểu thức sau

a. $2(5-3i)-3(-2+i)+5(i-3)$,

b. $\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}$,

c. $|3-4i||4+3i|$,

d. $(3-2i)^3$,

e. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$,

f. $\dfrac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^3(1-i)}$.

1.12 Giải các phương trình sau

a. $z^2+z+1=0$,

b. $z^3-2z-4=0$,

c. $2z^4-3z^3-7z^2-8z+6=0$.

1.13 Tính căn

a. $\sqrt[3]{-1+i}$,

b. $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}$.

1.14 **a.** Giả sử $z=\omega$ là một nghiệm khác 1 của phương trình $z^5=1$, chứng minh rằng $\{1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}$ là tập hợp nghiệm của phương trình $z^5=1$.

b. Chứng minh $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$.

c. Tổng quát hóa kết quả a. và b. cho phương trình $z^n=1$.

1.15 Tính quỹ tích những điểm trong mặt phẳng phức thoả mãn

a. $|z-3-4i|=2$,

b. $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$,

c. $|z-2|+|z+2|=6$, **d.** $|z+2|=2|z-1|$,

e. $|z+5|-|z-5|=6$, **f.** $\operatorname{Im} z \le 3$,

g. $1<|z+2i|\le 2$, h. $\frac{\pi}{3}\le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

1.16 Tính phần thực và phần ảo của các hàm biến phức sau

a. $w=z^3$ **b.** $w=\frac{1}{1-z}$ **c.** .

1.17 Cho . Tìm đạo hàm trực tiếp từ định nghĩa. Với giá trị nào của thì hàm số không giải tích.

1.18 Chứng minh hàm không giải tích tại mọi .

1.19 Chứng minh rằng hàm

a. **b.**

thoả mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Tính trong mỗi trường hợp trên.

1.20 Tìm hàm biến phức giải tích biết phần thực

a. , **b.** ,

c. .

1.21 Tìm hàm biến phức giải tích biết phần ảo

a. , **b.** ,

c. .

1.22 Tính tích phân trong hai trường hợp sau

a. C là đoạn thẳng nối 2 điểm và +1.

b. C là nửa cung tròn tâm 0 nằm trong nửa mặt phẳng trên đi từ điểm đến điểm .

1.23 **a.** Tính tích phân , C là đường tròn .

b. Tính tích phân , dọc theo đường từ điểm đến (1,1).

1.24 Cho C là đường tròn $|z-1|=3$, tính các tích phân sau:

a. $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz$, **b.** $\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z+1)}dz$.

1.25 Tính tích phân $I=\oint\limits_C \frac{dz}{z-3}$ trong hai trường hợp sau:

a. C là đường tròn $|z|=1$. **b.** C là đường tròn $|z+i|=4$.

1.26 Tính tích phân $I=\int\limits_C zdz$ trong đó C là đường gấp khúc có đỉnh lần lượt là $-2, -1+2i, \quad 1+i, 2$.

1.27 Tính tích phân $I=\oint\limits_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$ trong đó C là đường tròn $x^2+y^2-2x=0$.

1.28 Tính tích phân $I=\oint\limits_C \frac{e^{\pi z}}{\left(z^2+1\right)^2}dz$ trong đó C là ellipse $4x^2+y^2-2y=0$.

1.29 Tính tích phân $I=\oint\limits_C \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^3}$ trong các trường hợp sau:

a. C là đường tròn $|z-1|=R, R<2$,

b. C là đường tròn $|z+1|=R, R<2$,

c. C là đường tròn $|z|=R, R<1$.

1.30 Tính tích phân $I=\oint\limits_C \frac{e^z+z}{(z-1)^4}dz$ trong đó C là đường cong kín bất kỳ bao quanh điểm $z=1$.

1.31 Tính tích phân $I=\oint\limits_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$, C là đường tròn $|z+1|=3$.

1.32 Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2 2^n}$, **b.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

c. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n}$, **d.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^{3n}}{3^n+n}$.

1.33 Viết bốn số hạng đầu trong khai triển Taylor của hàm số dưới đây tại $z=0$.

a. $w = e^{\frac{1}{1-z}}$, **b.** $w = \sin\dfrac{1}{1-z}$.

1.34 Khai triển Laurent của hàm số $w = \dfrac{z+1}{z^2+z-2}$

a. Trong hình vành khăn $1 < |z| < 2$.

b. Trong hình tròn $|z| < 1$.

c. Trong miền ngoài của hình tròn $|z| > 2$.

1.35 Khai triển Laurent của các hàm số tại các điểm được chỉ ra sau đây. Tìm miền hội tụ chuỗi, chỉ ra cấp hay loại cực điểm.

a. $w = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$, $z = 1$; **b.** $w = z\cos\dfrac{1}{z}$, $z = 0$;

c. $w = \dfrac{\sin z}{z-\pi}$, $z = \pi$; **d.** $w = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -1$;

e. $w = \dfrac{1}{z(z+2)^3}$, $z = 0, z = -2$;

1.36 Tính tích phân $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{(z+1)(z+3)}dz$ trong đó C là đường tròn $|z| = 4$.

1.37 Nếu C là đường tròn $|z| = 2$, chứng tỏ rằng $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}dz = \frac{1}{2}t\sin t$.

1.38 Tính tích phân $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

1.39 Tính tích phân $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

1.40 Tính các tích phân thực sau

a. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; **b.** $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, n nguyên dương;

c. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2}$; **d.** $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+a^6}$, $a > 0$.

1.41 Tính các tích phân thực sau

a. $I=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x\sin 2x}{x^2+4}dx$; **b.** $I=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$;

c. $I=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi x}{x^2+4}dx$; **d.** $I=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x\sin \pi x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

1.42 Tính các tích phân thực sau

a. $I=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{2-\cos x}$; **b.** $I=\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin^2 x}{5-4\cos x}dx$;

c. $I=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{\sin x+\cos x+2}$; **d.** $I=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}dx$, $0<a<1,\ n\in\mathbb{N}$.

1.43 Chứng minh các tính chất sau đây của phép biến đổi Z :

Tín hiệu: $x(n)$	Biến đổi Z tương ứng: $X(z)$	
a. $Ax(n)+By(n)$	$AX(z)+BY(z)$	*(tính tuyến tính).*
b. $x(n-n_0)\eta(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	*(tính trễ).*
c. $a^n x(n)$	$X\left(\dfrac{z}{a}\right)$	*(tính đồng dạng).*
d. $nx(n)$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	*(đạo hàm ảnh)*
e. $x(n)*y(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)$	$X(z)Y(z)$	*(tích chập).*

1.44 Tìm biến đổi Z của các dãy tín hiệu sau:

a. $x(n)=e^{in\omega}\eta(n)$.

b. $x(n)=ne^{-na}\eta(n)$.

1.45 Tìm biến đổi Z của các dãy tín hiệu sau:

a. $x(n)=a^n\eta(-n)$.

b. $x(n)=-a^n\eta(-n-1)$.

c. $x(n)=2^n\,\mathrm{rect}_N(n)$, trong đó $\mathrm{rect}_N(n)=\eta(n)-\eta(n-N)$: gọi là dãy chữ nhật.

1.46 Tìm biến đổi Z ngược của hàm giải tích $X(z)=\dfrac{4}{z^3(2z-1)}$ trong miền $|z|>\dfrac{1}{2}$.

1.47 Tìm biến đổi Z một phía của dãy các tín hiệu sau

a. $x(n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **b.** $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{nÕu } n > 5 \\ 1 & \text{nÕu } 0 \le n \le 5 \end{cases}$ **c.** $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{nÕu } n = 0 \\ -1 & \text{nÕu } n = 1 \\ a^n & \text{nÕu } n \ge 2 \end{cases}$

1.48 Tìm biến đổi Z một phía của dãy các tín hiệu sau

a. $x(n) = nTe^{-anT}$ **b.** $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{nÕu } n = 0 \\ n^2 a^{n-1} & \text{nÕu } n \ge 1 \end{cases}$ **c.** $x(n) = \cos(n-2)\eta(n-2)$

d. $x(n) = \sin(n\omega_0 T + \theta)$ **e.** $x(n) = (-1)^n$

1.49 Tìm biến đổi ngược một phía $x(n) = Z^{-1}\left\{X(z)\right\},\ n \ge 0$.

a. $X(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)(z^2 - z + 1/4)}$ **b.** $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-a)}$ **c.** $X(z) = e^{a/z}$

d. $X(z) = \dfrac{z+1}{z^{10}(z-1/2)}$ **e.** $X(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$

1.50 Giải các phương trình sai phân, các hệ phương trình sai phân sau:

a. $x(n+1) - x(n) = n^2,\ x(0) = 1$ **b.** $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 1,\ x(0) = x(1) = 0$

c. $x(n+1) - 5x(n) = \cos(n\pi),\ x(0) = 0$ **d.** $x(n+2) - \dfrac{1}{4}x(n) = \dfrac{1}{2^n},\ x(0) = x(1) = 0$

e. $\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) - 4y(n) \\ y(n+1) = 2x(n) - 3y(n);\ x(0) = 3, y(0) = 2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x(n+1) = x(n) - 2y(n) \\ y(n+1) = -6y(n);\ x(0) = -1, y(0) = -7 \end{cases}$.

CHƯƠNG 2

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN

2.1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Nhiều vấn đề trong kỹ thuật, trong ngành điện tử viễn thông, trong lý thuyết mạch … , đưa về bài toán giải các phương trình, hệ phương trình chứa đạo hàm, tích phân của các hàm nào đó, nghĩa là phải giải các phương trình vi phân, tích phân hay phương trình đạo hàm riêng. Việc giải trực tiếp các phương trình này nói chung rất khó. Một trong những phương pháp có hiệu quả để giải các bài toán dạng này là sử dụng phép biến đổi Laplace.

Phép biến đổi Laplace là một tương ứng 1-1 biến các hàm gốc theo biến t thành hàm ảnh theo biến s. Với phép biến đổi này việc tìm hàm gốc thoả mãn các biểu thức chứa đạo hàm, tích phân (nghiệm của phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình đạo hàm riêng…) được quy về tính toán các biểu thức đại số trên các hàm ảnh. Khi biết hàm ảnh, ta sử dụng phép biến đổi ngược để tìm hàm gốc cần tìm. Kỹ sư Oliver Heaviside (1850-1925) là người đầu tiên đã vận dụng phép biến đổi Laplace để giải quyết các bài toán liên quan đến lý thuyết điện từ.

Trong mục này ta giải quyết hai bài toán cơ bản của phép biến đổi Laplace là tìm biến đổi thuận, biến đổi ngược của biến đổi Laplace và một vài ứng dụng của nó.

Các hàm số trong chương này được ký hiệu là $x(t), y(t),...$ thay cho $f(x), g(x),...$, vì $x(t), y(t)$ được ký hiệu cho các tín hiệu phụ thuộc vào thời gian t.

2.1.1 Phép biến đổi Laplace thuận

2.1.1.1 Định nghĩa biến đổi Laplace

Định nghĩa 2.1: *Giả sử $x(t)$ là hàm số thực xác định với mọi $t > 0$. Biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ được định nghĩa và ký hiệu:*

$$\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt \qquad \textbf{(2.1)}$$

$x(t)$ được gọi là hàm gốc, $X(s)$ được gọi là hàm ảnh của phép biến đổi.

Phép biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ được gọi là tồn tại nếu tích phân (2.1) hội tụ với giá trị s trong miền nào đó. Trường hợp ngược lại ta nói phép biến đổi Laplace của hàm số $x\left(t\right)$ không tồn tại.

Các hàm gốc $x(t)$ thường được xét là các tín hiệu phụ thuộc thời gian t và hàm ảnh tương ứng có biến s thuộc mặt phẳng phức, vì vậy người ta còn nói phép biến đổi Laplace biến miền thời gian thành miền không gian.

Phép biến đổi Laplace là thực hay phức nếu biến số s của hàm ảnh $X(s)$ là thực hay phức.

Theo thói quen người ta thường ký hiệu các hàm gốc bằng các chữ bé $x(t), y(t), ...$ còn các biến đổi của nó bằng các chữ in hoa $X(s), Y(s), ...$. Đôi khi cũng được ký hiệu bởi $\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), ...$.

2.1.1.2 Điều kiện tồn tại

Định nghĩa 2.2: *Hàm biến thực $x(t)$ được gọi là hàm gốc nếu thoả mãn 3 điều kiện sau:*

1. $x(t) = 0$ *với mọi* $t < 0$.
2. $x(t)$ *liên tục từng khúc trong miền* $t \geq 0$.

Nghĩa là với mọi khoảng $\left[a;b\right]$ trên nửa trục thực $t \geq 0$ hàm chỉ gián đoạn nhiều nhất tại một số hữu hạn các điểm và các điểm gián đoạn là gián đoạn loại 1, nghĩa là hàm có giới hạn trái và giới hạn phải hữu hạn tại các điểm gián đoạn này.

3. $x(t)$ *không tăng nhanh hơn hàm mũ khi* $t \to \infty$.

Nghĩa là tồn tại $M > 0, \alpha_0 \geq 0$ sao cho

$$\left|x(t)\right| \leq Me^{\alpha_0 t}, \forall t > 0. \quad \textbf{(2.2)}$$

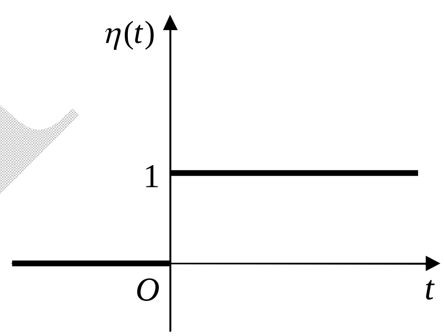
α_0 *được gọi là chỉ số tăng của* $x(t)$.

Rõ ràng α_0 là chỉ số tăng thì mọi số $\alpha_1 > \alpha_0$ cũng là chỉ số tăng.

Ví dụ 2.1: Hàm bước nhảy đơn vị (Unit step function)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nÕu} \quad t < 0 \\ 1 & \text{nÕu} \quad t \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{(2.3)}$$

Hàm bước nhảy đơn vị $\eta(t)$ liên tục với mọi $t \geq 0$, không tăng hơn ở mũ và có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$.



Hình 2.1: *Đồ thị hàm bước nhảy đơn vị*

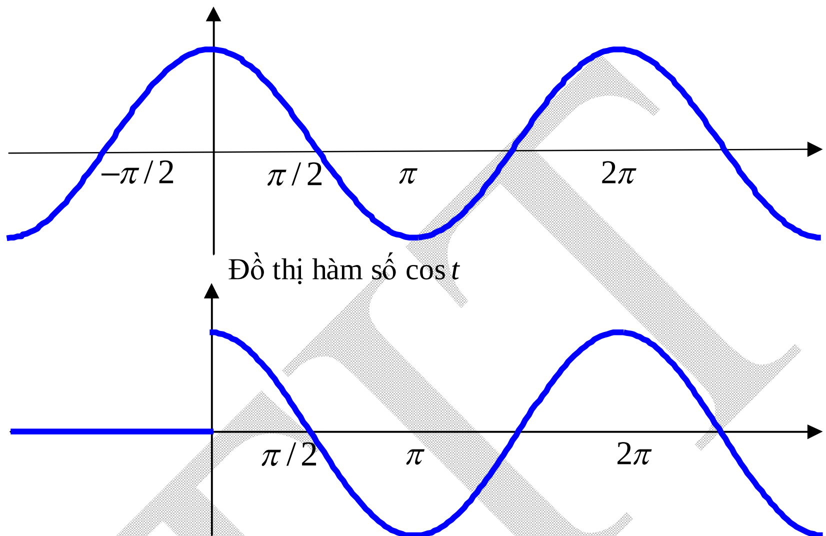
Nhận xét 2.1: Các hàm sơ cấp $x(t)$ là hàm liên tục và không tăng nhanh hơn hàm mũ. Nhưng vẫn chưa phải là hàm gốc vì không thoả mãn điều kiện 1. của định nghĩa 2.2. Tuy nhiên hàm số sau:

$$x(t)\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu} \quad t<0\\ x(t) & \text{nếu} \quad t\ge 0\end{cases} \qquad \textbf{(2.4)}$$

là một hàm gốc.

Hàm bước nhảy đơn vị $\eta(t)$ thường được sử dụng để biểu diễn các hàm thỏa mãn điều kiện ở vế phải của công thức (2.4).

Ví dụ 2.2: Hàm $\cos t$ không phải là hàm gốc vì không thỏa mãn điều kiện 1. của định nghĩa 2.2 (xem Hình 2.2). Hàm $\cos t\,\eta(t)$ là hàm gốc.



Hình 2.2 Đồ thị hàm số $\eta(t)\cos(t)$

Định lý 2.1: Nếu $x(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 thì tồn tại biến đổi Laplace

$$\mathcal{L}\{x(t)\}=X(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}x(t)dt$$

xác định với mọi số phức $s=\alpha+i\beta$ sao cho $\alpha>\alpha_0$ và $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty}X(s)=0$.

Hơn nữa hàm ảnh $X(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$ với đạo hàm

$$X'(s)=\int_0^{\infty}(-t)e^{-st}x(t)dt \qquad \textbf{(2.5)}$$

Chứng minh: Với mọi $s=\alpha+i\beta$ sao cho $\alpha>\alpha_0$, ta có:

và $\int_0^{\infty}e^{(\alpha_0-\alpha)t}dt$ hội tụ.

Do đó tích phân $\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$ hội tụ tuyệt đối nên hội tụ, vì vậy tồn tại biến đổi Laplace.

Ngoài ra $|X(s)|\le\int_0^{\infty}\left|x(t)e^{-st}\right|dt=\int_0^{\infty}\left|x(t)e^{-\alpha t}e^{-i\beta t}\right|dt=\int_0^{\infty}\left|x(t)e^{-\alpha t}\right|dt$

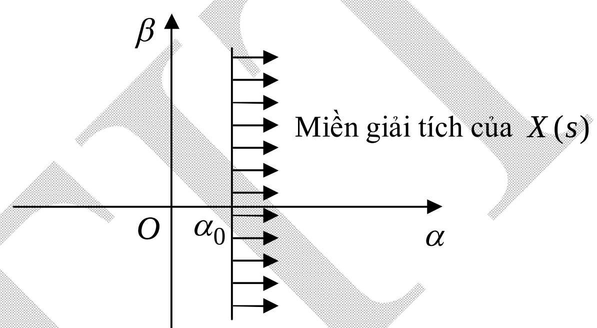
$$\le \int_0^{\infty} Me^{(\alpha_0-\alpha)t}dt = \left.\frac{Me^{(\alpha_0-\alpha)t}}{\alpha_0-\alpha}\right|_0^{\infty} = \frac{M}{\alpha-\alpha_0}.$$

Ta có $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{M}{\alpha-\alpha_0}=0$ do đó $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} X(s)=0$. Hơn nữa tích phân $\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ hội tụ, tích phân $\int_0^{\infty}\dfrac{\partial}{\partial s}\left(x(t)e^{-st}\right)dt=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}(-t)dt$ hội tụ đều trong miền $\left\{s \,\middle|\, \mathrm{Re}(s)\ge\alpha_1\right\}$ với mọi α_1 thỏa mãn $\alpha_1>\alpha_0$, do đó hàm ảnh có đạo hàm

$$X'(s)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(x(t)e^{-st}\right)dt=-\int_0^{\infty} tx(t)e^{-st}\,dt$$

tại mọi s thuộc mọi miền trên (theo định lý Weierstrass).

Vậy $X(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$.



Hình 2.3: *Miền giải tích của* $X(s)$

Nhận xét 2.2:

1. Theo định lý 2.1 mọi hàm gốc đều có ảnh qua phép biến đổi Laplace. Tên gọi "hàm gốc" là do vai trò của nó trong phép biến đổi này.
2. Điều kiện 1. của định nghĩa hàm gốc phù hợp với các bài toán bắt đầu từ thời điểm $t=0$.
3. Điều kiện 2. của định nghĩa hàm gốc là điều kiện để hàm gốc khả tích trong mọi khoảng.
4. Điều kiện 3. suy ra tích phân suy rộng 2.1 của hàm gốc $x(t)$ hội tụ.
5. Định lý trên chỉ là điều kiện đủ chứ không cần. Chẳng hạn hàm $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ không phải là hàm gốc vì $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{t}}=\infty$, nhưng tích phân $\int_0^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt=\int_0^{1}\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt+\int_1^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt$ tồn tại với mọi s thỏa mãn $\mathrm{Re}(s)>0$.
6. Từ nhận xét 2.1, công thức (2.4), suy ra rằng mọi hàm sơ cấp $x(t)$ đều có biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left\{x(t)\eta(t)\right\}$. Tuy nhiên, để đơn giản thay vì viết đúng $\mathcal{L}\left\{x(t)\eta(t)\right\}$ thì ta viết tắt $\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$. Chẳng hạn ta viết $\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}$ thay cho $\mathcal{L}\left\{\eta(t)\sin t\right\}$, $\mathcal{L}\left\{1\right\}$ thay cho $\mathcal{L}\left\{\eta(t)\right\}$.

7. Ta quy ước các hàm gốc liên tục phải tại 0, nghĩa là $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = x(0)$.

Ví dụ 2.3: Vì hàm $\eta(t)$ có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$ do đó biến đổi

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty \quad \text{với mọi } s,\ \operatorname{Re}(s) > 0.$$

$$s = \alpha + i\beta,\ \alpha > 0:\quad \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-\alpha t - i\beta t}}{-s} + \frac{e^{-s.0}}{s};\quad \left|\frac{e^{-\alpha t - i\beta t}}{-s}\right| = \frac{e^{-\alpha t}}{|s|} \to 0 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Do đó

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}.$$

Ví dụ 2.4: Hàm $\sin t$ có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$, do đó biến đổi Laplace

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt \ \text{ tồn tại với mọi } s,\ \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần và để ý đến điều kiện $\operatorname{Re}(s) > 0$ ta được:

$$X(s) = -\cos t e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty se^{-st}\cos t\,dt = 1 - \left(se^{-st}\sin t\Big|_0^\infty\right) - s^2\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt$$

$$\Rightarrow\ (1+s^2)X(s) = 1 \ \Rightarrow\ X(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

2.1.1.3 Các tính chất của phép biến đổi Laplace

1. Tính tuyến tính

Định lý 2.2: Giả sử $x(t), y(t)$ có biến đổi Laplace, khi đó với mọi hằng số *A, B*, $Ax(t) + By(t)$ cũng có biến đổi Laplace và

$$\mathcal{L}\{Ax(t) + By(t)\} = A\mathcal{L}\{x(t)\} + B\mathcal{L}\{y(t)\}. \tag{2.6}$$

Chứng minh: Nếu hai tích phân của vế phải của đẳng thức sau tồn tại thì tích phân của vế trái cũng tồn tại và có đẳng thức

$$\mathcal{L}\{Ax(t) + By(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(Ax(t) + By(t)\right)dt = A\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt + B\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt.$$

Ví dụ 2.5: $\mathcal{L}\{5 + 4\sin t\} = 5\mathcal{L}\{1\} + 4\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{5}{s} + \dfrac{4}{s^2+1}$.

2. Tính đồng dạng

Định lý 2.3: Giả sử $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, khi đó với mọi $a > 0$ ta có

$$\mathcal{L}\left\{x(at)\right\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right). \qquad \textbf{(2.7)}$$

Chứng minh: Đổi biến số $u = at$ ta được:

$$\mathcal{L}\left\{x(at)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} x(at)dt = \int_0^\infty e^{-s\frac{u}{a}} x(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right).$$

Ví dụ 2.6: $\mathcal{L}\left\{\sin \omega t\right\} = \dfrac{1}{\omega} \cdot \dfrac{1}{\left(\dfrac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.

$$\mathcal{L}\left\{\sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right\} = \frac{\omega}{s^2 + 4\omega^2}.$$

3. Tính dịch chuyển ảnh

Định lý 2.4: Giả sử $X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$, khi đó với mọi $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} x(t)\right\} = X\left(s - a\right). \qquad \textbf{(2.8)}$$

Chứng minh: $\mathcal{L}\left\{e^{at} x(t)\right\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} e^{at} x(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} x(t)dt = X\left(s - a\right)$.

Ví dụ 2.7:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin \omega t\right\} = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{at} \cdot 1\right\} = \frac{1}{s - a},$$

$$\mathcal{L}\left\{\cosh \omega t\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2},$$

$$\mathcal{L}\left\{\sinh \omega t\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\left\{\sinh at \sin \omega t\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\sin \omega t\right\} = \frac{1}{2}\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} - \frac{1}{2}\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}.$$

4. Tính trễ

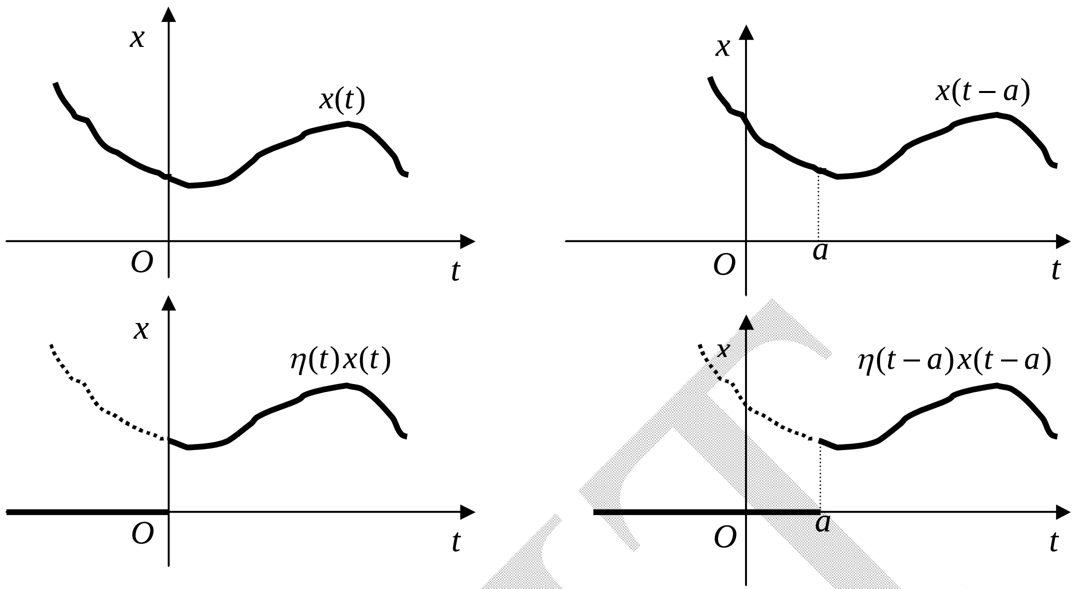
Định lý 2.5: Giả sử $X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$, khi đó với mọi $a \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$:

$$\mathcal{L}\left\{\eta(t-a)x(t-a)\right\} = e^{-sa} X\left(s\right). \qquad \textbf{(2.9)}$$

Chứng minh: $\mathcal{L}\left\{\eta(t-a)x(t-a)\right\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\eta(t-a)x(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st} x(t-a)dt$.

Đổi biến số $u = t - a$, ta được

$$\mathcal{L}\left\{\eta(t-a)x(t-a)\right\} = \int_a^{\infty} e^{-st}x(t-a)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)}x(u)du = e^{-as}X(s).$$



Hình 2.4*: Đồ thị hàm trễ*

Đồ thị của hàm $\eta(t-a)x(t-a)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị của $\eta(t)x(t)$ dọc theo trục hoành một đoạn bằng a. Nếu $x(t)$ biểu diễn tín hiệu theo thời gian t thì $x(t-a)$ biểu diễn trễ a đơn vị thời gian của quá trình trên.

Ví dụ 2.8: $\mathcal{L}\left\{\eta(t-a)\right\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$.

Ví dụ 2.9: Hàm xung (Impulse) là hàm chỉ khác không trong một khoảng thời gian nào đó.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nÕu} \quad t < a \\ \phi(t) & \text{nÕu} \quad a < t < b \\ 0 & \text{nÕu} \quad t > b \end{cases} \tag{2.10}$$

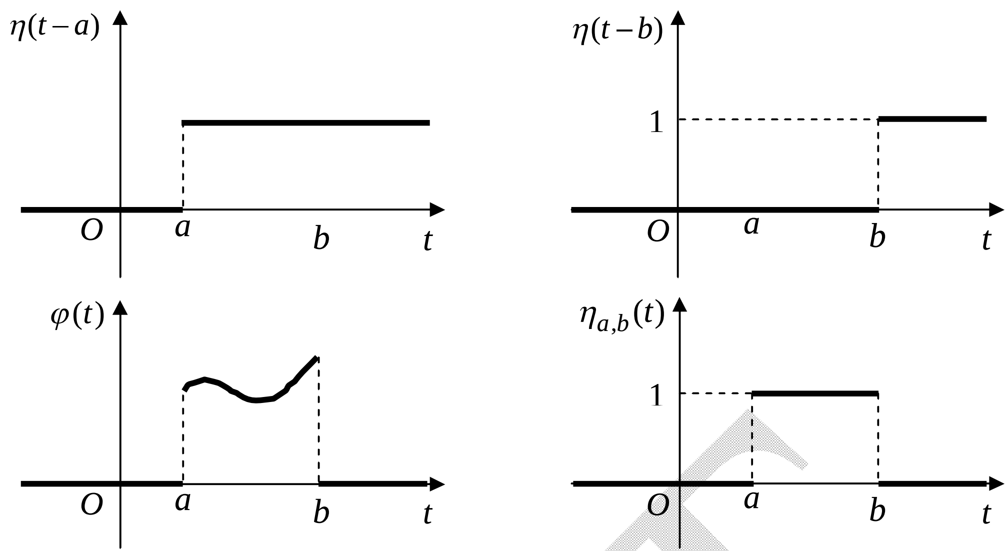
Hàm xung đơn vị trên đoạn $\left[a;b\right]$ được ký hiệu và xác định như sau:

$$\eta_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{nÕu} \quad t < a \\ 1 & \text{nÕu} \quad a < t < b \\ 0 & \text{nÕu} \quad t > b \end{cases} = \eta(t-a) - \eta(t-b) \tag{2.11}$$

Hàm xung bất kỳ (2.10) có thể biểu diễn qua hàm xung đơn vị

$$x(t) = \eta(t-a)\varphi(t) - \eta(t-b)\varphi(t) = \eta_{a,b}(t)\varphi(t) \tag{2.12}$$

$$\mathcal{L}\left\{\eta_{a,b}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\eta(t-a)\right\} - \mathcal{L}\left\{\eta(t-a)\right\} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$



Hình 2.5: Đồ thị hàm xung

Ví dụ 2.10: Tìm biến đổi Laplace của hàm xung $x(t)=\begin{cases}0 & \text{nÕu} \quad t<0\\ \sin t & \text{nÕu} \quad 0<t<\pi \\ 0 & \text{nÕu} \quad t>\pi\end{cases}$

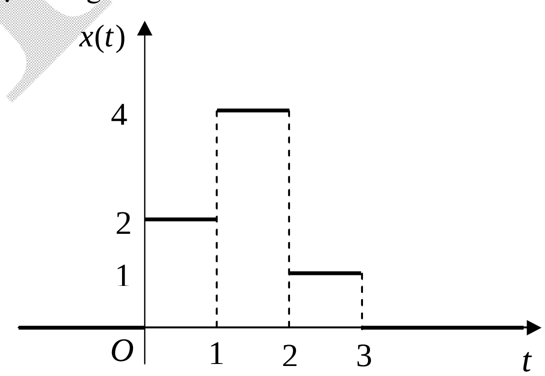
Theo công thức (2.12) ta có thể viết

$$x(t)=\eta(t)\sin t-\eta(t-\pi)\sin t=\eta(t)\sin t+\eta(t-\pi)\sin(t-\pi)$$

Vậy $\quad L\{x(t)\}=\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}=\dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$.

Ví dụ 2.11: Tìm biến đổi Laplace của hàm bậc thang

$$x(t)=\begin{cases}0 & \text{nÕu} \quad t<0 \ \text{hoÆc}\ t>3\\ 2 & \text{nÕu} \quad 0<t<1\\ 4 & \text{nÕu} \quad 1<t<2\\ 1 & \text{nÕu} \quad 2<t<3\end{cases}$$



Hình 2.6: Đồ thị hàm bậc thang

$$\begin{aligned}x(t)&=2\eta_{0,1}(t)+4\eta_{1,2}(t)+\eta_{2,3}(t)\\ &=2\big[\eta(t)-\eta(t-1)\big]+4\big[2\eta(t-1)-\eta(t-2)\big]+\big[\eta(t-2)-\eta(t-3)\big]\\ &=2\eta(t)+2\eta(t-1)-3\eta(t-2)-\eta(t-3).\end{aligned}$$

Do đó $\ L\{x(t)\}=\dfrac{2+2e^{-s}-3e^{-2s}-e^{-3s}}{s}$.

5. Biến đổi của đạo hàm

Định lý 2.6: Giả sử hàm gốc $x(t)$ có đạo hàm $x'(t)$ cũng là hàm gốc, đặt $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$ khi đó ta có

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}=sX(s)-x(0). \qquad \textbf{(2.13)}$$

Tổng quát hơn, nếu $x(t)$ có đạo hàm đến cấp n cũng là hàm gốc thì

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\}=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x'(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0). \qquad \textbf{(2.14)}$$

Chứng minh: Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}x'(t)dt=e^{-st}x(t)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty se^{-st}x(t)dt=sX(s)-x(0).$$

Công thức (2.14) được chứng minh quy nạp từ công thức (2.13).

Ví dụ 2.12: $\mathcal{L}\{\cos\omega t\}=\mathcal{L}\left\{\left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\right)'\right\}=\dfrac{1}{\omega}\cdot s\cdot\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}-\sin 0=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$.

$$\mathcal{L}\{\cos^2\omega t\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\big(1+\cos(2\omega t)\big)\right\}=\frac{1}{2s}+\frac{s}{2(s^2+\omega^2)};$$

$$\mathcal{L}\{\sin^2\omega t\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\big(1-\cos(2\omega t)\big)\right\}=\frac{1}{2s}-\frac{s}{2(s^2+\omega^2)}.$$

Hệ quả 2.1: Với giả thiết của định lý 2.6 ta có $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} sX(s)=x(0)$.

Chứng minh: Áp dụng định lý 2.1 cho đạo hàm $x'(t)$ ta có $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} sX(s)-x(0)=0$.

6. Biến đổi Laplace của tích phân

Định lý 2.7: Giả sử hàm gốc $x(t)$ có $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$, khi đó hàm số $\varphi(t)=\int_0^t x(u)du$ cũng là hàm gốc và

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\}=\frac{X(s)}{s}. \qquad \textbf{(2.15)}$$

Chứng minh: Hàm $\phi(t)$ có đạo hàm là $x(t)$ liên tục từng khúc nên cũng liên tục từng khúc.

$$|\varphi(t)|=\left|\int_0^t x(u)du\right|\le\int_0^t |x(u)|du\le\int_0^t Me^{\alpha_0 u}du=\frac{Me^{\alpha_0 u}}{\alpha_0}\Bigg|_0^t\le\frac{Me^{\alpha_0 t}}{\alpha_0}.$$

Vậy $\varphi(t)$ là hàm gốc có cùng chỉ số tăng với $x(t)$ và $\varphi(0)=0$. Từ công thức (2.13) ta có

$$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}=s\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\}-\varphi(0)\Rightarrow\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\}=\frac{X(s)}{s}.$$

Ví dụ 2.13: Tìm biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sinh(3u)\sin(\omega u)du\right\}$.

Theo ví dụ 2.7 ta có $\mathcal{L}\left\{\sinh(3t)\sin(\omega t)\right\} = \dfrac{\omega/2}{(s-3)^2+\omega^2} - \dfrac{\omega/2}{(s+3)^2+\omega^2}$.

Từ công thức (2.15) suy ra

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sinh(3u)\sin(\omega u)du\right\} = \frac{\omega}{2s}\left(\frac{1}{(s-3)^2+\omega^2} - \frac{1}{(s+3)^2+\omega^2}\right).$$

7. Đạo hàm ảnh

Định lý 2.8: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc có $X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$, khi đó

$$\mathcal{L}\left\{t^n x(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s). \tag{2.16}$$

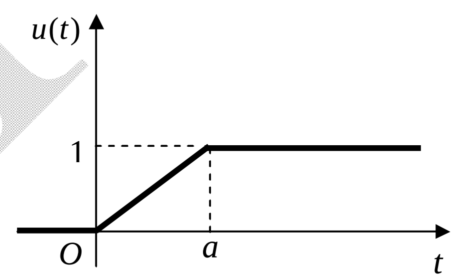
Chứng minh: Theo định lý 2.1 hàm $X(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$ nên có đạo hàm mọi cấp trong miền này. Từ công thức (2.5) ta có $\mathcal{L}\left\{tx(t)\right\} = -X'(s)$.

Áp dụng liên tiếp công thức này ta được công thức (2.16).

Ví dụ 2.14: $\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\left(\dfrac{1}{s}\right) = (-1)^n \dfrac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

Ví dụ 2.15: Hàm dốc

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{nõu} \quad t < 0 \\ \dfrac{t}{a} & \text{nõu} \quad 0 \le t \le a \\ 1 & \text{nõu} \quad t \ge a \end{cases}$$



Hình 2.7: Đồ thị hàm dốc

$$u(t) = \frac{t}{a}\eta_{0a}(t) + \eta(t-a)$$

$$= \frac{t}{a}\eta(t) - \frac{t}{a}\eta(t-a) + \eta(t-a) = \frac{t}{a}\eta(t) - \frac{t-a}{a}\eta(t-a).$$

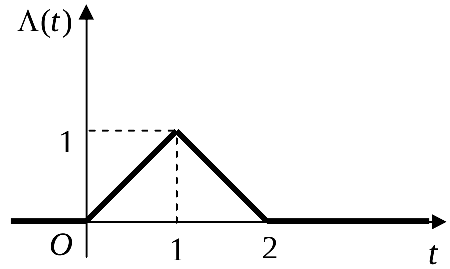
$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{as^2} = \frac{1-e^{-as}}{as^2}.$$

Ví dụ 2.16: Hàm xung tam giác đơn vị $\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{nõu} \quad t < 0 \\ t & \text{nõu} \quad 0 \le t \le 1 \\ 2-t & \text{nõu} \quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{nõu} \quad t > 2 \end{cases}$

$$\Lambda(t) = t\left[\eta(t) - \eta(t-1)\right] + \left(2-t\right)\left[\eta(t-1) - \eta(t-2)\right]$$

$$= t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2).$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\Lambda(t)\right\} = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{\left(e^{-s}-1\right)^2}{s^2}.$$



Hình 2.8: Đồ thị xung tam giác đơn vị

8. Tích phân ảnh

Định lý 2.9: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc và $\dfrac{x(t)}{t}$ cũng là một hàm gốc (chẳng hạn $x(t)$ là một hàm gốc và tồn tai $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{x(t)}{t}$ hữu hạn). Đặt $X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\},\ s\in\mathbb{R}$, khi đó

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} X(u)du. \qquad \textbf{(2.17)}$$

Chứng minh: Đặt $Y(s) = \mathcal{L}\left\{\dfrac{x(t)}{t}\right\},\ s\in\mathbb{R}$. Từ công thức (2.15) ta có $\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = -Y'\left(s\right)$.

Mặt khác $\lim\limits_{s\to\infty} Y(s) = 0 \ \Rightarrow\ Y(s) = -\int_s^{\infty} Y'(u)du = \int_s^{\infty} X(u)du$.

Ví dụ 2.17: Vì $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t}{t} = 1$ và $\mathcal{L}\left\{\sin t\right\} = \dfrac{1}{s^2+1}$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \arctan u\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}.$$

Hàm tích phân sin (xem công thức 3.24 chương 3):

$$\mathrm{Si}\,t = \int_0^t \frac{\sin u}{u}du,\ t>0$$

có biến đổi Laplace
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right\} = \frac{1}{s}\arctan\frac{1}{s}.$$

Ví dụ 2.18: Hàm $\cos t$ là một hàm gốc nhưng $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\cos t}{t} = +\infty$, do đó không tồn tại biến đổi Laplace của $\dfrac{\cos t}{t}$. Tuy nhiên hàm $\dfrac{1-\cos at}{t}$ cũng là hàm gốc, có biến đổi Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos at}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+a^2}\right)du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)\Big|_{u=s}^{\infty}$$

$$= \ln\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)\Bigg|_{u=s}^{\infty} = \ln 1 - \ln\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+a^2}}{s}\right).$$

Tương tự $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u-a}-\frac{1}{u-b}\right)du = \ln\left(\frac{u-a}{u-b}\right)\Bigg|_{u=s}^{\infty} = \ln\left(\frac{s-b}{s-a}\right).$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{u}{u^2+a^2}-\frac{u}{u^2+b^2}\right)du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2+a^2}{u^2+b^2}\right)\Bigg|_{u=s}^{\infty} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right).$$

9. Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn

Định lý 2.10: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T>0$, khi đó

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = \frac{\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}. \qquad \textbf{(2.18)}$$

Chứng minh: $X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt = \int_0^{T} e^{-st}x(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st}x(t)dt$.

Đổi biến số $t = T+u$ đối với tích phân thứ hai của vế phải ta có

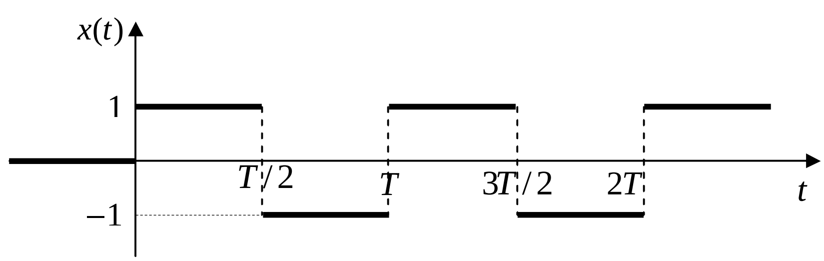
$$\int_T^{\infty} e^{-st}x(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(T+u)}x\left(T+u\right)du = e^{-sT}\int_0^{\infty} e^{-su}x\left(u\right)du$$

Do đó $X(s) = \int_0^T e^{-st}x(t)dt + e^{-sT}X(s) \;\Rightarrow\; X(s) = \frac{\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}.$

Ví dụ 2.19: Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T>0$ hình 2.9

$$\int_0^T e^{-st}x(t)dt = \int_0^{T/2} e^{-st}dt - \int_{T/2}^{T} e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{T/2} - \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{T/2}^{T} = \frac{\left(e^{-sT/2}-1\right)^2}{s}.$$

$$\Rightarrow\; X(s) = \frac{\left(e^{-sT/2}-1\right)^2}{s\left(1-e^{-sT}\right)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{e^{\frac{sT}{4}}-e^{-\frac{sT}{4}}}{e^{\frac{sT}{4}}+e^{-\frac{sT}{4}}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{\sinh\frac{sT}{4}}{\cosh\frac{sT}{4}} = \frac{1}{s}\cdot\tanh\frac{sT}{4}.$$



Hình 2.9: Đồ thị của hàm gốc tuần hoàn

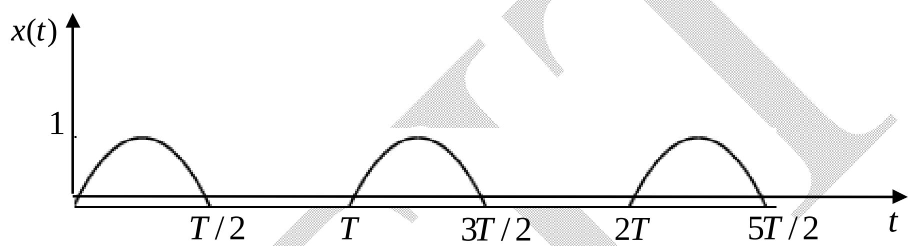
Trường hợp hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T > 0$ có biên độ h có công thức xác định trong một chu kỳ

$$x(t) = \begin{cases} h & \text{nÕu} \quad 0 < t < T/2 \\ -h & \text{nÕu} \quad T/2 < t < T \end{cases}$$

Bằng cách áp dụng tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplace vào kết quả trên ta được hàm ảnh tương ứng là $X(s) = \frac{h}{s} \cdot \tanh \frac{sT}{4}$.

Ví dụ 2.20: Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T > 0$ (xem đồ thị hình 2.9) có công thức xác định trong một chu kỳ

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & \text{nÕu} \quad 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{nÕu} \quad T/2 < t < T \end{cases}$$



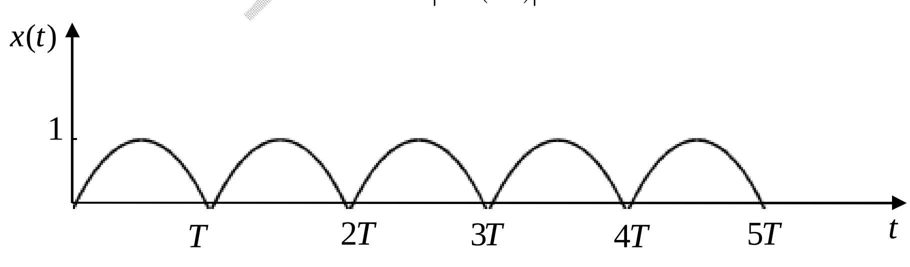
Hình 2.10*: Đồ thị tách nửa sóng* (ví dụ 2.20)

$$\int_0^T e^{-st} x(t) dt = \int_0^{T/2} e^{-st} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{2\pi T}{s^2 T^2 + 4\pi^2}\left(1 + e^{-sT/2}\right)$$

$$X(s) = \frac{2\pi T}{s^2 T^2 + 4\pi^2} \cdot \frac{1 + e^{-sT/2}}{1 - e^{-sT}} = \frac{2\pi T}{s^2 T^2 + 4\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-sT/2}}.$$

Ví dụ 2.21: Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T > 0$ (xem đồ thị hình 2.11) có công thức xác định trong một chu kỳ

$$x(t) = \left|\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right|,\ 0 < t < T$$



Hình 2.11*: Đồ thị tách sóng* hoàn toàn (ví dụ 2.21)

$$\int_0^T e^{-st}x(t)dt = \int_0^T e^{-st}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt = \frac{\pi T}{s^2T^2+\pi^2}\left(1+e^{-sT}\right)$$

$$X(s) = \frac{\pi T}{s^2T^2+\pi^2}\cdot\frac{1+e^{-sT}}{1-e^{-sT}} = \frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}\cdot\coth\frac{sT}{2}.$$

10. Ảnh của tích chập

Định nghĩa 2.3: *Tích chập của hai hàm số* $x(t)$, $y(t)$ *là hàm số được ký hiệu và xác định bởi công thức*

$$x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du \tag{2.19}$$

Tích chập của của hai dãy số được định nghĩa theo công thức (1.119), chương 1.

Tính chất 2.1:

- Nếu $x(t)$, $y(t)$ là hai hàm gốc thì $x(t)*y(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du$
- $x(t)*y(t) = y(t)*x(t)$ *(tích chập có tính giao hoán)*
- Nếu $x(t)$, $y(t)$ là hai hàm gốc thì tích chập của chúng $x(t)*y(t)$ cũng là hàm gốc.

Chứng minh:

- $x(t)$, $y(t)$ là hai hàm gốc do đó $x(u)y(t-u)=0$ khi $u<0$ hoặc $u>t$

Vì vậy

$$x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x(u)y(t-u)du + \int_0^t x(u)y(t-u)du + \int_t^{\infty} x(u)y(t-u)du = \int_0^t x(u)y(t-u)du.$$

- Đổi biến số $v = t-u$

$$x(t)*y(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du = -\int_t^0 x(t-v)y(v)dv = \int_0^t x(t-v)y(v)dv = y(t)*x(t).$$

- Giả sử $\left|x(t)\right| \le M_1e^{\alpha_1 t}$, $\left|y(t)\right| \le M_2e^{\alpha_2 t}$. Đặt $\alpha_0 = \max\left\{\alpha_1,\alpha_2\right\}$, $\forall u\in\left[0;t\right]$:

$$\left|x(u)y(t-u)\right| \le M_1e^{\alpha_0 u}M_2e^{\alpha_0(t-u)} = M_1M_2e^{\alpha_0 t}$$

$$\left|\int_0^t x(u)y(t-u)du\right| \le M_1M_2\int_0^t e^{\alpha_0 t}du = M_1M_2te^{\alpha_0 t} \le M_1M_2e^{(\alpha_0+1)t}.$$

Vậy $x(t)*y(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0+1.

Ví dụ 2.22: Tìm tích chập của hai hàm gốc sau:

a. $\cos(t)$ và $\sin(t)$,

b. t^2 và $\sin(t)$.

***Giải*: a.** $\cos(t) * \sin(t) = \int\limits_0^t \cos(u)\sin(t-u)du = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^t \left[\sin(t) + \sin(t-2u)\right]du$

$$= \frac{1}{2}\sin(t)u\Big|_{u=0}^{t} + \frac{1}{4}\cos(t-2u)\Big|_{u=0}^{t} = \frac{1}{2}t\sin(t).$$

b. $t^2 * \sin(t) = \int\limits_0^t (t-u)^2 \sin(u)du = -(t-u)^2\cos(u)\Big|_{u=0}^{t} - 2\int\limits_0^t (t-u)\cos(u)du$

$$= t^2 - 2(t-u)\sin(u)\Big|_{u=0}^{t} - 2\int\limits_0^t \sin(u)du = t^2 + 2\cos t - 2.$$

Ví dụ 2.23: Tìm tích chập của hàm gốc $\eta(t)e^t$ và hàm gián đoạn $\eta(t-1) - \eta(t-2)$.

$$e^t * \left[\eta(t-1) - \eta(t-2)\right] = \int\limits_0^t e^{t-u}\left[\eta(u-1) - \eta(u-2)\right]du = e^t\int\limits_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1) - \eta(u-2)\right]du$$

Hàm dưới dấu tích phân của tích phân $\int\limits_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1) - \eta(u-2)\right]du$ phụ thuộc t và ta có các trường hợp sau:

- Nếu $t < 1$ thì $\int\limits_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1) - \eta(u-2)\right]du = 0$,
- Nếu $1 < t < 2$ thì $e^t\int\limits_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1) - \eta(u-2)\right]du = e^t\int\limits_1^t e^{-u}du = e^{t-1} - 1$
- Nếu $t > 2$ thì $e^t\int\limits_0^t e^{-u}\left[\eta(u-1) - \eta(u-2)\right]du = e^t\int\limits_1^2 e^{-u}du = e^{t-1} - e^{t-2}$

Vậy
$$e^t * \left[\eta(t-1) - \eta(t-2)\right] = \begin{cases} 0 & \text{nÕu } t < 1 \\ e^{t-1} - 1 & \text{nÕu } 1 < t < 2 \\ e^{t-1} - e^{t-2} & \text{nÕu } t > 2 \end{cases}$$

Sử dụng công thức 2.11 ta có

$$e^t * \left[\eta(t-1) - \eta(t-2)\right] = \left(e^{t-1} - 1\right)\left(\eta(t-1) - \eta(t-2)\right) + \left(e^{t-1} - e^{t-2}\right)\eta(t-2)$$
$$= \left(e^{t-1} - 1\right)\eta(t-1) - \left(e^{t-2} - 1\right)\eta(t-2).$$

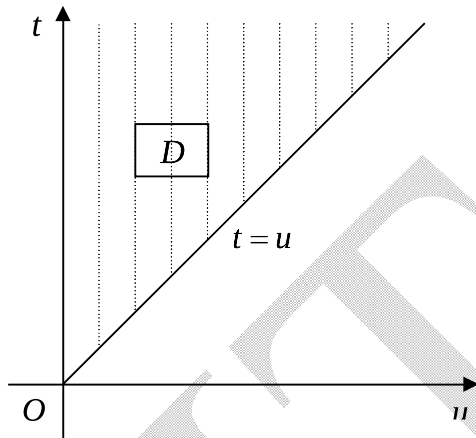
Định lý 2.11: Giả sử $X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}$, khi đó ta có

$$\mathcal{L}\left\{x(t) * y(t)\right\} = X(s)Y(s) \tag{2.20}$$

Ngoài ra nếu $x'(t)$, $y'(t)$ cũng là hàm gốc thì ta có ***công thức Duhamel***:

$$\mathcal{L}\left\{x(0)y(t) + x'(t) * y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x(t)y(0) + x(t) * y'(t)\right\} = sX(s)Y(s) \tag{2.21}$$

Chứng minh: Xét miền D cho trong hình 2.12.



Hình 2.12:

Sử dụng phương pháp đổi thứ tự lấy tích phân ta được

$$\mathcal{L}\left\{x(t) * y(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t x(u)y(t-u)du\right)dt = \iint_D e^{-st}x(u)y(t-u)dtdu$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-st}x(u)y(t-u)dt\right)du$$

Đổi biến số $v = t - u \;\Rightarrow\; dv = dt$

$$\mathcal{L}\left\{x(t) * y(t)\right\} = \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-st}x(u)y(t-u)dt\right)du = \int_0^\infty e^{-su}x(u)du\int_0^\infty e^{-sv}y(v)dv = X(s)Y(s).$$

Để chứng minh công thức (1.21) ta sử dụng công thức (2.6), (2.13) và (2.20):

$$\mathcal{L}\left\{x(0)y(t) + x'(t) * y(t)\right\} = x(0)Y(s) + \left(sX(s) - x(0)\right)Y(s) = sX(s)Y(s).$$

Ví dụ 2.24: Tìm biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sinh 2u\cos 3(t-u)du\right\}$.

Giải: Ta có $\int_0^t \sinh 2u\cos 3(t-u)du = \sinh 2t * \cos 3t$.

Theo công thức 2.20 và ví dụ 2.7, ví dụ 2.12 ta được:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sinh 2u\cos 3(t-u)du\right\} = \mathcal{L}\left\{\sinh 2t * \cos 3t\right\} = \frac{1}{s^2-4}\cdot\frac{s}{s^2+9}$$

Ví dụ 2.25: Ta có thể nghiệm lại công thức 2.20 qua các ví dụ 2.22, 2.23 như sau:

$$\mathcal{L}\left\{\cos(t)*\sin(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\cos(t)\right\}\mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\}=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{s}{(s^2+1)^2},$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2*\sin(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{t^2\right\}\mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\}=\frac{2}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{2}{(s^2+1)s^3},$$

$$\mathcal{L}\left\{e^t*\left[\eta(t-1)-\eta(t-2)\right]\right\}=\mathcal{L}\left\{e^t\right\}\mathcal{L}\left\{\eta(t-1)-\eta(t-2)\right\}=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s-1)}$$

Ta cũng có $$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t\sin(t)\right\}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'=\frac{s}{(s^2+1)^2},$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2+2\cos t-2\right\}=\frac{2}{s^3}+\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}=\frac{2}{(s^2+1)s^3},$$

$$\mathcal{L}\left\{\left(e^{t-1}-1\right)\eta(t-1)-\left(e^{t-2}-1\right)\eta(t-2)\right\}=\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s-1)}.$$

2.1.2 Phép biến đổi Laplace ngược

Sử dụng tính chất của phép biến đổi Laplace ta có thể đưa các bài toán liên quan đến đạo hàm, tích phân của các hàm gốc về bài toán đại số của các hàm ảnh tương ứng. Khi đã nhận được nghiệm của hàm ảnh ta cần tìm nghiệm của hàm gốc tương ứng. Nói cách khác: cho hàm ảnh tìm hàm gốc tương ứng, đó là phép biến đổi Laplace ngược.

Trong mục này ta sẽ chỉ ra những điều kiện để một hàm nào đó là hàm ảnh, nghĩa là tồn tại hàm gốc của nó, khẳng định hàm gốc nếu tồn tại là duy nhất và giới thiệu một vài phương pháp tìm hàm gốc.

Định nghĩa 2.4: *Cho hàm $X(s)$, nếu tồn tại $x(t)$ sao cho $\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}=X(s)$ thì ta nói $x(t)$ là biến đổi ngược của $X(s)$, ký hiệu $x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$.*

2.1.2.1 Tính duy nhất của biến đổi ngược

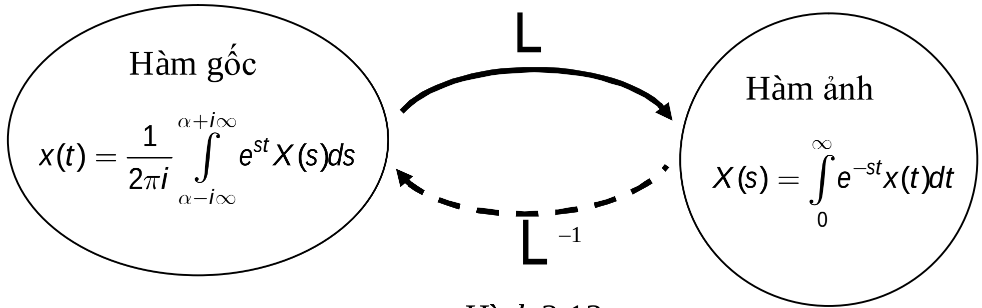
Định lý 2.13: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc với chỉ số tăng α_0 và $\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}=X(s)$, khi đó tại mọi điểm liên tục t của hàm $x(t)$ ta có:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{st}X(s)ds \qquad \textbf{(2.22)}$$

trong đó tích phân ở vế phải được lấy trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s)=\alpha$ theo hướng từ dưới lên, với α là số thực bất kỳ lớn hơn α_0.

Công thức (2.22) *được gọi là* ***công thức tích phân Bromwich***.

Công thức Bromwich cho thấy biến đổi Laplace ngược nếu tồn tại thì duy nhất.



Hình 2.13

Ví dụ 2.26: $L\left\{t * \sin t\right\} = L\left\{t\right\}\cdot L\left\{\sin t\right\} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

$$= \frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} = L\left\{t - \sin t\right\}.$$

$$L\left\{t * \cos t\right\} = L\left\{t\right\}\cdot L\left\{\cos t\right\} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = s\cdot\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} = s\cdot\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = L\left\{1-\cos t\right\}.$$

Do tính duy nhất của biến đổi ngược (định lý 2.13) ta suy ra:

$$t * \sin t = t - \sin t\,;\quad t * \cos t = 1 - \cos t\,.$$

2.1.2.2 Điều kiện đủ để một hàm có biến đổi ngược

Định lý 2.1 cho thấy không phải mọi hàm phức giải tích nào cũng có biến đổi ngược. Chẳng hạn hàm $X(s) = s^2$ không thể là ảnh của hàm gốc nào vì $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} X(s) = \infty$.

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để hàm giải tích có biến đổi ngược

Định lý 2.14: Giả sử hàm phức $X(s)$ thoả mãn 3 điều kiện sau:

1. $X(s)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$,
2. $\left|X(s)\right| \le M_R$ với mọi s thuộc đường tròn $\left|s\right| = M_R$ và $\lim\limits_{R\to\infty} M_R = 0$,
3. Tích phân $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X(s)ds$ hội tụ tuyệt đối.

Khi đó $X(s)$ có biến đổi ngược là hàm gốc $x(t)$ cho bởi công thức (2.22).

Độc giả có thể tìm hiểu chứng minh Định lý 2.13, Định lý 2.14 trong Phụ lục C của [5] hoặc Định lý 2.1 trang 29 của [11].

2.1.2.3 Một vài phương pháp tìm hàm ngược

A. ***Sử dụng các tính chất của biến đổi thuận và tính duy nhất của biến đổi ngược***

Từ tính duy nhất của biến đổi ngược, ta suy ra rằng tương ứng giữa hàm gốc và hàm ảnh là tương ứng 1-1 . Vì vậy ta có thể áp dụng các tính chất đã biết của phép biến đổi thuận để tìm hàm ngược bằng cách đọc ngược lại các tính chất trên.

Chẳng hạn nếu $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$ thì

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s-a)\} = e^{at}x(t), \qquad \text{(dịch chuyển ảnh)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}X(s)\} = x(t-a)\eta(t-a), \quad \text{(trễ)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X(s)}{s}\right\} = \int_0^t x(u)du, \qquad \text{(biến đổi của tích thân)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{-X'(s)\} = tx(t) \qquad \text{(nhân với } t\text{)}$$

… … …

Ví dụ 2.27: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+4)^6}\right\} = e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^6}\right\} = e^{-4t}\dfrac{t^5}{5!}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{5-3s}}{(s+4)^6}\right\} = e^5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)^6}\right\} = e^5e^{-4(t-3)}\frac{(t-3)^5}{5!}\eta(t-3).$$

Ví dụ 2.28: $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right)'$ và $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin(at)$, do đó

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a}t\sin(at).$$

Ví dụ 2.29: Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s+a}{s-b}\right\}$.

Giải: Đặt $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s+a}{s-b}\right\}$, nghĩa là $\mathcal{L}\{x(t)\} = \ln\dfrac{s+a}{s-b}$.

Từ kết quả $\mathcal{L}\{tx(t)\} = -\dfrac{d}{ds}\left(\ln\dfrac{s+a}{s-b}\right) = -\dfrac{d}{ds}\ln(s+a) + \dfrac{d}{ds}\ln(s-b) = \dfrac{1}{s-b} - \dfrac{1}{s+a}$

Suy ra $tx(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-b} - \dfrac{1}{s+a}\right\} = e^{bt} - e^{-at}$.

Vậy $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s+a}{s-b}\right\} = \dfrac{e^{bt} - e^{-at}}{t}$.

Cũng với phương pháp này ta có

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}\right\} = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}\right\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2-a^2} - \frac{2s}{s^2}\right\} = \frac{2}{t}(1-\cosh at).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}\right\}=\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}\right\}=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+a^2}-\frac{2s}{s^2}\right\}=\frac{2}{t}(1-\cos at).$$

B. ***Khai triển thành chuỗi lũy thừa***

Nếu $X(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}+\frac{a_3}{s^4}+\frac{a_4}{s^5}+\cdots$ thì

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=a_0+a_1t+\frac{a_2t^2}{2!}+\frac{a_3t^3}{3!}+\frac{a_4t^4}{4!}+\cdots \qquad \textbf{(2.23)}$$

Ví dụ 2.30:

$$\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}=\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{s}+\frac{1}{2!s^2}-\frac{1}{3!s^3}+\frac{1}{4!s^4}-\cdots\right]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!s^3}-\frac{1}{3!s^4}+\frac{1}{4!s^5}-\cdots$$

$$\Rightarrow\ x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}\right\}=1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}-\frac{t^3}{(3!)^2}+\frac{t^4}{(4!)^2}-\cdots$$

$$=1-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{2^2}+\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^4}{2^24^2}-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^6}{2^24^26^2}+\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^8}{2^24^26^28^2}-\cdots=J_0\left(2\sqrt{t}\right)$$

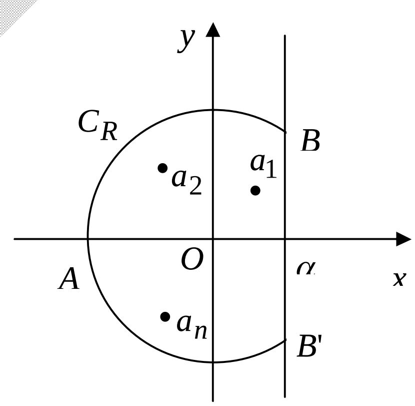
trong đó J_0 là hàm Bessel bậc 0 (xem chương 3).

C. ***Sử dụng thặng dư của tích phân phức***

Với điều kiện của Định lý 2.14 thì $X(s)$ có biến đổi ngược $x(t)$ xác định bởi công thức Bromwich (2.22).

Giả sử hàm $X(s)$ chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$ trong nửa mặt phẳng $\text{Re}(s)<\alpha$ với α nào đó $>\alpha_0$. Chọn *R* đủ lớn sao cho các điểm bất thường này đều nằm trong phần của mặt phẳng được giới hạn bởi đường tròn C_R tâm O bán kính *R* và đường thẳng $\text{Re}(s)=\alpha$ (xem hình 2.14). Khi đó

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\frown}{BAB'}} e^{st}X(s)ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{B'}^{B}e^{st}X(s)ds=\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Res}\,e^{st}X(s);a_k\right]. \qquad \textbf{(2.24)}$$



Hình 2.14:

Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu trên cung $\overset{\frown}{BAB'}$ của đường tròn C_R hàm $X(s)$ thoả mãn điều kiện $|X(s)| < \dfrac{M}{R^k}$; $k > 0$, theo Bổ đề 1.2 (Chương 1) thì $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\overset{\frown}{BAB'}} e^{st} X(s) ds = 0$, $\forall t > 0$.

2. Hàm phân thức $X(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, nếu bậc của đa thức $Q(s)$ lớn hơn bậc của đa thức $P(s)$ thì $X(s)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Lấy giới hạn của đẳng thức (2.24) khi $R \to \infty$ và áp dụng định lý 2.13 ta được:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{Res} e^{st} X(s); a_k\right] \tag{2.25}$$

3. Đặc biệt nếu $X(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của đa thức $Q(s)$ lớn hơn bậc của đa thức $P(s)$, $Q(s)$ chỉ có các không điểm đơn là $a_1, a_2, ..., a_n$ và chúng không phải là không điểm của $P(s)$ thì ta có ***công thức Heaviside***:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t} \tag{2.26}$$

Ví dụ 2.31: Tìm hàm gốc $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+3s+5}{(s-1)(s+2)(s+3)}\right\}$.

Giải: Hàm ảnh $\dfrac{P(s)}{Q(s)} = \dfrac{s^2+3s+5}{(s-1)(s+2)(s+3)}$ có các cực điểm đơn là $1, -2, -3$.

$$\left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=1} = \frac{3}{4}, \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2} = -1, \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-3} = \frac{5}{4} \Rightarrow x(t) = \frac{3}{4}e^{t} - e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-3t}.$$

Ví dụ 2.32: Tìm hàm gốc $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}\right\}$.

Giải: Hàm ảnh $\dfrac{P(s)}{Q(s)} = \dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}$ có các cực điểm đơn là $2, -2+2i, -2-2i$.

$$\left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=2} = 1, \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2+2i} = \left.\frac{-9s-22}{\left(s^2+4s+8\right)+(s-2)(2s+4)}\right|_{s=-2+2i} = 1+\frac{i}{4},$$

$$\left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2-2i} = \overline{\left(\frac{P(-2+2i)}{Q'(-2+2i)}\right)} = \overline{1+\frac{i}{4}} = 1-\frac{i}{4}.$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{2t} + \left(1 + \frac{i}{4}\right)e^{-2t+2it} + \left(1 - \frac{i}{4}\right)e^{-2t-2it}$$

$$= e^{2t} + e^{-2t}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) + \frac{i}{4}e^{-2t}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right) = e^{2t} + e^{-2t}\left(2\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

1.2.3.4 *Tìm hàm gốc của các phân thức hữu tỉ*

Mọi phân thức hữu tỉ có dạng $X(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của $Q(s)$ lớn hơn bậc của $P(s)$ đều có thể phân tích thành tổng của các phân thức tối giản loại I và loại II.

♦ Các phân thức hữu tỉ loại I: $\dfrac{1}{s-a}$ hay $\dfrac{1}{(s-a)^n}$, $a \in \mathbb{R}$ có hàm gốc:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2.27}$$

♦ Các phân thức hữu tỉ loại II: $\dfrac{Ms+N}{\left((s+a)^2+\omega^2\right)^n}$, $M, N, a, \omega \in \mathbb{R}$.

Sử dụng tính chất dịch chuyển ảnh ta có thể đưa các phân thức tối giản loại II về một trong hai dạng sau:

$$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^n} \text{ hoặc } \frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^n} \tag{2.28}$$

▪ Trường hợp $n=1$, từ ví dụ 2.6 và ví dụ 2.12 ta có:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = \cos\omega t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{\sin\omega t}{\omega} \tag{2.29}$$

Áp dụng công thức đạo hàm hàm ảnh (2.16) liên tiếp vào (2.29), (2.30), ... ta suy ra các trường hợp sau (xem ví dụ 2.28)

▪ Trường hợp $n=2$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\} = \frac{t\sin\omega t}{2\omega}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\} = \frac{\sin\omega t - \omega t\cos\omega t}{2\omega^3} \tag{2.30}$$

▪ Trường hợp $n=3$: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}\right\} = \dfrac{t\sin\omega t - \omega t^2\cos\omega t}{8\omega^3}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\} = \frac{\left(3-\omega^2t^2\right)\sin\omega t - 3\omega t\cos\omega t}{8\omega^3} \tag{2.31}$$

Ví dụ 2.33: Hàm ảnh $X(s)=\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}$ (xem ví dụ 2.32) có thể phân tích thành tổng các phân thức tối giản

$$X(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{2s+3}{s^2+4s+8}=\frac{1}{s-2}+\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}-\frac{1}{(s+2)^2+4}$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}\right\}=e^{2t}+2e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t\,.$$

Ví dụ 2.34: $X(s)=\dfrac{3s-4}{\left(s^2-2s+2\right)^2}=\dfrac{3(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^2}-\dfrac{1}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-4}{\left(s^2-2s+2\right)^2}\right\}=3e^t\frac{t\sin t}{2}-\frac{e^t}{2}\left(\sin t-t\cos t\right)=\frac{e^t}{2}\left(3t\sin t-\sin t+t\cos t\right)$$

Ví dụ 2.35: Tìm hàm gốc của $X(s)=\dfrac{2s^3+10s^2+9s+45}{s^2\left(s^2+9\right)}$.

Ta có $\qquad \dfrac{1}{s^2\left(s^2+9\right)}=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s^2+9}\right)$

$$\Rightarrow\quad X(s)=\frac{2s}{s^2+9}+\frac{10}{s^2+9}+\frac{9s+45}{9}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+9}\right)=\frac{1}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{s}{s^2+9}+\frac{5}{s^2+9}$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+9s+45}{s^2\left(s^2+9\right)}\right\}=1+5t+\cos 3t+\frac{5}{3}\sin 3t\,.$$

Ví dụ 2.36: Tìm hàm gốc của $X(s)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$.

Ta phân tích $X(s)$ thành tổng các phân thức tối giản

$$X(s)=\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{-7}{(s-2)^3}$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}+4te^{2t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}\,.$$

2.1.3 Ứng dụng của biến đổi Laplace

2.1.3.1 Ứng dụng của biến đổi Laplace để tính tích phân

Một vài tích phân lấy cận từ 0 đến $+\infty$ có thể tính được bằng cách áp dụng phép biến đổi Laplace.

A. Thay trực tiếp vào công thức xác định biến đổi Laplace (2.1) ta có thể tính được tích phân với hàm dưới dấu tích phân có chứa e^{-at}.

$$\int_0^\infty e^{-at}x(t)dt = \left(\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt\right)_{s=a} = X(s)\Big|_{s=a}. \qquad \textbf{(2.32)}$$

Ví dụ 2.37: Tính $\int_0^\infty e^{-3t}\sin t dt$.

Giải: $\int_0^\infty e^{-3t}\sin t dt = \mathcal{L}\left\{\sin t\right\}\Big|_{s=3} = \dfrac{1}{s^2+1}\Big|_{s=3} = \dfrac{1}{10}$.

Ví dụ 2.38: Tính $\int_0^\infty e^{-2t}t\cos t dt$.

Giải: $\int_0^\infty e^{-2t}t\cos t dt = \mathcal{L}\left\{t\cos t\right\}\Big|_{s=2}$, $\mathcal{L}\left\{t\cos t\right\} = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right) = \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$.

Vậy

$$\int_0^\infty e^{-2t}t\cos t dt = \mathcal{L}\left\{t\cos t\right\}\Big|_{s=2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Bigg|_{s=2} = \frac{3}{25}.$$

B. Sử dụng tính chất tích phân ảnh (2.17)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty X(u)du ,$$

trong đó $\mathcal{L}\left\{\dfrac{x(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\dfrac{x(t)}{t}dt$ và $X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$.

Nếu $x(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng $\alpha_0 \le 0$, thay $s=0$ ta nhận được công thức quan trọng

$$\int_0^\infty \frac{x(t)}{t}dt = \int_0^\infty X(s)ds \qquad \textbf{(2.33)}$$

Công thức này tỏ ra hiệu quả khi tính trực tiếp tích phân ở vế trái gặp khó khăn.

Ví dụ 2.39: Tính $\int_0^\infty \left(\dfrac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right)dt$.

Giải: Ta có $\mathcal{L}\left\{e^{-t}-e^{-3t}\right\} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+3}$.

Áp dụng công thức (2.33) ta được:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right)dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)ds=\left[\ln(s+1)-\ln(s+3)\right]\Big|_0^{\infty}=\ln\frac{s+1}{s+3}\Big|_0^{\infty}=\ln 3.$$

Ví dụ 2.40: Tính $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

Giải: $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+1}ds=\arctan s\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.41: Tính $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$.

Giải: Ta có $\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$, do đó $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(1-\cos 2t)\frac{1}{t^2}dt$.

Sử dụng công thức biến đổi Laplace ta lại có $\frac{1}{t^2}=\int_0^{\infty}e^{-tu}udu$, do đó

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(1-\cos 2t)\left[\int_0^{\infty}e^{-ts}sds\right]dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-ts}(1-\cos 2t)dt\right]sds.$$

$$\int_0^{\infty}e^{-st}(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}=\frac{4}{s(s^2+4)},$$

Vậy

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{4}{s(s^2+4)}\right]sds=\int_0^{\infty}\frac{2}{s^2+4}ds=\arctan\frac{s}{2}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

2.1.3.2 Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính

A. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

$$a_n\frac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=y(t) \qquad \textbf{(2.34)}$$

thỏa mãn điều kiện đầu

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1,\ \ldots,x^{(n-1)}(0)=x_{n-1} \qquad \textbf{(2.35)}$$

Ta tìm nghiệm là hàm gốc bằng cách đặt $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$.

Áp dụng công thức biến đổi Laplace của đạo hàm (2.13), (2.14) với điều kiện đầu (2.35),

$$\mathcal{L}\{a_0x(t)\}=a_0X(s)$$

$$\mathcal{L}\{a_1x'(t)\}=a_1\left(sX(s)-x_0\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathcal{L}\left\{a_{n-1}x^{(n-1)}(t)\right\} = a_{n-1}\left(s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - \cdots - x_{n-2}\right) \tag{2.36}$$

$$\mathcal{L}\left\{a_n x^{(n)}(t)\right\} = a_n\left(s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - \cdots - sx_{n-2} - x_{n-1}\right).$$

Thay vào (2.34) ta được

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right)X(s) = Y(s) + x_0\left(a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1\right)$$
$$+x_1\left(a_n s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2\right) + \cdots + x_{n-1}a_n\,.$$

Vậy phương trình ảnh có dạng: $A(s)X(s) = Y(s) + B(s) \;\Rightarrow\; X(s) = \dfrac{Y(s)+B(s)}{A(s)}$.

Ảnh ngược $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$ là nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2.42: Tìm nghiệm của phương trình: $x'' - 2x' + 2x = 2e^t\cos t$
thỏa mãn điều kiện đầu $x(0) = x'(0) = 0$.

Giải: $\mathcal{L}\left\{2e^t\cos t\right\} = \dfrac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$. Áp dụng công thức (2.36) với điều kiện đầu của bài toán ta có phương trình ảnh: $\left(s^2 - 2s + 2\right)X(s) = \dfrac{2(s-1)}{(s-1)^2+1} \;\Rightarrow X(s) = \dfrac{2(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$

Áp dụng công thức (2.32) ta có nghiệm $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = 2e^t\dfrac{t\sin t}{2} = te^t\sin t$.

Ví dụ 2.43: Tìm nghiệm của phương trình: $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t$
thỏa mãn điều kiện đầu $x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$.

Giải: Phương trình ảnh: $\left(s^4 + 2s^2 + 1\right)X(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \;\Rightarrow X(s) = \dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^3}$.

Áp dụng công thức (2.31) ta có nghiệm $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \dfrac{\left(3-t^2\right)\sin t - 3t\cos t}{8}$.

Ví dụ 2.44: Tìm nghiệm của phương trình: $x'' + x = e^t$
thỏa mãn điều kiện đầu $x(1) = 1,\ x'(1) = 0$.

Giải: Đổi biến số $u = t - 1$, điều kiện đầu $t = 1$ trở thành điều kiện đầu $u = 0$.
Đặt $y(u) = x(u+1) = x(t)$ và sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp ta có:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{du} = \frac{dx}{dt}, \text{ tương tự } \frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Do đó phương trình đã cho có thể viết lại tương ứng: $y''(u)+y(u)=e^{u+1}$

với điều kiện đầu $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Đặt $Y(s)=\mathcal{L}\left\{y(u)\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{y''(u)\right\}=s^2Y(s)-s$.

Phương trình ảnh: $s^2Y(s)-s+Y(s)=\dfrac{e}{s-1} \Rightarrow Y(s)=\dfrac{e}{(s-1)\left(s^2+1\right)}+\dfrac{s}{s^2+1}$.

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\frac{e}{2}}{(s-1)}+\left(1-\frac{e}{2}\right)\frac{s}{s^2+1}-\frac{\frac{e}{2}}{s^2+1} \Rightarrow y(u)=\frac{e}{2}e^u+\left(1-\frac{e}{2}\right)\cos u+\frac{e}{2}\sin u$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x(t)=\dfrac{1}{2}e^t+\left(1-\dfrac{e}{2}\right)\cos(t-1)+\dfrac{e}{2}\sin(t-1)$.

B. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ 2.45: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x'=2x-3y \\ y'=y-2x \end{cases} \text{ với điều kiện đầu } \begin{cases} x(0)=8 \\ y(0)=3 \end{cases}.$$

Giải: Đặt $X(s)=\mathcal{L}\left\{x(t)\right\},\ Y(s)=\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{x'(t)\right\}=sX-8,\ \mathcal{L}\left\{y'(t)\right\}=sY-3$.

Thay vào hệ phương trình trên ta có hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases} sX-8=2X-3Y \\ sY-3=Y-2X \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (s-2)X+3Y=8 \\ 2X+(s-1)Y=3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ảnh ta có nghiệm:

$$\begin{cases} X=\dfrac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\dfrac{5}{s+1}+\dfrac{3}{s-4} \\ Y=\dfrac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\dfrac{5}{s+1}-\dfrac{2}{s-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=5e^{-t}+3e^{4t} \\ y(t)=5e^{-t}-2e^{4t} \end{cases}.$$

Ví dụ 2.46: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x'=2x-y \\ y'=x+2y \end{cases} \text{ với điều kiện đầu } \begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{cases}.$$

Giải: Đặt $X(s)=\mathcal{L}\left\{x(t)\right\},\ Y(s)=\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{x'(t)\right\}=sX-1,\ \mathcal{L}\left\{y'(t)\right\}=sY$.

Thay vào hệ phương trình trên ta có hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases} sX-1=2X-Y \\ sY=X+2Y \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (s-2)X+Y=1 \\ X-(s-2)Y=0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ảnh ta có nghiệm:

$$\begin{cases} X = \dfrac{s-2}{(s-2)^2+1} \\ Y = \dfrac{1}{(s-2)^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{2t}\cos t \\ y(t) = e^{2t}\sin t \end{cases}$$

C. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số biến thiên

Ví dụ 2.47: *Giải phương trình* $t\,x'' + x' + 4tx = 0$

Đặt $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ thì $\mathcal{L}\{4tx(t)\} = -4\dfrac{dX}{ds}$, $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX - x(0)$.

$$\mathcal{L}\{tx''(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(s^2X - sx(0) - x'(0)\right) = -2sX - s^2\frac{dX}{ds} + x(0).$$

Phương trình ảnh: $-2sX - s^2\dfrac{dX}{ds} + x(0) + sX - x(0) - 4\dfrac{dX}{ds} = 0$.

Hay $(s^2+4)\dfrac{dX}{ds} = -sX \Rightarrow \dfrac{dX}{X} = -\dfrac{s}{s^2+4}ds$.

Giải phương trình này ta được: $X(s) = \dfrac{C}{\sqrt{s^2+4}}$.

Theo 63. phụ lục C ta được nghiệm $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{C}{\sqrt{s^2+4}}\right\} = C\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2+4}}\right\} = CJ_0(2t)$.

Để xác định *C* ta thay $t = 0$ vào hai vế của đẳng thức trên: $x(0) = CJ_0(0) = C$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x(t) = x(0)J_0(2t)$.

2.1.3.3 Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình tích phân

Xét phương trình tích phân dạng tích chập

$$Ax(t) + B\int_0^t x(u)k(t-u)du = C\,f(t) \qquad \textbf{(2.37)}$$

A, B, C là các hằng số, $f(t)$, $k(t)$ là các hàm gốc.

Giải phương trình (2.37) là tìm tất cả các hàm thực $x(t)$ thỏa mãn phương trình với mọi t thuộc một miền nào đó.

Giả sử $x(t)$ là hàm gốc. Đặt $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $K(s) = \mathcal{L}\{k(t)\}$.

Phương trình ảnh $A\,X(s) + B\,X(s)K(s) = C\,F(s) \Rightarrow X(s) = \dfrac{C\,F(s)}{A + B\,K(s)}$.

Nghiệm của phương trình (2.37) là $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{C\,F(s)}{A+B\,K(s)}\right\}$.

Ví dụ 2.48: *Giải phương trình tích phân:*

$$x(t)-\int_0^t x(u)\sin(t-u)du=t^2 .$$

Giải: Phương trình ảnh $X(s)-X(s)\dfrac{1}{s^2+1}=\dfrac{2}{s^3}$.

$$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right)X(s)=\frac{2}{s^3}\Rightarrow X(s)=\frac{2(s^2+1)}{s^5}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}\quad\Rightarrow x(t)=t^2+\frac{1}{12}t^4 .$$

Ví dụ 2.49: *Giải phương trình tích phân Abel:*

$$\int_0^t \frac{x(u)}{(t-u)^{\alpha}}du=f(t)\ ;\ 0<\alpha<1.$$

Giải: $\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}\right\}=\dfrac{\Gamma(\beta)}{s^{\beta}},\ \beta>0\Rightarrow K(s)=\mathcal{L}\left\{t^{-\alpha}\right\}=\dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}$ (xem phụ lục E).

Do đó $X(s)=\dfrac{F(s)}{K(s)}=\dfrac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}F(s)$.

Nghiệm của phương trình là $x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$.

Chẳng hạn $\alpha=\dfrac{1}{2},\ f(t)=1+t+t^2$ thì $\Gamma(1-\alpha)=\sqrt{\pi},\ F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s^3}$.

$$\Rightarrow X(s)=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

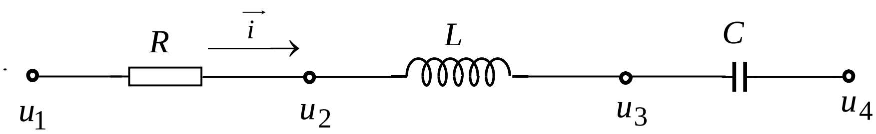
(xem hàm Gamma chương3)

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{2t}{\sqrt{\pi}}+\frac{8t^2}{3\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{3\pi\sqrt{t}}\left(3+6t+8t^2\right).$$

2.1.3.4 Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải các bài toán mạch điện

Một số bài toán về các mạch điện được đưa về bài toán giải phương trình vi phân, phương trình tích phân, hoặc phương trình đạo hàm riêng… Vì vậy, nếu chuyển qua ảnh của biến đổi Laplace thì việc giải các bài toán sẽ đơn giản hơn.

Giả sử trên một đoạn mạch có điện trở R, một cuộn dây có hệ số tự cảm L và một tụ điện có điện dung C .



Hình 2.15:

Gọi $u(t)$ là hiệu điện thế của hai đầu đoạn mạch, $i(t)$ là cường độ dòng điện của mạch tại thời điểm t. $u(t)$ và $i(t)$ thỏa mãn các đẳng thức sau:

$$u_2(t)-u_1(t)=R\,i(t);\;\; u_3(t)-u_2(t)=L\frac{di(t)}{dt};\;\; u_4(t)-u_3(t)=\frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt+q_0\right). \quad \textbf{(2.38)}$$

Đặt $I(s)=\mathcal{L}\{i(t)\}, U(s)=\mathcal{L}\{u(t)\}$ thì

$$\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\}=sI-i(0),\; \mathcal{L}\left\{\int_0^t i(t)dt+q_0\right\}=\frac{I}{s}+\frac{q_0}{s},$$

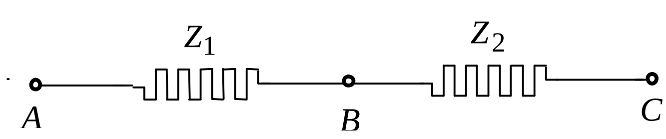
trong đó q_0 là điện lượng ban đầu ($t=0$) trên các thành tụ điện. Đối với bài toán đóng mạch tại thời điểm $t=0$, các điều kiện ban đầu đều bằng 0: $q_0=0$, $i(0)=0$, lúc đó tỉ số giữa điện thế ảnh và cường độ ảnh gọi là trở kháng ảnh $Z=\frac{U}{I}$. Như vậy các trở kháng ảnh của điện trở R, cuộn dây có hệ số tự cảm L và tụ điện có điện dung C lần lượt tương ứng là:

$$Z=R\;;\;\; Z=Ls\;;\;\; Z=\frac{1}{Cs} \quad \textbf{(2.39)}$$

Khi tính toán một mạng gồm nhiều mạch điện kín ta áp dụng định luật thứ nhất của Kirchoff (kiếc-sốp) cho từng nút và định luật thứ hai cho từng mạch kín, sau đó chuyển các phương trình tìm được sang phương trình ảnh.

Trong quá trình tính toán ta có thể thay trở kháng ảnh tương đương cho các trở kháng ghép nối tiếp hoặc song song. Áp dụng hai định luật Kirchoff ta có thể tìm trở kháng ảnh tương đương của mạch mắc nối tiếp và mạch song song cơ bản sau:

- Trở kháng ảnh tương đương Z của hai trở kháng Z_1, Z_2 mắc nối tiếp bằng tổng hai trở kháng này.

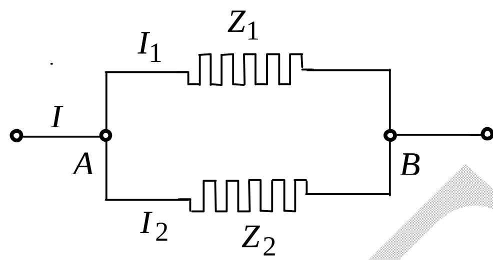


Gọi u_1, u_2, u lần lượt là hiệu điện thế giữa *A, B*; *B, C* và *A, C*. Theo định luật 1 Kirchoff ta có $u=u_1+u_2$, chuyển qua ảnh $U=U_1+U_2 \Rightarrow ZI=Z_1I+Z_2I$. Vậy

$$Z=Z_1+Z_2 \quad \textbf{(2.40)}$$

- Nghịch đảo của trở kháng ảnh tương đương của hai trở kháng Z_1, Z_2 mắc song song bằng tổng nghịch đảo hai trở kháng này.

Gọi I_1, I_2, I lần lượt là cường độ ảnh trong mạch 1, mạch 2 và mạch chính. U là điện thế ảnh giữa *A* và *B*.

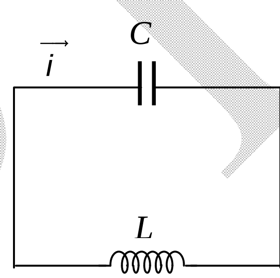


Áp dụng định luật 2 Kirchoff tại nốt *A* và nốt *B* ta có $I = I_1 + I_2 \Rightarrow \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{Z_1} + \dfrac{U}{Z_2}$. Vậy:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \tag{2.41}$$

Ví dụ 2.50: *Một tụ điện có điện dung* C *được nạp điện có điện lượng* q_0. *Khi* $t = 0$, *ta mắc nó vào 2 mút của một cuộn dây có hệ số điện cảm* L. *Tìm điện lượng* $q(t)$ *của tụ điện và cường độ* $i(t)$ *của dòng điện trong mạch tại thời điểm* t (xem hình 2.16).

Giải:



Hình 2.16:

Áp dụng định luật Kirchoff thứ nhất cho mạch vòng ta có:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\left(\int_0^t i\,dt + q_0\right) = 0.$$

Vì $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ nên phương trình trên trở thành

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\int_0^t \frac{dq}{dt}dt + q_0\right) = 0 \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0, \text{ (vì } \int_0^t \frac{dq}{dt}dt = q(t) - q_0\text{)}.$$

Đặt $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$, vì $q(0) = q_0$, $q'(0) = i(0) = 0$. Ta có phương trình ảnh:

$$L(s^2Q - sq_0) + \frac{Q}{C} = 0 \;\Rightarrow\; Q = q_0 \frac{s}{s^2 + \frac{1}{CL}}$$

Vậy $$q(t) = q_0 \cos\frac{t}{\sqrt{CL}};\; i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{\sqrt{CL}} \sin\frac{t}{\sqrt{CL}}.$$

Ví dụ 2.51: *Xét mạch* RLC *nối tiếp* (*cho trong hình 2.17*) *với* $R = 110\Omega$, $L = 1H$, $C = 0,001F$ *và một ắc quy cung cấp sức điện động* $90V$. *Đóng mạch tại thời điểm* $t = 0$ *và đến thời điểm* $t = T$ *(T = 1 s) ắc quy sẽ được tách ra khỏi mạch, lúc đó mạch* RLC *cũng đóng nhưng không con sức điện động. Tìm cường độ* $i(t)$ *của dòng điện trong mạch tại thời điểm* $t > 0$.

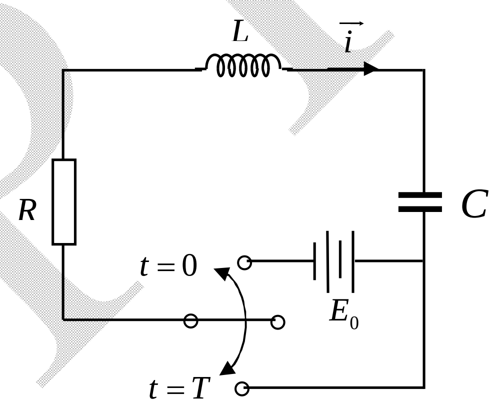
Giải: Áp dụng định luật Kirchoff thứ nhất cho mạch vòng với điều kiện đầu $i(0) = 0$, $q(0) = 0$ ta có:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\left(\int_0^t i\,dt\right) = E(t).$$

Sức điện động $E(t) = 90\big(\eta(t) - \eta(t-1)\big)$, do giả thiết $T = 1$.

Áp dụng biến đổi Laplace ta được phương trình ảnh

$$LsI + RI + \frac{1}{Cs}I = 90\frac{1-e^{-s}}{s}.$$



Hình 2.17: Mạch RLC

Thay số ta tính được $I = 90\dfrac{1-e^{-s}}{s^2 + 110s + 1000} = (1 - e^{-s})\left(\dfrac{1}{s+10} - \dfrac{1}{s+100}\right)$,

Vậy $$i(t) = e^{-10t} - e^{-100t} - \left(e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)}\right)\eta(t-1).$$

Ví dụ 2.52: *Xét một mạch điện như hình 2.18. Suất điện động* $E(t) = E_0 =$ *hằng số. Đóng mạch tại thời điểm* $t = 0$. *Hãy tìm cường độ* $i_1(t)$, $t > 0$.

Gọi I_1 là cường độ ảnh của mạch $R_1 - C$.

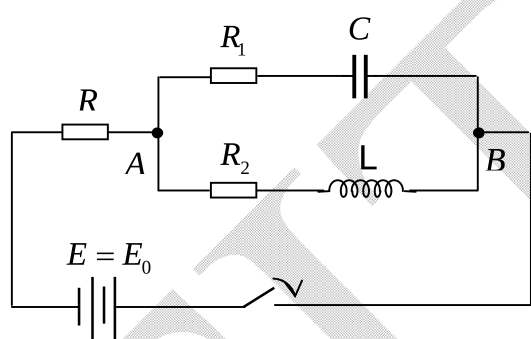
I_2 là cường độ ảnh của mạch $R_2 - L$.

Z_1 là trở kháng ảnh của mạch $R_1 - C$. $\quad Z_1 = R_1 + \dfrac{1}{Cs}$

Z_2 là trở kháng ảnh của mạch $R_2 - L$. $\quad Z_2 = R_2 + Ls$

Z là trở kháng ảnh tương đương của hai đoạn mạch $R_1 - C$ và $R_2 - L$ mắc song song.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \text{ hay } Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Z}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \textbf{(*)}$$



Hình 2.18:

Hiệu điện thế ảnh giữa hai đầu *A*, *B* của đoạn mạch:

$$I_1 Z_1 = I_2 Z_2 = I\,Z \ \Rightarrow I_1 = \frac{Z}{Z_1} I \qquad \textbf{(**)}$$

Áp dụng định luật Kirchoff cho mạch vòng ta có

$$(R + Z)I = \frac{E_0}{s} \qquad \textbf{(***)}$$

Từ **(*)**, **(**)** và **(***)** suy ra

$$I_1 = \frac{Z}{Z_1} \cdot \frac{E_0}{s} \cdot \frac{1}{R + Z} = \frac{\dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}{Z_1} \cdot \frac{E_0}{s} \cdot \frac{1}{R + \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_2 E_0}{s\left[R\left(Z_1 + Z_2\right) + Z_1 Z_2\right]}.$$

Thay Z_1, Z_2 vào kết quả trên ta được

$$I_1 = \frac{E_0(R_2 + Ls)}{s^2\left(RL + R_1 L\right) + s\left(RR_1 + RR_2 + R_1 R_2 + \dfrac{L}{C}\right) + \dfrac{R}{C} + \dfrac{R_2}{C}}.$$

Đặt $\alpha = RL + R_1 L$; $2\beta = RR_1 + RR_2 + R_1 R_2 + \dfrac{L}{C}$; $\gamma = \dfrac{R}{C} + \dfrac{R_2}{C}$.

➢ Nếu $\Delta' = \beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$, gọi s_1, s_2 là hai nghiệm phân biệt (thực hoặc phức) của tam thức $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$ và $s_1, s_2 \neq -\dfrac{R_2}{L}$. Khi đó từ công thức Heaviside ta có hàm gốc $i_1(t) = \dfrac{E_0}{2}\left(\dfrac{R_2 + Ls_1}{\alpha s_1 + \beta}e^{s_1 t} + \dfrac{R_2 + Ls_2}{\alpha s_2 + \beta}e^{s_2 t}\right)$.

➢ Nếu $\Delta' = \beta^2 - \alpha\gamma = 0$, tam thức $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$ có nghiệm kép $s = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ta có hàm gốc $i_1(t) = \dfrac{E_0}{2}\left[L + t\left(R_2 - \dfrac{\beta}{\alpha}L\right)\right]e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}$.

➢ Nếu $s = -\dfrac{R_2}{L}$ là một nghiện của $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$ thì $I_1 = \dfrac{LE_0}{\alpha\left(s + \dfrac{L\gamma}{R_2\alpha}\right)}$,

Ta có hàm gốc $i_1(t) = \dfrac{LE_0}{\alpha}e^{-\frac{L\gamma}{R_2\alpha}t}$.

Ví dụ 2.53: *Cho một dây dẫn nằm dọc theo trục $\overrightarrow{Ox}$ từ O đến l. Gọi C, R, L, G lần lượt là điện dung, điện trở, điền cảm, hệ số hao phí điện ứng với một đơn vị dài sợi dây. Khi có dòng điện chạy trong dây, xung quanh nó tạo nên một từ trường làm thay đổi cường độ dòng điện và điện thế. Tìm cường độ $i(x,t)$ và điện thế $u(x,t)$ dòng điện ở vị trí x thời điểm t với điều kiện đầu và điều kiện biên:*

$$\begin{cases} i(x,0) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} u(0,t) = \phi_1(t) \\ u(l,t) = \phi_2(t) \end{cases}. \tag{2.42}$$

Theo các định luật vật lý ta suy ra rằng giữa chúng liên hệ với nhau bởi hệ phương trình.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + Ri + L\dfrac{\partial i}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} + Gu + C\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

Đặt

$$F_1(s) = \mathcal{L}\left\{\phi_1(t)\right\}\ ;\ F_2(s) = \mathcal{L}\left\{\phi_2(t)\right\}. \tag{2.44}$$

$$U(x,s) = \mathcal{L}\left\{u(x,t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt\ ;\ I(x,s) = \mathcal{L}\left\{i(x,t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}i(x,t)dt \tag{2.45}$$

Dựa vào tính hội tụ đều của tích phân suy rộng (2.45) ta chứng minh được:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{\partial U}{\partial x}\ ;\quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial i}{\partial x}\right\} = \frac{\partial I}{\partial x} \tag{2.46}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=sU(x,s)-u(x,0);\quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial i}{\partial t}\right\}=sI(x,s)-si(x,0) \tag{2.47}$$

Áp dụng các công thức (2.44)-(2.46) vào (2.43) ta có hệ phương trình ảnh, các điều kiện biên ảnh.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}+RI+LsI=0\\ \dfrac{\partial I}{\partial x}+GU+CsU=0\end{cases}; \tag{2.48}$$

$$\begin{cases}U(0,s)=F_1(s)\\ U(l,s)=F_2(s)\end{cases}. \tag{2.49}$$

Để giải hệ phương trình này ta khử đi một ẩn hàm, chẳng hạn khử *I*. Lấy đạo hàm riêng theo x phương trình thứ nhất (2.48) ta có:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+R\frac{\partial I}{\partial x}+Ls\frac{\partial I}{\partial x}=0. \tag{2.50}$$

Thay $\dfrac{\partial I}{\partial x}=-\left(GU+CsU\right)$ vào phương trình trên ta được:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\left(R+Ls\right)\left(G+Cs\right)U=0. \tag{2.51}$$

Giải phương trình (2.49) theo biến x ta có nghiệm tổng quát:

$$U(x,s)=Ae^{kx}+Be^{-kx},\ \text{với } k=\sqrt{(Ls+R)(Cs+G)}. \tag{2.52}$$

$$I(x,s)=-\frac{1}{R+Ls}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{-k}{R+Ls}\left(Ae^{kx}-Be^{-kx}\right)=-\sqrt{\frac{Cs+G}{Ls+R}}\left(Ae^{kx}-Be^{-kx}\right). \tag{2.53}$$

Thay điều kiện biên (2.48) ta tìm được *A*, *B* xong lấy ảnh ngược ta sẽ có $u(x,t)$, $i(x,t)$ cần tìm.

Tuy nhiên nói chung không có một công thức tổng quát để tìm hàm gốc từ hàm ảnh có dạng trên. Ta tìm hàm gốc trong một vài trường hợp cụ thể sau.

Ví dụ 2.54: *Giả sử dây dẫn khá dài và ảnh hưởng của quá trình dao động điện không đáng kể. Khi đó, về mặt lý thuyết ta có thể xem x biến thiên từ 0 đến $+\infty$. Trong trường hợp này, điều kiện biên thứ hai phải được thay đổi bằng điều kiện buộc $u(x,t)$, $i(x,t)$ bị chặn khi $x\to+\infty$.*

Chọn $k=\sqrt{(Ls+R)(Cs+G)}$ thỏa mãn $\operatorname{Re}k>0$. Điều kiện $u(x,t)$, $i(x,t)$ bị chặn khi $x\to+\infty$ suy ra $U(x,s)$, $I(x,s)$ cũng bị chặn khi $x\to+\infty$, do đó $A=0$. Vậy

$$U(x,s)=Be^{-kx}.$$

Thay điều kiện biên $U(0,s)=F_1(s)$ ta được $B=F_1(s)$. Vậy

$$U(x,s) = F_1(s)e^{-kx} \ ; \ I(x,s) = \sqrt{\frac{Cs+G}{Ls+R}}U(x,s). \tag{2.54}$$

Các trường hợp đặc biệt:

➢ Truyền điện trên dây không bị hao điện $(R=0, G=0)$. Khi đó:

$$U(x,s) = F_1(s)e^{-sx\sqrt{LC}} \ ; \ I(x,s) = \sqrt{\frac{C}{L}}U(x,s).$$

Suy ra nghiệm $$u(x,t) = \begin{cases} \phi_1\left(t - x\sqrt{LC}\right) & \text{nõu} \quad t > x\sqrt{LC} \\ 0 & \text{nõu} \quad t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

$$i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}u(x,t).$$

➢ Truyền sóng không méo mó: $RC = LG$.

Khi đó: $(Ls+R)(Cs+G) = \left(s\sqrt{LC} + \sqrt{RG}\right)^2, \quad \sqrt{\frac{Cs+G}{Ls+R}} = \sqrt{\frac{C}{L}}$.

$$U(x,s) = e^{-x\sqrt{RG}}F_1(s)e^{-sx\sqrt{LC}} \ ; \ I(x,s) = \sqrt{\frac{C}{L}}U(x,s).$$

Suy ra nghiệm

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{-x\sqrt{RG}}\,\phi_1\left(t - x\sqrt{LC}\right) & \text{nõu} \quad t > x\sqrt{LC} \\ 0 & \text{nõu} \quad t < x\sqrt{LC} \end{cases}, \quad i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}u(x,t).$$

2.2 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

Sử dụng phương pháp tọa độ mỗi véc tơ có thể đồng nhất với tọa độ của véc tơ này. Mỗi véc tơ trong mặt phẳng có tọa độ là một cặp số (x,y), x là hoành độ và y tung độ, véc tơ trong không gian có tọa độ là bộ ba thành phần (x,y,z). Một hàm số được xem là véc tơ của không gian vô hạn chiều có các thành phần của tọa độ là các hệ số Fourier.

Cuối thế kỷ 18 nhà toán học, nhà vật lý đồng thời là kỹ sư người Pháp tên Jean Baptiste Joseph Fourier đã có khám phá kỳ lạ. Trong một kết quả nghiên cứu của mình về phương trình đạo hàm riêng mô tả sự truyền nhiệt của vật thể, Fourier đã khẳng định rằng “mọi” hàm số đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của chuỗi vô hạn các hàm lượng giác. Sau này ta gọi là khai triển hàm số thành chuỗi Fourier.

Có ba dạng của chuỗi Fourier: dạng cầu phương (công thức 2.57, 2.59), dạng cực (công thức 2.67) và dạng phức (công thức 2.68, 2.72).

Phép biến đổi Fourier hữu hạn được phát triển trên ý tưởng của khai triển hàm số tuần hoàn thành chuỗi Fourier, trong đó mỗi hàm số hoàn toàn được xác định bởi các hệ số Fourier của nó và ngược lại. Trường hợp hàm không tuần hoàn phép biến đổi Fourier rời rạc được thay bằng *phép biến đổi Fourier*, phép biến đổi ngược duy nhất được xây dựng dựa vào công thức tích phân Fourier.

Khi các hàm số biểu diễn cho các tín hiệu phụ thuộc thời gian t thì biến đổi Fourier của chúng được gọi là *biểu diễn phổ tần số*, vì mỗi hệ số Fourier tương ứng với một tần số của hàm sin hoặc hàm cosin, các hệ số Fourier đóng vai trò như các thành phần tọa độ của véc tơ. Tín hiệu tuần hoàn sẽ có phổ rời rạc, còn tín hiệu không tuần hoàn sẽ có phổ liên tục. Đối số của hàm tín hiệu là thời gian còn đối số của biến đổi Fourier của nó là tần số, vì vậy phép biến đổi Fourier còn được gọi là phép biến đổi biến miền thời gian về miền tần số. Biểu diễn phổ tần số của tín hiệu phụ thuộc thời gian cũng giống như biểu diễn véc tơ theo tọa độ của chúng.

Phép biến đổi Fourier rời rạc được sử dụng để tính toán khi các tín hiệu được rời rạc hoá bằng cách chọn các giá trị mẫu tại một số hữu hạn thời điểm và phổ cũng nhận được tại một số hữu hạn các tần số. Tuy nhiên để thực hiện nhanh phép biến đổi Fourier rời rạc, người ta sử dụng các *thuật toán biến đổi Fourier nhanh*.

Hướng ứng dụng vào viễn thông: Phân tích phổ, phân tích truyền dẫn tín hiệu, ghép kênh vô tuyến, ghép kênh quang, đánh giá chất lượng WDM...

2.2.1 Chuỗi Fourier (*)

2.2.1.1 Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

Hệ các hàm số

$$\left\{1,\ \cos nt\,,\ \sin nt\,;\ n = 1, 2, \ldots\right\} \tag{2.55}$$

là một hệ trực giao theo tích vô hướng

$$\left\langle x(t), y(t)\right\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$$

nghĩa là

$$\int_0^{2\pi}\cos nt dt = \int_0^{2\pi}\sin nt dt = \int_0^{2\pi}\cos nt\sin mt dt = 0\ ;\ \ \forall n, \forall m$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nt\cos mt dt = \int_0^{2\pi}\sin nt\sin mt dt = \begin{cases} 0 & \text{nếu}\ \ n \neq m \\ \pi & \text{nếu}\ \ n = m \end{cases} \tag{2.56}$$

Thật vậy

$$\int_0^{2\pi}\cos nt dt = \left.\frac{\sin nt}{n}\right|_0^{2\pi} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*;\ \int_0^{2\pi}\sin nt dt = -\left.\frac{\cos nt}{n}\right|_0^{2\pi} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nt\sin mt dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\sin(n+m)t - \sin(n-m)t\right]dt = 0$$

$$n \neq m,\ \int_0^{2\pi}\cos nt\cos mt dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\right]dt = 0$$

$$n \neq m,\ \int_0^{2\pi}\sin nt\sin mt dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(n+m)t - \cos(n-m)t\right]dt = 0$$

$$n = m,\ \int_0^{2\pi} \cos nt \cos mt dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 nt dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1+\cos 2nt\right]dt = \pi$$

$$n = m,\ \int_0^{2\pi} \sin nt \sin mt dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 nt dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1-\cos 2nt\right]dt = \pi$$

Từ tính chất trực giao của hệ (2.55) ta có thể chứng minh được rằng, nếu hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và khai triển thành tổng của chuỗi lượng giác

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

thì các hệ số a_0, a_n, b_n; $n = 1, 2, \ldots$ nghiệm đúng công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt\ ;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos nt dt\ ;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin nt dt\ ;\ n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(2.57)}$$

Thật vậy, từ công thức (2.56) ta có

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt dt + b_n \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nt dt = a_0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mt + b_m \sin mt\right)\cos nt dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\cos nt dt + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\int_0^{2\pi}\cos mt \cos nt dt + b_m\int_0^{2\pi}\sin mt \cos nt dt\right) = a_n$$

Các hệ số (2.57) được gọi là hệ số Fourier của hàm $x(t)$ và chuỗi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) \qquad \textbf{(2.58)}$$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm $x(t)$.

Với mọi hàm tuần hoàn chu kỳ 2π và khả tích ta có thể tính các hệ số Fourier vì vậy có chuỗi Fourier tương ứng. Ta ký hiệu

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) \qquad \textbf{(2.59)}$$

Hệ số $\frac{1}{2}$ của số hạng thứ nhất xuất phát từ sự thuận lợi trong việc tính toán sau này.

Ký hiệu $\sim$ trong công thức (2.59) ngụ ý rằng chuỗi Fourier của hàm $x(t)$ chưa chắc hội tụ về hàm $x(t)$.

Các câu hỏi được đặt ra một cách tự nhiên:

(i) Khi nào chuỗi lượng giác vô hạn (2.58) hội tụ?

(ii) Loại hàm $x(t)$ nào có thể biểu diễn thành tổng của chuỗi Fourier? Nghĩa là có thể thay dấu $\sim$ thành dấu =.

Định lý sau cho một điều kiện đủ để khai triển một hàm thành tổng của chuỗi Fourier.

Định lý 2.15 (Định lý Dirichlet): Giả sử hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, *đơn điệu từng khúc và bị chặn* (gọi là điều kiện Dirichlet), tại các điểm gián đoạn ta ký hiệu

$$x(t)=\frac{x(t+0)+x(t-0)}{2} \qquad \textbf{(2.60)}$$

trong đó $x(t+0)$, $x(t-0)$ lần lượt là giới hạn phải và giới hạn trái của $x(t)$ tại t. Khi đó chuỗi Fourier hội tụ và công thức (2.59) trở thành đẳng thức.

Ví dụ 2.55: Xét hàm số $x(t)=t$, $-\pi<t<\pi$; tuần hoàn chu kỳ 2π. Vì $x(t)$ là hàm lẻ nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt=0,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\,dt=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\cos nt}{n}+\frac{\sin nt}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$t\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n}=2\left(\sin t-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}-\frac{\sin 4t}{4}+\cdots\right)$$

Áp dụng định lý 2.15 ta có

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n}=\begin{cases} t & \text{nếu } -\pi<t<\pi \\ 0 & \text{nếu } t=\pm\pi \end{cases}$$

Thay $t=\dfrac{\pi}{2}$ và chia hai vế cho 2 ta được

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

Ví dụ 2.56: Xét hàm số $x(t)=|t|$, $-\pi<t<\pi$; tuần hoàn chu kỳ 2π. Vì $x(t)$ là hàm chẵn nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\sin nt\,dt=0;\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\,dt=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\cos nt\,dt=\frac{2}{\pi}\left[\frac{t\sin nt}{n}+\frac{\cos nt}{n^2}\right]_{t=0}^{\pi}=\begin{cases} 0 & \text{nếu } n=2k\neq 0 \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{nếu } n=2k+1 \end{cases}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$\left|t\right| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \frac{\cos 7t}{49} + \cdots\right)$$

Thay $t = 0$ ta được

.

Ví dụ 2.57: Xét hàm bước nhảy tuần hoàn chu kỳ 2π xác định như sau

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nÕu} \quad 0 < t < \pi \\ 0 & \text{nÕu} \quad -\pi < t < 0 \end{cases}$$

Các hệ số Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\eta(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}dt = 1,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\eta(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos ntdt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\eta(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin ntdt = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & \text{nÕu} \quad n = 2k+1 \\ 0 & \text{nÕu} \quad n = 2k \end{cases}.$$

Chuỗi Fourier tương ứng $\qquad \eta(t) \sim \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{\sin 3t}{3} + \dfrac{\sin 5t}{5} + \dfrac{\sin 7t}{7} + \cdots\right)$

2.2.1.2 Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ (*)

Xét $x(t)$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$, đặt $y(t) = x\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)$ thì $y(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π. Nếu $x(t)$ thỏa mãn điều kiện Dirichlet thì $y(t)$ cũng thỏa mãn điều kiện Dirichlet, do đó có thể khai triển thành chuỗi Fourier.

$$y(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)$$

$y(t) = x\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)$ tương đương với $x(t) = y\left(\dfrac{\pi}{l}t\right)$. Vậy

$$x(t) = y\left(\frac{\pi}{l}t\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right) \qquad \textbf{(2.61)}$$

Các hệ số Fourier được tính theo công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l}x(t)dt;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l}x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt;\ b_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l}x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt;\ n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(2.62)}$$

Nhận xét 2.2:

1. Hàm tuần hoàn chu kỳ 2π là một trường hợp đặc biệt của hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$, vì vậy các nhận xét sau đây được giả thiết là hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$. Ngoài ra do tính chất tích phân của hàm tuần hoàn nên các hệ số Fourier (2.62) cũng có thể tính như sau:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{c}^{2l+c}x(t)dt;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{2l+c}x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{2l+c} x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt \;;\; n = 1, 2, \ldots\forall c \qquad \textbf{(2.63)}$$

2. Nếu $x(t)$ là hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ $2l$ thì $x(t)\cos\frac{n\pi}{l}t$ là hàm lẻ và $x(t)\sin\frac{n\pi}{l}t$ là hàm chẵn, do đó các hệ số Fourier (2.62) thỏa mãn

$$a_0 = a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt \;;\; n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(2.64)}$$

3. Nếu $x(t)$ là hàm chẵn tuần hoàn chu kỳ $2l$ thì $x(t)\cos\frac{n\pi}{l}t$ là hàm chẵn và $x(t)\sin\frac{n\pi}{l}t$ là hàm lẻ, do đó các hệ số Fourier (2.62) thỏa mãn

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x(t)dt \;; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt \;;\; n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(2.65)}$$

4. Trường hợp $x(t)$ là hàm xác định, bị chặn và đơn điệu từng khúc trong khoảng (a, b), ta có thể mở rộng thành hàm tuần hoàn chu kỳ $2l = b - a$. Khi đó $x(t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier với các hệ số Fourier được tính như sau

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)dt \;;\; a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)\cos\frac{2n\pi}{b-a}tdt \;;$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)\sin\frac{2n\pi}{b-a}tdt \;;\; n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(2.66)}$$

5. Trường hợp $x(t)$ là hàm xác định, bị chặn và đơn điệu từng khúc trong khoảng $(0, l)$, ta có thể mở rộng thành hàm chẵn hoặc hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ $2l$. Nếu mở rộng thành hàm chẵn thì các hệ số Fourier được tính theo công thức (2.65) và nếu mở rộng thành hàm lẻ thì các hệ số Fourier được tính theo công thức (2.64).

Ví dụ 2.58: Xét hàm số $x(t) = t$, $-1 < t < 1$; tuần hoàn chu kỳ 2. Vì $x(t)$ là hàm lẻ nên các hệ số Fourier có thể tính như sau

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} tdt = 0, \; a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} t\cos n\pi tdt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} t\sin ntdt = 2\int_0^1 t\sin n\pi tdt = 2\left[-\frac{t\cos n\pi t}{n\pi} + \frac{\sin n\pi t}{(n\pi)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Do đó chuỗi Fourier tương ứng

$$t \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi t}{n} = \frac{2}{\pi}\left(\sin\pi t - \frac{\sin 2\pi t}{2} + \frac{\sin 3\pi t}{3} - \frac{\sin 4\pi t}{4} + \cdots\right).$$

2.2.1.3 Dạng cực của chuỗi Fourier (Polar Fourier Series)

Từ công thức (2.61) nếu ta đặt

$$A_0 = \frac{a_0}{2};\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{2.67}$$

và góc $\varphi_n,\ 0 \le \varphi_n < 2\pi$ xác định bởi

$$\cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n}\ , \quad \sin\varphi_n = \frac{b_n}{A_n} \tag{2.68}$$

khi đó công thức (2.61) có thể viết lại

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l} t + b_n \sin\frac{n\pi}{l} t = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} t - \varphi_n\right) \tag{2.69}$$

Công thức (2.61) được gọi là ***chuỗi Fourier dạng cầu phương*** (Quadrature Fourier Series). Công thức (2.69) được gọi là ***chuỗi Fourier dạng cực*** của $x(t)$.

2.2.1.4 Dạng phức của chuỗi Fourier (Complex Fourier Series) (*)

Thay hàm sin và cosin theo các hàm mũ từ công thức Euler (1.17) vào công thức (2.59) ta được

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{\mathrm{int}} + e^{-\mathrm{int}}}{2} + b_n \frac{e^{\mathrm{int}} - e^{-\mathrm{int}}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{\mathrm{int}} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-\mathrm{int}}$$

Vậy ta có thể viết chuỗi Fourier dưới dạng phức

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{int}} \tag{2.70}$$

trong đó các hệ số Fourier phức c_n xác định như sau

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 / 2 \\ c_n &= (a_n - ib_n) / 2 \\ c_{-n} &= (a_n + ib_n) / 2 \end{aligned} \quad \text{hoặc} \quad \begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned} \tag{2.71}$$

Mặt khác, tương tự hệ trực giao (2.55) ta có thể kiểm tra được rằng hệ các hàm phức

$$\left\{e^{imt}\right\}_{m=-\infty}^{\infty} \quad \text{thỏa mãn} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{int}} e^{-imt} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{nÕu} \quad n = m \\ 0 & \text{nÕu} \quad n \ne m \end{cases} \tag{2.72}$$

do đó đây là một hệ trực giao.

Vì vậy các hệ số Fourier phức (2.71) có thể tính trực tiếp

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_c^{c+2\pi} x(t) e^{-\mathrm{int}} dt\ , \quad \forall c \tag{2.73}$$

Trường hợp hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ có khai triển Fourier dạng phức

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}t} \, , \; c_n = \frac{1}{2l}\int_c^{c+2l} x(t) e^{-i\frac{n\pi}{l}t} dt \, , \;\; \forall c \qquad \textbf{(2.74)}$$

Nếu ký hiệu $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ là tần số cơ bản của hàm tuần hoàn chu kỳ T_0 thì công thức (2.74) được biểu diễn

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi f_0 t} \, , \; c_n = \frac{1}{2l}\int_c^{c+2l} x(t) e^{-i2n\pi f_0 t} dt \, , \; \forall c \qquad \textbf{(2.75)}$$

Ví dụ 2.59: Xét hàm bước nhảy tuần hoàn ví dụ 2.57

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \eta(t) e^{-i\,nt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\,nt} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{nÕu} \;\; n = 0 \\ 0 & \text{nÕu } n \text{ ch½n } n \neq 0 \\ \dfrac{1}{in\pi} & \text{nÕu } n \text{ lÎ} \end{cases}$$

Vậy, hàm bước nhảy đơn vị có khai triển Fourier

$$\eta(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2m+1)it}}{2m+1} .$$

Ví dụ 2.60: Tìm khai triển Fourier của hàm mũ $x(t) = e^{at}$, $-\pi < t < \pi$ tuần hoàn chu kỳ 2π.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{at} e^{-i\,nt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)t} dt = \left. \frac{e^{(a-in)t}}{2\pi(a-in)} \right|_{t=-\pi}^{\pi}$$

$$\left. \frac{e^{(a-in)t}}{2\pi(a-in)} \right|_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}}{2\pi(a-in)} = (-1)^n \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi(a-in)} = (-1)^n \frac{(a+in)\sinh a\pi}{\pi(a^2+n^2)} .$$

Vậy hàm có chuỗi Fourier tương ứng

$$e^{at} \sim \frac{\sinh a\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (a+in)}{a^2+n^2} e^{i\,nt} .$$

Định lý 2.16: Giả sử hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ thoả mãn điều kiện Dirichlet, khi đó ta có đẳng thức Parseval

$$\frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0} \left| x(t) \right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| c_n \right|^2 \qquad \textbf{(2.76)}$$

Chứng minh:

$$\frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0} \left| x(t) \right|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0} x(t)\overline{x(t)} dt = \frac{1}{T_0}\int_c^{c+T_0} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{m\pi}{l}t} \right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} e^{-i\frac{n\pi}{l}t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_c^{c+T_0} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_m \overline{c_n} e^{i\frac{m\pi}{l}t - i\frac{n\pi}{l}t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n\right|^2$$

Nhận xét 2.3: Công thức (2.69), (2.71), (2.74) cho thấy dạng cực, dạng phức và dạng cầu phương của chuỗi Fourier là hoàn toàn tương đương, nghĩa là từ dạng này ta có thể biểu diễn duy nhất qua dạng kia và ngược lại. Vậy thì dạng nào được ứng dụng tốt nhất. Câu trả lời là phụ thuộc vào từng trường hợp cụ thể. Nếu bài toán thiên về giải tích thì sử dụng dạng phức sẽ thuận lợi hơn vì việc tính các hệ số c_n dễ hơn. Tuy nhiên đối với các hàm dạng sóng được thực hiện trong phòng thí nghiệm thì dạng cực sẽ thuận tiện hơn, vì các thiết bị đo lường như vôn kế, máy phân tích phổ sẽ đọc được biên độ và pha. Dùng các kết quả thí nghiệm đo được các nhà kỹ thuật có thể vẽ các vạch phổ một phía là các đoạn thẳng ứng với mỗi giá trị biên độ A_n tại tần số $f_n = nf_0 = \frac{n}{T_0}$.

2.2.2 Phép biến đổi Fourier hữu hạn

Mỗi hàm tuần hoàn được xác định duy nhất bởi các hệ số Fourier của nó và ngược lại (công thức 2.55, 2.60, 2.71, 2.72), điều này được suy ra từ tính chất trực giao của hệ 2.53, 2.70.

Tương tự ta có thể chứng minh được hệ các hàm phức tuần hoàn $\left\{e^{i2\pi nf}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn trên đoạn $\left[0, 1\right]$

$$\int_0^1 e^{i2\pi nf} e^{-i2\pi mf} df = \begin{cases} 1 & \text{nÕu} \quad n = m \\ 0 & \text{nÕu} \quad n \neq m \end{cases}. \tag{2.77}$$

Dựa vào hệ trực chuẩn này ta định nghĩa phép biến đổi Fourier hữu hạn của các tín hiệu rời rạc như sau.

Định nghĩa 2.5: *Biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc* $\left\{x(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *là*

$$\widehat{X}(f) = \mathsf{F}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i2\pi nf} \tag{2.78}$$

nếu chuỗi ở vế phải hội tụ.

Công thức biến đổi ngược

$$x(n) = \mathsf{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\} = \int_0^1 \widehat{X}(f) e^{i2\pi nf} df \tag{2.79}$$

Hàm $\widehat{X}(f)$ tuần hoàn có chu kỳ 1.

Ví dụ 2.61: Tìm biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc $x(n) = \mathrm{rect}_N(n)$, N là 1 số tự nhiên.

$$\operatorname{rect}_N(n)=\begin{cases}1 & \text{nÕu } \ 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$$

Giải: $\widehat{X}(f)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i2\pi nf}=\sum\limits_{n=0}^{N-1}e^{-i2\pi nf}=\dfrac{1-e^{-i2\pi Nf}}{1-e^{-i2\pi f}}$

$$=\frac{e^{-i\pi Nf}}{e^{-i\pi f}}\cdot\frac{e^{i\pi Nf}-e^{-i\pi Nf}}{e^{i\pi f}-e^{-i\pi f}}=e^{-i\pi(N-1)f}\,\frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}.$$

Nhận xét 2.4:

1. Trong công thức biến đổi Fourier 2.76, 2.77 đối số f được ký hiệu cho tần số. Có tài liệu không biểu diễn biến đổi Fourier qua miền tần số mà qua miền tần số góc ω như sau

$$\widehat{X}(\omega)=\mathrm{F}\left\{x(n)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i\omega n},\ x(n)=\mathrm{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widehat{X}(\omega)e^{i\omega n}d\omega \qquad \textbf{(2.80)}$$

Hai cách biểu diễn này tương ứng với nhau qua phép đổi biến số $\omega=2\pi f$.

2. Một điều kiện đủ để tín hiệu rời rạc $\left\{x(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tồn tại biến đổi Fourier hữu hạn là $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|<\infty$.

3. Công thức biến đổi ngược 2.77 là khai triển Fourier dạng phức của hàm $\widehat{X}(f)$ đối với hệ trực chuẩn 2.75. Nếu biến đổi Fourier xét trong miền ω thì biến đổi ngược của $\widehat{X}(\omega)$ là khai triển Fourier dạng phức đối với hệ trực giao 2.10. Vì vậy biến đổi ngược tồn tại khi $\widehat{X}(f)$ (hoặc $\widehat{X}(\omega)$) thỏa mãn điều kiện Dirichlet.

Tính chất 2.2: Tương tự phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Fourier hữu hạn có các tính chất sau:

1. Tuyến tính:

$$\mathrm{F}\left\{Ax(n)+By(n)\right\}=A\mathrm{F}\left\{x(n)\right\}+B\mathrm{F}\left\{y(n)\right\} \qquad \textbf{(2.81)}$$

Chứng minh: $\mathrm{F}\left\{Ax(n)+By(n)\right\}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(Ax(n)+By(n)\right)e^{-i2\pi nf}$

$$=A\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i2\pi nf}+B\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)e^{-i2\pi nf}=A\mathrm{F}\left\{x(n)\right\}+B\mathrm{F}\left\{y(n)\right\}.$$

2. Trễ:

$$\widehat{X}(f)=\mathrm{F}\left\{x(n)\right\}\ \Rightarrow\ \mathrm{F}\left\{x(n-n_0)\right\}=e^{-i2\pi n_0 f}\widehat{X}(f). \qquad \textbf{(2.82)}$$

Chứng minh:

$$\mathrm{F}\left\{x(n-n_0)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-i2\pi nf} = e^{-i2\pi n_0 f}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-i2\pi(n-n_0)f}$$

$$= e^{-i2\pi n_0 f}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} = e^{-i2\pi n_0 f}\,\mathrm{F}\left\{x(n)\right\}.$$

3. Dịch chuyển ảnh:

$$\widehat{X}(f) = \mathrm{F}\left\{x(n)\right\} \Rightarrow \mathrm{F}\left\{e^{i2\pi nf_0}x(n)\right\} = \widehat{X}(f-f_0). \quad \textbf{(2.83)}$$

4. Điều chế:

$$\mathrm{F}\left\{x(n)\cos(2\pi nf_0)\right\} = \mathrm{F}\left\{x(n)\frac{e^{i2\pi nf_0}+e^{-i2\pi nf_0}}{2}\right\} = \frac{\widehat{X}(f-f_0)+\widehat{X}(f+f_0)}{2}. \quad \textbf{(2.84)}$$

5. Liên hợp phức: Nếu $\widehat{X}(f) = \mathrm{F}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf}$ thì

$$\mathrm{F}\left\{\overline{x(n)}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x(n)}e^{-i2\pi nf} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{i2\pi nf}} = \overline{\widehat{X}(-f)} \quad \textbf{(2.85)}$$

Khi $x(n)$ thực thì $\widehat{X}(f) = \overline{\widehat{X}(-f)}$.

6. Biến số đảo: Nếu $\widehat{X}(f) = \mathrm{F}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf}$ thì

$$\mathrm{F}\left\{x(-n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-i2\pi(-n)(-f)} = \widehat{X}(-f) \quad \textbf{(2.86)}$$

7. Tích chập (xem công thức 1.102):

$$\mathrm{F}\left\{x(n)*y(n)\right\} = \mathrm{F}\left\{x(n)\right\}\cdot\mathrm{F}\left\{y(n)\right\} \quad \textbf{(2.87)}$$

Chứng minh: Ta có $z(n) = x(n)*y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$

$$\widehat{Z}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)\right)e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-i2\pi kf}\right)y(n-k)e^{-i2\pi(n-k)f}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)e^{-i2\pi(n-k)f}\right)x(k)e^{-i2\pi kf} = \widehat{X}(f)\widehat{Y}(f)$$

8. Tích chập ảnh:

$$\mathrm{F}\left\{x(n)\cdot y(n)\right\} = \mathrm{F}\left\{x(n)\right\} * \mathrm{F}\left\{y(n)\right\} \quad \textbf{(2.88)}$$

Chứng minh: $\mathrm{F}\left\{x(n)\cdot y(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)e^{-i2\pi nf}$. Theo 2.71 ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\int_0^1 e^{-i2\pi(m-n)u}du\right)y(n)e^{-i2\pi nf}$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-i2\pi(m-n)u}\right)y(n)e^{-i2\pi nf}du$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-i2\pi mu}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-i2\pi n(f-u)}\right)du = \int_0^1 \widehat{X}(u)\widehat{Y}(f-u)du = \widehat{X}(f)*\widehat{Y}(f).$$

9. Biến đổi của hàm tương quan

$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)}$ gọi là hàm tương quan của hai dãy tín hiệu $\{x(n)\}$, $\{y(n)\}$,

$r_{x,x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{x(m-n)}$ gọi là hàm tự tương quan của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$.

$$\mathrm{F}\left\{r_{x,y}(n)\right\} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)} \tag{2.89}$$

Chứng minh: $r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)} = x(n)*\overline{y(-n)} \Rightarrow \mathrm{F}\left\{r_{x,y}(n)\right\} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}$.

Hoặc ta có thể chứng minh trực tiếp như sau:

$$\mathrm{F}\left\{r_{x,y}(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)}\right)e^{-i2\pi nf}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{y(m-n)}e^{-i2\pi(n-m)f}\right)e^{-i2\pi mf}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(m-n)e^{-i2\pi(m-n)f}\right)}e^{-i2\pi mf} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}.$$

Áp dụng công thức (2.89) vào hàm tự tương quan của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ ta có định lý Weiner-Khinchin:

$$\mathrm{F}\left\{r_{x,x}(n)\right\} = \left|\widehat{X}(f)\right|^2. \tag{2.90}$$

Trường hợp $x(n)$, $y(n)$ thực,

$$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n) \Rightarrow \mathrm{F}\left\{r_{x,y}(n)\right\} = \widehat{X}(f)\widehat{Y}(-f).$$

10. Đạo hàm ảnh:

$$\widehat{X}(f) = \mathrm{F}\left\{x(n)\right\} \;\Rightarrow\; \mathrm{F}\left\{nx(n)\right\} = \frac{i}{2\pi}\cdot\frac{d\widehat{X}(f)}{df} \tag{2.91}$$

Chứng minh: $\mathcal{F}\left\{nx(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-i2\pi nf} = \frac{1}{-i2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{de^{-i2\pi nf}}{df} = \frac{i}{2\pi}\cdot\frac{d\widehat{X}(f)}{df}$

11. Đẳng thức Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}df\ ;\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2 = \int_0^1\left|\widehat{X}(f)\right|^2 df\ . \tag{2.92}$$

Chứng minh:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{y(n)}\left(\int_0^1 \widehat{X}(f)e^{i2\pi nf}df\right) = \int_0^1 \widehat{X}(f)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{y(n)}e^{i2\pi nf}\right)df$$

$$= \int_0^1 \widehat{X}(f)\left(\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{i2\pi n(-f)}}\right)df = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}df\ .$$

12. Quan hệ giữa phép biến đổi Fourier rời rạc và phép biến đổi Z (mục 1.6 chương 1)

Biến đổi Z của dãy $\left\{x(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ có biến đổi Fourier rời rạc

$\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf}$. Vậy

$$\widehat{X}(f) = X(z)\Big|_{z=e^{i2\pi f}} \tag{2.93}$$

2.2.3 Phép biến đổi Fourier

Khởi đầu chuỗi Fourier được xây dựng với mục đích giải quyết các bài toán tương ứng với các hàm số xác định trong miền bị chặn hoặc hàm tuần hoàn. Để giải quyết các bài toán có các hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực $-\infty < t < \infty$ người ta mở rộng một cách tự nhiên phương pháp chuỗi Fourier, điều này đưa đến phép biến đổi Fourier. Phép biến đổi Fourier là một công cụ mạnh mẽ và đóng vai trò cốt yếu trong nhiều miền ứng dụng như: Giải phương trình vi phân, giải phương trình đạo hàm riêng, xử lý tín hiệu, ứng dụng vào lý thuyết điều khiển và trong nhiều lĩnh vực khác của toán lý thuyết cũng như toán ứng dụng. Đối với các nhà toán học phép biến đổi Fourier là cơ bản hơn phép biến đổi Laplace.

Cơ sở của phép biến đổi Fourier là công thức tích phân Fourier, công thức này có được bằng cách xét chuỗi Fourier trong khoảng khá lớn tùy ý, sau đó cho khoảng này tiến đến vô cùng.

2.2.3.1 Công thức tích phân Fourier (*)

Định lý 2.17: Giả sử hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên toàn bộ trục thực ($\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$) và thoả mãn điều kiện Dirichlet, khi đó ta có đẳng thức sau và gọi là ***công thức tích phân Fourier***

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du \qquad \textbf{(2.94)}$$

Chứng minh: Vì hàm $x(t)$ thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên toàn bộ trục thực nên với mọi $l > 0$ ta có thể khai triển thành chuỗi Fourier trong khoảng $(-l;l)$ (xem nhận xét 2.2, công thức 2.64 và định lý 2.15).

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi}{l}t\right),\ \forall t \in (-l;l).$$

Các hệ số Fourier được tính theo công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x(u)du\ ;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x(u)\cos\frac{n\pi}{l}udu\ ;\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x(u)\sin\frac{n\pi}{l}udu\ ;\ n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow\ x(t) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} x(u)du + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} x(u)\left[\cos\frac{n\pi}{l}u\cos\frac{n\pi}{l}t + \sin\frac{n\pi}{l}u\sin\frac{n\pi}{l}t\right]du$$

$$x(t) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} x(u)du + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} x(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du \qquad \textbf{(2.95)}$$

Vì $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$ nên khi cho $l \to \infty$ ta có:

$$\begin{cases} \lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} x(u)du = 0 \\ \lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} x(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du = \lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du \end{cases} \qquad \textbf{(2.96)}$$

Đặt $$\Delta\lambda = \frac{\pi}{l},\ F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du \qquad \textbf{(2.97)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda F\left(n\Delta\lambda\right) \qquad \textbf{(2.98)}$$

Vế phải của (2.98) là tổng tích phân của hàm $F(\lambda)$ trong khoảng $[0,\ \infty)$.

Theo (2.97), $l \to \infty$ khi và chỉ khi $\Delta\lambda \to 0$.

Vậy lấy giới hạn hai vế của (2.95) khi cho $l \to \infty$ và sử dụng (2.96)-(2.98) ta được

$$x(t) = \int_0^{\infty} F(\lambda)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(t-u)du\,.$$

Vì hàm cosin là hàm chẵn và sin là hàm lẻ nên từ công thức (2.94) ta cũng có:

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\cos\lambda(t-u)du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\cos\lambda(t-u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\big(\cos\lambda(t-u)+i\sin\lambda(t-u)\big)du$$

Vậy

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{i\lambda(t-u)}du \tag{2.99}$$

Công thức (2.99) được gọi là ***công thức tích phân Fourier phức***.

Nhận xét 2.5:

1. Các công thức trên đã sử dụng quy ước (2.60) tại những điểm không liên tục.
2. Nếu $x(t)$ là hàm chẵn thì

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\lambda t d\lambda\int_0^{\infty}x(u)\cos\lambda u du\,. \tag{2.100}$$

3. Nếu $x(t)$ là hàm lẻ thì

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\lambda t d\lambda\int_0^{\infty}x(u)\sin\lambda u du\,. \tag{2.101}$$

4. Các công thức tích phân Fourier (2.94), (2.99) và định lý 2.17 được phát biểu và chứng minh cho trường hợp $x(t)$ là hàm thực. Tuy nhiên do tính chất tuyến tính của tích phân nên các kết quả trên vẫn còn đúng cho trường hợp hàm phức biến thực $x(t)$ khả tích tuyệt đối có phần thực, phần ảo thỏa mãn điều kiện Dirichlet.
5. Đổi biến $\lambda=2\pi f \Rightarrow d\lambda=2\pi df$, thay vào công thức (2.99) ta được

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}df\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{i2\pi f(t-u)}du=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-i2\pi fu}du\right)e^{i2\pi ft}df \tag{2.102}$$

Sử dụng công thức (2.102) ta có thể định nghĩa biến đổi Fourier của hàm không tuần hoàn như sau.

2.2.3.2 Định nghĩa và tính chất của phép biến đổi Fourier

Định nghĩa 2.6: *Giả sử hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên trục thực và thỏa mãn điều kiện Dirichlet. Biến đổi Fourier (viết tắt là FT) của $x(t)$ là*

$$\widehat{X}(f)=\mathcal{F}\left\{x(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i2\pi ft}dt,\ f\in\mathbb{R} \tag{2.103}$$

Trong kỹ thuật, nếu $x(t)$ là hàm dạng sóng (waveform) theo thời gian t thì $\widehat{X}(f)$ được gọi là phổ hai phía của $x(t)$ (two - sided spectrum), còn tham số f chỉ tần số, có đơn vị là Hz.

Từ công thức tích phân Fourier (2.102) ta có *công thức biến đổi ngược*

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f) e^{i2\pi ft} df \tag{2.104}$$

Hàm ảnh qua phép biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$ có thể viết dưới dạng cực

$$\widehat{X}(f) = \left|\widehat{X}(f)\right| e^{i\varphi(f)} \tag{2.105}$$

trong đó

$$\left|\widehat{X}(f)\right| = \sqrt{\widehat{X}(f)\overline{\widehat{X}(f)}}, \quad \varphi(f) = \angle \widehat{X}(f) \tag{2.106}$$

được gọi ***dạng biên độ - pha*** của phép biến đổi.

Cặp $x(t), \widehat{X}(f)$ được gọi là cặp biến đổi Fourier.

Tính chất 2.3:

A. Tương tự các tính chất (2.81)-(2.92) của phép biến đổi Fourier hữu hạn, phép biến đổi Fourier có các tính chất được tổng kết trong bảng sau:

(2.107)

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\widehat{X}_1(f) + B\widehat{X}_2(f)$
2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}\widehat{X}\left(f/a\right)$
3. Liên hợp	$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{X}(-f)}$
4. Đối ngẫu	$\widehat{X}(t)$	$x(-f)$
5. Trễ	$x(t - T_d)$	$e^{-i2\pi T_d f}\widehat{X}(f)$
6. Dịch chuyển ảnh	$e^{i2\pi f_0 t}x(t)$	$\widehat{X}(f - f_0)$
7. Điều chế	$x(t)\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}\widehat{X}(f - f_0) + \frac{1}{2}\widehat{X}(f + f_0)$
8. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\left(i2\pi f\right)^n \widehat{X}(f)$
9. Tích phân	$\int_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f) + \frac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f)$

10. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$(-i2\pi)^{-n} \dfrac{d^n \widehat{X}(f)}{df^n}$
11. Tích chập	$x_1(t) * x_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(u) x_2(t-u) du$	$\widehat{X}_1(f) \widehat{X}_2(f)$
12. Tích	$x_1(t) x_2(t)$	$\widehat{X}_1(f) * \widehat{X}_2(f)$

Hàm δ trong tính chất 9. là hàm Dirac (xem mục 3.1 chương 3).

B. Từ công thức định nghĩa biến đổi Fourier (công thức 2.100) ta nhận thấy rằng nếu $x(t)$ là hàm thực chẵn thì biến đổi Fourier của nó cũng là hàm thực chẵn. Kết hợp với tính chất đối ngẫu 4. ta có thể chuyển đổi vai trò của $x(t)$ và $\widehat{X}(f)$ cho nhau, nghĩa là

$$\widehat{X}(f) = \mathrm{F}\left\{x(t)\right\} \Rightarrow \mathrm{F}\left\{\widehat{X}(t)\right\} = x(f) \tag{2.108}$$

Ví dụ 2.62:

a. $\mathrm{F}\left\{e^{-at}\eta(t)\right\} = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-i2\pi ft} df = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(i2\pi f + a)t} dt = \left.\dfrac{e^{-(i2\pi f + a)t}}{-(i2\pi f + a)}\right|_0^{\infty} = \dfrac{1}{a + i2\pi f}$; $a > 0$.

b. $\mathrm{F}\left\{e^{at}\eta(-t)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-i2\pi ft} df = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a - i2\pi f)t} dt = \left.\dfrac{e^{(a - i2\pi f)t}}{a - i2\pi f}\right|_{-\infty}^{0} = \dfrac{1}{a - i2\pi f}$; $a > 0$.

Áp dụng tính chất đạo hàm ảnh ta được

c. $\mathrm{F}\left\{te^{-at}\eta(t)\right\} = \dfrac{1}{-i2\pi} \cdot \dfrac{d}{df}\left(\dfrac{1}{a + i2\pi f}\right) = \dfrac{1}{(a + i2\pi f)^2}; a > 0$

$$\mathrm{F}\left\{te^{at}\eta(-t)\right\} = \frac{1}{-i2\pi} \cdot \frac{d}{df}\left(\frac{1}{a - i2\pi f}\right) = \frac{-1}{(a - i2\pi f)^2}; a > 0$$

2.2.3.3 Định lý Parseval và định lý năng lượng Rayleigh

Nếu $x_1(t), x_2(t)$ là hai hàm bình phương khả tích (gọi là hàm kiểu năng lượng) thì ta có ***đẳng thức Parseval***

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \overline{x_2(t)} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_1(f) \overline{\widehat{X}_2(f)} df \tag{2.109}$$

Khi $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ ta có ***định lý năng lượng Rayleigh***

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df \tag{2.110}$$

Như vậy năng lượng được tính trong miền thời gian bằng năng lượng được tính trong miền tần số.

Có thể chứng minh công thức (2.109) bằng cách sử dụng công thức tích phân Fourier như sau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_2(f)e^{i2\pi ft}df\right)}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{X}_2(f)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-i2\pi ft}dt\right)df = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_1(f)\overline{\widehat{X}_2(f)}df\,.$$

2.2.3.4 Biến đổi Fourier của các hàm đặc biệt

Ví dụ 2.63: Biến đổi Fourier của xung chữ nhật hay hình hộp có độ dài $2a$

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \ |t| < a \\ 0 & \text{nếu } \ |t| > a,\ a > 0 \end{cases} \tag{2.111}$$

$$\widehat{\Pi}_a(f) = \int_{-a}^{a} e^{-i2\pi ft}dt = \begin{cases} 2a & \text{nếu } \ f = 0 \\ \left.\dfrac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f}\right|_{-a}^{a} & \text{nếu } \ f \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2a & \text{nếu } \ f = 0 \\ \dfrac{\sin(2a\pi f)}{\pi f} & \text{nếu } \ f \neq 0 \end{cases}$$

Đặt

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \ t = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{nếu } \ t \neq 0 \end{cases} \tag{2.112}$$

Ta có

$$\mathcal{F}\left\{\Pi_a(t)\right\} = 2a\operatorname{sinc}(2af)\,. \tag{2.113}$$

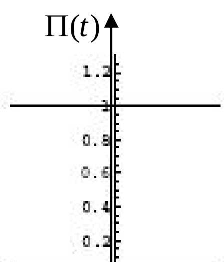
Phép biến đổi Fourier ngược cho phép khôi phục lại giá trị của xung chữ nhật $\Pi_a(t)$ theo tích phân (xem công thức (2.104))

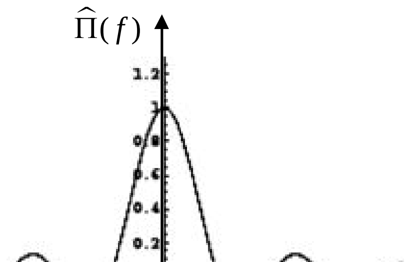
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft}\frac{\sin(2a\pi f)}{\pi f}df = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \ |t| < a \\ 1/2 & \text{nếu } \ |t| = a \\ 0 & \text{nếu } \ |t| > a \end{cases} \tag{2.114}$$

Tách phần thực, phần ảo (2.114) và nhân π vào hai vế ta được:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi ft)\sin(2a\pi f)}{f}df = \begin{cases} \pi/2 & \text{nếu } \ |t| < a \\ \pi/4 & \text{nếu } \ |t| = a \\ 0 & \text{nếu } \ |t| > a \end{cases};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)\sin(2a\pi f)}{f}df = 0.$$





Khi $a = 1$ ta có xung:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{nÕu} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{nÕu} \quad |t| > 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \mathcal{F}\left\{\Pi(t)\right\} = 2\operatorname{sinc}(2f).$$

Áp dụng công thức (2.108) ta cũng có

$$\mathcal{F}\left\{2\operatorname{sinc}(2t)\right\} = \Pi(f).$$

Áp dụng đẳng thức Parseval (2.110) ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2a\pi f)}{(\pi f)^2} \cdot df = \int_{-a}^{a} 1^2 \cdot dt = 2a$$

Đặt $u = 2\pi af \Rightarrow du = 2\pi adf$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2a\pi f)}{(\pi f)^2} df = 2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{du}{\pi}$.

$$\Rightarrow 2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{du}{\pi} = 2a \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \pi.$$

Ví dụ 2.64: Xung tam giác đơn vị

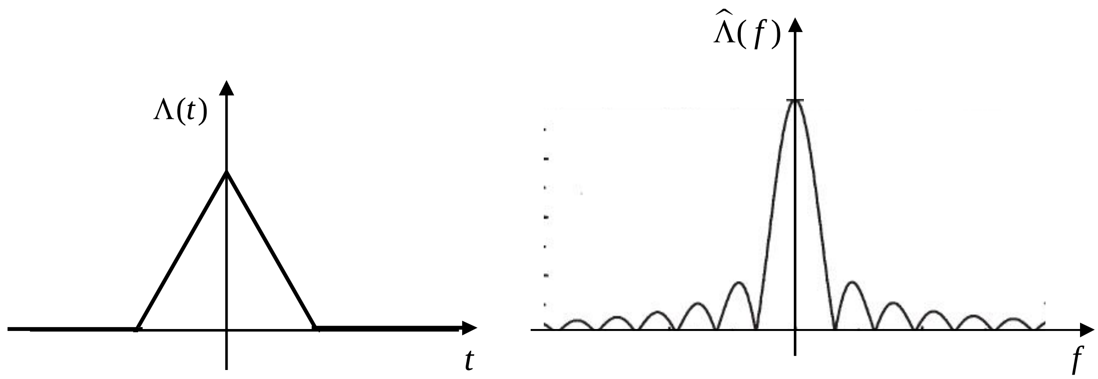
$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{nÕu} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{nÕu} \quad |t| > 1 \end{cases} \tag{2.115}$$

Sử dụng tính chất tích phân hàm chẵn và quy tắc tích phần từng phần ta được

$$\widehat{\Lambda}(f) = \int_{-1}^{1} \left(1 - |t|\right) e^{-i2\pi ft} dt = 2\int_{0}^{1} \left(1 - t\right)\cos(2\pi ft) dt = \left(\operatorname{sinc}(f)\right)^2$$

Áp dụng công thức (2.108) của tính chất 2.3.B. ta cũng có

$$\mathcal{F}\left\{\operatorname{sinc}^2(t)\right\} = \Lambda(f).$$



Hình 2.19: *Đồ thị của* $\Lambda(t)$ *và biến đổi Fourier* $\widehat{\Lambda}(f)$

Áp dụng đẳng thức Parseval (2.110) ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{sinc}^2(f)\right)^2 df = \int_{-1}^{1}\left(1-|t|\right)^2\cdot dt = 2\int_{0}^{1}\left(1-t\right)^2\cdot dt = \frac{2}{3}$$

Đặt $u = \pi f \Rightarrow du = \pi df$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4(\pi f)}{(\pi f)^4}df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 u}{u^4}\cdot\frac{du}{\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 u}{u^4}du = \frac{2\pi}{3}$.

Ví dụ 2.65: Hàm phân bố mũ hai phía

$$x(t) = e^{-\lambda|t|},\ \lambda > 0.$$

$$\widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}e^{-i2\pi ft}dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft\, dt$$

Áp dụng quy tắc tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} U = e^{-\lambda t} \\ dV = \cos 2\pi ft dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dU = -\lambda e^{-\lambda t}dt \\ V = \sin 2\pi ft\ /\ 2\pi f \end{cases}$$

$$\widehat{X}(f) = 2\left[\frac{e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft}{2\pi f}\Big|_0^{\infty} + \frac{\lambda}{2\pi f}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft\, dt\right] = \frac{\lambda}{\pi f}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft\, dt$$

Tiếp tục đặt

$$\begin{cases} U = e^{-\lambda t} \\ dV = \sin 2\pi ft dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dU = -\lambda e^{-\lambda t}dt \\ V = -\cos 2\pi ft\ /\ 2\pi f \end{cases}$$

$$\widehat{X}(f) = \frac{\lambda}{\pi f}\left[-\frac{e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft}{2\pi f}\Big|_0^{\infty} - \frac{\lambda}{2\pi f}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft\, dt\right] = \frac{\lambda}{\pi f}\left(\frac{1}{2\pi f} - \frac{\lambda}{4\pi f}\widehat{X}(f)\right)$$

$$\widehat{X}(f) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Hoặc áp dụng công thức (2.32) ta cũng có

$$\widehat{X}(f) = 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft\, dt = 2\left(\frac{s}{s^2 + 4\pi^2 f^2}\right)\Bigg|_{s=\lambda} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Sử dụng tính chất 2.3-B và công thức (2.108) ta có: $\mathsf{F}\left\{\dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 t^2}\right\} = e^{-\lambda|f|},\ \lambda > 0$.

Vậy

$$\lambda > 0;\ \mathrm{F}\left\{e^{-\lambda|t|}\right\} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}\ ,\ \mathrm{F}\left\{\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 t^2}\right\} = e^{-\lambda|f|} \tag{2.116}$$

Công thức (2.116) có thể viết $\mathrm{F}^{-1}\left\{e^{-\lambda|f|}\right\} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 t^2}$; $\lambda > 0$. Ta có thể tìm lại kết quả này từ định nghĩa công thức (2.104) như sau.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} e^{-\lambda|f|} df = \int_{-\infty}^{0} e^{(i2\pi t + \lambda)f} df + \int_{0}^{\infty} e^{(i2\pi t - \lambda)f} df = \left.\frac{e^{(i2\pi t + \lambda)f}}{i2\pi t + \lambda}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(i2\pi t - \lambda)f}}{i2\pi t - \lambda}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{i2\pi t + \lambda} - \frac{1}{i2\pi t - \lambda} = \frac{2\lambda}{4\pi^2 t^2 + \lambda^2}$$

Ví dụ 2.66: Tìm biến đổi Fourier ngược của $\widehat{X}(f) = \frac{1}{(1 + i2\pi f)(1 - i4\pi f)^2}$

Giải: Đặt $s = i2\pi f \Rightarrow \frac{1}{(1 + i2\pi f)(1 - i4\pi f)^2} = \frac{1}{(1 + s)(1 - 2s)^2}$

$$\frac{1}{(1+s)(1-2s)^2} = \frac{1}{4(s+1)(s-1/2)^2} = \frac{1/9}{s+1} - \frac{1/9}{s-1/2} + \frac{1/6}{(s-1/2)^2}$$

$$= \frac{1/9}{1 + i2\pi f} + \frac{1/9}{1/2 - i2\pi f} + \frac{1/6}{(1/2 - i2\pi f)^2}$$

Từ kết quả ví dụ 2.62 ta có

$$x(t) = \frac{1}{9} e^{-t} \eta(t) + \frac{1}{9} e^{t/2} \eta(-t) - \frac{1}{6} t e^{t/2} \eta(-t).$$

2.2.4 Phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT: Discrete Fourier Tranform)

Trong thực tế các dữ liệu nhận được không thể là hàm liên tục mà thường là các dữ liệu số rời rạc. Chẳng hạn, ngay cả khi đo các tín hiệu liên tục người ta cũng chỉ thực hiện một số hữu hạn các lần đo, đó là một mẫu của tín hiệu đầy đủ. Các phương tiện số (CD, DVD, ..) hoặc các dữ liệu thí nghiệm được lưu trữ trong máy tính cũng chỉ là các tín hiệu được lấy mẫu tại những khoảng thời gian rời rạc. Vì vậy mặc dù chuỗi Fourier về mặt lý thuyết là rất quan trọng không thể chối cãi được nhưng theo quan điểm tính toán trong thực tế cần phải chuyển các không gian hàm vô hạn chiều (của các hàm liên tục) về các không gian véc tơ hữu hạn chiều của các dữ liệu mẫu.

Thông thường một tín hiệu liên tục $x(t)$ xác định trong đoạn $[a, b]$, máy tính chỉ có thể lưu trữ các giá trị đo được của nó tại một số hữu hạn *điểm mẫu* $a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n \le b$. Đơn giản nhất người ta xét các điểm mẫu cách đều nhau.

$$t_j = a + jh\ ,\ j = 0, \ldots, n\ ,\ \text{trong đó } h = \frac{b-a}{n} \text{ là tốc độ mẫu.}$$

Khi xử lý tín hiệu $x(t)$, biến số t chỉ tời gian và t_j chỉ thời điểm lấy mẫu lần thứ j. Tốc độ mẫu h rất cao, thường lấy khoảng $10.10^{-3} - 20.10^{-3}$ giây.

Chuỗi Fourier thích hợp với các hàm tuần hoàn, tổng của chuỗi Fourier rời rạc thích hợp với các tín hiệu được lấy mẫu tuần hoàn, (trong thực tế các tín hiệu lấy mẫu hiếm khi tuần hoàn, tuy nhiên vì mục đích tính toán giải tích người ta thường mở rộng tuần hoàn từ tín hiệu mẫu gốc). Để đơn giản ta chọn chu kỳ 2π (trường hợp chu kỳ khác có thể nhận được bằng phép đổi biến). Ở đây ta chọn khoảng $\left[0;2\pi\right]$ thay cho $\left[-\pi;\pi\right]$. Các điểm mẫu tương ứng

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad t_2 = \frac{4\pi}{n}, \ \dots \ t_j = \frac{2j\pi}{n}, \ \dots \ t_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n} \qquad \textbf{(2.117)}$$

Tính tuần hoàn đòi hỏi $x(0) = x(2\pi)$, do đó giá trị tại điểm mẫu $t_n = 2\pi$ được bỏ qua. Việc lấy mẫu (có thể nhận giá trị phức) của tín hiệu hoặc hàm số $x(t)$ tại các điểm mẫu cung cấp một *véc tơ mẫu*

$$\mathbf{x} = \left(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\right) = \left(x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})\right), \text{ trong đó } x_j = x(t_j) = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \qquad \textbf{(2.118)}$$

Sự lấy mẫu không thể phân biệt được giữa những hàm có cùng giá trị mẫu tại tất cả các điểm mẫu, như vậy chúng phải được đồng nhất như nhau theo quan điểm lấy mẫu. Chẳng hạn hàm tuần hoàn

$$x(t) = e^{int} = \cos nt + i\sin nt$$

Có các giá trị mẫu

$$x_j = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = \exp\left(in\frac{2j\pi}{n}\right) = e^{2j\pi i} = 1 \text{ với mọi } j = 0, \dots, n-1.$$

Vì vậy không thể phân biệt với hàm hằng $c(t) \equiv 1$, cả hai hàm này đều có véc tơ mẫu là $(1,1,\dots,1)$. Điều này dẫn đến một hệ quả quan trọng cần tránh, đó là việc lấy mẫu tại n điểm cách đều nhau không thể phân biệt các tín hiệu tuần hoàn tần số n. Một cách tổng quát hơn, hai tín hiệu mũ giá trị phức

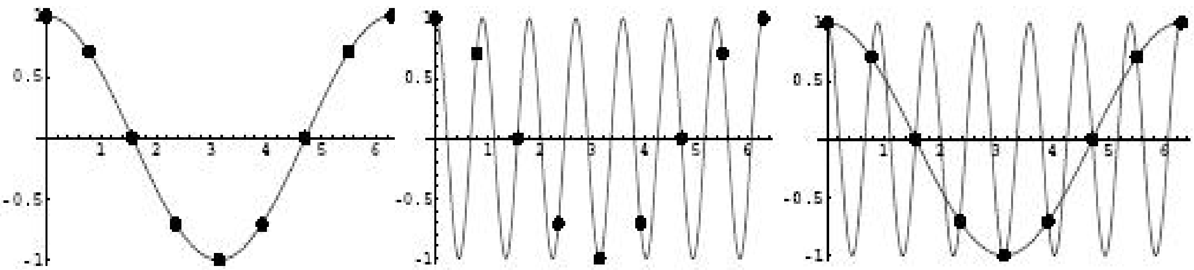
$$e^{i(k+n)t} \sim e^{ikt} \qquad \textbf{(1.119)}$$

là không thể phân biệt khi lấy mẫu. Vì vậy chỉ cần chọn n hàm mũ phức đầu tiên sau đây làm cơ sở để biểu diễn cho các tín hiệu được lấy mẫu bất kỳ tuần hoàn chu kỳ 2π với n điểm mẫu.

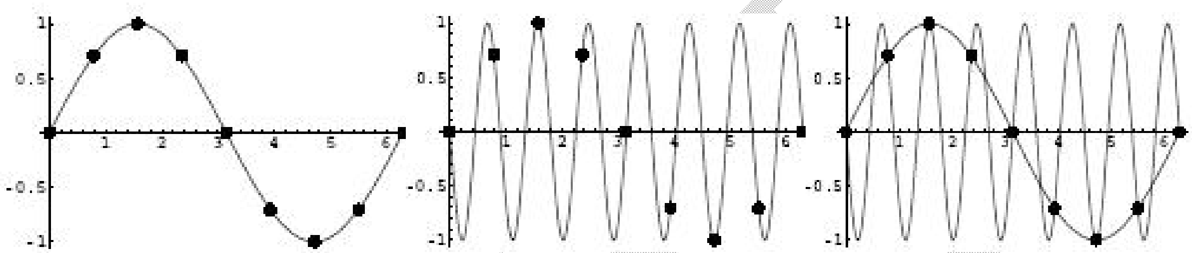
$$x_0(t) = 1, \qquad x_1(t) = e^{it}, \qquad x_2(t) = e^{i2t}, \ \dots \ x_{n-1}(t) = e^{i(n-1)t} \qquad \textbf{(1.120)}$$

Đặc biệt hàm mũ tần số "âm" e^{-ikt} có thể chuyển về dạng $e^{i(n-k)t}$ có cùng giá trị mẫu. Chẳng hạn e^{-it} và $e^{i(n-1)t}$ có cùng giá trị mẫu tại các điểm mẫu. Tuy nhiên ngoài giá trị mẫu hai hàm này hoàn toàn khác nhau, hàm e^{-it} có tần số thấp còn $e^{i(n-1)t}$ có tần số cao hơn.

Hình sau cho sự so sánh đồ thị của e^{-it} và e^{i7t} với $n = 8$ điểm mẫu.



Hình 2.20: *Đồ thị của* $\cos t$ *và* $\cos 7t$ *với 8 điểm mẫu*



Hình 2.21: *Đồ thị của* $\sin t$ *và* $-\sin 7t$ *với 8 điểm mẫu*

Vì không thể phân biệt giá trị mẫu của các hàm mũ có tần số lớn hơn n (xem công thức 2.122) do đó chỉ có thể khai triển $x(t)$ thành tổng của các hàm mũ có cùng giá trị mẫu tại các điểm mẫu dưới dạng

$$x(t) \sim p(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{i2t} + \ldots + c_{n-1} e^{i(n-1)t} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt} \qquad \textbf{(1.121)}$$

trong đó

$$x(t_j) = p(t_j) \text{ với mọi } j = 0,\ldots,n-1 \qquad \textbf{(1.122)}$$

Như vậy $p(t)$ là đa thức lượng giác nội suy bậc $\leq n-1$ đối với các dữ liệu mẫu $x_j = x(t_j)$. Nếu $x(t)$ nhận giá trị thực thì đa thức lượng giác nội suy tương ứng được chọn là phần thực của $p(t)$.

Vì chúng ta làm việc với các dữ liệu là các véc tơ mẫu thuộc không gian phức hữu hạn chiều $\mathbb{C}^n$, do đó ta có thể chuyển chuỗi Fourier rời rạc về dạng véc tơ.

Mẫu của các hàm của cơ sở gồm các hàm mũ (2.118) được biểu diễn dưới dạng véc tơ

$$\omega_k = \left(e^{ikt_0}, e^{ikt_1}, \ldots, e^{ikt_{n-1}}\right) = \left(1, e^{i2k\pi/n}, e^{i4k\pi/n}, \ldots, e^{i2(n-1)k\pi/n}\right), k = 0,\ldots,n-1 \qquad \textbf{(2.123)}$$

Vì vậy, điều kiện nội suy các giá trị điểm mẫu được viết lại dưới dạng véc tơ

$$\mathbf{x} = c_0\omega_0 + c_1\omega_1 + \cdots + c_{n-1}\omega_{n-1} \qquad \textbf{(2.124)}$$

Nói cách khác ta có thể tính các hệ số Fourier rời rạc $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ của $x(t)$ bằng cách biểu diễn véc tơ mẫu $\mathbf{x}$ (công thức 2.118) thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ mẫu hàm mũ cơ sở $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$.

Định lý 2.12: Hệ các véc tơ $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^n$ với tích vô hướng trung bình xác định như sau

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{y_j} \;;\; \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),\ \mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \qquad \textbf{(2.125)}$$

Chứng minh: Để chứng minh định lý ta xét

$$\varepsilon = e^{i2\pi/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

Lũy thừa n lần ta được

$$\varepsilon^n = (e^{i2\pi/n})^n = e^{i2\pi} = 1.$$

Vậy ε là một căn bậc n của 1: $\varepsilon = \sqrt[n]{1}$.

Có n số phức khác nhau là n căn bậc n của 1, trong đó có 1 và các lũy thừa của ε, cụ thể

$$\varepsilon^k = e^{i2k\pi/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \;;\; k = 0, \ldots, n-1 \qquad \textbf{(2.126)}$$

Véc tơ ω_k trong công thức (2.123) có thể viết lại

$$\omega_k = \left(1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{(n-1)k}\right);\; k = 0, \ldots, n-1 \qquad \textbf{(2.127)}$$

Từ công thức

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$$

Suy ra

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)k} = \begin{cases} n & \text{nếu } k = 0 \\ 0 & \text{nếu } 0 < k < n \end{cases} \qquad \textbf{(2.128)}$$

Ngoài ra từ tính chất $\varepsilon^{k+n} = \varepsilon^k$ có thể mở rộng công thức (2.128) cho mọi số nguyên k bất kỳ,

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)k} = \begin{cases} n & \text{nếu } k \text{ là bội số của } n \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \qquad \textbf{(2.129)}$$

Từ (2.128) và (2.129) ta có

$$\langle \omega_k; \omega_l \rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{jk}\overline{\varepsilon^{jl}} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{j(k-l)} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = l \\ 0 & \text{nếu } k \neq l \end{cases} \;;\; k = 0, \ldots, n-1 \qquad \textbf{(2.130)}$$

Vậy $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ là một cơ sở trực chuẩn.

Từ định lý 2.12 ta suy ra rằng các hệ số $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ trong công thức (1.124) là tọa độ của véc tơ $\mathbf{x}$ trong cơ sở $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$

$$c_k = \langle \mathbf{x}; \omega_k \rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{e^{ikt_j}} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-ikt_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-jk} x_j \tag{2.131}$$

Nói cách khác, hệ số Fourier rời rạc c_k có được bằng cách lấy trung bình của các giá trị mẫu của hàm tích $x(t)e^{-ikt}$.

Chuyển từ tín hiệu $x(t)$ thành các hệ số Fourier rời rạc gọi là phép biến đổi Fourier rời rạc, ký hiệu

$$DFT\{x(t)\} = \widehat{X}(k) = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1});\ c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-jk} x_j,\ x_j = x\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \tag{2.132}$$

Biến đổi ngược

$$IDFT\{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\},\ x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{jk} c_k \tag{2.133}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ là các giá trị mẫu của hàm $x(t)$ và đa thức lượng giác $p(t)$ thỏa mãn

$$x(t) \sim p(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{i2t} + \ldots + c_{n-1} e^{i(n-1)t} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt}. \tag{2.134}$$

Ví dụ 2.67: Xét trường hợp $n = 4$ thì

$$\varepsilon = e^{i2\pi/4} = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i,\ \varepsilon^2 = -1,\ \varepsilon^3 = -i$$

Từ công thức (2.127) ta có các véc tơ cơ sở

$$\omega_0 = (1, 1, 1^2, 1^3) = (1, 1, 1, 1),\ \omega_1 = (1, i, i^2, i^3) = (1, i, -1, -i),$$

$$\omega_2 = (1, -1, (-1)^2, (-1)^3) = (1, -1, 1, -1),\ \ \omega_3 = (1, -i, (-i)^2, (-i)^3) = (1, -i, -1, i).$$

Cho tín hiệu có các giá trị mẫu tại 4 thời điểm lấy mẫu

$$x_0 = x(0),\ x_1 = x\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \ x_2 = x(\pi),\ \ x_3 = x\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

Khi đó biểu diễn Fourier rời rạc tương ứng

$$\mathbf{x} = c_0\omega_0 + c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3$$

Trong đó

$$c_0 = \langle \mathbf{x}; \omega_0 \rangle = \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3), \qquad c_1 = \langle \mathbf{x}; \omega_1 \rangle = \frac{1}{4}(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3)$$

$$c_2 = \langle \mathbf{x}; \omega_2 \rangle = \frac{1}{4}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3), \qquad c_3 = \langle \mathbf{x}; \omega_3 \rangle = \frac{1}{4}(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)$$

Chẳng hạn với tín hiệu $x(t) = 2\pi t - t^2$

có các giá trị mẫu $x_0 = 0,$ $x_1 = 7,4022$ $x_2 = 9,8696$ $x_3 = 7,4022$

tính toán dựa vào công thức trên ta được

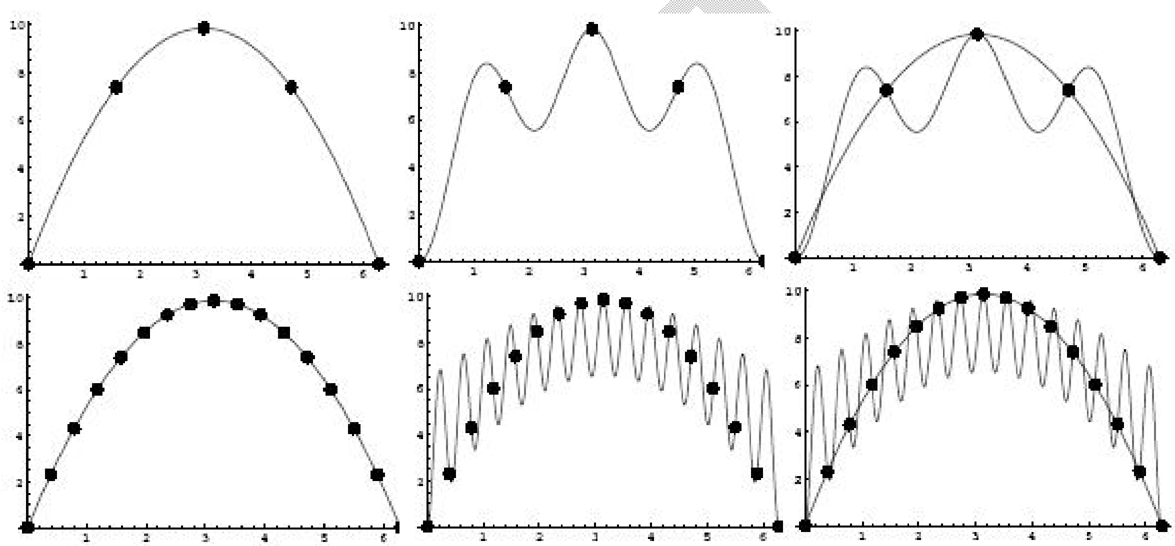
$$c_0 = 6,1685 \qquad c_1 = -2,4674 \qquad c_2 = -1,2337 \qquad c_3 = -2,4674$$

Vì vậy đa thức lượng giác nội suy là phần thực của đa thức

$$p(t) = 6,1685 - 2,4674e^{it} - 1,2337e^{i2t} - 2,4674e^{i3t} \qquad \textbf{(2.135)}$$

Cụ thể $\quad \operatorname{Re} p(t) = 6,1685 - 2,4674\cos t - 1,2337\cos 2t - 2,4674\cos 3t$

Trong hình sau chúng ta sẽ so sánh tín hiệu $x(t)$ và các biểu diễn Fourier với $n = 4$ và $n = 16$.



Hình 2.22: *Biến đổi Fourier của* $2\pi t - t^2$ *ứng với* $n = 4$ *và* $n = 16$

Kết quả của đồ thị chỉ ra rằng có cản trở đáng kể đối với phép biến đổi Fourier rời rạc đó là trong khi đa thức lượng giác nội suy một cách chính xác từ các giá trị mẫu của tín hiệu nhưng dáng điệu dao động cao làm cho chúng vượt xa tại các điểm khác điểm mẫu (hình 2.22).

Tuy nhiên khó khăn này có thể khắc phục được một cách linh hoạt. Vấn đề là ta đã không chú ý đầy đủ đến các tần số được biểu diễn trong tổng Fourier (2.124).

Hình 2.23 cho ta thấy rằng các hàm mũ với tần số cao và tần số thấp có thể cho cùng dữ liệu mẫu nhưng có sự khác nhau rõ rệt trong khoảng giữa các điểm mẫu. Một nửa các số hạng đầu trong công thức tổng Fourier (2.121) có tần số thấp, nửa còn lại có tần số cao hơn. Ta thay các hàm mũ tần số cao này bằng các hàm mũ tần số thấp hơn tương ứng, như vậy sẽ giảm bớt sự dao động của các hàm mũ.

Cụ thể với $0 < k \le \dfrac{n}{2}$ thì e^{-ikt} và $e^{i(n-k)t}$ có cùng các giá trị mẫu, nhưng hàm e^{-ikt} có tần số thấp hơn $e^{i(n-k)t}$.

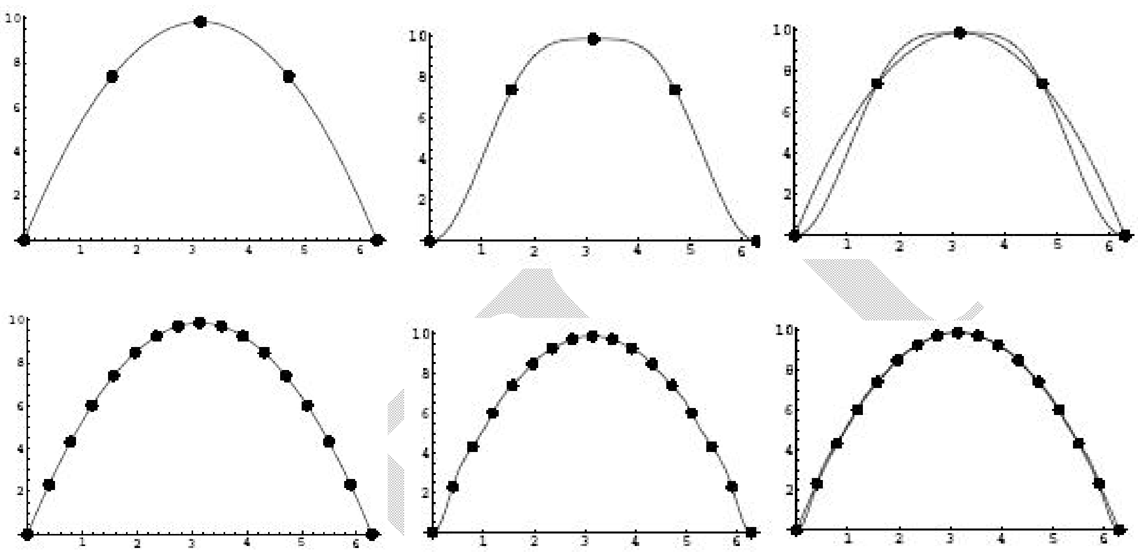
Vì vậy ta sẽ thay các hàm mũ trong các số hạng nửa sau của tổng Fourier (2.121) bằng các hàm mũ tương ứng có tần số thấp hơn.

Nếu $n = 2m + 1$ là một số lẻ thì ta có thể xét đa thức lượng giác nội suy như sau

$$\hat{p}(t) = c_{-m}e^{-imt} + \ldots + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1e^{it} + \ldots + c_m e^{imt} = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikt} \quad \textbf{(2.136)}$$

Nếu $n = 2m$ là một số chẵn thì ta có thể xét đa thức lượng giác nội suy như sau

$$\hat{p}(t) = c_{-m}e^{-imt} + \ldots + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1e^{it} + \ldots + c_{m-1}e^{i(m-1)t} = \sum_{k=-m}^{m-1} c_k e^{ikt} \quad \textbf{(2.137)}$$



Hình 2.23: *Biến đổi Fourier tần số thấp của* $2\pi t - t^2$ *ứng với* $n = 4$ *và* $n = 16$

Trở lại ví dụ trên, ta thay đa thức lượng giác nội suy (2.135) bằng đa thức dạng (2.137)

$$\hat{p}(t) = -1,2337e^{-i2t} - 2,4674e^{-it} + 6,1685 - 2,4674e^{it}$$

$$\operatorname{Re}\hat{p}(t) = 6,1685 - 4,9348\cos t - 1,2337\cos 2t \quad \textbf{(2.138)}$$

Hình 2.23 sau đây so sánh đồ thị của hàm gốc $2\pi t - t^2$ và các đa thức lượng giác nội suy gồm các hàm mũ tần số thấp ứng với $n = 4$ và $n = 16$.

Như vậy, bằng cách sử dụng tần số thấp ta có thể nội suy một hàm cho trước bằng đa thức lượng giác cùng giá trị mẫu.

Người ta chứng minh được rằng nếu hàm $x(t)$ liên tục, tuần hoàn chu kỳ 2π, và khả vi liên tục từng khúc thì đa thức lượng giác nội suy (2.136)-(2.137) hội tụ đều về $x(t)$ khi số các điểm mẫu $n \to \infty$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1.11. Hàm ảnh $X(s)$ của biến đổi Laplace là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng.

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.12. Nếu $x(t)$ là hàm gốc thì đạo hàm $x'(t)$ cũng là hàm gốc.

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.13. Nếu $x(t)$ là hàm gốc thì tích phân $\varphi(t)=\int\limits_0^t x(u)du$ cũng là hàm gốc.

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.14. Phép biến đổi Laplace có tính chất tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.15. Biến đổi Laplace của tích hai hàm gốc bằng tích hai hàm ảnh.

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.16. Chỉ có các hàm tuần hoàn mới tồn tại biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.17. Phép biến đổi Fourier hữu hạn được sử dụng để khảo sát các tín hiệu rời rạc $\left\{x\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.18. Mọi hàm gốc của biến đổi Laplace đều tồn tại biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.19. Phép biến đổi Fourier rời rạc áp dụng cho các dãy tín hiệu $\left\{x(n)\right\}$ tuần hoàn chu kỳ N

Đúng ☐ Sai ☐ .

1.20. Phép biến đổi Fourier biến miền thời gian về miền tần số.

Đúng ☐ Sai ☐ .

2.11 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

a. $\sin^3 t$ **b.** $\cos^4 \omega t$ **c.** $e^{-2t}\cosh 3t$

d. $\left(1+te^{-t}\right)^3$ **e.** $\cosh 2t\cos t$ **f.** $e^{-t}\sin 2t\cos 4t$.

2.12 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

a. $t\cosh 3t$ **b.** $t\cos\omega t\cosh a t$ **c.** $t^2\sin t$

d. $\dfrac{\sin 4t}{t}$ **e.** $\dfrac{\cos at-\cos bt}{t}$ **f.** $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$.

2.13 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

a. $\eta(t-b)\cos^2(t-b)$ **b.** $x(t)=\begin{cases}(t-1)^2 & \text{nÕu}\quad t>1\\ 0 & \text{nÕu}\quad 0<t<1\end{cases}$

c. $x(t)=\begin{cases} t & \text{nÕu}\quad 0<t<1\\ 2-t & \text{nÕu}\quad 1<t<2\\ 0 & \text{nÕu}\quad t>2\end{cases}$ **d.** $x(t)=\begin{cases}\cos t & \text{nÕu}\quad 0<t<\pi\\ \sin t & \text{nÕu}\quad t>\pi\end{cases}$.

2.14 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

a. $x(t)=\int_0^t \left(u^2-u+e^{-u}\right)du$ **b.** $x(t)=\int_0^t (u+1)\cos\omega u\,du$

c. $x(t)=\int_0^t \cos(t-u)e^{2u}du$ **d.** $x(t)=\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du$

2.15 Chứng minh rằng nếu $X(s)=\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$ thì $\mathcal{L}\left\{\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} x(u)du\right\}=\frac{X(s)}{s^2}$.

2.16 Gọi $J_0(t)$ là hàm Bessel bậc 0 (nghiệm của phương trình vi phân $tx''+x'+tx=0$ với điều kiện ban đầu $J_0(0)=1$. Chứng minh:

a. $\mathcal{L}\left\{J_0(t)\right\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ **b.** $\mathcal{L}\left\{J_0(at)\right\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$

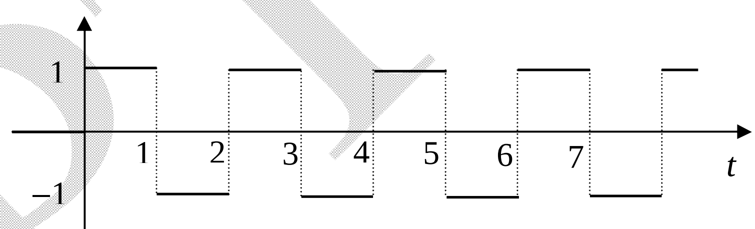
c. $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{2t}J_0(2t)\right)\right\}=\frac{s^2}{\sqrt{s^2-4s+8}}-s-2$.

d. $\mathcal{L}\left\{te^{-t}J_0(t)\right\}=\frac{s-1}{\sqrt{(s^2-2s+2)^3}}$.

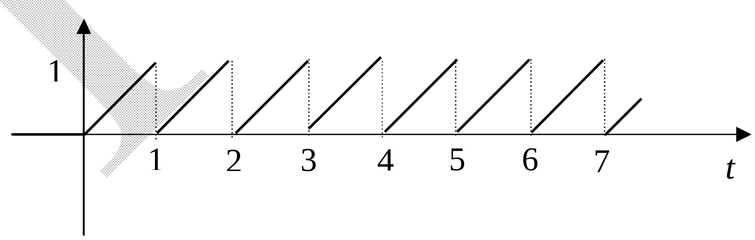
e. Sử dụng kết quả a. suy ra $\int_0^{\infty} J_0(t)dt=1$ và $\int_0^{\infty} e^{-t}J_0(t)dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.17 Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc tuần hoàn có đồ thị hoặc xác định như sau:

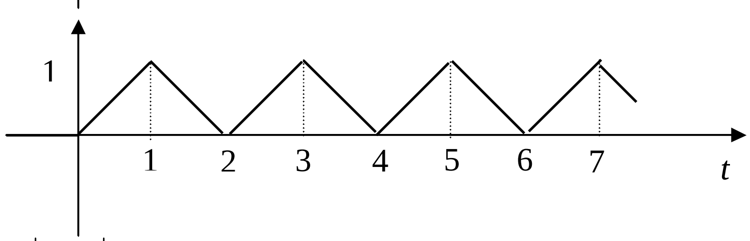
a.



b.



c.



d. $x(t)=\left|\cos t\right|$.

2.18 Sử dung công thức định nghĩa Laplace tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\infty} t^3 e^{-t} \sin t \, dt$ **b.** $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt$

c. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt$ **d.** $\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt$ **e.** $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

2.19 **a.** Chứng minh rằng biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left\{\sin^{2n+1} t\right\} = \frac{(2n+1)!}{\left(s^2+1\right)\cdots\left(s^2+(2n+1)^2\right)}$.

b. Chứng minh rằng biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left\{\sin^{2n} t\right\} = \frac{(2n)!}{s\left(s^2+4\right)\cdots\left(s^2+(2n)^2\right)}$.

2.20 Tìm hàm gốc của các hàm số sau:

a. $\frac{s^2}{(s-1)^3}$ **b.** $\frac{s+3}{s^2+6s+11}$ **c.** $\frac{6s-4}{s^2-4s+20}$

d. $\frac{4s+12}{s^2+8s+16}$ **e.** $\frac{s^3}{\left(s^2+4\right)^2}$ **f.** $\frac{3s+2}{\left(s^2-4s+6\right)^2}$.

2.21 Tìm hàm gốc:

a. $\frac{3s+1}{(s-1)\left(s^2+1\right)}$ **b.** $\frac{1}{s^3\left(s^3+1\right)}$ **c.** $\frac{s-1}{(s+3)\left(s^2+2s+2\right)}$

d. $\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^2}$ **e.** $\frac{s^2+2s+3}{\left(s^2+2s+2\right)\left(s^2+2s+5\right)}$ **f.** $\frac{s^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$.

2.22 Tìm hàm gốc:

a. $\frac{s^4-9s^3+16s^2-4s+5}{s^5-4s^4+5s^3}$ **b.** $\frac{1}{s^4}+\frac{e^{-2s}}{(s+3)^4}$ **c.** $\frac{e^{-\frac{s}{3}}}{s(s^2+1)}$

d. $\frac{1}{\sqrt{s^3}}$ **e.** $\frac{1}{\sqrt{2s+3}}$ **f.** $\frac{e^{4-3s}}{\sqrt{(s+4)^5}}$.

2.23 Sử dụng phép biến đổi Laplace hãy nghiệm lại các tích chập sau

a. $1*1=t$ **b.** $1*e^t=e^t-1$ **c.** $t^2*\sin(at)=\frac{t^2}{a}-\frac{4}{a^3}\sin^2\left(\frac{at}{2}\right)$

d. $e^{-t}\eta(t)*e^{-t}\eta(t)=te^{-t}\eta(t)$ **e.** $e^{-t}\eta(t)*e^{-2t}\eta(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\eta(t)$

f. $\left[\eta(t)-\eta(t-2)\right]*\left[\eta(t)-\eta(t-2)\right]=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & 0<t<2\\ 4-t, & 2<t<4\\ 0, & t>4\end{cases}.$

2.24 Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+2x'+x=t^2e^t$, $\quad x(0)=x'(0)=0$.

b. $x'''+3x''+3x'+x=6e^{-t}$, $\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

c. $x''-x=4\sin t+5\cos 2t$, $\quad x(0)=-1,\ x'(0)=-2$.

d. $x''+9x=\cos 2t$, $\quad x(0)=1,\ x(\pi/2)=-1$.

2.25 Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+a^2x=f(t)$, $\quad x(0)=1,\ x'(0)=-2$.

b. $x''-a^2x=g(t)$, $\quad x(0)=C_1,\ x'(0)=C_2$.

2.26 Giải phương trình vi phân tuyến tính với hệ số biến thiên $tx''+2x'+tx=0$ thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=1,\ x'(\pi)=0$

2.27 Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases}x'+y'=t\\ x''-y=e^{-t}\end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases}x(0)=3,\ x'(0)=-2\\ y(0)=0\end{cases}.$

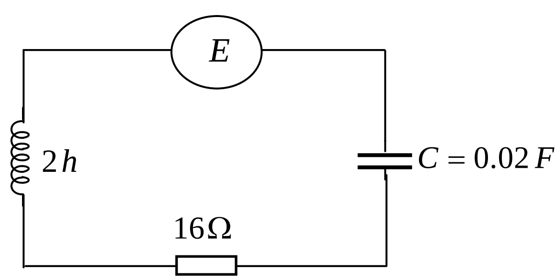
b. $\begin{cases}x'-y'-2x+2y=\sin t\\ x''+2y'+x=0\end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases}x(0)=x'(0)=0\\ y(0)=0\end{cases}.$

c. $\begin{cases}-3x''+3y''=te^{-t}-3\cos t\\ tx''-y'=\sin t\end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases}x(0)=-1,\ x'(0)=2\\ y(0)=4,\ y'(0)=0\end{cases}.$

2.28 Cho mạch điện cho trong hình 2.24 được nối tiến với suất điện động E volts, điện dung 0,02 farads, hệ số tự cảm 2 henry và điện trở 16 Ohms. Tại thời điểm t = 0 điện lượng ở tụ điện và cường độ dòng điện trong mạch bằng 0. Tìm điện lượng và cường độ dòng điện tại thời điểm t nếu:

a. E = 300 (Volts)

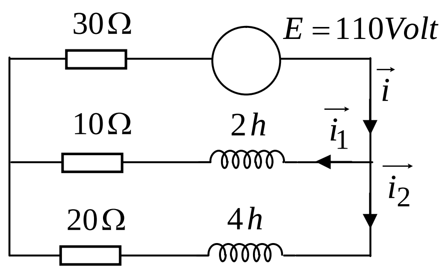
b. E = 100 sin3t (Volts)



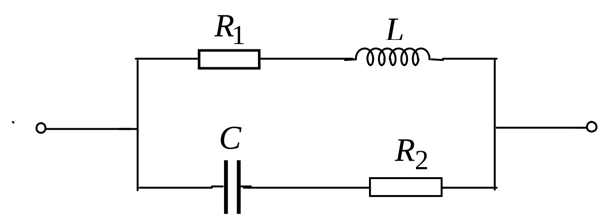
Hình 2.24

2.29 Cho mạch điện cho trong hình 2.25. Xác định cường độ trong các nhánh biến rằng cường độ ban đầu bằng 0.

2.30 Tìm trở kháng ảnh tương đương của hai mạch rẽ cho trong hình 2.26:



Hình 2.25



Hình 2.26

2.31 Cho mạch điện như hình 2.27:

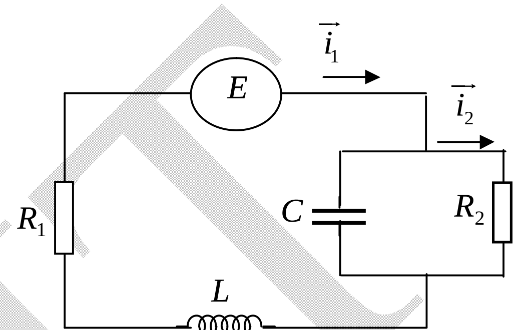
$E = 500\sin 10t$ $\quad L = 1$ henry

$R_1 = 10$ ohms $\quad R_2 = 10$ ohms

$C = 0,01$ farad.

Nếu điện thế ở tụ điện và cường độ i_1, i_2 bằng không tại thời điểm $t = 0$.

Tìm điện lượng tại tụ điện tại thời điểm $t > 0$.



Hình 2.27

2.32 Tìm nghiệm của bài toán: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, với điều kiện đầu

$u(x,0) = 3\sin 2\pi x$, $0 < x < 1$ và điều kiện biên: $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0\ , \quad t > 0. \end{cases}$

2.33 Cho $x(t)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 10 và $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nỗu} \quad -5 < t < 0 \\ 3 & \text{nỗu} \quad 0 < t < 5 \end{cases}$

a. Tìm chuỗi Fourier của $x(t)$.

b. $x(t)$ nhận giá trị bao nhiêu tại $t = -5, 0, 5$ để chuỗi Fourier hội tụ về $x(t)$ với mọi $t \in [-5; 5]$.

2.34 Cho $x(t) = 2t,\ 0 < t < 4$.

a. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm $\sin$.

b. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm $\cos$.

2.35 Viết các chuỗi Fourier dạng cầu phương sau về dạng cực.

a. $x(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left[(2n-1)\pi t\right]}{2n-1}$

b. $x(t) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt)$.

2.36 Viết chuỗi Fourier dạng phức của các hàm số sau

a. $x(t) = |t|, -\pi \le t \le \pi$

b. $x(t) = t,\ 0 < t < 2$

c. $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nÕu} \quad -\pi/2 < t < 0 \\ 1 & \text{nÕu} \quad 0 < t < \pi/2 \end{cases}$

2.37 Cho dãy tín hiệu rời rạc $x(n) = \begin{cases} 1/3^n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$.

a. Tìm biến đổi Z của $x(n)$.

b.Tìm biến đổi Fourier của $x(n)$.

c. Tìm biến đổi Fourier của $y(n) = nx(n)$.

2.38 Tìm biến đổi Fourier ngược của $\widehat{X}(f) = \begin{cases} e^{-i2\pi f n_0} & |f| < f_0 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$

trong trường hợp $f_0 = \frac{1}{4}, n_0 = 4$.

2.39 **a.** Tìm biến đổi Fourier của $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{nÕu} \quad -T < t < T \\ 0 & \text{nÕu} \quad |t| > T \end{cases}$

b. Hãy suy ra giá trị của tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda T \cos \lambda t}{\lambda} d\lambda$.

c. Tính $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

d. Áp dụng đẳng thức Parseval cho hàm $x(t)$ ở câu a, suy ra giá trị của tích phân: $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$.

2.40 Tìm hàm chẵn thỏa mãn phương trình tích phân

$$\int_{0}^{\infty} x(t) \cos \lambda t \, dt = \begin{cases} 1-\lambda & \text{nÕu} \quad 0 \le \lambda \le 1 \\ 0 & \text{nÕu} \quad \lambda > 1 \end{cases}.$$

2.41 Chứng minh rằng $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \lambda t}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}$.

2.42 Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \Pi(t / T)\sin\omega_0 t$. **b.** $\Lambda(t / T) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$.

2.43 Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \begin{cases} e^{-t/T} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $T > 0$. **b.** $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$, $T > 0$.

c. $x(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$, $a > 0$. **d.** $x(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{nÕu} & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{nÕu} & |t| > 1 \end{cases}$

e. $x(t) = \dfrac{t}{(t^2 + a^2)^2}$, $a > 0$ **f.** $x(t) = \eta(t)e^{-at}\cos(bt)$, $a > 0$

2.44 Sử dụng công thức Parseval cho hàm $x(t) = \eta(t)e^{-at}\sin(bt)$, $a > 0$ suy ra đẳng thức

$$2\int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2 + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = \frac{\pi}{2a(a^2 + b^2)}.$$

2.45 Chứng minh các tính chất (2.107) của phép biến đổi Fourier.

CHƯƠNG 3
CÁC HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và các phép lấy hàm hợp của các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số. Hàm không phải sơ cấp được gọi là hàm siêu việt. Các hàm số thường gặp là các hàm sơ cấp, tuy nhiên có một số hàm siêu việt và hàm theo nghĩa suy rộng được sử dụng nhiều trong kỹ thuật nói chung và trong ngành điện tử viễn thông nói riêng.

Trong chương này ta xét các hàm siêu việt sau: Hàm delta, hàm Gamma hàm Beta, các hàm tích phân, hàm xác suất lỗi và các hàm Bessel. Đối với mỗi hàm ta khảo sát các tính chất của chúng, tìm biến đổi Laplace và khai triển Mac Laurin.

3.1 HÀM DELTA

3.1.1 Khái niệm hàm delta

Hàm delta còn gọi là hàm Dirac (hoặc hàm xung đơn vị), là một hàm số suy rộng. Hàm xung đơn vị tại $t = t_0$ được ký hiệu là $\delta_{t_0}(t)$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

- vì $\delta_{t_0}(t)$ là hàm xung nên chỉ tập trung giá trị tại $t = t_0$, nghĩa là

$$\delta_{t_0}(t) = 0 \text{ với mọi } t \neq t_0, \tag{3.1}$$

- xung đơn vị đòi hỏi tích phân bằng 1, nghĩa là

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)dt = 1. \tag{3.2}$$

Rõ ràng rằng không tồn tại hàm theo nghĩa thông thường thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện trên, vì hàm thỏa mãn điều kiện (3.1) sẽ có tích phân bằng 0.

Kỹ sư Oliver Heaviside là người đầu tiên sử dụng hàm delta để biểu diễn các kết quả trong công trình của mình, mặc dù các nhà toán học lý thuyết cùng thời cho rằng đó là ý nghĩ điên rồ. Ba mươi năm sau, nhà Vật lý lý thuyết nổi tiếng Paul Dirac đã sử dụng hàm delta trong lý thuyết cơ học lượng tử của mình, nhờ đó cuối cùng các nhà lý thuyết đã chập nhận hàm delta. Năm 1944 nhà toán học Pháp Laurent Schwartz cuối cùng đã xây dựng được lý thuyết phân bố kết hợp với hàm suy rộng, điều này giải thích cơ sở tồn tại của hàm delta.

Có thể sử dụng hàm delta để biểu diễn các tín hiệu có nhiễu.

Có hai cách khác nhau để xây dựng hàm delta:

- Cách thứ nhất xem hàm delta là giới hạn của dãy hàm trơn theo nghĩa thông thường.
- Cách thứ hai xem hàm delta như là một phiếm hàm tuyến tính của không gian hàm thích hợp.

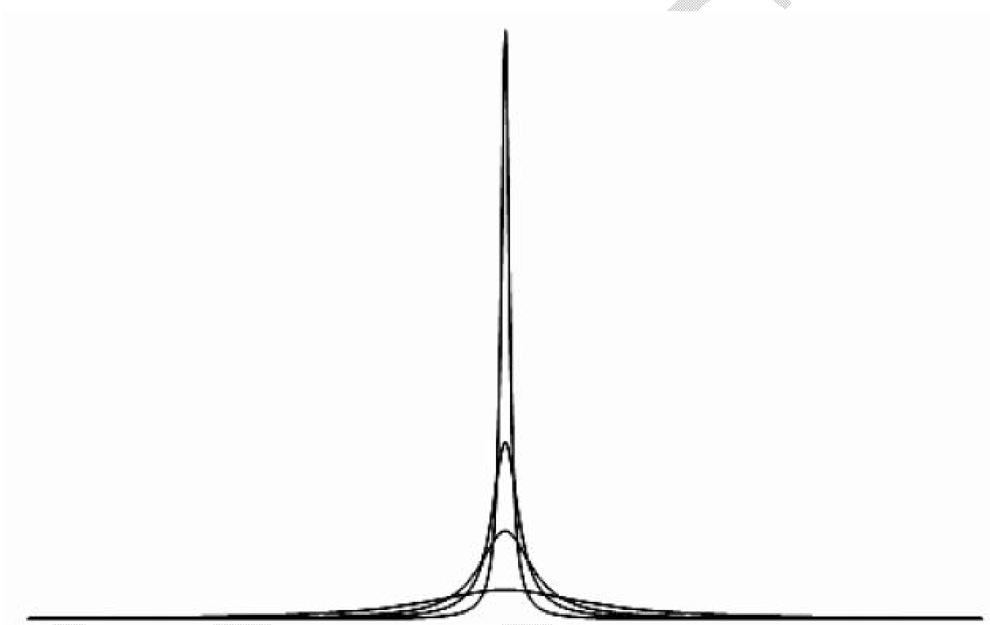
Cả hai đều quan trọng và đáng quan tâm. Tuy nhiên cách thứ nhất sẽ dễ dàng tiếp thu hơn, vì vậy ta chỉ xét phương pháp này.

Phương pháp giới hạn xem hàm delta $\delta_{t_0}(t)$ là giới hạn của dãy hàm khả vi $g_n(t)$ có giá trị ngày càng tập trung tại $t = t_0$ và có tích phân luôn bằng 1.

Chẳng hạn xét dãy hàm $g_n(t) = \dfrac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$ thỏa mãn hai điều kiện

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{nÕu } t \neq 0 \\ \infty & \text{nÕu } t = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\arctan n\,t\Big|_{t=-\infty}^{\infty} = 1 \tag{3.4}$$



Hình 3.1: *Đồ thị các hàm* $g_n(t)$

Vì vậy, một cách hình thức ta đồng nhất giới hạn của dãy hàm $g_n(t)$ là hàm delta tập trung tại gốc $t = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \delta(t) = \delta_0(t). \tag{3.5}$$

Hình 3.1 cho thấy các hàm $g_n(t)$ có giá trị ngày càng tập trung tại gốc $t = 0$.

Cần chú ý rằng có nhiều cách chọn các hàm $g_n(t)$ có giới hạn là hàm delta.

Hàm delta $\delta_{t_0}(t)$ có giá trị tập trung tại t_0 bất kỳ có thể nhận được từ hàm $\delta(t)$ bằng cách tịnh tiến

$$\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0). \tag{3.6}$$

Vì vậy, có thể xem $\delta_{t_0}(t)$ là giới hạn của dãy hàm

$$\hat{g}_n(t) = g_n(t - t_0) = \frac{n}{\pi\left(1 + n^2(t - t_0)^2\right)} \tag{3.7}$$

Tích chập của hàm delta

Từ (3.2) và (3.6) ta có công thức tính tích chập của hàm delta.

$$f(t_0) * \delta(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \tag{3.8}$$

3.1.2 Đạo hàm và tích phân của hàm delta

Từ công thức (3.1)-(3.2) ta có

Với mọi hàm liên tục $x(t)$:

$$\int_0^l \delta_v(t)x(t)dt = \begin{cases} x(v) & \text{nÕu } 0 < v < l \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \tag{3.9}$$

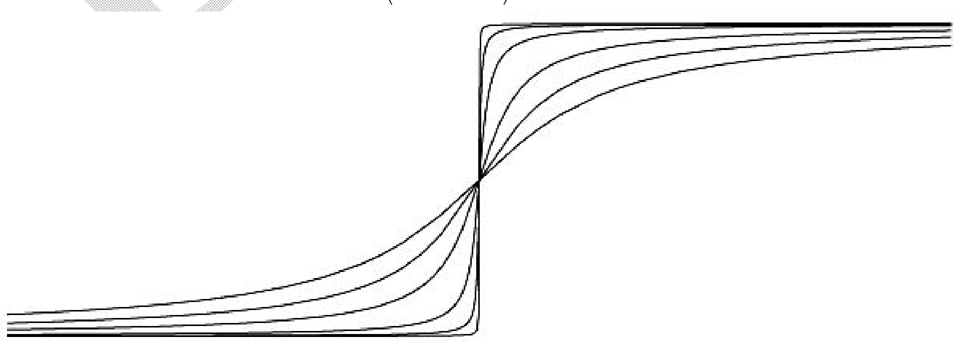
Do đó

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_v(u)du = \eta(t - v) = \begin{cases} 1 & \text{nÕu } t > v \\ 0 & \text{nÕu } t < v \end{cases} \tag{3.10}$$

Theo định nghĩa thông thường của nguyên hàm, từ công thức (3.10) ta có thể xem hàm bước nhảy là một nguyên hàm của hàm delta, do đó đạo hàm của hàm bước nhảy là hàm delta. Sự khác biệt ở đây là mặc dù hàm delta là hàm suy rộng nhưng hàm bước nhảy là hàm số theo nghĩa thông thường.

Công thức (3.10) cũng phù hợp với định nghĩa của hàm delta theo giới hạn của dãy hàm $g_n(t)$ có dãy các nguyên hàm $f_n(t)$ hội tụ về hàm bước nhảy

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{n}{\pi\left(1 + n^2u^2\right)}du = \frac{1}{\pi}\arctan nt + \frac{1}{2}$$



Hình 3.2: *Đồ thị của hàm bước nhảy như là giới hạn của dãy hàm* $f_n(t)$

Các hàm này sẽ hội tụ về hàm bước nhảy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nÕu } t > 0 \\ 1/2 & \text{nÕu } t = 0 \\ 0 & \text{nÕu } t < 0 \end{cases}$

Với nhận xét trên ta có thể coi

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \delta(t) \tag{3.11}$$

Đối với các hàm số theo nghĩa thông thường tính liên tục là điều kiện cần của tính khả vi, như vậy hàm không liên tục thì không khả vi. Tuy nhiên người ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm của các hàm không liên tục có đạo hàm là hàm suy rộng, với các hàm delta tập trung giá trị tại những điểm gián đoạn.

Giả sử $x(t)$ là hàm khả vi (theo nghĩa thông thường) tại mọi t ngoại trừ tại điểm gián đoạn t_0 với bước nhảy β, khi đó ta có thể biểu diễn lại hàm $x(t)$ dưới dạng tiện lợi hơn

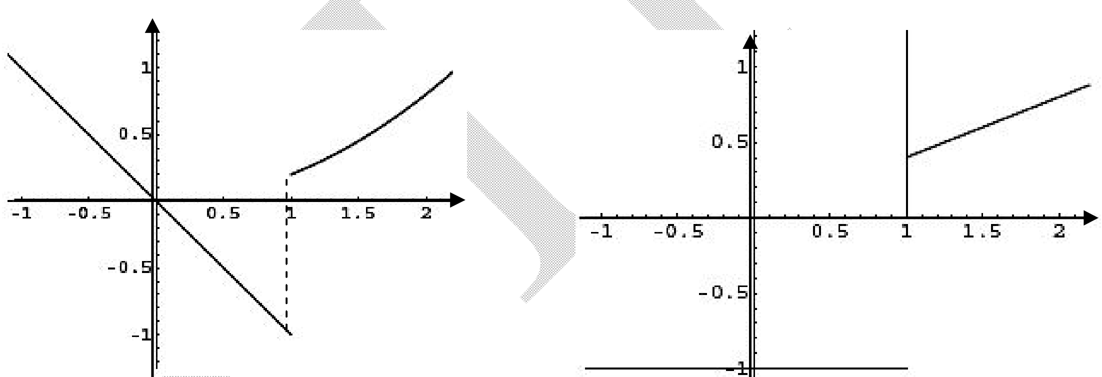
$$x(t) = y(t) + \beta\eta(t - t_0) \tag{3.12}$$

Trong đó $y(t)$ là hàm liên tục tại mọi điểm và khả vi tại mọi điểm có thể trừ điểm gián đoạn.
Đạo hàm công thức (3.12) và áp dụng công thức (3.11) ta được

$$x'(t) = y'(t) + \beta\delta(t - t_0) \tag{3.13}$$

Ví dụ 3.1: Xét hàm số $x(t) = \begin{cases} -t & \text{nÕu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 & \text{nÕu } t > 1 \end{cases}$

Hàm số gián đoạn tại $t = 1$ với bước nhảy $\frac{6}{5}$ (có đồ thị trong hình 3.3).



Đồ thị hàm $x(t)$ Đồ thị hàm $x'(t)$

Hình 3.3: *Đồ thị của $x(t)$ và đạo hàm $x'(t)$ ví dụ 3.1*

Do đó có thể biểu diễn theo công thức (3.13) như sau

$$x(t) = y(t) + \frac{6}{5}\eta(t-1), \qquad y(t) = \begin{cases} -t & \text{nÕu } t < 1 \\ \frac{1}{5}t^2 - \frac{6}{5} & \text{nÕu } t > 1 \end{cases}$$

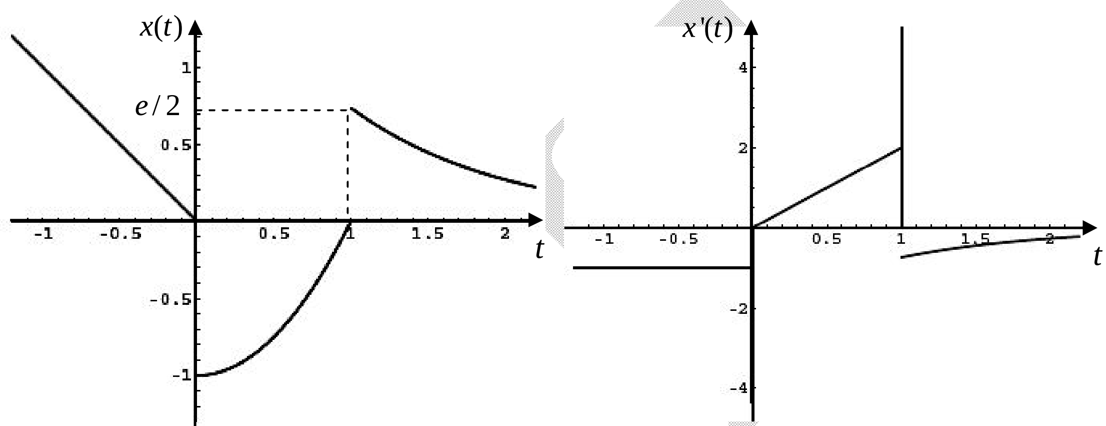
Công thức đạo hàm (3.13) tương ứng

$$x'(t) = y'(t) + \frac{6}{5}\delta(t-1), \qquad y'(t) = \begin{cases} -1 & \text{nÕu } t < 1 \\ \frac{2}{5}t & \text{nÕu } t > 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3.2: Xét hàm số $x(t)=\begin{cases}-t & \text{nÕu } t<0\\ t^2-1 & \text{nÕu } 0<t<1\\ 2e^{-t} & \text{nÕu } t>1\end{cases}$

Hàm số gián đoạn tại $t=0$ với bước nhảy -1 và tại $t=1$ với bước nhảy $\dfrac{2}{e}$ (có đồ thị trong hình 3.4), do đó đạo hàm suy rộng có dạng

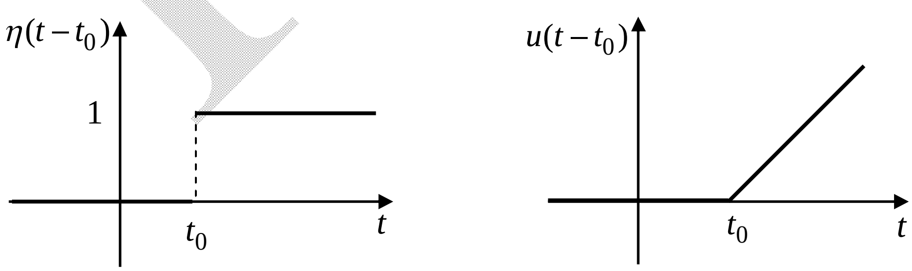
$$x'(t)=-\delta(t)+\frac{2}{e}\delta(t-1)+\begin{cases}-1 & \text{nÕu } t<0\\ 2t & \text{nÕu } 0<t<1\\ -2e^{-t} & \text{nÕu } t>1\end{cases}$$



Hình 3.4: *Đồ thị của* $x(t)$ *và đạo hàm* $x'(t)$ *ví dụ 3.2*

Tích phân của hàm bước nhảy $\eta(t-t_0)$ (hàm gián đoạn) là hàm dốc liên tục $u(t-t_0)$ (xem hình 3.5).

$$\eta_{t_0}(t)=\eta(t-t_0);\ \int_a^t \eta_{t_0}(t)dt=u_{t_0}(t)=u(t-t_0)=\begin{cases}t-t_0 & \text{nÕu } t>t_0>a\\ 0 & \text{nÕu } a<t<t_0\end{cases} \qquad \textbf{(3.14)}$$

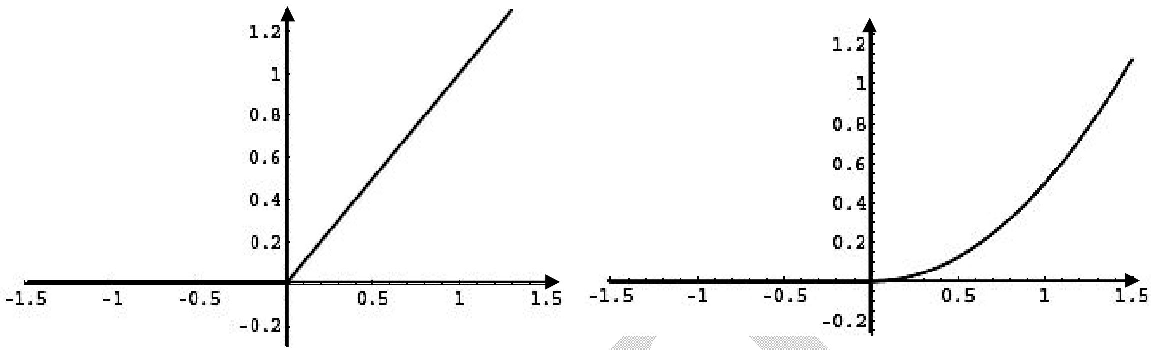


Hình 3.5: *Đồ thị của hàm bước nhảy và hàm dốc*

Hàm dốc $u(t-t_0)$ có điểm góc tại $t=t_0$ do đó không khả vi tại điểm này; đạo hàm $\dfrac{du}{dt}=\eta(t)$ gián đoạn tại điểm này và đạo hàm bậc hai $\dfrac{d^2u}{dt^2}=\delta$ là hàm suy rộng.

Như vậy lấy tích phân hai lần của hàm delta ta được hàm dốc. Bằng cách quy nạp ta có tích phân $n+1$ lần của hàm delta là hàm dốc bậc n

$$u_n(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{(t-t_0)^n}{n!} & \text{nÕu } t>t_0\\ 0 & \text{nÕu } t<t_0\end{cases} \qquad \textbf{(3.15)}$$



Hình 3.6: *Đồ thị của hàm dốc bậc nhất và hàm dốc bậc hai*

Ví dụ 3.3: Hàm phân bố của biến ngẫu nhiên X xác định bởi công thức:

$$F_X(x)=P\{X\le x\},\text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì tồn tại hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ sao cho

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt,\text{ với mọi } x\in\mathbb{R}$$

Nếu biến ngẫu nhiên X rời rạc có miền giá trị là một tập đếm được $R_X=\{x_1,x_2,\dots\}$, phân bố xác suất chỉ tập trung tại các giá trị này. Xác suất của X nhận các giá trị $x_k;\ k=1,2,\dots$ gọi là hàm khối lượng xác suất

$$p_X(x_k)=P\{X=x_k\}$$

Hàm phân bố xác suất được xác định từ hàm khối lượng xác suất theo công thức

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_k\le x} p_X(x_k)$$

Đồ thị của hàm phân bố $F_X(x)$ là có dạng bậc thang liên tục phải tại các bước nhảy.

Sử dụng công thức (3.6) và (3.10) ta có thể viết lại

$$F_X(x)=\sum_{x_k\le x;x_k\in R_X} p_X(x_k)=\int_{-\infty}^{x}\sum_{x_k\in R_X} p_X(x_k)\delta(t-x_k)dt$$

Vì vậy ta có thể xem hàm mật độ của biến ngẫu nhiên rời rạc là

$$f_X(x)=\sum_{x_k\in R_X} p_X(x_k)\delta(x-x_k).$$

3.1.3 Khai triển Fourier của hàm delta

Áp dụng công thức (2.57) tính hệ số Fourier ta có

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\cos n0 = \frac{1}{\pi},\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\sin nt dt = \frac{1}{\pi}\sin n0 = 0 \quad \textbf{(3.16)}$$

Vậy hàm delta có khai triển Fourier

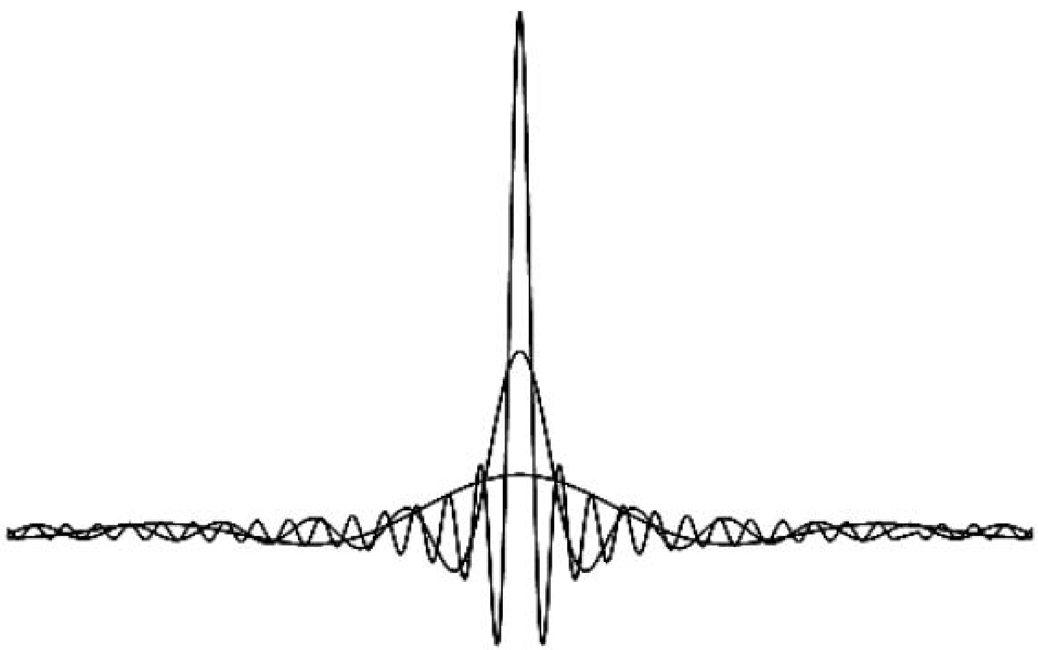
$$\delta(t) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots\right) \quad \textbf{(3.17)}$$

Thay $\cos kt = \dfrac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$ (công thức Euler) vào (3.17) ta được

$$\delta(t) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\left(\cdots + e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots\right) \quad \textbf{(3.18)}$$

Cũng có thể nhận được công thức khai triển trên bằng cách tính trực tiếp các hệ số theo công thức (2.73) và (3.2)

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)e^{ikt}dt = \frac{1}{2\pi}e^{ik0} = \frac{1}{2\pi}.$$



Hình 3.7: *Đồ thị các tổng riêng của chuỗi Fourier hàm delta*

Tổng riêng của chuỗi Fourier

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

là tổng của $2n+1$ số hạng của cấp số nhân có số hạng đầu tiên là e^{-int} và công bội e^{it}, do đó:

$$s_n = \frac{1}{2\pi}e^{-int}\left(\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n+1)t}-e^{-int}}{e^{it}-1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

3.1.4 Biến đổi Fourier của hàm delta

Trong chương 2 ta xét biến đổi Fourier của các hàm khả tích tuyệt đối trên tập số thực. Đối với các hàm không khả tích tuyệt đối (chẳng hạn hàm sin hàm cosin) ta cũng có thể tìm biến đổi Fourier mở rộng thông qua biến đổi Fourier của hàm delta.

Theo điều kiện (3.2) ta có thể tính biến đổi Fourier của hàm delta

$$\mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i2\pi ft}dt = 1,$$

$$\mathcal{F}\left\{\delta(t-t_0)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-i2\pi ft}dt = e^{-i2\pi t_0 f} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Từ công thức (3.19) ta được biến đổi ngược

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{1\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi ft}df\,,\quad \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-i2\pi t_0 f}\right\} = \delta(t-t_0). \qquad \textbf{(3.20)}$$

Từ công thức (3.20) ta có

$$\delta(t-t_0) = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-i2\pi t_0 f}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi t_0 f}\cdot e^{i2\pi tf}df = \int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi(t-t_0)f}df \qquad \textbf{(3.21)}$$

Theo giả thiết $\delta(t)$ là hàm chẵn, do đó

$$\delta(t) = \delta(-t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm i2\pi ft}df\,.$$

Từ công thức (3.21) ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi(f-f_0)t}dt = \delta(f-f_0) \Rightarrow \mathcal{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi(f-f_0)t}dt = \delta(f-f_0) \qquad \textbf{(3.22)}$$

Tương tự

$$\mathcal{F}\left\{e^{-i2\pi f_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi(f+f_0)t}dt = \delta(f+f_0) \qquad \textbf{(3.23)}$$

Áp dụng tính đồng dạng của biến đổi Fourier ta có

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t). \tag{3.24}$$

Hoặc có thể tính trực tiếp

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)\delta(t)\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\delta(t)}{a}dt, \forall a > 0$$

vì vậy $\qquad \delta(at) = \dfrac{1}{a}\delta(t),\ \forall a > 0.$

Ngoài ra $\qquad \delta(-at) = \delta(at).$

Do đó ta cũng có $\qquad \delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}}{2i}, \ \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\sin(2\pi f_0 t)\right\} = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t}\right\} - \mathcal{F}\left\{e^{-i2\pi f_0 t}\right\}\right) = \frac{1}{2i}\big(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\big) \tag{3.25}$$

$$\mathcal{F}\left\{\cos(2\pi f_0 t)\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{e^{-i2\pi f_0 t}\right\}\right) = \frac{1}{2}\big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\big). \tag{3.26}$$

Công thức (3.11) chứng tỏ hàm bước nhảy đơn vị $\eta(t)$ là một nguyên hàm theo nghĩa rộng của hàm delta.

Hàm $\eta(t)$ không khả tích tuyệt đối trong toàn bộ trục thực nhưng từ tính chất biến đổi Fourier của tích phân (Tính chất 2.3 mục 9. chương 2) ta có thể mở rộng và xem

$$\mathcal{F}\left\{\eta(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda\right\} = \frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f). \tag{3.27}$$

Ví dụ 3.4: Hàm dấu

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad t > 0 \\ -1 & \text{nếu} \quad t < 0 \end{cases} = \eta(t) - \eta(-t) \tag{3.28}$$

$$\mathcal{F}\left\{\operatorname{sgn}(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\eta(t)\right\} - \mathcal{F}\left\{\eta(-t)\right\} = \left(\frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right) - \left(\frac{1}{-i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(-f)\right) = \frac{1}{i\pi f}.$$

3.2 CÁC HÀM SỐ TÍCH PHÂN

3.2.1 Công thức xác định các hàm số tích phân

Định nghĩa 3.1:

Hàm ***tích phân mũ*** xác định bởi tích phân suy rộng phụ thuộc cận dưới với mọi

$$\operatorname{Ei}(t) = \int_{t}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \tag{3.29}$$

Hàm ***tích phân sin***

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \tag{3.30}$$

Hàm ***tích phân cosin***

$$\mathrm{Ci}(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \tag{3.31}$$

Ngoài ra ký hiệu:

$$\mathrm{si}(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$$ cũng đọc là tích phân sin của $t > 0$

vì $$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Suy ra $$\mathrm{Si}(t) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{si}(t)\ .$$

Hàm lỗi *(error function)* xác định với mọi $t > 0$

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \tag{3.32}$$

Hàm mật độ của phân bố chuẩn tắc $\mathbf{N}(0,1)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

gọi là ***hàm Gauss***. Đồ thị của hàm Gauss được cho trên hình 3.8:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi trục Ot và đồ thị hàm số Gauss bằng 1, thật vậy:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Đặt $t^2 = 2u \Rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$\varphi(t)$

$1/\sqrt{2\pi}$ $\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}$

O

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm Gauss, nửa trục hoành bên trái tính từ điểm có hoành độ t sẽ là hàm phân phối chuẩn tắc

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{3.33}$$

Đặt $x=u\sqrt{2}$ vào (3.26) sẽ có: $\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{2}t} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{3.34}$$

Mặt khác $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2}$ và $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du=2\Phi(t)-1$,

ta được

$$\operatorname{erf}\left(t\right)=2\Phi\left(\sqrt{2}t\right)-1 \tag{3.35}$$

Các hàm $\operatorname{erf}(t)$ và $\Phi(t)$ đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết xác suất, đặc biệt thường được sử dụng khi phân tích các nhiễu tín hiệu.

Bảng tính các giá trị của hàm $\Phi(t)$ được cho trong phụ lục E.

Ví dụ 3.5: Tính $\operatorname{erf}\left(1\right)$.

Giải: Áp dụng công thức (3.35) ta có $\operatorname{erf}\left(1\right)=2\Phi\left(\sqrt{2}\right)-1$.

Tra bảng ta được $\Phi\left(\sqrt{2}\right)=0,8729$. Vậy $\operatorname{erf}\left(1\right)=2.0,8729-1=0,7458$.

3.2.2 Khai triển các hàm tích phân thành chuỗi luỹ thừa (*)

Để tìm khai triển Mac Laurin của hàm tích phân sin ta sử dụng khai triển Mac Laurin của hàm $\frac{\sin t}{t}$.

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow\frac{\sin t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Do đó $$\operatorname{Si}(t)=\int\limits_0^t\frac{\sin u}{u}du=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \tag{3.36)}$$

Ta tiếp tục tìm khai triển Mac Laurin của hàm tích phân mũ và tích phân cosin bằng cách sử dụng biến đổi Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{Ei}(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dt \text{, đổi biến số } v = \frac{u}{t} \Rightarrow dv = \frac{du}{t}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{Ei}(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_1^\infty \frac{e^{-tv}}{v}dv\right)dt = \int_1^\infty \frac{1}{v}\left(\int_0^\infty e^{-st}e^{-vt}dt\right)dv = \int_1^\infty \frac{1}{v}\left(\frac{1}{v+s}\right)dv$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{v}\left(\frac{1}{v+s}\right)dv = \frac{1}{s}\int_1^\infty\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+s}\right)dv = \frac{1}{s}\ln\left(\frac{v}{v+s}\right)\Bigg|_{v=1}^{\infty} = \frac{1}{s}\ln\left(1+s\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{Ei}(t)\right\} = \frac{1}{s}\ln\left(s+1\right) \qquad \textbf{(3.37)}$$

$$\frac{1}{s}\ln\left(s+1\right) = \frac{1}{s}\left[\ln s + \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right] = \frac{1}{s}\ln s + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)s^{n+2}}.$$

Sử dụng công thức tìm biến đổi Laplace ngược (2.23) và

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\ln s}{s}\right\} = -\ln t - \gamma \qquad \textbf{(3.35)}$$

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{m}-\ln m) \qquad \textbf{(3.36)}$$

gọi là hằng số Euler.

Ta có khai triển Mac Laurin của hàm tích phân mũ

$$\mathrm{Ei}(t) = -\ln t - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \textbf{(3.37)}$$

Tương tự trường hợp hàm $\mathrm{Ei}(t)$, bằng cách đổi biến số $v = \frac{u}{t}$ ta được

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{Ci}(t)\right\} = -\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}du\right)dt = -\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_1^\infty \frac{\cos tv}{v}dv\right)dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\mathrm{Ci}(t)\right\} = -\int_1^\infty \frac{1}{v}\left(\int_0^\infty e^{-st}\cos tv\,dt\right)dv$$

Sử dụng biến đổi Laplace của hàm cosin ta được

$$\int_1^\infty \frac{1}{v}\left(\int_0^\infty e^{-st}\cos tv\,dt\right)dv = \int_1^\infty \frac{1}{v}\cdot\frac{s}{s^2+v^2}dv$$

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{s}{s^2+v^2} = \frac{sv}{v^2(s^2+v^2)} = \frac{v}{s}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{s^2+v^2}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{v}{v^2}-\frac{v}{s^2+v^2}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{s^2+v^2}\right)$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{v}\cdot\frac{s}{s^2+v^2}dv = \frac{1}{s}\int_1^\infty\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{s^2+v^2}\right)dv = \frac{1}{s}\ln\left(\frac{v}{\sqrt{s^2+v^2}}\right)\Bigg|_1^\infty = \frac{1}{2s}\ln\left(s^2+1\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{Ci}(t)\right\} = -\frac{1}{2s}\ln\left(s^2+1\right) \qquad \textbf{(3.41)}$$

$$-\frac{1}{2s}\ln\left(s^2+1\right) = -\frac{1}{2s}\left[\ln s^2+\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right] = -\frac{1}{s}\ln s - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(n+1)s^{2n+3}},$$

$$-\frac{1}{2s}\ln\left(s^2+1\right) = -\frac{1}{s}\ln s + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)s^{2n+1}}.$$

Sử dụng công thức tìm biến đổi Laplace ngược (2.23) và công thức (3.35) ta được

$$\mathrm{Ci}(t) = \ln t + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!2n} \qquad \textbf{(3.42)}$$

Mặt khác, từ khai triển $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$

Suy ra $$\frac{\cos t - 1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n-1}}{(2n)!},$$

Lấy tích phân hai vế của đẳng thức trên ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!2n} = -\int_0^t\frac{1-\cos u}{u}du.$$

Kết hợp với công thức (3.42) ta có

$$\mathrm{Ci}(t) = \ln t + \gamma - \int_0^t\frac{1-\cos u}{u}du \qquad \textbf{(3.43)}$$

Khai triển luỹ thừa của hàm lỗi

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}$$

$$\int_0^t e^{-u^2}du = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)},$$

Do đó

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[t-\frac{t^3}{1!3}+\frac{t^5}{2!5}-\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)}+\cdots\right] \qquad \textbf{(3.41)}$$

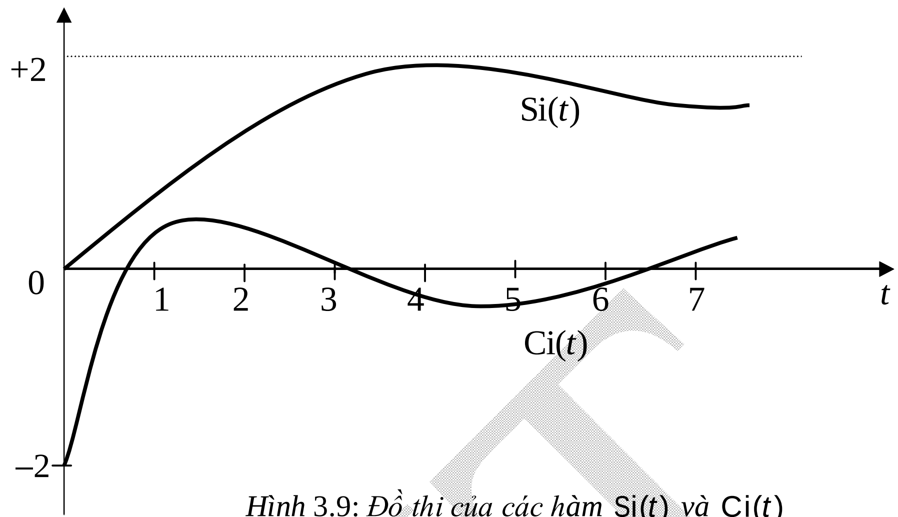
Chuỗi ở vế phải hội tụ với mọi t.

Với t khá bé (ký hiệu $|t| \ll 1$) sẽ nhận được các công thức sấp xỉ như sau :

$$\mathrm{Si}(t)\approx t,\ \mathrm{Ci}(t)\approx\gamma+\ln t,\ \mathrm{Ei}(t)\approx-\gamma-\ln t,\ \mathrm{erf}(t)\approx\frac{2}{\sqrt{\pi}}t. \qquad \textbf{(3.45)}$$

Các công thức gần đúng cho phép xác định các giá trị $\mathrm{Si}(t)$ và $\mathrm{Ci}(t)$.

Đồ thị của các hàm $\mathrm{Si}(t)$ và $\mathrm{Ci}(t)$ cho ở hình 3.9.



Hình 3.9: *Đồ thị của các hàm* $\mathrm{Si}(t)$ *và* $\mathrm{Ci}(t)$

3.3 HÀM GAMMA, HÀM BETA

3.3.1 Định nghĩa hàm Gamma (Gauss)

Hàm Gamma là hàm siêu việt mở rộng từ hàm giai thừa xác định với mọi số tự nhiên n theo công thức $n! = n(n-1)...2.1$.

Hàm giai thừa $f(n) = n!$ thỏa mãn hai điều kiện $f(n+1) = nf(n)$ và $f(1) = 1$. Ta mở rộng hàm giai thừa thành hàm Gamma với biến số phức thỏa mãn hai điều kiện trên.

Định nghĩa 3.2: *Hàm số Gamma, ký hiệu* $\Gamma(z)$, *là hàm số biến số phức xác định với mọi số phức khác nguyên âm* $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ *cho bởi biểu thức:*

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^z}{z(z+1)(z+2)...(z+m)} \tag{3.46}$$

Ngoài định nghĩa hàm Gamma theo công thức (3.46) của Gauss, ta có hai định nghĩa tương đương sau.

Định lý 3.1: *Hàm gamma có các dạng sau đây:*

1. Công thức Weierstrass:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} . \prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}} \tag{3.47}$$

trong đó γ là hằng số Euler (công thức 3.33), thường lấy gần đúng

$$\gamma \approx \frac{1}{2}(\sqrt[3]{10}-1) = 0,57721566$$

2. Công thức Euler: Trường hợp $\mathrm{Re}\, z > 0$ ta có công thức

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \quad \textit{nếu} \quad \mathrm{Re}\, z>0 \tag{3.48}$$

Khi $\mathrm{Re}\, z \le 0$ tích phân suy rộng theo cận dưới $\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ không hội tụ.

Chứng minh:

1. $$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{m\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+m)}{m!m^z}=z\lim_{m\to\infty} m^{-z}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

$$=z\lim_{m\to\infty} e^{-z\ln m}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)=z\lim_{m\to\infty} e^{-z\ln m}e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}\right)}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$$

$$=z\lim_{m\to\infty} e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}-\ln m\right)}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}=ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}.$$

2. Để chứng minh công thức (3.48) chúng ta hãy tính tích phân sau

$$I_n=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$$

Đổi biến số $x=\frac{t}{n}\Rightarrow t=nx\Rightarrow dt=ndx$, thay vào I_n ta được

$$I_n=n^z\int_0^1(1-x)^n x^{z-1}dx.$$

Ta sẽ chứng minh $\displaystyle\int_0^1(1-x)^n x^{z-1}dx=\frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$ khi $\mathrm{Re}\, z>0$

Tích phân từng phần sẽ có:

$$\int_0^1(1-x)^n x^{z-1}dx=\left.\frac{(1-x)^n x^z}{z}\right|_0^1+\frac{n}{z}\int_0^1 x^z(1-x)^{n-1}dx$$

Nếu $\mathrm{Re}\, z>0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} x^z=0$

Suy ra: $$\int_0^1(1-x)^n x^{z-1}dx=\frac{n}{z}\int_0^1(1-x)^{n-1}x^z dx$$

$$\int_0^1(1-x)^{n-1}x^z dx=\frac{n-1}{z+1}\int_0^1(1-x)^{n-2}x^{z+1}dx$$

... ...

$$\int_0^1 (1-x)x^{z+n-2}dx = \frac{1}{z+n-1}\int_0^1 x^{z+n-1}dx = \frac{1}{(z+n-1)(z+n)}$$

Cuối cùng ta được: $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n x^{z-1}dx = \frac{n!}{z(z+1)...(z+n)}$

Do đó $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = I_n = \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}$.

Mặt khác $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$

Từ công thức (3.46) suy ra

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt .$$

Ví dụ 3.6: Chứng minh $\mathcal{L}\left\{t^\alpha\right\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}; \alpha > -1, s > 0$.

Giải: $\mathcal{L}\left\{t^\alpha\right\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt$. Đặt $u = st \Rightarrow du = sdt$; $t = \dfrac{u}{s}$

$$\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt = \int_0^\infty e^{-u}\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

3.3.2 Các tính chất của hàm Gamma

a.

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, với mọi $z \neq 0, -1, -2, ...$ **(3.49)**

$$\Gamma(1) = 1. \quad \textbf{(3.50)}$$

Với mọi $z = n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$ **(3.51)**

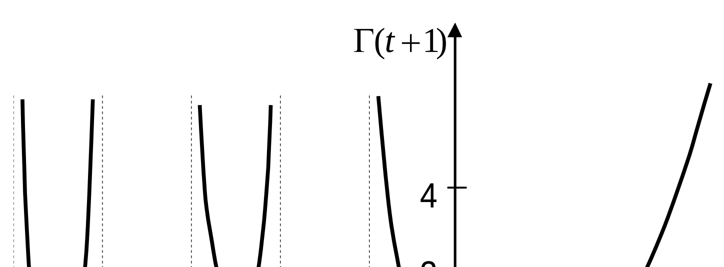
Chứng minh: Từ (3.46) ta có

$$\Gamma(z+1) = \lim_{m\to\infty}\frac{m!m^{z+1}}{(z+1)(z+2)....(z+m+1)} = \lim_{m\to\infty}\frac{m!m^z}{z(z+1)(z+2)....(z+m)}\cdot\frac{zm}{z+m+1}$$

$$= \Gamma(z)\lim_{m\to\infty}\frac{mz}{z+m+1} = \Gamma(z).z$$

$$\Gamma(1) = \lim_{m\to\infty}\frac{m.m!}{1.2...(m+1)} = \lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1} = 1.$$

Đồ thị hàm số Gamma với z là số thực cho trên hình 3.10 (theo công thức (3.46)).



b.

$$\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\frac{\pi}{\sin\pi z}, \text{ với mọi } z\neq 0,\pm 1,\pm 2,... \qquad \textbf{(3.52)}$$

Chứng minh: Từ (3.47) ta có:

$$\frac{1}{\Gamma(z).\Gamma(-z)}=ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{\frac{-z}{m}}\right\}(-z)e^{-\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{m}\right)e^{\frac{z}{m}}\right\}=(-z).z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)$$

Theo (3.49): $\Gamma\left(1-z\right)=-z\Gamma\left(-z\right)$,

Do đó $$\frac{1}{\Gamma(z).\Gamma(1-z)}=z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right).$$

Vậy để chứng minh công thức (3.52) ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{\sin\pi z}{\pi}=z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right).$$

Trước hết ta khai triển Fourier hàm số $y(t)=\cos\alpha t$ trong $\left(-\pi;\pi\right)$ với $\alpha\notin\mathbb{Z}$.

Vì $y(t)$ là hàm chẵn, do đó ta có

$$b_n = 0\,,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha t\cdot dt = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi\alpha}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha t\cdot\cos nt\cdot dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\alpha+n)t+\cos(\alpha-n)t\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}+\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right)$$

$$\sin(\alpha+n)\pi = \sin\alpha\pi\cos n\pi + \sin n\pi\cos\alpha\pi = (-1)^n\sin\alpha\pi$$

$$\sin(\alpha-n)\pi = \sin\alpha\pi\cos n\pi - \sin n\pi\cos\alpha\pi = (-1)^n\sin\alpha\pi$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}+\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right) = \frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2\alpha(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}.$$

$$\Rightarrow \cos\alpha t = \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nt}{\alpha^2-n^2}\right)$$

Thay $t=\pi,\ \alpha = x$ vào công thức trên và chia hai vế cho $\sin\pi x$ ta được:

$$\cot\pi x = \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi}{x^2-n^2}\right)$$

$$= \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2-1^2}+\frac{1}{x^2-2^2}+\frac{1}{x^2-3^2}+....\right)$$

$$\Rightarrow \cot\pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{1^2-x^2}+\frac{1}{2^2-x^2}+\frac{1}{3^2-x^2}+....\right)$$

$$\int_0^t\left(\cot\pi x-\frac{1}{\pi x}\right)dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^t x\left(\frac{1}{1^2-x^2}+\frac{1}{2^2-x^2}+...\right)dx$$

Vì rằng: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x}{x} = \pi$

Do đó tích phân vế trái

$$\int_0^t\left(\cot\pi x-\frac{1}{\pi x}\right)dx = \int_0^t\left(\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi x}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^t\left(\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln\frac{\sin\pi x}{x}\Bigg|_0^t = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\sin\pi t}{t}-\ln\pi\right) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\sin\pi t}{\pi t}.$$

Tích phân của vế phải

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^t x\left(\frac{1}{1^2-x^2}+\frac{1}{2^2-x^2}+...\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^t\left(\frac{-2x}{1^2-x^2}+\frac{-2x}{2^2-x^2}+...\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(n^2-x^2)\Big|_0^t = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln(n^2-t^2)-\ln n^2\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)=\frac{1}{\pi}\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)$$

Vậy $\ln\frac{\sin\pi t}{\pi t}=\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{\sin\pi t}{\pi t}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)$. Từ đó nhận được (3.52).

c.

Từ (3.52) suy ra $\frac{\pi}{\Gamma(1-n)}=\Gamma(n)\sin(n\pi)=0$ với $n\in\mathbb{N}^*$. **(3.53)**

Như vậy $\Gamma(z)=\infty$ với mọi $z=0,-1,-2,...$

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z},\text{ với mọi } z\neq\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},... \quad \textbf{(3.54)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \quad \textbf{(3.55)}$$

Chứng minh: Với mọi $z\neq\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},...$ thay z bởi $z+\frac{1}{2}$ vào công thức (3.52) ta nhận được:

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sin\pi\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\pi}{\cos\pi z}.$$

Thay $z=\frac{1}{2}$ vào công thức (3.49) ta nhận được $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi$, hơn nữa $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

Do đó $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$.

d.

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\text{ với mọi } z=n\in\mathbb{N} \quad \textbf{(3.56)}$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi},\text{ với mọi } z=n\in\mathbb{N} \quad \textbf{(3.57)}$$

Chứng minh: Với mọi $n\in\mathbb{N}$, với mọi $k\in\mathbb{C}$. Áp dụng liên tiếp công thức (3.49) sẽ có:

$$\Gamma(n+k+1)=(n+k)(n+k-1)....(k+1)\Gamma(k+1)$$

Thay $k = -\dfrac{1}{2}$ suy ra

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}-1\right)....\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\,.$$

Trong đó $(2n-1)!! = 1.3.5...(2n-1)$.

Thay $z = n$ vào (3.54) ta có:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{\pi}{\cos \pi n} = \frac{\pi}{(-1)^n}$$

Áp dụng kết quả (3.56) ta được

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{\pi}{(-1)^n}\frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi}{(-1)^n}\frac{2^n}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}} = \frac{(-1)^n 2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}.$$

e.

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\ln t dt\,;\ \Gamma'(1) = -\gamma \qquad \textbf{(3.58)}$$

Chứng minh: Sử dụng quy tắc đạo hàm dưới dấu tích phân công thức (3.48) ta được

$$\Gamma'(z) = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\ln t dt\,,$$

Để chứng minh đẳng thức thứ hai ta lấy loga và đạo hàm hai vế công thức (3.47),

$$-\ln\Gamma(z) = \ln z + \gamma z + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{z}{m}\right)-\frac{z}{m}\right) \Rightarrow -\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+z}-\frac{1}{m}\right)$$

thay $z = 1$ ta được $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Ví dụ 3.7: Tính **a.** $\Gamma(5)$ **b.** $\dfrac{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$ **c.** $\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$.

Giải: **a.** $\Gamma(5) = 4! = 24$

b. $$\frac{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{8}{3}\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{8}{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{80}{27}$$

c. $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{4}+1\right) = -\frac{1}{4}\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) = -4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$;

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=-4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=-\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\sqrt{2}\pi.$$

Ví dụ 3.8: *Một hạt M với khối lượng m đặt cách điểm O cố định khoảng cách* $a>0$. *M bị hút về O với một lực tỉ lệ nghịch với khoảng cách. Tìm thời gian để M về đến điểm O.*

Giải: Gọi $x(t)$ là khoảng cách từ *M* đến *O* ở thời điểm *t*, $x(0)=a$. Theo định luật Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{x},\ k \text{ là hằng số tỷ lệ.}$$

Ta có $\frac{dx}{dt}=v$ là vận tốc của hạt và $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dx}$, thay vào phương trình trên ta được $mv\cdot\frac{dv}{dx}=-\frac{k}{x}$, do đó $mvdv=-\frac{k}{x}dx$

Lấy tích phân hai vế ta được $\frac{mv^2}{2}=-k\ln x+C$.

Khi $t=0, x(0)=a$, $v(0)=0$ suy ra $C=k\ln a$. Vậy

$$\frac{mv^2}{2}=k\ln\frac{a}{x}\Rightarrow v^2=\frac{2k}{m}\ln\frac{a}{x}\Rightarrow v=\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\ln\frac{a}{x}}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=-\sqrt{\frac{m}{2k}}\Big/\sqrt{\ln\frac{a}{x}}.$$

Do đó thời gian *T* để *M* về đến *O* thỏa mãn

$$T=-\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_a^0\frac{1}{\sqrt{\ln(a/x)}}dx=\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{\ln(a/x)}}dx.$$

Đổi biến $\ln(a/x)=u\Rightarrow x=ae^{-u}\Rightarrow dx=-ae^{-u}du$ ta được

$$T=\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_{+\infty}^0\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot(-a)e^{-u}du=a\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^{+\infty}u^{-1/2}\cdot e^{-u}du=a\sqrt{\frac{m}{2k}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=a\sqrt{\frac{m\pi}{2k}}.$$

3.3.3 Hàm Beta

Định nghĩa 3.3: *Hàm số biểu diễn dưới dạng tích phân phụ thuộc hai tham số thực* $p,q>0$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad \textbf{(3.59)}$$

Gọi là hàm Beta hay là tích phân Euler loại 1.

Hàm Gamma (công thức 3.46) gọi là tích phân Euler loại 2.

Tính chất 3.1:

$$B(p,q)=B(q,p) \qquad \textbf{(3.60)}$$

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta \qquad \textbf{(3.61)}$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \textbf{(3.62)}$$

Chứng minh:

Để chứng minh công thức (3.60), ta đổi biến $x = -t$.

Để chứng minh công thức (3.61), ta đặt $x = \cos^2\theta$ khi đó $dx = -2\cos\theta\sin\theta d\theta$

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -2\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

Thay vào công thức (3.59) ta được công thức (3.61).

Để chứng minh công thức (3.62), ta xét công thức biểu diễn hàm Gamma dưới dạng tích phân (công thức 3.48).

Thay z lần lượt bởi p, q thay t bởi y^2, x^2 nhận được

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty y^{2p-1}e^{-y^2}dy,\ \Gamma(q) = 2\int_0^\infty x^{2q-1}e^{-x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy = 4\iint_D x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Trong đó D là góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Chuyển sang toạ độ cực:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},\ \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r < \infty \end{cases};\ dxdy = rdrd\varphi$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\left(2\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}.dr\right) = B(p,q)\left(2\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\right)$$ Đ

ặt $t = r^2 \Rightarrow dt = 2rdr$ ta được

$$2\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}.dr = \int_0^\infty r^{2(p+q)-2}e^{-r^2}.2rdr = \int_0^\infty t^{(p+q)-1}e^{-t}dt = \Gamma(p+q)$$

Vậy $\quad \Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q) \ \Rightarrow B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Từ công thức (3.61), (3.62) ta có

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}x\sin^{2q-1}xdx = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)} \quad \textbf{(3.63)}$$

Ví dụ 3.9: Tìm khối lượng của vật thể phẳng nằm trong mặt phẳng *Oxy* giới hạn bới; $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ và có khối lượng riêng $\rho = \sqrt{xy}$.

Giải: $M = \iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy = \int\limits_0^1 \sqrt{x}dx \int\limits_0^{1-x} \sqrt{y}dy = \int\limits_0^1 \sqrt{x}dx \left. \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^{1-x} = \frac{2}{3} \int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx$

$$= \frac{2}{3} B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3!} = \frac{\pi}{24}$$

Ví dụ 3.10: Công thức tích phân Dirichlet

$$I = \iiint\limits_V x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} dxdydz = \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2)}{8\Gamma\left[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1\right]}, \qquad \textbf{(3.64)}$$

trong đó V là 1/8 hình cầu đơn vị: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1;\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Giải: Đổi biến số $u = x^2$, $v = y^2$, $w = z^2$. Miền V trở thành hình chóp tứ diện

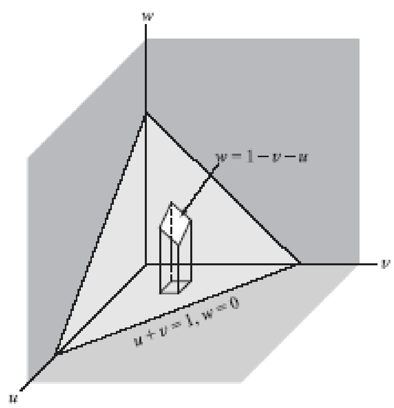
Ω: $u + v + w \le 1; u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0$ (Hình 3.11).

$$I = \iiint\limits_\Omega u^{(\alpha-1)/2} v^{(\beta-1)/2} w^{(\gamma-1)/2} \frac{du}{2\sqrt{u}} \frac{dv}{2\sqrt{v}} \frac{dw}{2\sqrt{w}}$$

$$= \frac{1}{8} \iiint\limits_\Omega u^{(\alpha/2)-1} v^{(\beta/2)-1} w^{(\gamma/2)-1} dudvdw$$

$$= \frac{1}{8} \int\limits_{u=0}^1 u^{(\alpha/2)-1} du \int\limits_{v=0}^{1-u} v^{(\beta/2)-1} dv \int\limits_{w=0}^{1-v-u} w^{(\gamma/2)-1} dw$$

$$= \frac{1}{4\gamma} \int\limits_{u=0}^1 u^{(\alpha/2)-1} du \int\limits_{v=0}^{1-u} (1-v-u)^{\gamma/2} v^{(\beta/2)-1} dv$$



Hình 3.11

Đặt $v = (1-u)t \Rightarrow dv = (1-u)dt$; $1 - v - u = (1-u)(1-t)$

$$(1-v-u)^{\gamma/2} v^{(\beta/2)-1} = (1-u)^{(\beta+\gamma)/2-1} (1-t)^{\gamma/2} t^{(\beta/2)-1}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{v=0}^{1-u} (1-v-u)^{\gamma/2} v^{(\beta/2)-1} dv = (1-u)^{(\beta+\gamma)/2} \int\limits_{t=0}^1 (1-t)^{\gamma/2} t^{(\beta/2)-1} dt$$

$$= (1-u)^{(\beta+\gamma)/2} B(\beta/2; \gamma/2+1) = (1-u)^{(\beta+\gamma)/2} \frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma\left[(\beta+\gamma)/2+1\right]}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4\gamma} \frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma\left[(\beta+\gamma)/2+1\right]} \int\limits_{u=0}^1 u^{(\alpha/2)-1} (1-u)^{(\beta+\gamma)/2} du$$

$$= \frac{1}{4\gamma} \frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma\left[(\beta+\gamma)/2+1\right]} B(\alpha/2; (\beta+\gamma)/2+1)$$

$$=\frac{1}{4\gamma}\frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma\left[(\beta+\gamma)/2+1\right]}\cdot\frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma\left[(\beta+\gamma)/2+1\right]}{\Gamma\left[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1\right]}=\frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2)}{8\Gamma\left[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1\right]}.$$

Ví dụ 3.11: *Tìm khối lượng của vật thể hình cầu tâm O bán kính 1 và có khối lượng riêng tỷ lệ với bình phương khoảng cách đến trung tâm của nó.*

Giải: Khối lượng riêng tai điểm có tọa độ (x,y,z) là $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Do tính chất đối xứng của vật thể suy ra khối lượng *M* của vật thể bằng tám lần khối lượng vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất của trục tọa độ.

$$M=8\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1; x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}.$$

Ta cũng có $\iiint_V x^2dxdydz=\iiint_V y^2dxdydz=\iiint_V z^2dxdydz\Rightarrow M=8.3\iiint_V x^2dxdydz$

Áp dụng công thức Dirichlet (3.64) với $\alpha=3;\ \beta=\gamma=1$ ta được

$$M=8.3\iiint_V x^2dxdydz=8.3.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{8\Gamma\left(\frac{3+1+1}{2}+1\right)}=3.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\pi}{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{4\pi}{5}.$$

Ví dụ 3.12: *Tính tích phân* $I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

Giải: $$I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}}=\int_0^{\pi/2}\cos^{\frac{1}{2}}x\sin^{-\frac{1}{2}}x\,dx.$$

Áp dụng công thức (3.61) với $\begin{cases}2p-1=\frac{1}{2}\\ 2q-1=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2p=\frac{3}{2}\\ 2q=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\frac{3}{4}\\ q=\frac{1}{4}\end{cases}$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\tan x}}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Ví dụ 3.13: *Chứng minh rằng*

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{u-1}+x^{v-1}}{(x+1)^{u+v}}dx=2B(u,v),$$

với u, v là các hằng số dương tùy ý.

Giải: Đổi biến $y=\frac{x}{x+1}\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow dx=\frac{1}{(1-y)^2}dy,\ x+1=\frac{y}{1-y}+1=\frac{1}{1-y}$

$$\int_0^\infty \frac{x^{u-1}+x^{v-1}}{(x+1)^{u+v}}dx = \int_0^1 \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^{u-1}+\left(\frac{y}{1-y}\right)^{v-1}}{\left(\frac{1}{1-y}\right)^{u+v}}\cdot\frac{1}{(1-y)^2}dy$$

$$= \int_0^1 y^{u-1}\left(1-y\right)^{v-1}dy + \int_0^1 y^{v-1}\left(1-y\right)^{u-1}dy = 2B(u,v).$$

3.4 PHƯƠNG TRÌNH BESSEL VÀ CÁC HÀM BESSEL

3.4.1 Phương trình Bessel

Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+(1-\frac{\alpha^2}{z^2})y=0 \tag{3.65}$$

gọi là phương trình Bessel ứng với tham số α.

Dưới đây ta xét với $\alpha \in \mathbb{R}$ và gọi là phương trình Bessel cấp α, $\alpha \geq 0$.

Nghiệm riêng của phương trình (3.65) gọi là hàm Bessel cấp α.

Rõ ràng nếu $J_\alpha\left(z\right)$ và $Y_\alpha\left(z\right)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (3.65) thì nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y\left(z\right)=AJ_\alpha\left(z\right)+BY_\alpha\left(z\right)=Z_\alpha\left(z\right) \tag{3.66}$$

Trong đó A, B là các hằng số tuỳ ý.

3.4.2 Các hàm Bessel loại 1 và loại 2

3.4.2.1 Hàm Bessel loại 1

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.65) theo phương pháp Frobenius bằng cách xét các nghiệm dạng

$$y(z)=z^\rho\sum_{k=0}^\infty a_k z^k,\ \ a_0\neq 0.$$

$$y(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k z^{k+\rho} \Rightarrow y'(z)=\sum_{k=0}^\infty (k+\rho)a_k z^{k+\rho-1}=z^{\rho-1}\sum_{k=0}^\infty (k+\rho)a_k z^k$$

$$y''(z)=\sum_{k=0}^\infty (k+\rho)(k+\rho-1)a_k z^{k+\rho-2}=z^{\rho-2}\sum_{k=0}^\infty (k+\rho)(k+\rho-1)a_k z^k$$

Thay vào phương trình (3.65) ta được

$$z^{\rho-2}\left(\sum_{k=0}^\infty (k+\rho)(k+\rho-1)a_k z^k+\sum_{k=0}^\infty (k+\rho)a_k z^k+\sum_{k=0}^\infty a_k z^{k+2}-\alpha^2\sum_{k=0}^\infty a_k z^k\right)=0$$

Ta có $(k+\rho)(k+\rho-1)+(k+\rho)=(k+\rho)^2$, do đó đẳng thức trên được viết lại

$$z^{\rho-2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)^2 a_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{k+2}-\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\right)=0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{1}\left((k+\rho)^2-\alpha^2\right)a_k z^k+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left((k+\rho)^2-\alpha^2\right)a_k+a_{k-2}\right]z^k=0.$$

Đồng nhất hệ số suy ra các hằng số ρ và a_k; $k=0,1,2,\ldots$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}(\rho^2-\alpha^2)a_0=0\\ \left((\rho+1)^2-\alpha^2\right)a_1=0\\ \left((\rho+2)^2-\alpha^2\right)a_2+a_0=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left((\rho+r)^2-\alpha^2\right)a_k+a_{k-2}=0\ ;\ k\geq 2\end{cases} \quad \textbf{(3.67)}$$

Từ điều kiện $a_0\neq 0$ ta được $\rho=\pm\alpha,\ \alpha\geq 0$

1. Trường hợp thứ nhất: $\rho=\alpha$

$$(\rho+k)^2-\alpha^2=(\alpha+k)^2-\alpha^2=(2\alpha+k)k$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{-a_{k-2}}{k(2\alpha+k)}\quad \forall k\geq 2 \quad \textbf{(3.68)}$$

Thay $\rho=\alpha$ vào công thức (3.67) suy ra $a_1=0$. Kết hợp với công thức (3.68) ta có hệ số lẻ đồng nhất bằng 0:

$$a_{2k+1}=0;\forall k=0,\,1,\,2,\ldots$$

Quy nạp và sử dụng công thức (3.68) với các số hạng chẵn ta có

$$a_{2k}=\frac{-a_{2k-2}}{2k(2\alpha+2k)}=\frac{-a_{2(k-1)}}{2^2k(\alpha+k)},$$

$$\Rightarrow a_{2k}=\frac{(-1)^2a_{2(k-2)}}{2^22^2k(k-1)(\alpha+k)\left(\alpha+(k-1)\right)}\ldots.\ \Rightarrow a_{2k}=a_0\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(k+\alpha)},$$

$y(z)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất do đó hệ số a_0 có thể chọn tuỳ ý.

Chọn $\quad a_0=\dfrac{1}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}$ và sử dụng đẳng thức:

$$\Gamma\left(1+k+\alpha\right)=\left(k+\alpha\right)\ldots\left(2+\alpha\right)\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1+\alpha\right)\Rightarrow a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}2^{\alpha}k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}$$

Suy ra:

$$y(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\equiv J_{\alpha}(z) \quad \textbf{(3.69)}$$

Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}$ thì:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{3.70}$$

Đặc biệt

$$J_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{3.71}$$

2. Trường hợp thứ hai:

$$(\rho + k)^2 - \alpha^2 = (-\alpha + k)^2 - \alpha^2 = (-2\alpha + k)k$$

Các hệ số chẵn liên hệ theo công thức

$$2k\left(2k - 2\alpha\right)a_{2k} + a_{2k-2} = 0 \tag{3.72}$$

Các hệ số lẻ thoả mãn

$$\left(2k+1\right)\left(2k+1-2\alpha\right)a_{2k+1} + a_{2k-1} = 0$$

a. Nếu $\alpha \neq \dfrac{2m+1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ thì $a_1 = 0$, suy ra

$$a_{2k+1} = -\frac{a_{2k-1}}{\left(2k+1\right)\left(2k+1-2\alpha\right)} = 0 \text{ với mọi } k,$$

khi đó tương tự như trên, chọn a_0 thích hợp sẽ có

$$y(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \equiv J_{-\alpha}(z) \tag{3.73}$$

b. Nếu $\alpha = \dfrac{2m+1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ *(cấp bán nguyên)* thì hệ số lẻ $a_{2k+1} = 0$ với mọi chỉ số $r < k$ và hệ số lẻ a_{2k+1} có thể khác không khi $r \geq k$. Tuy nhiên nếu ta chọn các hệ số lẻ đều bằng không và chọn a_0 thích hợp vẫn được nghiệm có dạng (3.65), (3.69).

Gọi $J_\alpha\left(z\right)$ và $J_{-\alpha}\left(z\right)$ *là **các hàm Bessel loại*** **1**.

Định lý 3.2:

1. Nếu $\alpha \notin \mathbb{N}$ (không phải là số tự nhiên) thì $J_\alpha\left(z\right)$ và $J_{-\alpha}\left(z\right)$ độc lập tuyến tính.

2. Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}$ thì $J_n\left(z\right)$ và $J_{-n}\left(z\right)$ phụ thuộc tuyến tính, hơn nữa

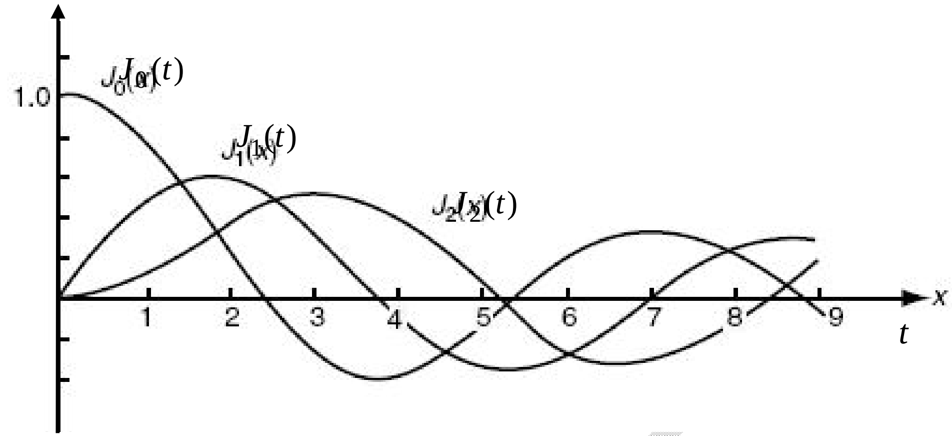
$$J_{-n}\left(z\right) = (-1)^n J_n\left(z\right). \tag{3.74}$$

Chứng minh: Thật vậy, nếu $\alpha \notin \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{|z| \to 0} J_\alpha(z) = 0$ và $\lim\limits_{|z| \to 0} J_{-\alpha}(z) = \infty$

Suy ra $J_\alpha\left(z\right)$ và $J_{-\alpha}\left(z\right)$ độc lập tuyến tính

Trong trường hợp này nghiệm tổng quát của (3.69) có dạng

$$Z_\alpha(z) = AJ_\alpha(z) + BJ_{-\alpha}(z)$$



Hình 3.11: *Đồ thị các hàm Bessel* $J_0(t)$, $J_1(t)$, $J_2(t)$

Trường hợp $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ta có

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

bởi vì $\dfrac{1}{\Gamma(k+1-n)} = 0$ với mọi số tự nhiên $k < n$ (công thức 3.53).

Thay k bởi $k+n$ vào công thức trên ta được

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2n} = (-1)^n J_n(z)$$

điều này chứng tỏ $J_n(z)$ và $J_{-n}(z)$ phụ thuộc tuyến tính.

3.4.2.2 Hàm Bessel loại 2

Định lý 3.2 cho thấy hai hàm Bessel loại 1 $J_\alpha(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ không phải lúc nào cũng độc lập vì vậy ta cần tìm hàm Bessel loại 2 độc lập với hàm Bessel loại 1.

Hàm số xác định như sau

$$Y_\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{(\cos \pi\alpha) J_\alpha(z) - J_{-\alpha}(z)}{\sin \pi\alpha} & \text{nÕu} \quad \alpha \notin \mathbb{N} \\ \lim\limits_{\beta \to n;\, \beta \notin \mathbb{N}} Y_\beta(z) & \text{nÕu} \quad \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.75}$$

Cũng là nghiệm của phương trình Bessel (3.61), được gọi là ***hàm Bessel loại 2***.

Từ công thức (3.71) ta thấy khi $\alpha = n$ giới hạn

$$\lim_{\beta \to n;\, \beta \notin \mathbb{N}} \frac{(\cos \pi\beta) J_\beta(z) - J_{-\beta}(z)}{\sin \pi\beta}$$

có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Áp dụng quy tắc De L'Hospital nhận được

$$Y_n(z) = \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \beta}\left((\cos \pi\beta) J_\beta(z) - J_{-\beta}(z) \right)}{\frac{\partial}{\partial \beta} \sin \pi\beta} \right]_{\beta=n}$$

$$= \left[\frac{-\pi \sin \pi\beta J_\beta(z) + (\cos \pi\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} J_\beta(z) - \frac{\partial}{\partial \beta} J_{-\beta}(z)}{\pi \cos \pi\beta} \right]_{\beta=n}$$

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_n(z)}{\partial n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-n}(z)}{\partial n} \right].$$

Sử dụng công thức đạo hàm của hàm số $\ln \Gamma(z)$ nhận được kết quả sau:

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln \frac{z}{2} \right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{n-2k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{S_{nk}}{k!(n-k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n}$$

Trong đó:

$$S_{nk} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} + ... + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k+n},\ k \neq 0$$

$$S_{n0} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

Với mọi α, các hàm $J_\alpha(z)$ và $Y_\alpha(z)$ là độc lập tuyến tính.

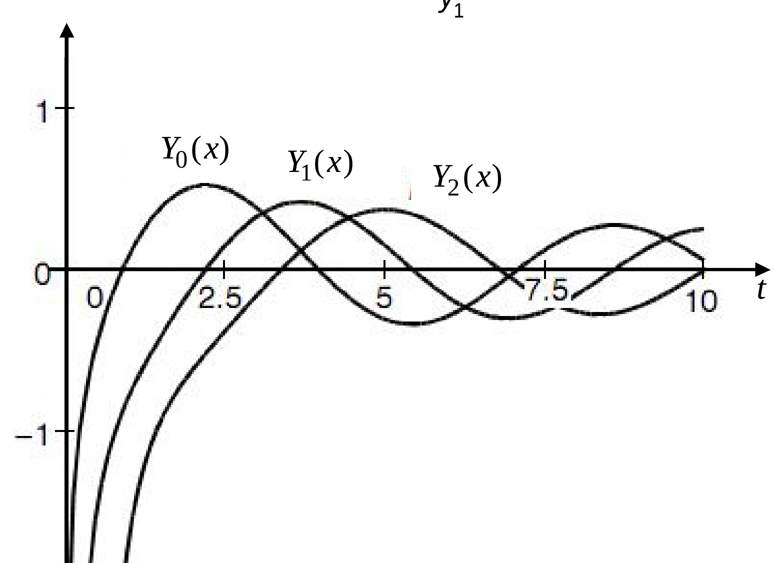
Ta cũng có thể tìm hàm Bessel độc lập với hàm Bessel loại 1 như sau.

Theo lý thuyết của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 2:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p(z) \frac{dy}{dz} + q(z) y = 0$$

Nếu biết $y_1(z)$ là một nghiệm thì ta có thể tìm nghiệm độc lập tuyến tính với $y_1(z)$ theo công thức:

$$y_2(z) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(z)dz} dz.$$



Vì vậy với trường hợp phương trình Bessel cấp *n* nguyên, ta có thể tìm nghiệm độc lập với $J_n(z)$ theo công thức:

$$I_n(z) = J_n(z)\left(A + B\int \frac{dz}{zJ_n^2(z)}\right)$$

Chọn A, B thích hợp sẽ được hàm số $I_n(z)$ cho bởi (3.75). Hàm số $I_n(z)$ gọi là ***hàm Weber***.

Đôi khi còn sử dụng hàm số độc lập tuyến tính với $J_\alpha(z)$ theo công thức sau và gọi là ***hàm số Neumann***.

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}\pi Y_\alpha(z) + (\ln 2 - \gamma)J_\alpha(z) \qquad \textbf{(3.76)}$$

Gọi $Y_\alpha(z)$, $N_\alpha(z)$ *là các hàm Bessel loại 2.*

Từ các hàm Bessel loại 1 và loại 2 ta có các hàm Hankel loại 1 và hàm Hankel loại 2 xác định lần lượt như sau

$$H_\alpha^{(1)}(z) = J_\alpha(z) + iY_\alpha(z)$$

$$H_\alpha^{(2)}(z) = J_\alpha(z) - iY_\alpha(z),$$

Các hàm Hankel đôi khi còn được gọi là hàm Bessel loại 3.

3.4.3 Các công thức truy toán đối với hàm Bessel

Các công thức sau đúng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ (kể cả trường hợp $\alpha < 0$):

1. $J_{\alpha+1}(z) = \dfrac{2\alpha}{z}J_\alpha(z) - J_{\alpha-1}(z).$ **(3.77)**

Thay công thức (3.69), (3.73) vào vế phải và biến đổi thành vế trái:

$$\frac{2\alpha}{z}J_\alpha(z) - J_{\alpha-1}(z) = \frac{2\alpha}{z}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+k+1)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha+k)}\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-2}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{-k}{\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k-1)}=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+2)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=J_{\alpha+1}(z).$$

2. $zJ'_{\alpha}(z)=\alpha J_{\alpha}(z)-zJ_{\alpha+1}(z).$ **(3.78)**

Trường hợp đặc biệt $\alpha=0\Rightarrow J'_0(z)=-J_1(z)$. Chứng tỏ các không điểm của $J_1(z)$ làm cho $J_0(z)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu.

Tính $J'_{\alpha}(z)$ từ công thức (3.65), (3.69) thay vào vế trái suy ra vế phải:

$$J_{\alpha}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

$$\Rightarrow zJ'_{\alpha}(z)=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha-1}$$

$$=\alpha\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\frac{z}{2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}+z\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k-1)}$$

$$=\alpha J_{\alpha}(z)-z\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k-1)}=\alpha J_{\alpha}(z)-zJ_{\alpha+1}(z)$$

3. $J'_{\alpha}(z)=\frac{1}{2}\left[J_{\alpha-1}(z)-J_{\alpha+1}(z)\right].$ **(3.79)**

Từ công thức (3.78) và (3.79) ta có:

$$J_{\alpha+1}(z)=\frac{2\alpha}{z}J_{\alpha}(z)-J_{\alpha-1}(z)\Rightarrow\frac{\alpha}{z}J_{\alpha}(z)=\frac{1}{2}\left(J_{\alpha+1}(z)+J_{\alpha-1}(z)\right)$$

$$J'_{\alpha}(z)=\frac{\alpha}{z}J_{\alpha}(z)-J_{\alpha+1}(z)=\frac{1}{2}\left(J_{\alpha+1}(z)+J_{\alpha-1}(z)\right)-J_{\alpha+1}(z)=\frac{1}{2}\left(J_{\alpha-1}(z)-J_{\alpha+1}(z)\right)$$

4. $zJ'_{\alpha}(z)=zJ_{\alpha-1}(z)-\alpha J_{\alpha}(z).$ **(3.80)**

(Thay $J_{\alpha+1}(z)$ ở 1. vào 2. suy ra 4.)

5. $\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}J_{\alpha}(z)\right)=z^{\alpha}J_{\alpha-1}(z).$ **(3.81)**

Đạo hàm vế trái và sử dụng 1. và 2.:

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}J_{\alpha}(z)\right)=\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{\alpha}(2k+2\alpha)}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2\alpha-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+\alpha)2^{\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2\alpha-1}=z^{\alpha}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=z^{\alpha}J_{\alpha-1}(z).$$

6. $\dfrac{d}{dz}\left(z^{-\alpha}J_{\alpha}\left(z\right)\right)=-z^{-\alpha}J_{\alpha+1}\left(z\right).$ **(3.82)**

7. $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^{\alpha}J_{\alpha-1}\left(z\right)dz=\int_{z_0}^{z}\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}J_{\alpha}\left(z\right)\right)dz=z^{\alpha}J_{\alpha}\left(z\right)\Big|_{z_0}^{z}.$ **(3.83)**

$\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^{-\alpha}J_{\alpha+1}\left(z\right)dz=-\int_{z_0}^{z}\frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha}J_{\alpha}\left(z\right)\right)dz=-z^{-\alpha}J_{\alpha}\left(z\right)\Big|_{z_0}^{z}.$ **(3.84)**

8. $\displaystyle\int_{0}^{z} J_{\alpha}\left(z\right)dz=2\left[J_{\alpha+1}\left(z\right)+J_{\alpha+3}\left(z\right)+\ldots\right]=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{\alpha+2k+1}\left(z\right).$ **(3.85)**

Đặc biệt $\displaystyle\int_{0}^{z} J_{0}\left(z\right)dz=2\left[J_{1}\left(z\right)+J_{3}\left(z\right)+\ldots\right]=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}\left(z\right).$

Để chứng minh công thức (3.85) ta lấy tích phân hai vế của (3.79):

với $\alpha+1$ ta được $\displaystyle 2J_{\alpha+1}\left(z\right)=\int_{0}^{z}J_{\alpha}\left(z\right)dz-\int_{0}^{z}J_{\alpha+2}\left(z\right)dz.$

với $\alpha+3$ ta được $\displaystyle 2J_{\alpha+3}\left(z\right)=\int_{0}^{z}J_{\alpha+2}\left(z\right)dz-\int_{0}^{z}J_{\alpha+4}\left(z\right)dz.$

....

Cộng theo vế ta suy ra (3.85).

9. Với mọi số tự nhiên $m\in\mathbb{N}^{*}$, $m\neq 0$, đặt: thì

$$I_{m}=-z^{m}J_{m-1}\left(z\right)+(2m-1)I_{m-1}. \quad \textbf{(3.86)}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases}U=z^{2m-1}\\ dV=z^{-m+1}J_{m}\left(z\right)dz\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dU=(2m-1)z^{2m-2}dz\\ V=z^{-m+1}J_{m-1}\left(z\right)\end{cases}$$

và áp dụng công thức (3.84) với $\alpha=m-1$ ta được:

$$I_{m}=\int_{0}^{z}z^{m}J_{m}\left(z\right)dz=\int_{0}^{z}z^{2m-1}\cdot z^{-m+1}J_{m}\left(z\right)dz$$

$$=-z^{2m-1}\cdot z^{-m+1}J_{m-1}\left(z\right)+(2m-1)\int_{0}^{z}z^{m-1}J_{m-1}\left(z\right)dz$$

10. Với mọi cặp số tự nhiên $m,n\in\mathbb{N}$, $n<m$ đặt: $\displaystyle I_{m,n}=\int_{0}^{z}z^{m}J_{n}\left(z\right)dz$ thì

$$I_{m,n}=z^{m}J_{n+1}\left(z\right)-(m-n-1)I_{m-1,n+1}. \quad \textbf{(3.87)}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} U = z^{m-n-1} \\ dV = z^{n+1} J_n(z)dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dU = (m-n-1)z^{m-n-2}dz \\ V = z^{n+1}J_{n+1}(z) \end{cases}$$

và áp dụng công thức (3.84) với ta được

$$I_{m,n} = \int_0^z z^m J_n(z)dz = \int_0^z z^{m-n-1} \cdot z^{n+1} J_n(z)dz$$

$$= z^{m-n-1} \cdot z^{n+1} J_{n+1}(z) - (m-n-1)\int_0^z z^{n+1} J_{n+1}(z) \cdot z^{m-n-2} dz$$

$$= z^m J_{n+1}(z) - (m-n-1) I_{m-1,n+1}.$$

Nhận xét 3.1:

1. Để tính tích phân $I_m = \int_0^z z^m J_m(z)dz$ ta sử dụng liên tiếp công thức truy hồi (3.86) cuối cùng được tích phân dạng (3.85) với $\alpha = 0$.

2. Để tính tích phân $I_{m,n} = \int_0^z z^m J_n(z)dz$ với $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ ta sử dụng công thức truy hồi (3.87). Sau mỗi bược truy hồi chỉ số m giảm 1 và chỉ số n tăng 1, do đó khoảng cách $m-n$ giảm 2.

Áp dụng liên tiếp công thức (3.87) ta đưa về công thức (3.86) nếu $m-n$ chẵn và đưa về công thức (3.83) nếu $m-n$ lẻ.

Ví dụ 3.14: *Tính tích phân* $I = \int_0^\lambda z^3 J_0(z)dz$ *theo* $J_1(\lambda)$ *và* λ, *trong đó* λ *là một nghiệm dương của phương trình* $J_0(z) = 0$.

Giải: $I = I_{3,0}\big|_{z=\lambda}$. Áp dụng công thức (3.87) ta được $I_{3,0} = z^3 J_1(z) - 2I_{2,1}$

Áp dụng công thức (3.84) ta được $I_{2,1} = \int_0^z z^2 J_1(z)dz = z^2 J_2(z)$

Áp dụng tiếp công thức (3.77) ta có

$$I_{3,0} = z^3 J_1(z) - 2z^2\left(\frac{2}{z}J_1(z) - J_0(z)\right) = (z^3 - 4z)J_1(z) + 2z^2 J_0(z),$$

Do đó

$$I = I_{3,0}\big|_{z=\lambda} = (z^3 - 4z)J_1(z) + 2z^2 J_0(z)\big|_{z=\lambda} = (\lambda^3 - 4\lambda)J_1(\lambda).$$

3.4.4 Các hàm Bessel loại 1 và loại 2 với cấp bán nguyên

Xét phương trình Bessel với cấp bán nguyên $\alpha = \dfrac{1}{2}$ có dạng:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)y = 0$$

Bằng cách đặt $y = uz^{-1/2}$ ta có thể đưa phương trình trên về dạng phương trình vi tuyến tính cấp 2 hệ số hằng:

$$y = uz^{-1/2} \Rightarrow \frac{dy}{dz} = z^{-1/2}\frac{du}{dz} - \frac{1}{2}z^{-3/2}u \Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} = z^{-1/2}\frac{d^2u}{dz^2} - z^{-3/2}\frac{du}{dz} + \frac{3}{4}z^{-5/2}u\,.$$

Thay vào phương trình ta được

$$\left(z^{-1/2}\frac{d^2u}{dz^2} - z^{-3/2}\frac{du}{dz} + \frac{3}{4}z^{-5/2}u\right) + \frac{1}{z}\left(z^{-1/2}\frac{du}{dz} - \frac{1}{2}z^{-3/2}u\right) + uz^{-1/2} - \frac{1}{4z^2}uz^{-1/2} = 0$$

dẫn phương trình về dạng: $\dfrac{d^2u}{dz^2} + u = 0$

Phương trình này cho nghiệm tổng quát

$u = A\cos z + B\sin z$; A, B là hai hằng số tùy ý.

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình Bessel cấp $\alpha = \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{z}}(A\cos z + B\sin z)$; A, B là hai hằng số tùy ý.

Vì vậy $J_{1/2}(z)$ và $J_{-1/2}(z)$ đều có dạng trên với A, B nào đó.

Cụ thể, vì $J_{1/2}(0) = 0$ suy ra $A = 0$, do đó $J_{1/2}(z) = \dfrac{B}{\sqrt{z}}\sin z$.

Mặt khác theo công thức (3.56)

$$\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} \Rightarrow \frac{1}{k!\,\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{k+1}}{k!(2k+1)!!\sqrt{\pi}} = \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{\pi}}$$

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \sqrt{\frac{z}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{\pi}}.\frac{z^{2k}}{2^{2k}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Do đó

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \tag{3.88}$$

Tương tự, ta có

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \tag{3.89}$$

Từ (3.75) nhận được hàm Bessel loại 2

$$Y_{1/2}(z) = -J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$
$$Y_{-1/2}(z) = J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

Từ công thức truy toán (3.77), thay $\alpha = \frac{1}{2}$ sẽ nhận được:

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right)$$

thay $\alpha = -\frac{1}{2}$ sẽ nhận được:

$$J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(-\sin z - \frac{\cos z}{z} \right)$$

Tương tự ta có các công thức sau:

$$J_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \left(\frac{3}{z^2} - 1 \right) \sin z - \frac{3}{z} \cos z \right\}$$

$$J_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{3}{z} \sin z + \left(\frac{3}{z^2} - 1 \right) \cos z \right\}$$

$$J_{7/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \left(\frac{15}{z^3} - \frac{6}{z} \right) \sin z - \left(\frac{15}{z^2} - 1 \right) \cos z \right\}$$

$$J_{-7/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \left(1 - \frac{15}{z^2} \right) \sin z - \left(\frac{15}{z^3} - \frac{6}{z} \right) \cos z \right\}$$

$$J_{9/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \left(\frac{105}{z^4} - \frac{45}{z^2} + 1 \right) \sin z - \left(\frac{105}{z^3} - \frac{10}{z} \right) \cos z \right\}$$

$$J_{-9/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \left(\frac{105}{z^3} - \frac{10}{z} \right) \sin z + \left(\frac{105}{z^4} + \frac{45}{z^2} + 1 \right) \cos z \right\}.$$

3.4.5 Các tích phân Lommel (*)

Định lý 3.3:

$$\int_0^z J_\alpha(kz) J_\alpha(lz) z dz = \frac{z}{k^2 - l^2} \left\{ k J_\alpha(lz) J_{\alpha+1}(kz) - l J_\alpha(kz) J_{\alpha+1}(lz) \right\},\ k^2 \neq l^2. \tag{3.90}$$

$$\int_0^z J_\alpha(kz)J_\alpha(lz)zdz = \frac{z}{k^2-l^2}\{lJ_{\alpha-1}(lz)J_\alpha(kz) - kJ_{\alpha-1}(kz)J_\alpha(lz)\},\ k^2 \neq l^2. \quad \textbf{(3.91)}$$

$$\int_0^z zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{1}{2}z^2\left[J'^2_\alpha(kz) + \left(1-\frac{\alpha^2}{k^2z^2}\right)J_\alpha^2(kz)\right]. \quad \textbf{(3.92)}$$

Các công thức (3.90), (3.91), (3.92) gọi là ***các tích phân Lommel.***

***Chứng minh*:**

Chúng ta xét hai phương trình vi phân dạng Bessel

$$z^2\frac{d^2x}{dz^2} + z\frac{dx}{dz} + (l^2z^2 - \alpha^2)x = 0 \quad \textbf{(3.93)}$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (k^2z^2 - \alpha^2)y = 0 \quad \textbf{(3.94)}$$

Nhân phương trình thứ nhất với $\frac{y}{z}$, phương trình thứ hai với $\frac{x}{z}$ rồi trừ từng vế cho nhau sẽ nhận được

$$yz\frac{d^2x}{dz^2} - xz\frac{d^2y}{dz^2} + y\frac{dx}{dz} - x\frac{dy}{dz} = (k^2 - l^2)xyz$$

hay

$$\frac{d}{dz}\left\{z\left(y\frac{dx}{dz} - x\frac{dy}{dz}\right)\right\} = (k^2 - l^2)xyz \quad \textbf{(3.95)}$$

Nghiệm của phương trình (3.93), (3.94) tương ứng là (xem công thức 3.96).

$$x = J_\alpha(lz),\ y = J_\alpha(kz)$$

Thay vào (3.95) xét với $\alpha > -1$ sẽ có

$$(k^2 - l^2)\int_0^z J_\alpha(kz)J_\alpha(lz)zdz = z\left\{J_\alpha(kz)\frac{dJ_\alpha(lz)}{dz} - J_\alpha(lz)\frac{dJ_\alpha(kz)}{dz}\right\}$$

Mặt khác

$$\frac{dJ_\alpha(lz)}{dz} = l\frac{dJ_\alpha(lz)}{d(lz)} = lJ'_\alpha(lz)$$

Do đó với $\alpha > -1$. thì

$$\int_0^z J_\alpha(kz)J_\alpha(lz)zdz = \frac{z}{k^2-l^2}\{lJ_\alpha(kz)J'_\alpha(lz) - kJ_\alpha(lz)J'_\alpha(kz)\}$$

Áp dụng các công thức truy toán (3.74)

$$J'_\alpha(kz) = \frac{\alpha}{kz}J_\alpha(kz) - J_{\alpha+1}(kz),\ J'_\alpha(lz) = \frac{\alpha}{lz}J_\alpha(lz) - J_{\alpha+1}(lz)$$

Ta được:

$$\int_0^z J_\alpha(kz)J_\alpha(lz)zdz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left\{kJ_\alpha(lz)J_{\alpha+1}(kz) - lJ_\alpha(kz)J_{\alpha+1}(lz)\right\}$$

Từ các công thức (3.79):

$$J'_\alpha(kz) = -\frac{\alpha}{kz}J_\alpha(kz) + J_{\alpha-1}(kz),\ J'_\alpha(lz) = -\frac{\alpha}{lz}J_\alpha(lz) + J_{\alpha-1}(lz).$$

Suy ra:

$$\int_0^z J_\alpha(kz)J_\alpha(lz)zdz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left\{lJ_{\alpha-1}(lz)J_\alpha(kz) - kJ_{\alpha-1}(kz)J_\alpha(lz)\right\}.$$

Với $k = l$ thì

$$\int_0^z zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{1}{k^2}\int_0^{kz} zJ_\alpha^2(z)dz,\quad (\alpha > -1).$$

Tích phân từng phần nhận được

$$\int_0^{kz} zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{k^2z^2}{2}J_\alpha^2(kz) - \int_0^{kz} z^2J_\alpha(z)J'_\alpha(z)dz$$

Vì $J_\alpha\left(z\right)$ là hàm Bessel nên thoả mãn

$$-z^2J_\alpha(z) = z^2J''_\alpha(z) + zJ'_\alpha(z) - \alpha^2J_\alpha(z)$$

Thay vào trên sẽ có:

$$\int_0^z zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{z^2}{2}J_\alpha^2(kz) + \frac{1}{2k^2}\int_0^{kz} d\left\{z^2J'^2_\alpha(z)\right\} - \frac{\alpha^2}{2k^2}\int_0^{kz} dJ_\alpha^2(z)$$

Hay

$$\int_0^z zJ_\alpha^2(kz)dz = \frac{1}{2}z^2\left\{J'^2_\alpha(kz) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2z^2}\right)J_\alpha^2(kz)\right\}.$$

3.4.6 Khai triển theo chuỗi các hàm Bessel

3.4.6.1. Nghiệm của hàm Bessel

Chúng ta xét nghiệm của phương trình $J_\alpha\left(x\right) = 0$ với $\alpha > -1$.

Định lý 3.4: *Tất cả các nghiệm của $J_\alpha\left(x\right) = 0$ đều thực.*

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh các số thuần ảo $z_0 = ix$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ không thể là nghiệm của phương trình $J_\alpha\left(x\right) = 0$. Thật vậy, vì rằng tất cả các số hạng của chuỗi sau đây đều dương do đó

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} > 0,\ \forall x \neq 0$$

Suy ra $J_{\alpha}\left(ix\right) \neq 0, \forall x \neq 0$, hơn nữa .

Giả sử tồn tại nghiệm phức z_0. Vì $J_{\alpha}\left(x\right)$ là hàm thực nên $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của nó.

Vì $z_0 \notin \mathbb{R}$ và $z_0 \neq ix$, $x \in \mathbb{R}$, do đó $\overline{z}_0^2 \neq z_0^2$. Áp dụng công thức tích phân Lommel (3.86) ta được:

$$\int_0^x zJ_{\alpha}(z_0z)J_{\alpha}(\overline{z}_0z)dz = \frac{x}{\overline{z}_0^2 - z_0^2}\left\{\overline{z}_0J_{\alpha}(z_0x)J_{\alpha+1}(\overline{z}_0x) - z_0J_{\alpha}(\overline{z}_0x)J_{\alpha+1}(z_0x)\right\}$$

Lấy $x = 1$ thì

$$\int_0^1 zJ_{\alpha}(z_0z)J_{\alpha}(\overline{z}_0z)dz = 0 \text{ (vì } J_{\alpha}(z_0) = J_{\alpha}(\overline{z}_0) = 0\text{).}$$

Điều này vô lý, vì hàm dưới dấu tích phân

$$zJ_{\alpha}(z_0z)J_{\alpha}(\overline{z}_0z) = zJ_{\alpha}(z_0z)J_{\alpha}(\overline{z_0z}) = zJ_{\alpha}(z_0z)\overline{J_{\alpha}(z_0z)} \geq 0,\ \forall z \in [0;1].$$

Vậy mọi nghiệm của phương trình $J_{\alpha}\left(x\right) = 0$ đều thực.

Định lý 3.5: *Các nghiệm $x > 0$ của $J_{\alpha}\left(x\right) = 0$ và $J_{\alpha+1}\left(x\right) = 0$ xen kẽ nhau.*

Chứng minh: Từ các công thức (3.81), (3.82) chúng ta nhận được công thức tính đạo hàm sau đây:

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right\} = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\alpha+1}J_{\alpha+1}(x)\right\} = x^{\alpha+1}J_{\alpha}(x)$$

Theo định lý Rolle; công thức thứ nhất chứng tỏ rằng giữa hai nghiệm liên tiếp của $x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)$ có ít nhất một nghiệm của $x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$, công thức thứ hai chứng tỏ giữa hai nghiệm liên tiếp của $x^{\alpha+1}J_{\alpha+1}(x)$ có ít nhất một nghiệm của $x^{\alpha+1}J_{\alpha}(x)$. Ngoài ra từ các công thức tích phân Lommel (3.91) ta nhận thấy các phương trình $J_{\alpha}\left(x\right) = 0$ và $J_{\alpha+1}\left(x\right) = 0$ không có nghiệm chung và các nghiệm của phương trình $J_{\alpha}\left(x\right) = 0$ đều là nghiệm đơn.

Tương tự suy ra các nghiệm của $J_{\alpha}\left(x\right) = 0$ và $J_{\alpha+m}\left(x\right) = 0$ cũng xen kẽ nhau, với mọi $m \in \mathbb{N}$ (xem hình 3.12).

Nhận xét 3.2:

a. Hai hàm Bessel loại 1 cấp $\frac{1}{2}$: $J_{1/2}(z)$ và $J_{-1/2}(z)$ thỏa mãn $\sqrt{z}J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z$ $\sqrt{z}J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos z$; $\forall z>0$ là những hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, do đó hai hàm Bessel loại 1 cấp $1/2$ $J_{1/2}(z)$ và $J_{-1/2}(z)$ có vô số nghiệm dương.

b. Với phương trình Bessel cấp α tùy ý $\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+(1-\frac{\alpha^2}{z^2})y=0$, bằng cách đặt $y=uz^{-1/2}$ ta có thể đưa về dạng đơn giản hơn

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left[1-\frac{\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}{z^2}\right]u=0.$$

Vì vậy khi z đủ lớn hàm Bessel cấp α xấp xỉ hàm hàm Bessel cấp $\frac{1}{2}$, do đó cũng có vô số nghiệm dương.

3.4.6.2 Khai triển Fourier - Bessel

Định lý 3.6: Dãy hàm

$$\left\{\sqrt{x}J_\alpha\left(\lambda_i x\right)\right\}, i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{3.92}$$

trực giao trên $\left[0;\ 1\right]$, trong đó $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_i,\ \ldots$ là nghiệm dương của phương trình $J_\alpha\left(x\right)=0$.

Chứng minh: Theo công thức tích phân Lommel (3.90)

$$(k^2-l^2)\int_0^x zJ_\alpha(kz).J_\alpha(lz)dz=x\left\{kJ_\alpha(lx)J_{\alpha+1}(kx)-lJ_\alpha(kx)J_{\alpha+1}(lx)\right\}$$

Lấy $x=1,\ l=\lambda_i,\ k=\lambda_j;\ i,j=1,\ 2,\ \ldots$ thì

$$\int_0^1\sqrt{z}J_\alpha(\lambda_i z).\sqrt{z}J_\alpha(\lambda_j z)dz=0,\ \text{nếu } i\neq j.$$

Từ công thức (3.87)

$$\int_0^x zJ_\alpha^2(kz)dz=\frac{1}{2}x^2\left\{J'^2_\alpha(kx)+(1-\frac{\alpha^2}{k^2x^2})J_\alpha^2(kx)\right\}.$$

Lấy $x=1,\ k=\lambda_i$; $i=1,\ 2,\ \ldots$ sẽ có:

$$\int_0^1\left\{\sqrt{z}J_\alpha(\lambda_i z)\right\}^2dz=\frac{1}{2}J'^2_\alpha(\lambda_i)\neq 0.$$

Định nghĩa 3.4: *Nếu hàm số* $f(x)$ *biểu diễn dưới dạng*

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iJ_\alpha(\lambda_ix) \quad \textbf{(3.97)}$$

trong đó λ_1, …, λ_i, … *là nghiệm dương của phương trình* $J_\alpha\left(x\right)=0$, *thì nói rằng hàm số đó được khai triển thành chuỗi Fourier - Bessel.*

Từ tính chất trực giao của hệ (3.96) suy ra rằng, nếu $f(x)$ khai triển thành chuỗi Fourier - Bessel (3.97) thì các hệ số của chuỗi được tính theo công thức:

$$a_i=\frac{2}{J'^2_\alpha(\lambda_i)}\int_0^1 xf(x)J_\alpha(\lambda_ix)dx\,;\ i=1,2,\ldots \quad \textbf{(3.98)}$$

Gọi đó là các hệ số Fourier - Bessel.

Ví dụ 3.15: *Hãy khai triển hai hàm số* $f(x)$ *sau thành chuỗi Fourier-Bessel trong khoảng* $\left(0;1\right)$ *theo hệ các hàm* $\sqrt{x}J_0(\lambda_ix)$, $i=1,2\ldots$.

$$f(x)=a_1J_0(\lambda_1x)+a_2J_0(\lambda_2x)+\cdots+a_iJ_0(\lambda_ix)+\cdots$$

a. *Hàm số* $f(x)=1$*;* $0\le x\le 1$

b. *Hàm số* $f(x)=x^2$*;* $0\le x\le 1$.

Giải:

a. Theo (3.98) và (3.83) sẽ có :

$$a_i=\frac{2}{J'^2_0(\lambda_i)}\int_0^1 xJ_0(\lambda_ix)dx=\frac{2}{\lambda_i^2J_1^2(\lambda_i)}\int_0^1\lambda_ixJ_0(\lambda_ix)d(\lambda_ix)$$

$$=\frac{2}{\lambda_i^2J_1^2(\lambda_i)}\int_0^{\lambda_i}xJ_0(x)dx=\frac{2}{\lambda_i^2J_1^2(\lambda_i)}\cdot xJ_1(x)\Big|_{x=0}^{\lambda_i}=\frac{2}{\lambda_iJ_1(\lambda_i)}\,;\ i=1,2,\ldots$$

Vậy $$f(x)=1=\frac{2J_0(\lambda_1x)}{\lambda_1J_1\left(\lambda_1\right)}+\frac{2J_0\left(\lambda_2x\right)}{\lambda_2J_1\left(\lambda_2\right)}+\frac{2J_0\left(\lambda_3x\right)}{\lambda_3J_1\left(\lambda_3\right)}+\cdots+\frac{2J_0\left(\lambda_ix\right)}{\lambda_iJ_1\left(\lambda_i\right)}+\cdots$$

b. Theo (3.98) và đổi biến $u=\lambda_ix$ sẽ có :

$$a_i=\frac{2}{J'^2_0(\lambda_i)}\int_0^1 x^3J_0(\lambda_ix)dx=\frac{2}{\lambda_i^4J_1^2(\lambda_i)}\int_0^{\lambda_i}u^3J_0(u)du$$

Theo ví dụ 3.14 ta có

$$\int_0^{\lambda_i}u^3J_0(u)du=I_{3,0}\Big|_{z=\lambda_i}=(z^3-4z)J_1(z)+2z^2J_0\left(z\right)\Big|_{z=0}^{z=\lambda_i}=(\lambda_i{}^3-4\lambda_i)J_1(\lambda_i)+2\lambda_i{}^2J_0\left(\lambda_i\right)$$

Áp dụng công thức (3.77) ta được

$$J_0(\lambda_i) = \frac{2}{\lambda_i} J_1(\lambda_i) - J_2(\lambda_i)\ ;\ 2\lambda_i^2 J_0(\lambda_i) = 4\lambda_i J_1(\lambda_i) - 2\lambda_i^2 J_2(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow (\lambda_i{}^3 - 4\lambda_i) J_1(\lambda_i) + 2\lambda_i{}^2 J_0\left(\lambda_i\right) = \lambda_i^3 J_1(\lambda_i) - 2\lambda_i^2 J_2\left(\lambda_i\right)$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{2}{\lambda_i^4 J_1^2(\lambda_i)} \left\{ \lambda_i^3 J_1(\lambda_i) - 2\lambda_i^2 J_2(\lambda_i) \right\} = \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \left\{ 1 - \frac{2J_2(\lambda_i)}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \right\}.$$

3.4.7 Các phương trình vi phân có thể đưa về phương trình Bessel (*)

A. Phương trình dạng

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} \right) y = 0$$

Đổi biến $z = kx \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = k\dfrac{dy}{dz}$, tương tự $\dfrac{d^2y}{dx^2} = k^2\dfrac{d^2y}{dz^2}$.

Thay vào phương trình trên dẫn đến phương trình Bessel

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2} \right) y = 0$$

khi đó nghiệm tổng quát sẽ là:

$$Z_\alpha\left(kx\right) = \begin{cases} AJ_\alpha\left(kx\right) + BJ_{-\alpha}\left(kx\right) & \text{nÕu} \quad \alpha \neq n \\ AJ_\alpha\left(kx\right) + BY_\alpha\left(kx\right) & \text{nÕu} \quad \alpha = n \end{cases} \tag{3.95}$$

Ví dụ 3.16: *Giải phương trình* $y'' + \dfrac{a}{x}y' + by = 0$, *trong đó a, b là hằng số.*

Giải: Đặt

$$y = x^\alpha u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^\alpha \frac{du}{dx} + \alpha z^{\alpha-1} u \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = x^\alpha \frac{d^2u}{dx^2} + 2\alpha x^{\alpha-1}\frac{du}{dx} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}u$$

Thay vào phương trình trên nhận được

$$x^\alpha u'' + (a + 2\alpha)x^{\alpha-1}u' + \left\{ \left[a\alpha + (\alpha-1)\alpha \right] x^{\alpha-2} + bx^\alpha \right\} u = 0$$

Chọn $\alpha = \dfrac{1-a}{2}$ để $a + 2\alpha = 1$; $a + \alpha - 1 = -\alpha$

$$\Rightarrow a\alpha + (\alpha - 1)\alpha = (a + \alpha - 1)\alpha = -\alpha^2.$$

Chia hai vế cho x^α ta được

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(b - \frac{\alpha^2}{x^2} \right) u = 0.$$

Áp dụng công thức (3.99) ta được nghiệm tổng quát

$$y = x^{\frac{|1-a|}{2}} Z_{\frac{|1-a|}{2}}(x\sqrt{b})$$

Ví dụ 3.17: *Giải phương trình* $y'' + \frac{a}{x}y' + (bx^m - \frac{c}{x^2})y = 0$, $(c \geq 0)$.

Giải: Tương tự trên đặt $y = x^{\alpha}u$:

$$x^{\alpha}u'' + (a+2\alpha)x^{\alpha-1}u' + \left\{\left[a\alpha + (\alpha-1)\alpha - c\right]x^{\alpha-2} + bx^{\alpha+m}\right\}u = 0$$

Chọn $\alpha = \dfrac{1-a}{2}$ và chia cho x^{α} ta được: $u'' + \dfrac{1}{x}u' + \left(bx^m - \dfrac{\alpha^2+c}{x^2}\right)u = 0$

Thay biến $t = x^{\frac{m}{2}+1} \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{m+2}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{m+2}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}}\cdot\dfrac{du}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx}\left(\frac{m+2}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{du}{dt}\right) = \frac{m+2}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}-1}\cdot\frac{du}{dt} + \left(\frac{m+2}{2}\right)^2\cdot\frac{d^2u}{dt^2}$$

Thay vào phương trình và chia cho $\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2$ ta được

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{du}{dt} + \left(\frac{4b}{(m+2)^2} - \frac{(1-a)^2+4c}{(m+2)^2}\frac{1}{t^2}\right)u = 0.$$

Áp dụng công thức (3.99) ta được nghiệm tổng quát

$$u = Z_{\alpha'}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}t\right);\ y = x^{\frac{1-a}{2}}Z_{\alpha'}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right) \text{ với } \alpha' = \frac{\sqrt{(1-a)^2+4c}}{m+2},\ (m \neq -2)$$

Chẳng hạn phương trình: $y'' + \dfrac{5}{x}y' - 16x^4y = 0$

Có nghiệm $$y = x^{-2}Z_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3}ix^3\right)$$

Các trường hợp riêng của ví dụ 3.17:

a. $y'' + \left(bx^m + \dfrac{C}{x^2}\right)y = 0$ có nghiệm tổng quát dưới dạng:

$$y = \sqrt{x}Z_{\alpha}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right),\ \alpha = \frac{\sqrt{1-4C}}{m+2}$$

b. $y'' + \left(b - \dfrac{p(p+1)}{x^2}\right)y = 0$ có nghiệm tổng quát

$$y = \sqrt{x} Z_{p+\frac{1}{2}}\left(x\sqrt{b}\right).$$

c. $y'' + bx^m y = 0$ có nghiệm tổng quát

$$y = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{m+2}}\left(2\frac{\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right).$$

d. $y'' + bxy = 0$ có nghiệm tổng quát

$$y = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{b}x^{\frac{3}{2}}\right).$$

e. $y'' + \frac{a}{x}y' + bx^m y = 0$ có nghiệm tổng quát

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\frac{1-a}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right).$$

Ví dụ 3.18: *Giải phương trình* $\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{dy}{dx}\right) + bx^{\beta}y = 0$.

Giải: $\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{dy}{dx}\right) = x^{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x^{\alpha-1}\frac{dy}{dx}$

Thay vào phương trình trên ta được

$$x^{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x^{\alpha-1}\frac{dy}{dx} + bx^{\beta}y = 0$$

Có dạng phương trình e. với $m = \beta - \alpha$ và $a = \alpha$. Vậy phương trình có nghiệm tổng quát

$$y = x^{\frac{1-\alpha}{2}} Z_{\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{\beta-\alpha+2}x^{\frac{\beta-\alpha+2}{2}}\right).$$

Nhận xét 3.2: Khi $m = -2$, $c = 0$ phương trình trong ví dụ 3.17 dẫn đến phương trình Euler:

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

Bằng cách đặt $x = e^u$. Ta có $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{du} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} \end{cases}$$

Thay vào ta nhận được phương trình tuyến tính cấp 2 hệ số hằng:

$$\frac{d^2y}{du^2}+(a-1)\frac{dy}{du}+by=0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình được tìm thông qua nghiệm của phương trình đặc trưng.

B. Phương trình dạng

$$y''+\left(2a+\frac{1}{x}\right)y'+\left(b+\frac{a}{x}-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)y=0 \quad \textbf{(3.100)}$$

Đặt: $y=e^{-ax}u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{-ax}\left(-au+\frac{du}{dx}\right) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-ax}\left(a^2u-2a\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\right)$

Thay vào phương trình sẽ nhận được

$$e^{-ax}\left(a^2u-2a\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\right)+\left(2a+\frac{1}{x}\right)e^{-ax}\left(-au+\frac{du}{dx}\right)+\left(b+\frac{a}{x}-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)e^{-ax}u=0$$

Chia hai vế cho e^{-ax} và rút gọn ta được

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\left(b-a^2-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)u=0. \quad \textbf{(3.101)}$$

a. Khi $b\neq a^2$ nghiệm tổng quát có dạng:

$$y=e^{-ax}Z_\alpha\left\{\sqrt{b-a^2}x\right\}$$

b. Khi $b=a^2$ và $\alpha\neq 0$, (3.101) là phương trình Euler có hai nghiệm độc lập $u_1=x^\alpha$ và $u_2=x^{-\alpha}$. Vậy nghiệm tổng quát của (3.100):

$$y=e^{-ax}\left(Ax^\alpha+Bx^{-\alpha}\right);\ A,\ B \text{ là hằng số tuỳ ý.}$$

c. Khi $b=a^2$ và , (3.101) có nghiệm tổng quát $u=A+B\ln x$. Vậy (3.100) có nghiệm tổng quát

$$y=e^{-ax}(A+B\ln x);\ A,\ B \text{ là hằng số tuỳ ý.}$$

C. Phương trình dạng

$$y''+\left[\frac{1}{x}-2g(x)\right]y'-\left[1-\frac{\alpha^2}{x^2}+g^2(x)-g'(x)-\frac{g(x)}{x}\right]y=0 \quad \textbf{(3.106)}$$

Nghiệm tổng quát có dạng: $y=e^{\int g(x)dx}Z_\alpha(x)$.

Ví dụ 3.19: *Giải phương trình* $y''+\left(\frac{1}{x}-2\tan x\right)y'+\left(\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\tan x}{x}\right)y=0$.

Giải: Phương trình có dạng (3.102) với $g(x)=\tan(x)$.

Áp dụng công thức nghiệm với $\quad e^{\int g(x)dx} = e^{\int \tan(x)dx} = \dfrac{1}{\cos x}$

Ta được nghiệm tổng quát $\quad y = \dfrac{1}{\cos x} Z_{\alpha}(x)$.

Ví dụ 3.20: *Giải phương trình* $y'' + \left(\dfrac{1}{x} + 2\cot x\right) y' - \left(\dfrac{\alpha^2}{x^2} - \dfrac{\cot x}{x}\right) y = 0$

Giải: Phương trình có dạng (3.98) với $g(x) = -\cot(x)$.

Áp dụng công thức nghiệm với

Ta được nghiệm tổng quát $\quad y = \dfrac{1}{\sin x} Z_{\alpha}(x)$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1.21. Hàm Gamma giải tích tại mọi điểm.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.22. Các hàm tích phân mũ, tích phân cosin, tích phân sin có đạo hàm mọi cấp.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.23. Hàm Bessel cấp bán nguyên là hàm sơ cấp.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.24. Các hàm tích phân là các hàm sơ cấp.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.25. Hàm Gama chỉ xác định với mọi số phức $\operatorname{Re} z > 0$.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.26. Hàm Bêta là hàm hai biến.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.27. Hàm Bessel là nghiệm của phương trình Bessel.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.28. Hàm Bessel loại I $J_{\alpha}(z)$ và loại II $Y_{\alpha}(z)$ luôn luôn độc lập tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.29. Hàm Bessel loại I $J_{\alpha}(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ luôn phụ thuộc tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.30. Nếu hàm $f(x)$ khai triển thành chuỗi Fourier-Bessel thì $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.11 Sử dụng định nghĩa của hàm Delta tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_3^4 (3x^2 + 2x - 4)\delta(x - 3{,}2)dx$ **b.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(6\pi x)\delta(x - 1)dx$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{24\delta(x-2)dx}{x^4+3x^2+2}$ **d.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-i2\pi ft}dt$ **e.** $\displaystyle\int_{-3}^{3} \eta(x-4)\delta(x-3)dx$.

3.12 Nghiệm lại công thức sau

a. $\mathcal{F}\left\{\eta(t)\sin(2\pi f_0 t)\right\} = \dfrac{f_0}{2\pi(f_0^2-f^2)} + \dfrac{1}{2i}\left(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right)$

b. $\mathcal{F}\left\{\eta(t)\cos(2\pi f_0 t)\right\} = \dfrac{if}{2\pi(f_0^2-f^2)} + \dfrac{1}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)$

3.13 Tính

a. $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$ **b.** $\dfrac{6\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$ **c.** $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

d. $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ **e.** $\Gamma\left(-\dfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

3.14 Sử dụng hàm Gamma tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3e^{-x}dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\infty} x^6e^{-2x}dx$

3.15 Sử dụng hàm Gamma tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{y}e^{-y^3}dy$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\infty} 3^{-4t^2}dt$

3.16 Chứng minh: $\displaystyle\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{R}$, $m>-1$.

3.17 Tính khối lượng của vật thể hình cầu tâm *O* bán kính *R*: $x^2+y^2+z^2\le R^2$ có khối lượng riêng $\rho(x,y,z)=x^2y^2z^2$.

3.18 Chứng minh công thức tích phân Dirichlet

$$\iiint_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)},$$

Trong đó *V* là hình giới hạn bởi mặt $\left(\dfrac{x}{a}\right)^p+\left(\dfrac{y}{b}\right)^q+\left(\dfrac{z}{c}\right)^r=1$, các mặt phẳng tọa độ và nằm trong góc phần tám thứ nhất. Các hằng số $a,b,c;p,q,r$ dương.

3.19 Tìm khối lượng của vật thể giới hạn bởi với ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ và có khối lượng riêng tỷ lệ với bình phương khoảng cách đến trung tâm của nó.

3.20 Tìm thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt có phương trình $x^m+y^m+z^m=a^m$, $m>0$.

3.21 Xác định tọa độ trọng tâm của vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất và giới hạn bởi mặt có phương trình $x^m+y^m+z^m=a^m$, $m>0$.

3.22 Áp dụng hàm Beta tính các tích phân sau:

a. $\int\limits_0^1 x^4(1-x^3)dx$ **b.** $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$ **c.** $\int\limits_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}\,dx$

3.23 Áp dụng hàm Beta tính các tích phân sau:

a. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^5 x dx$ **b.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$ **c.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,dx$

3.24 Chứng minh: $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx=\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nÕu } n \text{ ch½n}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nÕu } n \text{ lÎ}\end{cases}$

trong đó (2k+1)!! = 1.3.5...(2k+1). (2k)!! = 2.4.6...(2k).

3.25 $I=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2p} xdx$, $J=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2p} 2xdx,\quad p>0$

a. Chứng minh: I = J

b. Chứng minh: $I=\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}$; $J=\frac{2^{2p-1}\left\{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(2p+1)}$

c. Suy ra công thức nhân đôi của hàm Gamma:

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2p).$$

3.26 Áp dụng công thức (3.43), (3.44) chứng minh rằng:

$$\Gamma'(1)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\ln t dt=-\gamma.$$

3.27 Chứng minh rằng:

a. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx=\Gamma(p)\Gamma(1-p)$, $0<p<1$.

b. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p+1} = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)$, $p > 1$.

3.28 Tính các tích phân sau

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^6+1}$ **c.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4+1}$.

3.29 Chứng minh các công thức truy toán đối với hàm Bessel

1) $\displaystyle z^{\alpha\text{-n}}J_{\alpha-n}(z) = \frac{d^n}{(zdz)^n}(z^{-\alpha}J_{\alpha}(z));$

$\displaystyle z^{-\alpha\text{-n}}J_{\alpha+n}(z) = (-1)^n\frac{d^n}{(zdz)^n}(z^{-\alpha}J_{\alpha}(z));$

2) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^{\alpha}J_{\alpha-1}(z)dz = z^{\alpha}J_{\alpha}(z)\Big|_{z_0}^{z}$

3) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^{-\alpha}J_{\alpha+1}(z)dz = -z^{-\alpha}J_{\alpha}(z)\Big|_{z_0}^{z}$

4) $\displaystyle\int_0^{z} J_{\alpha}(z)dz = 2\left\{J_{\alpha+1}(z) + J_{\alpha+3}(z) + \cdots\right\}$

3.30 Sử dụng phép biến đổi Laplace hãy tính: $\displaystyle\int_0^{t} J_0(u)J_0(t-u)du$, $(t > 0)$.

3.31 Tính các tích phân không xác định:

a. $\displaystyle\int x^nJ_{n-1}(x)dx$ **b.** $\displaystyle\int \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}dx$ **c.** $\displaystyle\int x^4J_1(x)dx$

3.32 Tính theo $J_1(x)$ và $J_0(x)$

a. $J_3(x)$ **b.** $\displaystyle\int J_1(\sqrt[3]{x})dx$ **c.** $\displaystyle\int J_0(x)\sin x dx$

3.33 Chứng minh:

a. $1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots$

b. $\displaystyle J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - J_7(x) + \cdots = \frac{1}{2}\sin x$.

3.34 Tính tích phân:

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} J_{1/2}(x)dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\infty} J_{-1/2}(x)dx$.

3.35 Người ta định nghĩa các hàm Hankel loại 1, loại 2 theo các hàm Bessel như sau:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)\ ;\ \ H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x).$$

Chứng minh rằng khi α không phải là số tự nhiên thì

$$H_\alpha^{(1)}(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-i\alpha\pi}J_\alpha(x)}{i\sin\alpha\pi}\ \ ;\ \ H_\alpha^{(2)}(x) = \frac{e^{i\alpha\pi}J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{i\sin\alpha\pi}.$$

3.36 Người ta định nghĩa các hàm Bessel có hiệu chỉnh loại 1, loại 2 như sau:

$$I_\alpha(x) = e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}J_\alpha(ix)\ ;\ \ K_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin\alpha\pi}\right) & \text{nÕu}\quad \alpha \neq n \\ \lim\limits_{\beta\to n} K_\beta(x) & \text{nÕu}\quad \alpha = n \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng $I_\alpha(x)$, $K_\alpha(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân:

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \alpha^2)y = 0.$$

b. $I_{\alpha+1}(x) = I_{\alpha-1}(x) - \dfrac{2\alpha}{x}I_\alpha(x)$.

c. $K_{\alpha+1}(x) = K_{\alpha-1}(x) + \dfrac{2\alpha}{x}K_\alpha(x)$.

3.37 Chứng tỏ rằng

a. $\dfrac{1-x^2}{8} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$, $0 < x < 1$.

Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_0(\lambda) = 0$.

b. $x^3 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(8-\lambda_n^2)J_1(\lambda_n x)}{\lambda_n^3 J'_1(\lambda_n)}$, $0 < x < 1$.

Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_1(\lambda) = 0$.

3.38 Chứng minh rằng nếu $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n x)$, $0 < x < 1$; trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_0(\lambda) = 0$ thì $\displaystyle\int_0^1 x\left(f(x)\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 J_1^2(\lambda_n)$.

3.39 **a.** Chứng tỏ rằng $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_1(\lambda_n x)}{\lambda_n J_2(\lambda_n)}$, $0 < x < 1$. Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_1(\lambda) = 0$.

b. Sử dụng bài 22. và a. chứng tỏ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^2} = \dfrac{1}{4}$.

3.40 Chứng tỏ rằng phương trình: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} + (k^2 - \dfrac{\alpha^2}{x^2})y = 0$

có nghiệm tổng quát: $y = AJ_{\alpha}(kx) + BY_{\alpha}(kx)$

3.41 Giải phương trình : $y'' + \frac{a}{x}y' + by = 0$

3.42 Giải các phương trình sau:

a. $zy'' + y' + ay = 0$

b. $4zy'' + 4y' + y = 0$

c. $zy'' + 2y' + 2y = 0$

d. $y'' + z^2 y = 0$

e. $y'' + zy = 0$.

CHƯƠNG 4

CHUỖI MARKOV VÀ QUÁ TRÌNH DỪNG

Các hiện tượng diễn ra trong tự nhiên, xã hội hoặc có tính chất tất định (có tính quy luật, có thể biết trước kết quả) hoặc có tính chất ngẫu nhiên (không biết trước kết quả). Mặc dù không thể nói trước một hiện tượng ngẫu nhiên xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện một lần quan sát, tuy nhiên nếu tiến hành quan sát nhiều lần một hiện tượng ngẫu nhiên trong các phép thử như nhau, ta có thể đáng giá được khả năng xuất hiện của các biến cố tương ứng và rút ra được những kết luận khoa học về hiện tượng này. Lý thuyết xác suất nghiên cứu khả năng xuất hiện của các hiện tượng ngẫu nhiên và ứng dụng chúng vào thực tế.

Trong học phần xác suất và thống kê chúng ta đã tìm hiểu khái niệm biến ngẫu nhiên, đó là các biến nhận giá trị nào đó phụ thuộc vào các yếu tố ngẫu nhiên. Khi họ các biến ngẫu nhiên phụ thuộc vào thời gian ta có quá trình ngẫu nhiên.

Lý thuyết quá trình ngẫu nhiên lần đầu tiên được nghiên cứu liên quan đến bài toán dao động và nhiễu của các hệ vật lý. Quá trình ngẫu nhiên là một mô hình toán học của quá trình thực nghiệm mà sự phát triển bị chi phối bởi các quy luật xác suất. Quá trình ngẫu nhiên cung cấp những mô hình hữu ích để nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau như vật lý thống kê, viễn thông, điều khiển, phân tích chuỗi thời gian, sự tăng trưởng dân số và các ngành khoa học quản lý.

Các tín hiệu video, tín hiệu thoại, dữ liệu máy tính, nhiễu của một hệ thống viễn thông, nhiễu điện trong các thiết bị điện, số khách hàng đến một điểm phục vụ, chỉ số chứng khoán trong thị trường chứng khoán… là các quá trình ngẫu nhiên.

Quá trình ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong viễn thông là quá trình Markov (quá trình không nhớ, memoryless) và quá trình dừng.

Chuỗi Markov là một quá trình Markov có không gian trạng thái rời rạc, thời gian rời rạc và thuần nhất. Chuỗi Markov thường gặp trong bài toán chuyển mạch của hệ thống viễn thông.

Tín hiệu viễn thông, nhiễu không có tính Markov. Các quá trình này quá khứ của nó có ảnh hưởng lớn đến sự tiến triển của quá trình trong tương lại. Tuy nhiên hàm trung bình không thay đổi và hàm tương quan thuần nhất theo thời gian, đó là quá trình dừng. Khi các quá trình dừng biểu diễn các tín hiệu hoặc nhiễu thì biến đổi Fourier của hàm tương quan của quá trình là hàm mật độ phổ công suất của tín hiệu hoặc nhiễu này.

Trong chương này ta chỉ nghiên cứu một cách khái quát khái niệm quá trình ngẫu nhiên, chuỗi Markov thời gian rời rạc thuần nhất và quá trình dừng.

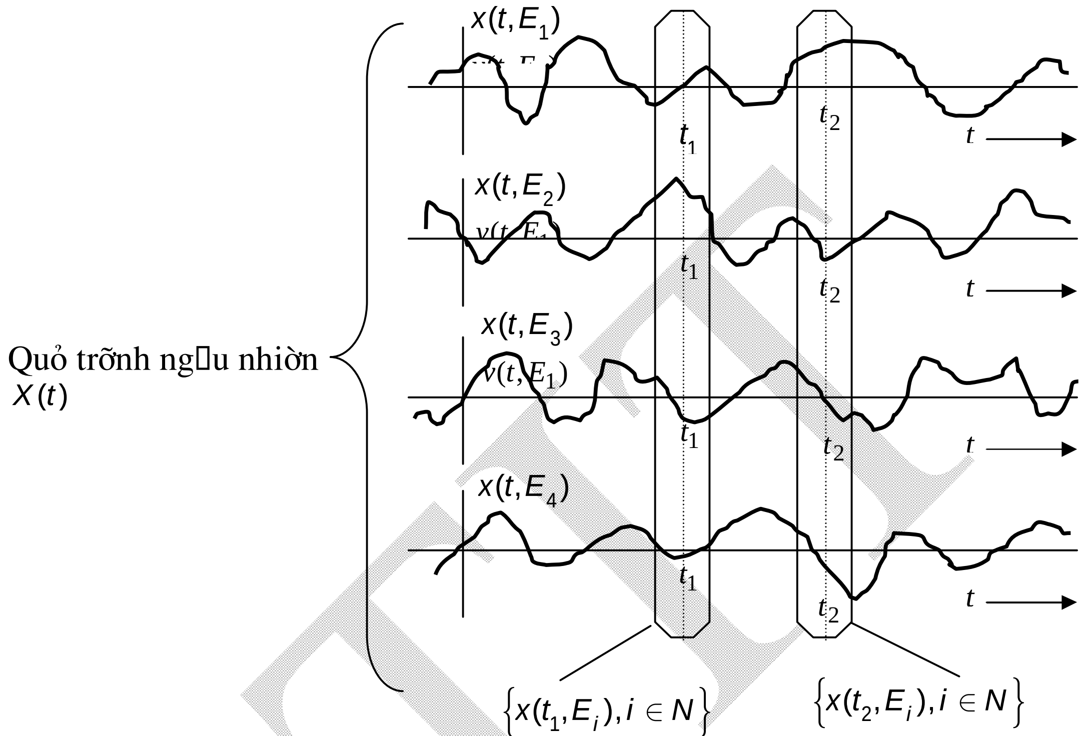
Để học tốt chương này học viên cần nắm vững khái niệm xác suất, xác suất có điều kiện, công thức xác suất đầy đủ, biến ngẫu nhiên, các đặc trưng: kỳ vọng, phương sai, hiệp phương sai của các biến ngẫu nhiên và các kiến thức đại số tuyến tính như ma trận, hệ phương trình tuyến tính.

4.1 KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

4.1.1 Khái niệm quá trình ngẫu nhiên

Các tín hiệu của các hệ thống thông tin là các tín hiệu ngẫu nhiên vì ngoài thành phần mang tin còn có sự tác động của giao thoa ngẫu nhiên và nhiễu của thiết bị.

Giả sử một tín hiệu nào đó mà tại mỗi thời điểm t nhận các giá trị phụ thuộc hệ các biến cố $\left\{E_i, i \in N\right\}$ của phép thử, tín hiệu này nhận giá trị mẫu là $x(t, E_i)$ tại thời điểm t và khi biến cố E_i xảy ra. Như vậy $\left\{x(t, E_i)\right\}$ là một hàm mẫu của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$. Quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ vừa phụ thuộc thời gian t, vừa phụ thuộc yếu tố ngẫu nhiên E_i.



Hình 4.1: Mu hỡnh quỏ trỡnh ng□u nhiên

Một cách tổng quát một quá trình ngẫu nhiên là một họ các biến ngẫu nhiên $\left\{X(t,\omega); t \in T\right\}$ xác định trong cùng một phép thử. Các quá trình này vừa phụ thuộc vào thời gian t. Khi cố định tham số t thì $X(t,\omega)$ là biến ngẫu nhiên phụ thuộc yếu tố ngẫu nhiên ω, các giá trị quan sát nhận được theo thời gian t được gọi là **hàm mẫu** *hoặc một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên. Tập chỉ số T thường biểu diễn tham số thời gian.*

Do tác động của các yếu tố ngẫu nhiên nên một tín hiệu $\left\{X(t,\omega); t \in T\right\}$ được truyền đi là một quá trình ngẫu nhiên. Tín hiệu cụ thể nhận được $\left\{x(t); t \in T\right\}$ là hàm mẫu (một thể hiện) của quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t,\omega); t \in T\right\}$.

Để đơn giản trong cách viết người ta ký hiệu quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t); t \in T\right\}$ thay cho $\left\{X(t,\omega); t \in T\right\}$, hàm mẫu tương ứng được ký hiệu $\left\{x(t); t \in T\right\}$.

4.1.2 Phân loại quá trình ngẫu nhiên

Có thể phân loại các quá trình ngẫu nhiên theo các đặc trưng sau:

- Không gian trạng thái,
- Tập chỉ số thời gian T,

- Quan hệ độc lập và quy luật phân bố xác suất của các biến ngẫu nhiên $X(t)$.

4.1.2.1 Phân loại quá trình ngẫu nhiên theo tập trạng thái E

Ta ký hiệu E là tập tất cả các giá trị của $X(t), \forall t \in T$ và gọi là không gian trạng thái của quá trình, mỗi giá trị của $X(t)$ được gọi là một trạng thái.

- Nếu E là tập đếm được thì $\{X(t); t \in T\}$ gọi là quá trình có trạng thái rời rạc.
- Nếu E là 1 khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$ thì $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình thực hoặc quá trình trạng thái liên tục.
- Nếu E tập con của tập số phức $\mathbb{C}$ thì $\{X(t); t \in T\}$ là quá trình trạng thái phức.
- Nếu $E \subset \mathbb{R}^k$ thì $\{X(t); t \in T\}$ là quá trình trạng thái k-véc tơ.

4.1.2.2 Phân loại quá trình ngẫu nhiên theo tập các chỉ số T

- Nếu T là tập con của tập số nguyên ($T \subset \mathbb{Z}$) thì quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình có thời gian rời rạc hoặc tham số rời rạc. Trường hợp này ta ký hiệu X_n thay cho $X(t)$ và gọi là một dãy ngẫu nhiên.
- Nếu $T = [0; \infty)$ hoặc $T = \mathbb{R}$ thì $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình có thời gian liên tục.

4.1.2.3 Phân loại theo các tính chất phân bố xác suất của quá trình ngẫu nhiên

a. *Quá trình độc lập*

Quá trình $\{X(t); t \in T\}$ được gọi là quá trình độc lập nếu với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < .... < t_n$ các biến ngẫu nhiên sau là độc lập

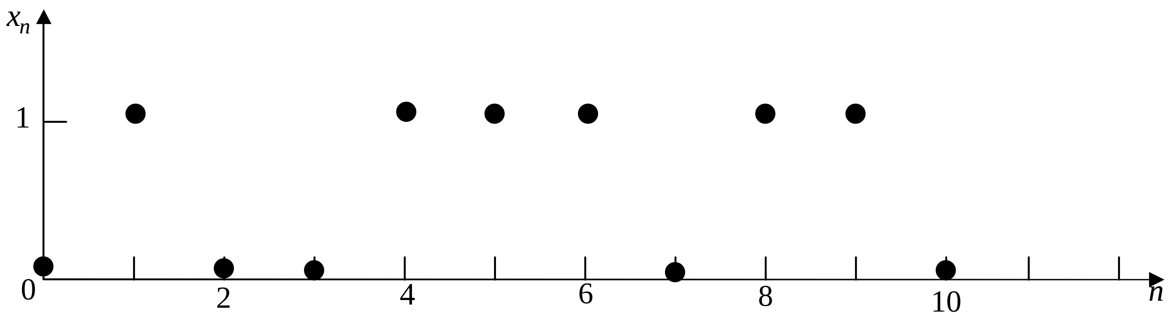
$$X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n) \tag{4.1}$$

Ví dụ 4.1: Giả sử $X_1, X_2, ...$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố Bernoulli với xác suất $P\{X_n = 1\} = p$, $P\{X_n = 0\} = q = 1 - p$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Khi đó $\{X_n, n \geq 1\}$ là một quá trình ngẫu nhiên gọi là ***quá trình Bernoulli***. Vậy quá trình Bernoulli là quá trình độc lập có không gian trạng thái rời rạc $E = \{0, 1\}$, thời gian rời rạc $T = \{1, 2, ...\}$.

Một ví dụ mô phỏng về dãy mẫu của quá trình Bernoulli có thể nhận được bằng cách gieo đồng xu liên tiếp. Nếu mặt sấp xuất hiện ta gán giá trị 1, nếu mặt ngửa xuất hiện ta gán giá trị 0. Chẳng hạn

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
Mặt xuất hiện	S	N	N	S	S	S	N	S	S	N	$\cdots$
x_n	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	$\cdots$

Dãy mẫu $\left\{x_n, n \geq 1\right\}$ nhận được ở trên được minh họa trong hình sau



Hình 4.2: *Hàm m□u c□a quả trỡnh* Bernoulli

b. ***Quá trình có gia số độc lập:***

Quá trình $\left\{X(t); t \in T\right\}$ được gọi là quá trình gia số độc lập nếu các gia số của quá trình trong các khoảng thời gian rời nhau là các biến ngẫu nhiên độc lập. Tức là với mọi cách chọn $t_1 < t_2 < .... < t_n$, các biến ngẫu nhiên sau là độc lập

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), ..., X(t_n) - X(t_{n-1}). \qquad \textbf{(4.2)}$$

Đặc biệt với quá trình thời gian rời rạc $\{X_n\}$ thì tính chất gia số độc lập dẫn đến dãy các biến ngẫu nhiên $Z_0 = X_0$, $Z_i = X_i - X_{i-1}$; $i = 1, 2, ...$ là độc lập. Ngoài ra nếu ta biết luật phân bố của từng biến ngẫu nhiên Z_0, Z_1, ... thì ta biết được luật phân bố của mọi X_n.

Thật vậy, điều này được suy từ công thức phân bố tổng của các biến ngẫu nhiên độc lập

$$X_i = Z_0 + Z_1 + ... + Z_i.$$

c. ***Quá trình gia số độc lập dừng***

Quá trình gia số độc lập $\left\{X(t); t \in T\right\}$ được gọi là quá trình gia số độc lập dừng nếu

$\forall s, t, s < t$; $\forall h \geq 0$: $X(t) - X(s)$ và $X(t+h) - X(s+h)$ độc lập và có cùng phân bố **(4.3)**

Quá trình Wiener (ví dụ 4.10) là một ví dụ của quá trình gia số độc lập dừng.

d. ***Quá trình Martingal***

Quá trình $\left\{X(t); t \in T\right\}$ được gọi là quá trình Martingal nếu:

Với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < .... < t_n < t_{n+1}$, với mọi giá trị $a_1, a_2, ..., a_n$ thì

$$\mathrm{E}\left[X(t_{n+1}) \middle| X(t_1) = a_1, ..., X(t_n) = a_n\right] = a_n. \qquad \textbf{(4.4)}$$

Quá trình Martingal có thể xem như là mô hình mô tả trò chơi may rủi, trong đó $X(t)$ là số tiền của người chơi ở thời điểm t. Tính chất Martingal nói rằng *số tiền trung bình* của người chơi sẽ có ở thời điểm tương lai t_{n+1} bằng số tiền anh ta có ở thời điểm hiện tại t_n và *không phụ thuộc vào những gì anh ta có trước đó trong quá khứ.*

Nếu $\left\{X(t); t \geq 0\right\}$ là quá trình gia số độc lập với kỳ vọng bằng 0 thì $\left\{X(t); t \geq 0\right\}$ là quá trình Martingal với thời gian liên tục (xem [8]).

e. ***Quá trình Markov:***

Quá trình $\left\{X(t); t \in T\right\}$ được gọi là quá trình Markov nếu:

Với mọi thời điểm $t_1 < t_2 < .... < t_n$, với mọi giá trị $a_1, a_2, ..., a_n$ cho trước, với mọi thời điểm $t > t_n$ và với mọi a ta có

$$P\left\{X(t) \le a \middle| X(t_1) = a_1, ..., X(t_n) = a_n\right\} = P\left\{X(t) \le a \middle| X(t_n) = a_n\right\}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Nghĩa là qui luật phân bố xác suất trong tương lai chỉ phụ thuộc hiện tại và độc lập với quá khứ. Nói cách khác ***quá trình Markov mô tả các hệ không có trí nhớ*** (memoryless).

Với mọi $t > s$; với mọi tập giá trị $A \subset \mathbb{R}$ và giá trị a ta ký hiệu

$$p(s, a; t, A) = P\left\{X(t) \in A \middle| X(s) = a\right\} \qquad \textbf{(4.6)}$$

và gọi là *hàm xác suất chuyển từ thời điểm s đến thời điểm t*.

Như vậy công thức (4.5) được viết lại

$$P\left\{X(t) \le a \middle| X(t_1) = a_1, ..., X(t_n) = a_n\right\} = p(t_n, a_n; t, A), \text{ trong đó } A = \left(-\infty, a\right]. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Quá trình Markov với không gian trạng thái rời rạc được gọi là chuỗi Markov (hay xích Markov, Markov chains). Chuỗi Markov với thời gian rời rạc và thuần nhất được xét trong mục tiếp theo.

Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc được xét qua hàm khối lượng xác suất $p_X(x) = P\left\{X = x\right\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; vì vậy tính chất Markov – công thức (4.5) đối với chuỗi Markov $\left\{X_n; n = 0, 1, 2, ...\right\}$ với thời gian rời rạc được viết lại như sau

$$P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i\right\} = P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\},\ i_0, i_1, ..., i, j \in E. \qquad \textbf{(4.8)}$$

f. ***Quá trình dừng*** *(stationary)*

Xét quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t); t \in T\right\}$ có thời gian $T = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$ hoặc $\mathbb{N}$.

Nói một cách khái quát một quá trình ngẫu nhiên là quá trình dừng nếu các tính chất thống kê của quá trình không phụ thuộc thời gian. Các tính chất thống kê của quá trình được xác định bởi các hàm phân bố đồng thời của quá trình tại các thời điểm. Tùy theo mức độ không phụ thuộc thời gian của các biến ngẫu nhiên của quá trình tại các thời điểm ta có các mức độ dừng khác nhau.

- ***Quá trình dừng bậc nhất*** nếu: với mọi h, với mọi $t_1 \in T$ hai biến ngẫu nhiên

$$X(t_1) \text{ và } X(t_1 + h)$$

có cùng quy luật phân bố xác suất.

Như vậy quá trình dừng bậc nhất có quy luật phân bố xác suất tại mọi thời điểm là như nhau. Do đó quá trình dừng bậc nhất có hàm trung bình là hàm hằng $\mathrm{E}\,X(t) = \text{const}$.

- ***Quá trình dừng bậc hai*** nếu: với mọi h, với mọi $t_1, t_2 \in T$ hai véc tơ ngẫu nhiên

$$\left(X(t_1), X(t_2)\right) \text{ và } \left(X(t_1 + h), X(t_2 + h)\right)$$

có cùng quy luật phân bố xác suất.

Như vậy $\left(X(t_1),X(t_2)\right)$ và $\left(X(0),X(t_2-t_1)\right)$ có cùng quy luật phân bố xác suất. Nói cách khác hàm phân bố xác suất đồng thời của quá trình dừng bậc hai không phụ thuộc thời điểm $t_1,t_2 \in T$ mà chỉ phụ thuộc khoảng cách giữa hai thời điểm là t_2-t_1.

Trong chương trình Xác suất Thống kê ta đã biết rằng nếu $F_{X,Y}(x,y)$ là hàm phân bố xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X, Y thì ta có thể xác định hàm phân bố xác suất thành phần theo công thức sau

$F_X(x)=F_{X,Y}(x,\infty)=\lim\limits_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)$ và $F_Y(y)=F_{X,Y}(\infty,y)=\lim\limits_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)$.

Do đó quá trình dừng bậc hai cũng là quá trình dừng bậc nhất. Hơn nữa

$$\mathrm{E}\,X(t)=\text{ const}$$

$\mathrm{E}\left(X(t)X(t+\tau)\right)$ chỉ phụ thuộc τ.

Dựa vào kết quả này, ta mở rộng khái niệm dừng bậc hai theo nghĩa rộng

- ***Dừng theo nghĩa rộng hay dừng hiệp phương sai*** (wide sense stationary or covariance stationary) nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $\mathrm{E}\,X(t)=m=\text{const}$

ii) Với mọi t, $\mathrm{E}\left(X(t)X(t+\tau)\right)$ chỉ phụ thuộc τ.

Đặt

$$K_X(\tau)=\mathrm{E}\left(X(t)X(t+\tau)\right) \quad \textbf{(4.9)}$$

gọi là ***hàm tự tương quan*** của quá trình $\left\{X(t);t\in T\right\}$.

Quá trình dừng bậc hai là quá trình dừng theo nghĩa rộng, nhưng điều ngược lại không đúng.

- ***Quá trình dừng bậc N*** nếu: với mọi $t_1,t_2,\dots,t_N\in T$, với mọi h, hai véc tơ ngẫu nhiên

$$\left(X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_N)\right) \text{ và } \left(X(t_1+h),X(t_2+h),\dots,X(t_N+h)\right)$$

có cùng phân bố xác suất.

Tương tự trường hợp trên, các hàm phân bố xác suất biên của véc tơ ngẫu nhiên *N* chiều có thể nhận được từ hàm phân bố xác suất đồng thời. Vì vậy quá trình dừng bậc *N* cũng là quá trình dừng bậc *k*, với mọi $k\le N$.

- ***Dừng theo nghĩa chặt*** (strictly stationary) là quá trình dừng mọi bậc. Nghĩa là:

Với mọi *N*, với mọi $t_1,t_2,\dots,t_N\in T$, với mọi $h>0$; hai véc tơ ngẫu nhiên

$$\left(X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_N)\right) \text{ và } \left(X(t_1+h),X(t_2+h),\dots,X(t_N+h)\right)$$

có cùng quy luật phân bố xác suất.

Nói riêng mọi $X(t)$ có cùng phân bố.

Quá trình dừng theo nghĩa chặt rất ít gặp trong thực tế, quá trình dừng hiệp phương sai được sử dụng nhiều hơn. Vì vậy người ta gọi tắt quá trình dừng hiệp phương sai là quá trình dừng.

4.2 CHUỖI MARKOV

Xét quá trình Markov $\left\{X(t);t\in T\right\}$ *có không gian trạng thái* E *đếm được.*

Tùy theo tập chỉ số $T=\{0,1,2,\dots\}$ hoặc $T=(0;\infty)$ ta có tương ứng quá trình Markov với thời gian rời rạc hoặc liên tục.

Công thức xác suất chuyển (4.6) của quá trình Markov với không gian trạng thái rời rạc được viết cụ thể

$$p(s,i;t,j) = P\left\{X(t) = j \,\middle|\, X(s) = i\right\}, \ t > s; i,j \in E. \qquad \textbf{(4.10)}$$

Nếu xác suất chuyển (4.10) chỉ phụ thuộc vào $t - s$, nghĩa là với mọi h

$$p(s,i;t,j) = p(s+h,i;t+h,j) \qquad \textbf{(4.11)}$$

thì ta nói ***quá trình Markov thuần nhất theo thời gian***.

4.2.1 Chuỗi Markov với thời gian rời rạc thuần nhất

Định nghĩa 4.1: *Quá trình* $\left\{X_n, n = 0,1,2,...\right\}$ *với thời gian rời rạc được gọi là chuỗi Markov thời gian rời rạc thuần nhất nếu thỏa mãn hai điều kiện sau*

i) Không gian trạng thái E của mọi X_n *là tập đếm được.*

ii) Hàm xác suất chuyển là thuần nhất theo thời gian, tức là thoả mãn (4.11).

Từ đây trở đi ta chỉ xét chuỗi Markov với thời gian rời rạc thuần nhất và ta gọi tắt chuỗi Markov.

4.2.2 Ma trận xác suất chuyển

Giả sử $\left\{X_n, n = 0,1,2,...\right\}$ là chuỗi Markov thời gian rời rạc có không gian trạng thái E đếm được. Các phần tử của E được ký hiệu $i, j, k...$

Với mọi $i, j \in E$; đặt

$$p_{ij} = P\left\{X_{n+1} = j \,\middle|\, X_n = i\right\} = P\left\{X_1 = j \,\middle|\, X_0 = i\right\} \qquad \textbf{(4.12)}$$

không phụ thuộc vào n. Đó là *xác suất để từ trạng thái* i *sau một bước sẽ chuyển thành trạng thái* j.

Định nghĩa 4.2: *Ma trận* $P = \left[p_{ij}\right]$ *với* p_{ij} *xác định theo* (4.12) *được gọi là* ***ma trận xác suất chuyển*** *hay ma trận xác suất chuyển sau 1 bước của chuỗi Markov* $\left\{X_n, n = 0,1,2,...\right\}$.

Các phần tử p_{ij} trên mỗi hàng của ma trận xác suất chuyển thỏa mãn điều kiện

$$p_{ij} \ge 0; \ \sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \ \forall i \in E \qquad \textbf{(4.13)}$$

- Nếu tập trạng thái E vô hạn thì ma trận xác suất chuyển có vô số hàng, vô số cột và tổng các xác suất chuyển trên mỗi hàng trong công thức (4.13) là tổng của một chuỗi số dương.
- Nếu tập trạng thái E hữu hạn, chẳng hạn $E = \left\{1,2,...,m\right\}$ thì ma trận xác suất chuyển và công thức (4.13) được viết dưới dạng

$$P = \left[p_{ij}\right] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.14)}$$

$$p_{ij} \ge 0;\ \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ \forall i = 1,\dots,m \quad \textbf{(4.15)}$$

Ma trận vuông thỏa mãn điều kiện (4.15) được gọi là ***ma trận Markov*** hoặc ***ma trận ngẫu nhiên***.

4.2.3 Ma trân xác suất chuyển bậc cao, Phương trình Chapman–Kolmogorov

Đặt

$$p_{ij}^{(k)} = P\left\{X_{n+k} = j \middle| X_n = i\right\} = P\left\{X_k = j \middle| X_0 = i\right\}. \quad \textbf{(4.16)}$$

Đó là *xác suất sau* k *bước hệ sẽ chuyển từ trạng thái* i *sang trạng thái* j.

Định nghĩa 4.3: *Ma trận vuông* $P^{(k)} = \left[p_{ij}^{(k)}\right]$ *gọi là ma trận xác suất chuyển sau k bước.*

Ký hiệu $P^{(0)} = I$, I là ma trận đơn vị; $P^{(1)} = P$.

Tương tự ma trận xác suất chuyển P, số hàng số cột của $P^{(k)}$ có thể vô hạn nếu không gian trạng thái E có vô số đếm được các phần tử. Nếu không gian trạng thái E hữu hạn thì ma trận xác suất chuyển sau k bước $P^{(k)}$ cũng là ma trận Markov (xem bài tập 4.8).

Định lý 4.1: Với mọi $n \ge 0$, ta có:

$$P^{(n+1)} = PP^{(n)} = P^{(n)}P \quad \textbf{(4.17)}$$

Từ đó suy ra

$$P^{(n)} = P^n \quad \textbf{(4.18)}$$

Chứng minh: Áp dụng công thức xác xuất đầy đủ với hệ đầy đủ các biến cố $\left\{A_k; k \in E\right\}$, trong đó $A_k = \left\{X_1 = k \middle| X_0 = i\right\}$, ta có

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+1)} &= P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i\right\} \\ &= \sum_{k\in E} P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i, X_1 = k\right\} P\left\{X_1 = k \middle| X_0 = i\right\} \\ &= \sum_{k\in E} P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_1 = k\right\} P\left\{X_1 = k \middle| X_0 = i\right\} = \sum_{k\in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \end{aligned}$$

(do tính chất không nhớ của chuỗi Markov). $\Rightarrow P^{(n+1)} = PP^{(n)}$.

Ta cũng có

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+1)} &= P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i\right\} \\ &= \sum_{k\in E} P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0 = i, X_n = k\right\} P\left\{X_n = k \middle| X_0 = i\right\} \\ &= \sum_{k\in E} P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = k\right\} P\left\{X_n = k \middle| X_0 = i\right\} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \end{aligned}$$

$\Rightarrow P^{(n+1)} = P^{(n)}P$.

Từ (4.17) suy ra $P^{(2)} = PP = P^2$, bằng quy nạp ta có $P^{(n)} = P^n$ với mọi $n = 0,1,2,\dots$

Từ công thức (4.18) và đẳng thức $P^{n+m} = P^n P^m$, $\forall n,m \ge 0$; ta có

$$P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)},\ \forall n,m \geq 0$$

ta có thể viết các phần tử tương ứng dưới dạng

$$p_{ij}{}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}{}^{(n)} p_{kj}{}^{(m)} \tag{4.19}$$

Công thức (4.19) được gọi là ***Phương trình Chapman-Kolmogorov***.
Phương trình Chapman-Kolmogorov giải thích quy luật chuyển trạng thái của chuỗi Markov như sau: hệ chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j sau $n+m$ bước có thể đạt được bằng cách chuyển từ trạng thái i sang trạng thái trung gian k trong n bước (với xác suất $p_{ik}{}^{(n)}$) và tiếp tục chuyển từ trạng thái k sang trạng thái j trong m bước (với xác suất $p_{kj}{}^{(m)}$). Hơn nửa biến cố "chuyển từ trạng thái i sang trạng thái trung gian k trong n bước" và biến cố "chuyển từ trạng thái k sang trạng thái j trong m bước" là độc lập. Vậy xác suất chuyển từ i sang j sau $n+m$ bước qua các trạng thái i,k,j bằng tích $p_{ik}{}^{(n)} p_{kj}{}^{(m)}$. Cuối cùng xác suất chuyển từ i sang j có được bằng cách lấy tổng theo mọi trạng thái trung gian k, k chạy trong không gian các trạng thái của chuỗi.

4.2.4 Phân bố xác suất của hệ tại thời điểm thứ n

Giả sử không gian trạng thái có dạng $E = \{0,1,2,...\}$

Ma trận hàng

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_0(n) & p_1(n) & p_2(n) & \cdots \end{bmatrix},\ p_j(n) = P\{X_n = j\},\ n = 0,1,2,\ldots. \tag{4.20}$$

gọi là ***ma trận phân bố xác suất của hệ tại thời điểm*** n hoặc phân bố của X_n.

Các phần tử của ma trận hàng $\mathbf{P}(n)$ thỏa mãn điều kiện

$$p_k(n) \geq 0;\ \sum_{k \in E} p_k(n) = 1$$

$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_0(0) & p_1(0) & p_2(0) & \cdots \end{bmatrix}$ là ma trận phân bố tại thời điểm $n = 0$ và được gọi là ***ma trận phân bố xác suất ban đầu***.

Định lý 4.2: Với mọi n, $m \geq 0$:

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^{(n)} \tag{4.21}$$

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n)P \tag{4.22}$$

$$\mathbf{P}(n+m) = \mathbf{P}(n)P^{(m)}. \tag{4.23}$$

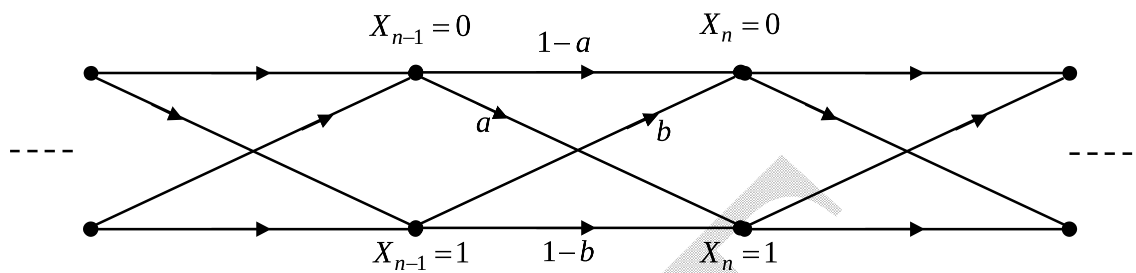
Chứng minh: Từ định lý 4.1 ta suy ra 3 điều trên là tương đương. Vì vậy để chứng minh định lý 4.2 ta chỉ cần chứng minh (4.23) và công thức này được chứng minh bằng cách áp dụng công thức xác suất đầy đủ như sau.

$$p_j(n+m) = P\{X_{n+m} = j\} = \sum_{i \in E} P\{X_n = i\} P\{X_{n+m} = j \,|\, X_n = i\} = \sum_{i \in E} p_i(n) p_{ij}{}^{(m)}.$$

Vậy chuỗi Markov rời rạc thuần nhất hoàn toàn được xác định bởi ma trận xác suất chuyển một bước P và ma trận phân bố ban đầu $\mathbf{P}(0)$.

Ví dụ 4.2: Một mạng viễn thông gồm một dãy các trạm chuyển tiếp các kênh viễn thông nhị phân cho trong sơ đồ sau, trong đó X_n ký hiệu mã số nhị phân đầu ra của trạm thứ n và X_0 ký hiệu mã số nhị phân đầu vào của trạm đầu tiên.

Đây là 1 mô hình chuỗi Markov có không gian trạng thái $E = \{0,1\}$, tập chỉ số $T = \{0,1,\dots,n,\dots\}$.



Hình 5.3: Mạng viễn thông nh... nhận

Ma trận xác suất chuyển của mạng viễn thông này thường được gọi là ma trận kênh:

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix};\ 0 < a < 1,\ 0 < b < 1.$$

Trong đó a, b là xác suất lỗi.

Giả sử $a = 0,1$, $b = 0,2$ và phân bố xác suất đầu $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = 0,5$ (hai tín hiệu 0, 1 đồng khả năng).

a. Tìm ma trận xác suất chuyển sau 2 bước,

b. Tìm phân bố xác suất của trạm thứ hai.

Giải: **a.** $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix}$.

b. $\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(0)P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,585 & 0,415 \end{bmatrix}$.

Như vậy có 58,5% tín hiệu 0 và 41,5% tín hiệu 1 ở đầu ra của trạm thứ hai, mặc dù đầu vào ở trạm đầu tiên hai tín hiệu này xuất hiện đồng khả năng.

4.2.5 Một số mô hình chuỗi Markov quan trọng

4.2.5.1 Mô hình phục vụ đám đông

Xét mô hình phục vụ đám đông (lý thuyết sắp hàng). Khách đến sắp hàng chờ phục vụ theo nguyên tắc FIFO (first in first out) và trong mỗi chu kỳ cửa hàng chỉ phục vụ một khách. Số khách đến trong chu kỳ thứ n là biến ngẫu nhiên ξ_n. Giả sử ξ_1, ξ_2,... là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố xác suất với biến ngẫu nhiên ξ có phân bố xác suất.

$$P\{\xi = k\} = a_k;\ k = 0,1,2,\dots;\ a_k > 0;\ \sum_k a_k = 1. \qquad \textbf{(4.24)}$$

Trạng thái của hệ (cửa hàng) là số khách xếp hàng chờ phục vụ tại thời điểm đầu của mỗi chu kỳ (khi một khách hàng vừa được phục vụ xong). Nếu hiện tại hệ ở trạng thái i và sau 1 chu kỳ hệ rơi vào trạng thái j thì

$$j = \begin{cases} i - 1 + \xi & \text{nÕu } i \geq 1, \\ \xi & \text{nÕu } i = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(4.25)}$$

Vì các biến ngẫu nhiên ξ_n độc lập và có cùng phân bố với biến ngẫu nhiên ξ.

Ký hiệu X_n là số khách hàng tại thời điểm đầu của chu kỳ thứ n, ta có

$$X_{n+1} = \left(X_n - 1\right)^+ + \xi_n, \text{ trong đó ký hiệu } X^+ = \max(0, X),$$

Từ (4.24)-(4.25) suy ra

$$P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\} = \begin{cases} P\left\{\xi_n = j + 1 - i\right\} & \text{nÕu } i > 0 \\ P\left\{\xi_n = j\right\} & \text{nÕu } i = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{nÕu } j + 1 < i \\ a_{j+1-i} & \text{nÕu } j + 1 \geq i > 0 \\ a_j & \text{nÕu } i = 0, j \geq 0 \end{cases} \textbf{(4.26)}$$

Vì các quá trình đến ξ_n độc lập do đó xác suất chuyển $p_{ij} = P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\}$ thỏa mãn điều kiện (4.7), hơn nữa các biến ngẫu nhiên ξ_n có cùng phân bố với biến ngẫu nhiên ξ do đó xác suất chuyển p_{ij} thuần nhất theo thời gian.

Vậy $\left\{X_n; n = 0, 1, \ldots\right\}$ là chuỗi Markov thuần nhất có ma trận xác suất chuyển được xác định từ công thức (4.26)

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.2.5.2 Mô hình kiểm kê (Inventory Model)

Giả thiết phải dự trữ trong kho một loại hàng nào đó để đáp ứng nhu cầu liên tục của khách hàng. Hàng được nhập kho tại cuối mỗi chu kỳ

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj} \right) = \sum_k \pi_k p_{kj}$$

Giả sử tổng số lượng hàng cần phải đáp ứng nhu cầu trong chu kỳ n là biến ngẫu nhiên ξ_n có phân bố độc lập với chu kỳ thời gian, nghĩa là dãy biến ngẫu nhiên $\left\{\xi_n\right\}$ độc lập có cùng phân bố với ξ.

$$P\left\{\xi = k\right\} = a_k \; ; a_k > 0 \text{ và } \inf_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} = \varepsilon > 0. \qquad \textbf{(4.27)}$$

Mức hàng dự trữ được kiểm kê tại cuối mỗi chu kỳ. Cách nhập hàng căn cứ vào 2 chỉ số tiêu chuẩn s và $m_j^{(n)} = \inf_i p_{ij}^{(n)}$, $M_j^{(n)} = \sup_i p_{ij}^{(n)}$ $(s < S)$ như sau: Nếu ở cuối mỗi chu kỳ lượng hàng dự trữ $\leq s$ thì ngay tức khắc nhập hàng để có số hàng dự trữ bằng S; Nếu hàng hiện có $> s$ thì không cần nhập hàng. Giả sử số nhu cầu trong mỗi chu kỳ không vượt quá $m_j^{(n)} = \inf_i p_{ij}{}^{(n)}$, $M_j^{(n)} = \sup_i p_{ij}{}^{(n)}$, công thức (4.27) trở thành $\sum_{k=0}^{S} a_k = 1$.

Ký hiệu X_n là lượng hàng hiện có tại cuối chu kỳ $M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \to 0$ và trước khi nhập hàng, như vậy

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1} & \text{nÕu} \quad s < X_n \leq S, \\ S - \xi_{n+1} & \text{nÕu} \quad X_n \leq s. \end{cases} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Các trạng thái của quá trình $\left\{X_n, n \geq 0\right\}$ là các số lượng hàng dự trữ:

$$s + 1 - S, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, S - 1, S$$

trong đó giá trị âm là nhu cầu chưa được phục vụ mà sẽ được đáp ứng ngay sau khi nhập hàng. Từ công thức (4.28) ta có

$$p_{ij} = P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\} = \begin{cases} P\left\{\xi = i - j\right\} & \text{nÕu} \quad s < i \leq S \\ P\left\{\xi = S - j\right\} & \text{nÕu} \quad i \leq s. \end{cases} \qquad \textbf{(4.29)}$$

Ví dụ 4.3: Xét mô hình kiểm kê phụ tùng thay thế, trong đó yêu cầu có thể là 0, 1 hoặc 2 đơn vị phụ tùng cần thay thế trong một chu kỳ bất kỳ với phân bố xác suất như sau

$$P\left\{\xi = 0\right\} = 0,3;\ P\left\{\xi = 1\right\} = 0,6;\ P\left\{\xi = 2\right\} = 0,1$$

và giả sử $s = 0$; $S = 2$.

Không gian trạng thái sẽ là $E = \left\{-1, 0, 1, 2\right\}$.

Ta có: $p_{ij} = P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\} = \begin{cases} P\left\{\xi = i - j\right\} & \text{nÕu} \quad 0 < i \leq 2, \\ P\left\{\xi = 2 - j\right\} & \text{nÕu} \quad i \leq 0. \end{cases}$

$$p_{-1,-1} = P\left\{X_{n+1} = -1 \middle| X_n = -1\right\} = P\left\{\xi = 2 - (-1)\right\} = P(\varnothing) = 0,$$

$$p_{-1,0} = P\left\{X_{n+1} = 0 \middle| X_n = -1\right\} = P\left\{\xi = 2 - 0\right\} = P\left\{\xi = 2\right\} = 0,1,$$

$$p_{-1,1} = P\left\{X_{n+1} = 1 \middle| X_n = -1\right\} = P\left\{\xi = 2 - 1\right\} = P\left\{\xi = 1\right\} = 0,6,$$

$$p_{-1,2} = P\left\{X_{n+1} = 2 \middle| X_n = -1\right\} = P\left\{\xi = 2 - 2\right\} = P\left\{\xi = 0\right\} = 0,3,$$

. . . .

$$p_{2,-1} = P\left\{X_{n+1} = -1 \middle| X_n = 2\right\} = P(\varnothing) = 0,$$

$$p_{2,0} = P\left\{X_{n+1} = 0 \middle| X_n = 2\right\} = P\left\{\xi = 2 - 0\right\} = P\left\{\xi = 2\right\} = 0,1,$$

$$p_{2,1} = P\left\{X_{n+1} = 1 \middle| X_n = 2 - 1\right\} = P\left\{\xi = 2 - 1\right\} = P\left\{\xi = 1\right\} = 0,6,$$

$$p_{2,2} = P\left\{X_{n+1} = 2 \middle| X_n = 2\right\} = P\left\{\xi = 2 - 2\right\} = P\left\{\xi = 0\right\} = 0,3$$

Ma trận xác suất chuyển:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 & 0,0 \\ 0,0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{bmatrix}$$

4.2.6 Phân bố dừng, phân bố giới hạn, phân bố ergodic

Định nghĩa 4.4: $\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$ *được gọi là ma trận phân bố dừng của chuỗi Markov với ma trân xác suất chuyển* P *nếu thoả mãn 2 điều kiện*:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* P & (a) \\ p_j \geq 0, \sum_j p_j = 1 & (b) \end{cases} \tag{4.30}$$

Điều kiện (4.30-b) là cần thiết để $\mathbf{P}^*$ là phân bố xác suất của hệ tại thời điểm bất kỳ.

Điều kiện (4.30-a) suy ra $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* P = \mathbf{P}^* P^2 = \dots = \mathbf{P}^* P^n$; $\forall\, n$.

Như vậy nếu chuỗi Markov có phân bố dừng tại thời điểm n_0 nào đó thì hệ sẽ có phân bố xác suất không thay đổi sau mọi bước chuyển kể từ thời điểm n_0. Đặc biệt nếu phân bố đầu $\mathbf{P}^*$ của chuỗi Markov thỏa mãn điều kiện (4.30) thì $\mathbf{P}^*(n) = \mathbf{P}^*$ với mọi n, nghĩa là phân bố xác suất của hệ không thay đổi.

Điều kiện (4.30-a) có thể viết lại dưới dạng

$$P^t\, \mathbf{P}^{*t} = \mathbf{P}^{*t} \tag{4.31}$$

trong đó ma trận cột $\mathbf{P}^{*t}$ là ma trận chuyển vị của ma trận hàng $\mathbf{P}^*$.

Công thức (4.31) cho thấy phân bố dừng $\mathbf{P}^*$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng bằng 1 của ma trận P^t.

Định nghĩa 4.5: *Ta nói rằng chuỗi Markov với ma trân xác suất chuyển* P *có ma trận phân bố giới hạn là* $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$ *nếu thoả mãn 2 điều kiện:*

1) *Với mọi* j *tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ *không phụ thuộc* i, **(4.32)**

2) $\sum\limits_{j\in E} p_j = 1$, $p_j \geq 0$, **(4.33)**

Nếu điều kiện (4.33) được thay bởi

3) $\sum\limits_{j\in E} p_j = 1$, $p_j > 0$ **(4.34)**

thì chuỗi Markov được gọi là *có tính ergodic* và $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$ *là ma trận phân bố ergodic*.

Nhận xét 4.1:

- Nếu phân bố của X_{n_0} (ở thời điểm thứ n_0) của chuỗi là phân bố dừng thì từ thời điểm này trở đi phân bố xác suất của chuỗi không thay đổi; nghĩa là với mọi $m \geq n_0$, X_m và X_{n_0} có cùng phân bố xác suất.

- Phân bố giới hạn là phân bố hệ sẽ đạt được khi thời gian tiến đến vô cùng. Phân bố giới hạn chỉ phụ thuộc ma trận xác suất chuyển, không phụ thuộc phân bố đầu (ví dụ 4.5). Trong thực tế có thể đến thời điểm nào đó trở đi ma trận xác suất chuyển có các hàng bằng nhau, lúc đó chuỗi đạt được phân bố giới hạn. Ví dụ 4.4 sau đây chứng tỏ với $n = 20$ thì chuỗi đạt được phân bố giới hạn.

- Phân bố ergodic là phân bố giới hạn với xác suất dương tại mọi trạng thái của chuỗi. Như vậy về lâu dài hệ nhận giá trị tại mọi trạng thái với xác suất dương.

Ví dụ 4.4: Có 3 mạng điện thoại di động *A, B, C* cùng khai thác thị trường. Tỉ lệ chiếm lĩnh thị trường hiện tại tương ứng là 40%, 30% và 30%. Theo thống kê người ta thấy xác suất thay đổi mạng của khách hàng trong mỗi quí (3 tháng) như sau:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Áp dụng công thức (4.18) và (4.21) ta tính được phân bố tại thời điểm thứ n :

$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^{(n)}$ trong các trường hợp sau.

$n = 0$ $\qquad \mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$,

$n = 1$ $\quad P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(0)P = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,43 & 0,22 \end{bmatrix}$,

$n = 6$ $\quad P^6 = \begin{bmatrix} 0,2125 & 0,5492 & 0,2383 \\ 0,1969 & 0,5648 & 0,2383 \\ 0,1969 & 0,5181 & 0,2853 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(6) = \mathbf{P}(0)P^6 = \begin{bmatrix} 0,2047 & 0,5476 & 0,2477 \end{bmatrix}$,

$n = 12$ $\quad P^{12} = \begin{bmatrix} 0,2002 & 0,5503 & 0,2495 \\ 0,2000 & 0,5506 & 0,2495 \\ 0,2000 & 0,5484 & 0,2516 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(12) = \mathbf{P}(0)P^{12} = \begin{bmatrix} 0,2001 & 0,550 & 0,2499 \end{bmatrix}$,

$n = 18$ $\quad P^{18} = \begin{bmatrix} 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5499 & 0,2501 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(18) = \mathbf{P}(0)P^{18} = \begin{bmatrix} 0,2000 & 0,550 & 0,2500 \end{bmatrix}$.

$n = 20$ $\quad P^{20} = \begin{bmatrix} 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \\ 0,2000 & 0,5500 & 0,2500 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}(20) = \mathbf{P}(0)P^{20} = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,55 & 0,25 \end{bmatrix}$.

Ta thấy rằng khi n càng lớn xác suất trên mỗi cột càng gần bằng nhau và đạt được phân bố giới hạn khi $n = 20$.

Vậy thị trường đạt trạng thái ổn định với tỉ lệ chiếm lĩnh thị trường tương ứng 20%, 55% và 25%. Ta nhận thấy phân bố giới hạn chỉ phụ thuộc ma trận xác suất chuyển và không phụ thuộc phân bố ban đầu.

Ví dụ sau đây cũng minh họa thêm về điều đó.

Ví dụ 4.5: Về sự bình đẳng trong giáo dục giữa các nhóm chủng tộc.

Trên cơ sở báo cáo điều tra dân số của văn phòng điều tra dân số Hoa kỳ năm 1960, hai tác giả Lieberson và Fuguitt (1967) đã xác định được ma trận chuyển trình độ học vấn giữa hai thế hệ khi so sánh tình trạng học vấn của nhóm thanh niên độ tuổi 20-24 với trình độ học vấn của bố của họ:

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{D□□i □H} \\ \text{□H} \\ \text{Tròn □H} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{D□□i} & \text{□H} & \text{Tròn □H} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,43 & 0,34 & 0,23 \\ 0,10 & 0,36 & 0,54 \\ 0,05 & 0,15 & 0,80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nghĩa là xác suất để người con có trình độ dưới ĐH với điều kiện người bố dưới ĐH là 0,43 và xác suất để người con có trình độ ĐH với điều kiện người bố dưới ĐH là 0,34 …

Hai tác giả đồng ý rằng có hai loại bất lợi đối với các nhóm chủng tộc và dân tộc. Loại bất lợi thứ nhất bắt nguồn từ nguồn gốc chủng tộc và dân tộc mà kết quả là có sự khác nhau giữa ma trận chuyển của nhóm người da trắng và nhóm người da mầu. Ngay cả khi sự phân biệt chủng tộc bị loại bỏ thì vẫn còn loại bất lợi thứ hai đó là vị trí xã hội và thu nhập của người da mầu thấp hơn nhiều so với người da trắng. Nói cách khác ngay cả khi ma trận chuyển về học vấn giữa hai thế hệ P (ma trận xác suất chuyển) được xem là như nhau giữa hai nhóm thì điều kiện ban đầu $\mathbf{P}(0)$ (phân bố đầu) cũng khác nhau.

Hai tác giả cho rằng có thể xem ma trận chuyển P giữa hai nhóm da trắng và da mầu là như nhau nhưng có xuất phát điểm khác nhau. Nghĩa là trình độ học vấn ở thời điểm ban đầu (năm 1960) của hai nhóm chủng tộc khác nhau.

Chẳng hạn năm 1960: Tỷ lệ trình độ học vấn dưới ĐH, ĐH, trên ĐH của nhóm chủng tộc da trắng tương ứng là: 46%, 31%, 23%. Tỷ lệ trình độ học vấn dưới ĐH, ĐH, trên ĐH của nhóm chủng tộc da màu tương ứng là: 75%, 16%, 09%.

Vậy phân bố đầu của nhóm chủng tộc da trắng $P(1) = \begin{bmatrix} 0,46 & 0,31 & 0,23 \end{bmatrix}$,

phân bố đầu của nhóm chủng tộc da màu $P(1) = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,16 & 0,09 \end{bmatrix}$.

Áp dụng công thức (4.21) ta có thể tính được phân bố xác suất của các thế hệ tiếp theo. Chẳng hạn tỉ lệ trình độ học vấn của thế hệ tiếp theo là

Da trắng: $P(2) = \begin{bmatrix} 0,46 & 0,31 & 0,23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,43 & 0,34 & 0,23 \\ 0,10 & 0,36 & 0,54 \\ 0,05 & 0,15 & 0,80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,30 & 0,46 \end{bmatrix}$

$$\text{Da màu: } P(2)=\begin{bmatrix}0,75 & 0,16 & 0,09\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,43 & 0,34 & 0,23\\ 0,10 & 0,36 & 0,54\\ 0,05 & 0,15 & 0,80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,34 & 0,33 & 0,33\end{bmatrix}$$

Tiếp tục tính toán ta được kết quả trình bày trong bảng sau, trong đó chỉ số khác nhau trong bảng là tỷ lệ % khoảng cách mà hai nhóm cần phải thay đổi để đạt được phân bố trình độ học vấn bằng nhau.

		% D□□i □H	% □H	% Tròn □H	Ch□ s□ % khác nhau
(1960)	Da tr□ng	46	31	23	29
	Da m□u	75	16	09	
P(2)	Da tr□ng	24	30	46	13
	Da m□u	34	33	33	
P(3)	Da tr□ng	16	26	58	6
	Da m□u	20	28	52	
P(4)	Da tr□ng	12	23	64	3
	Da m□u	14	25	61	
P(5)	Da tr□ng	11	22	68	1
	Da m□u	11	23	66	
P(6)	Da tr□ng	10	22	68	1
	Da m□u	11	22	67	
P(7)	Da tr□ng	10	21	69	1
	Da m□u	10	22	68	
P(8)	Da tr□ng	10	21	69	0
	Da m□u	10	21	69	

N g
đồng đều

Các định lý sau cho quan hệ giữa phân bố giới hạn và phân bố dừng, và điều kiện tồn tại phân bố ergodic.

Định lý 4.3: Nếu tồn tại phân bố giới hạn thì đó là phân bố dừng duy nhất.

Chứng minh: Giả sử $\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \dots\end{bmatrix}$ là phân bố giới hạn, khi đó với mọi j ta có:

$$p_j=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_k p_{ik}^{(n)}p_{kj}\right)=\sum_k p_k p_{kj}$$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \dots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \dots\end{bmatrix}P$. Do đó $\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \dots\end{bmatrix}$ là một phân bố dừng.

Ngược lại giả sử $\begin{bmatrix}\overline{p}_1 & \overline{p}_2 & \dots\end{bmatrix}$ là một phân bố dừng bất kỳ của chuỗi Markov này thì

$$\overline{p}_j=\sum_k \overline{p}_k p_{kj}=\sum_k \overline{p}_k p_{kj}^{(2)}=....=\sum_k \overline{p}_k p_{kj}^{(n)}$$

$$\Rightarrow\overline{p}_j=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_k \overline{p}_k p_{kj}^{(n)}\right)=\sum_k \overline{p}_k p_j=p_j\,.$$

Nghĩa là phân bố giới hạn là phân bố dừng duy nhất.

Định lý 4.4: Nếu chuỗi Markov có không gian trạng thái hữu hạn thì chuỗi này là ergodic khi và chỉ khi tồn tại n_0 sao cho $\min\limits_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$.

Nhận xét 4.2: 1) Phân bố dừng là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (4.30), cụ thể:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{bmatrix} P \\ x_j \ge 0, \ \sum\limits_j x_j = 1. \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} P^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ x_j \ge 0, \ \sum\limits_j x_j = 1. \end{cases} \tag{4.35}$$

Hệ phương trình (4.35) có thể vô nghiệm, duy nhất nghiệm hoặc có vô số nghiệm. Do đó, một cách tương ứng chuỗi Markov có thể không tồn tại phân bố dừng, có phân bố dừng duy nhất hoặc có vô số phân bố dừng.

Giải hệ phương trình (4.35) cho trường hợp ví dụ 4.5 ta cũng thu được phân bố dừng tương ứng $\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,55 & 0,25 \end{bmatrix}$.

2) Từ định lý 4.3 và 4.4 ta thấy rằng nếu chuỗi Markov hữu hạn trạng thái với ma trận xác suất chuyển $P = \begin{bmatrix} p_{ij} \end{bmatrix}$ thỏa mãn điều kiện tồn tại n_0 sao cho $\min\limits_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$ thì chuỗi này là ergodic. Phân bố ergodic là phân bố giới hạn và cũng là phân bố dừng duy nhất, đó là nghiệm của hệ phương trình (4.35).

Ví dụ 4.6: Xét chuỗi Markov ở ví dụ 4.2, ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \ 0 < a, b < 1$$

Theo định lý 4.4 chuỗi Markov có tính ergodic với phân bố ergodic là nghiệm của hệ phương trình (theo nhận xét 4.2-2).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ax_1 + bx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{a+b} \\ x_2 = \dfrac{a}{a+b} \end{cases}$$

Mặt khác cũng có thể tính trực tiếp ma trận chuyển sau n bước

$$P^n = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}^n = \frac{1}{a+b} \left\{ \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix} \right\} \tag{4.36}$$

Vì $-1 < 1-a-b < 1$ do đó $(1-a-b)^n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{bmatrix}.$$

Để chứng minh (4.36) ta có thể tính theo một trong các cách sau:

- Quy nạp theo n.

- Sử dụng công thức: nếu $AB = BA$ thì $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$ và bằng cách đặt

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \; A = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = (-a-b)^{k-1} A$$

$$P^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k = I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k A^k = I + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-a-b)^{k-1} \right) A$$

$$= I + \frac{1}{-(a+b)} \left((1-a-b)^n - 1 \right) A = \frac{1}{a+b} \left\{ \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix} \right\}.$$

Ví dụ 4.7: Trong một bài báo viết năm 1913 A. A. Markov đã chọn 1 dãy gồm 20.000 chữ cái trong trường ca Evghenhi Onheghin của A. X. Puskin và thấy rằng các chữ cái này chuyển đổi liên tiếp theo hai trạng thái nguyên âm (Na) và phụ âm (Pa) với ma trận xác suất chuyển là

$$P = \begin{array}{c} Na \\ Pa \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0,128 & 0,872 \\ 0,663 & 0,337 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} Na & \quad Pa \end{array} \end{array}$$

Phân bố giới hạn (cũng là phân bố dừng) của chuỗi Markov này là

$$P(Na) = \frac{0,663}{0,872 + 0,663} = 0,423, \; P(Pa) = \frac{0,872}{0,872 + 0,663} = 0,568.$$

Vậy có khoảng 42,3% nguyên âm và 56,8% phụ âm trong tác phẩm trên.

4.3 QUÁ TRÌNH DỪNG

4.3.1 Hàm tự hiệp phương sai và hàm tự tương quan của quá trình dừng

Giả sử $\left\{ X(t);\, t \in I \right\}$ là quá trình dừng với giá trị trung bình m và hàm tự tương quan $K_X(\tau)$, nghĩa là:

1) $m(t) = \mathrm{E}X(t) = m = \text{const}$,

2) *Hàm tự tương quan:* $K_{XX}(t-s) = \mathrm{E}\left[X(s)X(t) \right];\ \forall s,t \in I$.

Hoặc $K_{XX}(\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)X(t+\tau) \right]$

Hàm tự tương quan có các tính chất sau.

Định lý 4.5:

1) $K_{XX}(-\tau) = K_{XX}(\tau)$.

2) $\left| K_{XX}(\tau) \right| \le K_{XX}(0) = \mathrm{E}\left| X(t) \right|^2 = \mathrm{E}\left| X(0) \right|^2, \ \forall t.$

Nếu $X(t)$ là tín hiệu ngẫu nhiên thì $K_{XX}(0) = \mathrm{E}\left| X(t) \right|^2$ được gọi là năng lượng trung bình của tín hiệu.

Hai *hàm tương quan chéo* của hai quá trình $\left\{X(t);\ t \in I\right\}$, $\left\{Y(t);\ t \in I\right\}$ được định nghĩa và ký hiệu

$$R_{XY}(s;t) = \mathrm{E}\left[X(s)Y(t)\right],\ R_{YX}(s;t) = \mathrm{E}\left[Y(s)X(t)\right];\ \ \forall s,t \in I \qquad \textbf{(4.37)}$$

Hai quá trình dừng $\left\{X(t);\ t \in I\right\}$, $\left\{Y(t);\ t \in I\right\}$ được gọi là ***dừng liên kết cùng nhau*** nếu hàm tự tương quan chéo chỉ phụ thuộc khoảng cách giữa hai thời điểm, nghĩa là

$$R_{XY}(t;t+\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)Y(t+\tau)\right] = R_{XY}(\tau).$$

Trường hợp $R_{XY}(t;t+\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)Y(t+\tau)\right] = 0$ ta nói hai quá trình $X(t)$, $Y(t)$ ***trực giao*** nhau.

Hàm tương quan chéo của hai quá trình dừng $X(t)$, $Y(t)$ có các tính chất sau:

1) $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$

2) $|R_{XY}(\tau)| \le \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)} \le \dfrac{1}{2}\left[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)\right]$

Nhận xét 4.3:

1) Ý nghĩa vật lý của hàm tự tương quan $K_X(\tau)$ của quá trình dừng thể hiện sự phụ thuộc lẫn nhau của hai biến ngẫu nhiên của quá trình $X(t)$ lấy ở hai thời điểm cách nhau τ đơn vị thời gian. Vì vậy rõ ràng rằng nếu quá trình $X(t)$ thay đổi nhiều theo thời gian thì hàm tự tương quan giảm nhanh từ giá trị cực đại $K_X(0)$ khi τ tăng. Sự giảm nhanh của hàm tự tương quan có thể được đặc trưng bởi thời gian không tương quan τ_0, đó là giá trị sao cho khi $\tau > \tau_0$ thì trị tuyệt đối của $K_X(\tau)$ nhỏ hơn mức ý nghĩa, và thường chọn bằng 1% của giá trị cực đại $K_X(0)$.

2) Giả sử quá trình $\left\{X(t);\ t \in I\right\}$ có hàm trung bình $m(t) = \mathrm{E}\,X(t) = m = \text{const}$ và hàm tự tương quan $\mathrm{E}\left[X(s)X(t)\right]$ chỉ phụ thuộc vào $t-s$, khi đó hàm tự hiệp phương sai

$$\operatorname{cov}(X(s),X(t)) = \mathrm{E}\left[\left(X(s)-m\right)\overline{\left(X(t)-m\right)}\right] = \mathrm{E}\left[X(s)\overline{X(t)}\right] - |m|^2$$

cũng chỉ phụ thuộc vào $t-s$, nghĩa là tồn tại hàm ký hiệu $C_X(\tau)$, sao cho

$$C_{XX}(t-s) = \operatorname{cov}(X(s),X(t));\ \forall s,t \in I \qquad \textbf{(4.38)}$$

$C_{XX}(\tau)$ được gọi là ***hàm tự hiệp phương sai*** của quá trình dừng $\left\{X(t);\ t \in I\right\}$.

Vì vậy có thể định nghĩa quá trình dừng theo nghĩa rộng là quá trình thỏa mãn hai điều kiện sau:

1') $m(t) = \mathrm{E}X(t) = m = \text{const}$,

2') hàm tự hiệp phương sai $R_{XX}(s,t) = \operatorname{cov}(X(s),X(t))$ chỉ phụ thuộc vào $t-s$; $\forall s,t \in I$.

Rõ ràng rằng hai định nghĩa này trùng nhau khi $m(t) = \mathrm{E}\,X(t) = 0, \forall t$.

Ví dụ 4.8: *Giả sử U, V là hai biến ngẫu nhiên thoả mãn*

$$\mathrm{E}U = \mathrm{E}V = 0,\ \mathrm{var}U = \mathrm{var}V = \sigma^2,\ \mathrm{cov}(U,V) = 0.$$

Khi đó quá trình $X(t) = U\cos\lambda t + V\sin\lambda t$ *,* λ *là một hằng số, là quá trình dừng với hàm tự tương quan* $K_X(\tau) = \sigma^2\cos\lambda\tau$.

Giải: $\mathrm{E}\,X(t) = \mathrm{E}\left[U\cos\lambda t + V\sin\lambda t\right] = \cos\lambda t\,\mathrm{E}U + \sin\lambda t\,\mathrm{E}V = 0.$

Từ giả thiết $\mathrm{E}U = \mathrm{E}V = 0,\ \mathrm{var}U = \mathrm{var}V = \sigma^2 \Rightarrow \mathrm{E}(U^2) = \mathrm{E}(V^2) = \sigma^2$,

$$0 = \mathrm{cov}(U,V) = \mathrm{E}(UV) - (\mathrm{E}U)(\mathrm{E}V) \Rightarrow \mathrm{E}(UV) = 0.$$

$$\mathrm{E}\left[X(s)X(t)\right] = \mathrm{E}\left[\left(U\cos\lambda s + V\sin\lambda s\right)\left(U\cos\lambda t + V\sin\lambda t\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[U^2\cos\lambda s\cos\lambda t + V^2\sin\lambda s\sin\lambda t + UV\left(\cos\lambda s\cos\lambda t + \sin\lambda s\sin\lambda t\right)\right]$$

$$= \cos\lambda s\cos\lambda t\,\mathrm{E}\left[U^2\right] + \sin\lambda s\sin\lambda t\,\mathrm{E}\left[V^2\right] + \left(\cos\lambda s\cos\lambda t + \sin\lambda s\sin\lambda t\right)\mathrm{E}\left[UV\right]$$

$$= \sigma^2\left(\cos\lambda s\cos\lambda t + \sin\lambda s\sin\lambda t\right) = \sigma^2\cos\lambda(t-s)$$

Vậy $X(t)$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau) = \sigma^2\cos\lambda\tau$.

Ví dụ 4.9: *Tín hiệu ngẫu nhiên hình sin* $X(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right)$*, trong đó* A, Θ *là hai biến ngẫu nhiên độc lập, A có phương sai hữu hạn và* Θ *có phân bố đều trên đoạn* $\left[0;2\pi\right]$*,* ω_0 *là hằng số.* $X(t)$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau) = \dfrac{\sigma^2}{2}\cos\omega_0\tau$, với $\sigma^2 = \mathrm{E}\left[A^2\right]$.

Giải: Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ với hàm mật độ

$$f_\Theta(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{nÕu } \ 0 \le u \le 2\pi \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\left[\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t + u) f_\Theta(u)du = \int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t + u)\frac{1}{2\pi}du = \frac{1}{2\pi}\sin(\omega_0 t + u)\Big|_{u=0}^{2\pi} = 0$$

$$\mathrm{E}\,X(t) = \mathrm{E}\left[A\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right)\right] = \mathrm{E}\left[A\right]\mathrm{E}\left[\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right)\right] = 0$$

(vì A, Θ độc lập và $\mathrm{E}\left[\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right)\right] = 0$)

$$\mathrm{E}\left[X(s)X(t)\right] = \mathrm{E}\left[\left(A\cos\left(\omega_0 s + \Theta\right)\right)\left(A\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right)\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[A^2\left(\cos(\omega_0 s + \Theta)\right)\left(\cos(\omega_0 t + \Theta)\right)\right] = \mathrm{E}\left[A^2\right]\mathrm{E}\left[\left(\cos(\omega_0 s + \Theta)\right)\left(\cos(\omega_0 t + \Theta)\right)\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\cos(\omega_0 s+\Theta)\right)\left(\cos(\omega_0 t+\Theta)\right)\right]=\mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\omega_0(s+t)+2\Theta\right)\right\}+\frac{1}{2}\left\{\cos\omega_0(t-s)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\cos\left(\omega_0(s+t)+2\Theta\right)\right]+\frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\cos\omega_0(t-s)\right]=\frac{1}{2}\cos\omega_0(t-s).$$

Do đó quá trình ngẫu nhiên hình sin là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau)=\frac{1}{2}\sigma^2\cos\omega_0\tau$.

Ví dụ 4.10: (Quá trình Wiener) *Quá trình* $W(t)$, $t\ge 0$ *được gọi là một quá trình Wiener với tham số* σ^2 *nếu nó thoả mãn các tính chất sau:*

a. $W(0)=0$.

b. *Với mọi* $0\le s<t$ *thì* $W(t)-W(s)$ *là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn* $\mathbf{N}(0;\sigma^2(t-s))$.

c. $W(t)$, $t\ge 0$ *là quá trình với gia số độc lập, nghĩa là với mọi* $0\le t_1<t_2...<t_n$ *các biến ngẫu nhiên:* $W(t_2)-W(t_1), W(t_3)-W(t_2),..., W(t_n)-W(t_{n-1})$ *là độc lập.*

Như vậy $W(t)$, $t\ge 0$ là một quá trình có: $m(t)=\mathrm{E}W(t)=0\ \ \forall\ t\ge 0$.

$\forall\ t,s\ge 0$, giả sử $s\le t$:

$$r(s,t)=\mathrm{E}\left[W(s)W(t)\right]=\mathrm{E}\left[W(s)\left(W(s)+W(t)-W(s)\right)\right]$$

$$=\mathrm{E}\left[W(s)\right]^2+\mathrm{E}\left[\left(W(s)-W(0)\right)\left(W(t)-W(s)\right)\right]$$

$=\sigma^2 s+\mathrm{E}\left[W(s)-W(0)\right]\mathrm{E}\left[W(t)-W(s)\right]=\sigma^2 s$. (do gia số độc lập và $\mathrm{E}W(s)=0$)

Do đó $r(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$.

Vậy quá trình Wiener là một quá trình gia số độc lập dừng (thỏa mãn điều kiện 4.3) nhưng không phải là quá trình dừng. Quá trình Wiener biểu diễn chuyển động Brown, mô tả sự chuyển động của hạt trong môi trường chất lỏng thuần nhất.

4.3.2 Đặc trưng phổ của quá trình dừng

Đối với các hệ thống tuyến tính tất nhiên hoặc các tín hiệu tất nhiên người ta có thể sử dụng cả hai phương pháp phân tích theo miền thời gian và theo miền tần số.
Các tính chất phổ tần số của tín hiệu tất nhiên $x(t)$ nhận được từ biến đổi Fourier (xem chương 2)

$$\widehat{X}(f)=\mathrm{F}\left\{x(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi tf}x(t)dt$$

Hàm $\widehat{X}(f)$ đôi khi được gọi một cách đơn giản là phổ của $x(t)$, có đơn vị volt/hertz.

Nếu biết phổ $\widehat{X}(f)$ thì có thể khôi phục tín hiệu thông qua phép biến đổi Fourier ngược

$$x(t) = \mathsf{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi t f}\,\widehat{X}(f)df$$

Một cách tự nhiên ta cũng tìm cách sử dụng hai phương pháp này cho trường hợp tín hiệu ngẫu nhiên là quá trình dừng.

Biểu diễn phổ của tín hiệu tất nhiên nhận được từ biến đổi Fourier của tín hiệu đó. Mặc dù phép biến đổi Fourier cũng có vai trò rất quan trọng trong việc đặc trưng phổ của các tín hiệu ngẫu nhiên. Tuy nhiên không thể tính trực tiếp biến đổi Fourier các tín hiệu ngẫu nhiên, vì phép biến đổi có thể không tồn tại đối với hầu hết các hàm mẫu của quá trình. Vì vậy phân tích phổ của các quá trình ngẫu nhiên đòi hỏi tỉ mỉ hơn phân tích các tín hiệu tất nhiên.

Mặt khác ta có thể biểu diễn công suất của quá trình ngẫu nhiên dưới dạng hàm theo tần số thay vì theo hiệu điện thế (đẳng thức Parseval 2.92 và định lý năng lượng Rayleigh 2.109-2.110), biểu diễn như thế tồn tại. Trong mục này ta xét đến các hàm đó và gọi là ***mật độ phổ công suất***.

A. Mật độ phổ công suất

Xét tín hiệu là quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t);\, t\in\mathbb{R}\right\}$, có hàm mẫu $x(t)$.

Với mỗi $T>0$ xét: $x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{nÕu } |t| < T \\ 0 & \text{nÕu } |t| \ge T \end{cases}$

Đặt biến đổi Fourier của $x_T(t)$ là $\widehat{X}_T(f) = \mathsf{F}\left\{x_T(t)\right\}$

$$\widehat{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int_{-T}^{T} x(t)e^{-i2\pi ft}dt.$$

Năng lượng của $x(t)$ trong khoảng $(-T,T)$ là

$$E(T) = \int_{-T}^{T} x_T^2(t)dt = \int_{-T}^{T} x^2(t)dt$$

Áp dụng đẳng thức Parseval ta có:

$$E(T) = \int_{-T}^{T} \left|x_T(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x_T(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 df\,.$$

Chia cho $2T$ ta được ta được công suất trung bình $P(T)$ của $x(t)$ trong khoảng $(-T,T)$.

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} \left|x_T(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2}{2T} df$$

$\dfrac{\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2}{2T}$ là mật độ phổ công suất của tín hiệu trong khoảng $(-T,T)$. Tuy nhiên $\dfrac{\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2}{2T}$ vẫn là một biến ngẫu nhiên vì được tính toán theo hàm mẫu. Mật độ phổ công suất được tính theo giá trị trung bình (kỳ vọng) của $\dfrac{\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2}{2T}$ và khi $T\to\infty$.

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{E}\left|X(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 df \qquad \textbf{(4.39)}$$

$$P_{XX}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2dt=A\left[\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2\right] \quad \textbf{(4.40)}$$

trong đó kí hiệu và định nghĩa

$$A\left[\cdot\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\cdot\right]dt \quad \textbf{(4.41)}$$

(xem định nghĩa 4.7 và các công thức 4.52-4.53).

Ta định nghĩa ***mật độ phổ công suất của quá trình***, viết tắt **PSD** (Power Spectral Density), là

$$\rho_{XX}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2. \quad \textbf{(4.42)}$$

Từ công thức (4.31), (4.42) ta có công thức tính công suất

$$P_{XX}=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{XX}(f)df$$

Trường hợp quá trình $\left\{X(t);\, t\in\mathbb{R}\right\}$ là quá trình dừng thì

$\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2=R_{XX}(0)=\overline{X}^2=\text{const}$, do đó $P_{XX}=A\left[\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2\right]=\overline{X}^2$.

Ví dụ 4.11: Xét quá trình ngẫu nhiên $X(t)=A\cos\left(2\pi f_0t+\Theta\right)$, trong đó A và f_0 là hai hằng số, Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên khoảng $\left(0;\,\pi/2\right)$.

Ta tính trực tiếp công suất trung bình của tín hiệu:

$$\mathrm{E}\left[X^2(t)\right]=\mathrm{E}\left[A^2\cos^2\left(2\pi f_0t+\Theta\right)\right]=\mathrm{E}\left[\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}\cos\left(4\pi f_0t+2\Theta\right)\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\cos\left(4\pi f_0t+2\Theta\right)\right]=\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\cos\left(4\pi f_0t+2\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\sin\left(4\pi f_0t+2\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(4\pi f_0t+\pi\right)-\sin\left(4\pi f_0t\right)\right]=\cos\left(4\pi f_0t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(4\pi f_0t\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}\left[X^2(t)\right]=\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\cos\left(4\pi f_0t+2\theta\right)d\theta=\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{\pi}\sin\left(4\pi f_0t\right)$$

$$P_{XX}=A\left[\mathrm{E}\left(X^2(t)\right)\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{\pi}\sin\left(4\pi f_0t\right)\right]dt=\frac{A^2}{2}.$$

Cũng có thể tính qua mật độ phổ công suất như sau:

$$\widehat{X}_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)e^{-i2\pi ft}dt=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i2\pi ft}dt=\int_{-T}^{T}A\cos\left(2\pi f_0t+\Theta\right)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=\frac{A}{2}e^{i\Theta}\int_{-T}^{T}e^{2\pi i(f_0-f)t}dt+\frac{A}{2}e^{-i\Theta}\int_{-T}^{T}e^{-2\pi i(f_0+f)t}dt$$

$$=ATe^{i\Theta}\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T}+ATe^{-i\Theta}\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}$$

$$\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 = A^2T^2\left[\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos 2\Theta\right],\ \alpha = \frac{\sin 2\pi(f - f_0)T}{2\pi(f - f_0)T};\ \beta = \frac{\sin 2\pi(f + f_0)T}{2\pi(f + f_0)T}$$

Vì $\mathrm{E}\left[\cos 2\Theta\right] = 0$, do đó

$$\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 = \frac{A^2\pi}{2}\left[\frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi(f - f_0)T}{2\pi(f - f_0)T}\right)^2 + \frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi(f + f_0)T}{2\pi(f + f_0)T}\right)^2\right]$$

Sử dụng kết quả (Lathi, 1968: An Introduction to Random Signals and Communication Theory, International Textbook, Scranion, Pennsylvania. p.24)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}\left[\frac{\sin aT}{aT}\right]^2 = \delta(a)\,. \tag{4.43}$$

Ta có $\rho_{XX}(f) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 = \frac{A^2\pi}{2}\left[\delta\left\{2\pi(f - f_0)\right\} + \delta\left\{2\pi(f + f_0)\right\}\right]$

Áp dụng công thức (3.24) ta được $\rho_{XX}(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$

Vậy $P_{XX} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_{XX}(f)df = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]df = \frac{A^2}{2}.$

Tính chất mật độ phổ công suất

1. $\rho_{XX}(f)$ là hàm thực
2. $\rho_{XX}(f) \ge 0$
3. $\rho_{XX}(-f) = \rho_{XX}(f)$ nếu   là quá trình thực
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_{XX}(f)df = A\left[\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2\right]$
5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_{XX}(f)e^{i2\pi f\tau}df = A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right];\ \rho_{XX}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right]e^{-i2\pi f\tau}d\tau$ **(4.44)**

Chứng minh:

Từ công thức (4.42) suy ra tính chất 1. và 2.

Tính chất 3. suy từ tính chất của phép biến đổi Fourier, công thức (2.107-3).

Ta chứng minh công thức (4.44):

Theo công thức (4.42): $\rho_{XX}(f) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2$

Mặt khác $\widehat{X}_T(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int\limits_{-T}^{T}x(t)e^{-i2\pi ft}dt.$

Do đó $\rho_{XX}(f) = \lim\limits_{T\to\infty}\mathrm{E}\left[\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}X(t_1)e^{i2\pi ft_1}dt_1\int\limits_{-T}^{T}X(t_2)e^{-i2\pi ft_2}dt_2\right]$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\mathrm{E}\left[X(t_1)X(t_2)\right]e^{-i2\pi f(t_2-t_1)}dt_1dt_2$$

$\mathrm{E}\left[X(t_1)X(t_2)\right] = R_{XX}(t_1,t_2)$ với $-T < t_1 < T$ và $-T < t_2 < T$

$$\rho_{XX}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_{XX}(t_1,t_2) e^{-i2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 .$$

Đổi biến số lấy tích phân $\begin{cases} t = t_1 \\ \tau = t_2 - t_1 = t_2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = dt_1 \\ d\tau = dt_2 \end{cases}$

$$\rho_{XX}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-t}^{T-t}\int_{-T}^{T} R_{XX}(t,t+\tau) dt e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_{XX}(t,t+\tau) dt \right\} e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

Mặt khác $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_{XX}(t,t+\tau) dt = A\left[R_{XX}(t,t+\tau)\right]$

Vậy $\rho_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right] e^{-i2\pi f\tau} d\tau$.

Sử dụng công thức biến đổi Fourier ngược ta có $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{XX}(f) e^{i2\pi f\tau} df = A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right]$.

b. Biểu diễn phổ của quá trình dừng

Định nghĩa 4.6: Giả sử $\left\{X(t);\, t\in I\right\}$ *quá trình dừng với hàm tự tương quan* $K_{XX}(\tau)$. *Nếu tồn tại* $\mathrm{P}_{XX}(f)$ *sao cho:*

$$K_{XX}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{in2\pi f} \mathrm{P}_{XX}(f) df \quad khi\ I \subset \mathbb{Z} \qquad \textbf{(4.45)}$$

hoặc

$$K_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau 2\pi f} \mathrm{P}_{XX}(f) df \quad khi\ I = \mathbb{R} \qquad \textbf{(4.46)}$$

thì $\mathrm{P}_{XX}(f)$ *được gọi là* **mật độ phổ** *của quá trình dừng* $\left\{X(t);\, t\in I\right\}$.

Định lý 4.6: 1) Trường hợp thời gian rời rạc $I = \mathbb{Z}$: Nếu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|K_{XX}(n)\right| < \infty$ thì tồn tại mật độ phổ

$$\mathrm{P}_{XX}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in2\pi f} K_{XX}(n). \qquad \textbf{(4.47)}$$

2) Trường hợp thời gian liên tục $I = \mathbb{R}$: Nếu $K_{XX}(\tau)$ khả tích tuyệt đối trên $\mathbb{R}$ thì tồn tại mật độ phổ

$$\mathrm{P}_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\tau f} K_{XX}(\tau) d\tau . \qquad \textbf{(4.48)}$$

Như vậy hàm mật độ phổ là biến đổi Fourier của hàm tự tương quan và hàm tự tương quan là biến đổi Fourier ngược của mật độ phổ.

$$\mathrm{P}_{XX}(f) = \mathcal{F}\left\{K_{XX}(\tau)\right\},\ K_{XX}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{P}_{XX}(f)\right\}. \qquad \textbf{(4.49)}$$

Định lý 4.7 (Định lý Wiener - Khintchine)**:** Mật độ phổ công suất PSD của quá tình dừng $\left\{X(t);\ t \in I\right\}$ có giá trị trung bình $\mathrm{E}X(t) = 0$ bằng mật độ phổ của quá trình này và bằng biến đổi Fourier của hàm tự tương quan:

$$\mathrm{P}_{XX}(f) = \rho_{XX} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 \text{ và ta có } P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}_{XX}(f)df \qquad \textbf{(4.50)}$$

Chứng minh: Theo công thức (4.44) ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{XX}(f)e^{i2\pi f\tau}df = A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right]\ ;\ \rho_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right]e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

$X(t)$ là quá trình dừng do đó $R_{XX}(t+\tau,t) = K_{XX}(\tau), \forall t \Rightarrow A\left[R_{XX}(t+\tau,t)\right] = K_{XX}(\tau)$, từ tính duy nhất của phép biến đổi Fourier và công thức (4.49) suy ra $\mathrm{P}_{XX}(f) = \rho_{XX}$.

Ví dụ 4.12: *Xét quá trình ngẫu nhiên* $X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)$*, trong đó* f_0 *là hai hằng số;* A, Θ *là hai biến ngẫu nhiên độc lập, A có phương sai hữu hạn* $\mathrm{E}\left[A^2\right] = \sigma^2$ *và* Θ *có phân bố đều trên đoạn* $\left[0;2\pi\right]$ (xem ví dụ 4.9).

Hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau) = \frac{1}{2}\sigma^2\cos(2\pi f_0\tau)$; Theo công thức (4.49), (4.50) và (3.26) ta được $\rho_{XX} = \mathrm{P}_{XX}(f) = \mathcal{F}\left\{K_{XX}(\tau)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\cos(2\pi f_0\tau)\right\} = \frac{1}{4}\sigma^2\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)$.

Ta có thể tính trực tiếp công suất trung bình của tín hiệu như sau:

$$\mathrm{E}\left[X^2(t)\right] = \mathrm{E}\left[A^2\cos^2\left(2\pi f_0 t+\Theta\right)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\Theta\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\theta\right)d\theta = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$P_{XX} = A\left[\mathrm{E}\left(X^2(t)\right)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{\sigma^2}{2}dt = \frac{\sigma^2}{2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\sigma^2\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]df.$$

Có thể tính trực tiếp mật độ phổ công suất như sau:

$$\widehat{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int_{-T}^{T}X(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int_{-T}^{T}A\cos\left(2\pi f_0 t+\Theta\right)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-T}^{T}A\frac{e^{i\left(2\pi f_0 t+\Theta\right)}+e^{-i\left(2\pi f_0 t+\Theta\right)}}{2}e^{-i2\pi ft}dt = \frac{A}{2}e^{i\Theta}\int_{-T}^{T}e^{i2\pi\left(f_0-f\right)t}dt + \frac{A}{2}e^{-i\Theta}\int_{-T}^{T}e^{-i2\pi\left(f_0+f\right)t}dt$$

Ta có $\int_{-T}^{T} e^{i2\pi(f_0-f)t}dt = \left.\dfrac{e^{i2\pi(f_0-f)t}}{i2\pi(f_0-f)}\right|_{-T}^{T} = \dfrac{e^{i2\pi(f_0-f)T} - e^{-i2\pi(f_0-f)T}}{i2\pi(f_0-f)} = \dfrac{\sin\left[2\pi(f_0-f)T\right]}{\pi(f_0-f)}$

$$\int_{-T}^{T} e^{-i2\pi(f_0+f)t}dt = \left.\frac{e^{-i2\pi(f_0+f)t}}{-i2\pi(f_0+f)}\right|_{-T}^{T} = \frac{e^{i2\pi(f_0+f)T} - e^{-i2\pi(f_0+f)T}}{i2\pi(f_0+f)} = \frac{\sin\left[2\pi(f_0+f)T\right]}{\pi(f_0+f)}$$

$$\Rightarrow \widehat{X}_T(f) = ATe^{i\Theta}\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T} + ATe^{-i\Theta}\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}$$

$\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 = A^2T^2\left[\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos 2\Theta\right]$, $\alpha = \dfrac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T}$; $\beta = \dfrac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}$

Vì $\mathrm{E}\left[\cos 2\Theta\right] = 0$, do đó

$$\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 = \frac{\sigma^2\pi}{2}\left[\frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T}\right)^2 + \frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi(f+f_0)T}{2\pi(f+f_0)T}\right)^2\right]$$

Sử dụng kết quả (Lathi, 1968), công thức (4.43) $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{T}{\pi}\left[\dfrac{\sin aT}{aT}\right]^2 = \delta(a)$, ta được

$$\rho_{XX}(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2 = \frac{\sigma^2\pi}{2}\left[\delta\left(2\pi(f-f_0)\right) + \delta\left(2\pi(f+f_0)\right)\right]$$

Áp dụng công thức (3.24) ta được $\rho_{XX}(f) = \dfrac{\sigma^2\pi}{2}\dfrac{1}{2\pi}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$

Vậy mật độ phổ công suất $\rho_{XX}(f) = \dfrac{1}{4}\sigma^2\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$.

Nhận xét 4.4:

1. Ta có thể kiểm tra công thức (4.43) bằng cách chỉ ra hàm $\dfrac{T}{\pi}\left[\dfrac{\sin aT}{aT}\right]^2$ thỏa mãn điều kiện (3.1), (3.2) như sau:

   Khi $t \neq 0$, $\dfrac{T}{\pi}\left[\dfrac{\sin aT}{aT}\right]^2 \le \dfrac{1}{\pi aT}\xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ (thỏa mãn điều kiện 3.1).

Ta có $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin^2 u}{u^2}du = \pi$ (ví dụ 2.63), do đó $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{T}{\pi}\left[\dfrac{\sin tT}{tT}\right]^2 dt = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{\sin tT}{tT}\right]^2 d(Tt) = 1$

(thỏa mãn điều kiện 3.2).

2. Từ công thức (4.42) ta có: giá trị của hàm mật độ phổ tại 0 bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị của hàm tự tương quan, $\mathrm{P}_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{XX}(\tau)d\tau$.

3. Giá trị bình phương trung bình của quá trình dừng bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị của hàm mật độ phổ $\mathrm{E}\left|X(t)\right|^2 = \mathrm{E}\left|X(0)\right|^2 = K_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}_{XX}(f)df$.

4. Hàm mật độ phổ là hàm chẵn và nhận giá trị không âm

$$\mathrm{P}_{XX}(-f)=\mathrm{P}_{XX}(f);\ \mathrm{P}_{XX}(f)\ge 0 \quad \text{với mọi } f.$$

5. Định lý 4.7 cho ta ý nghĩa của khái niệm mật độ phổ của quá trình dừng, đó là mật độ phổ công suất của quá trình. Như vậy ta có thể tính mật độ phổ của một quá trình dừng theo 2 công thức khác nhau (4.41)-(4.42) hoặc (4.44). Tuy nhiên có thể tồn tại quá trình ngẫu nhiên không dừng (không có mật độ phổ) nhưng vẫn có mật độ phổ công suất.

Ví dụ 4.13: Xét quá trình tín hiệu cực với dữ liệu nhị phân $X(t)$

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n g(t-nT_b), \tag{4.51}$$

trong đó $g(t)$ là xung mẫu $g(t)=\begin{cases}1 & \text{nếu } |t|<T_b/2\\ 0 & \text{nếu } |t|>T_b/2,\end{cases}$ T_b là chu kỳ 1 bít.

$\{A_n\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập biểu diễn các dữ liệu nhị phân. Các biến ngẫu nhiên A_n có phân bố rời rạc nhận hai giá trị ± 1 đồng khả năng. Vậy

$$P\{A_n=1\}=P\{A_n=-1\}=1/2;\ \mathrm{E}[A_n]=0;\ \mathrm{var}[A_n]=\mathrm{E}\left[|A_n|^2\right]=1^2\frac{1}{2}+(-1)^2\frac{1}{2}=1;$$

$$\mathrm{cov}[A_n,A_m]=\mathrm{E}\left[A_n\overline{A_m}\right]-\mathrm{E}[A_n]\mathrm{E}[A_m]=0, \text{ nếu } n\ne m.$$

Đặt $T=(2N+1)T_b$ thì quá trình $X_T(t)$ của quá trình (4.40) sẽ là

$$X_T(t)=\sum_{n=-N}^{N}A_n g(t-nT_b)$$

$$\widehat{X}_T(f)=\mathcal{F}\{X_T(t)\}=\sum_{n=-N}^{N}A_n\mathcal{F}\{g(t-nT_b)\}=\sum_{n=-N}^{N}A_nG(f)e^{-i\omega nT_b}=G(f)\sum_{n=-N}^{N}A_n e^{-i\omega nT_b}$$

trong đó $G(f)=\mathcal{F}\{g(t)\}=T_b\,\mathrm{sinc}(T_bf)$ (ví dụ 2.63, công thức 2.111)

$$\Rightarrow\quad \mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=\mathrm{E}\left[|G(f)|^2\sum_{n,m=-N}^{N}A_n\overline{A_m}e^{-i\omega(n-m)T_b}\right]$$

$$=|G(f)|^2\sum_{n,m=-N}^{N}\mathrm{E}\left[A_n\overline{A_m}\right]e^{-i\omega(n-m)T_b}=|G(f)|^2\sum_{n=-N}^{N}1=|G(f)|^2(2N+1).$$

Vậy mật độ phổ công suất PSD

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}\left|\widehat{X}_T(f)\right|^2=\lim_{T\to\infty}\frac{|G(f)|^2(2N+1)}{(2N+1)T_b}=\frac{|G(f)|^2}{T_b}=T_b\,\mathrm{sinc}^2(T_bf).$$

Tuy nhiên $\mathrm{E}\left[X(t)\overline{X(t+\tau)}\right]=\mathrm{E}\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_ng(t-nT_b)\right)\overline{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_mg(t+\tau-mT_b)\right)}\right]$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left[A_n \overline{A_m}\right] g(t-nT_b)g(t+\tau-mT_b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT_b)g(t+\tau-mT_b)$$

trong đó $g(t-nT_b)g(t+\tau-mT_b) = \begin{cases} 1 \text{ nÕu } \left|t-nT_b\right| < T_b/2 \text{ vµ } \left|t+\tau-nT_b\right| < T_b/2 \\ 0 \text{ nếu ngược lại} \end{cases}$

Điều này chứng tỏ $\mathrm{E}\left[X(t)\overline{X(t+\tau)}\right]$ còn phụ thuộc vào thời điểm t nên quá trình $X(t)$ không dừng.

Ví dụ 4.14: (Sóng ngẫu nhiên nhị phân) Xét quá trình ngẫu nhiên $\left\{X(t); t\in\mathbb{R}\right\}$ gồm các bit 1 và các bit 0 thoả mãn các điều kiện sau:

1) Bit 1 và 0 lần lượt được biểu diễn bởi các xung chữ nhật với biên độ $+a$ và $-a$ volt với độ rộng của xung là T giây.

2) Các hàm mẫu (sample functions) là không đồng bộ và giả thiết rằng thời điểm xuất phát của xung thứ nhất t_d xảy ra đồng khả năng trong khoảng từ 0 đến T. Điều này có nghĩa là t_d là giá trị mẫu của biến ngẫu nhiên T_d có phân bố đều trong đoạn $\left[0;T\right]$.

3) Trong khoảng thời gian xung bất kỳ $(n-1)T < t - t_d < nT$, hai bit 1 và 0 là đồng khả năng xuất hiện, nghĩa là $X(t)$ nhận giá trị $+a$ hoặc $-a$ trong suốt khoảng xung này với xác suất $1/2$. $X(t)$ và $X(s)$ là độc lập nếu t,s ở trong khoảng xung thời gian khác nhau.

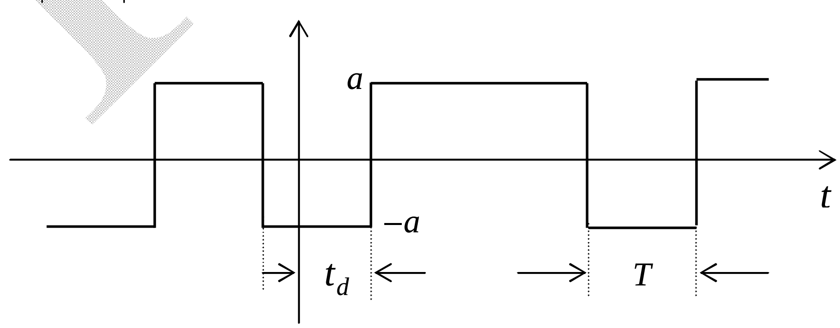
Ta có: $\forall t;\ \mathrm{E}X(t) = a\cdot 1/2 + (-a)\cdot 1/2 = 0$.

Hàm tự tương quan: $R_X(t_k,t_i) = \mathrm{E}\left[X(t_k)X(t_i)\right]$.

* Nếu $\left|t_k - t_i\right| > T$ thì $X(t_k),\ X(t_i)$ độc lập, do đó

$$\Rightarrow R_X(t_k,t_i) = \mathrm{E}\left[X(t_k)X(t_i)\right] = 0.$$

* Nếu $\left|t_k - t_i\right| < T$ và giả sử rằng $X(t_k),\ X(t_i)$ cùng có trễ là t_d thì $X(t_k),\ X(t_i)$ cùng xung khi và chỉ khi $\left|t_k - t_i\right| < T - t_d$.



Hình 4.4: *Súng ng□u nhiờn nh□ phõn*

Vậy $\mathrm{E}\left[X(t_k)X(t_i)\middle| t_d\right] = \begin{cases} a^2 & \text{nÕu } t_d < T - \left|t_k - t_i\right| \\ 0 & \text{nếu ngược lại}. \end{cases}$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$\mathrm{E}\left[X(t_k)X(t_i)\right] = \int_0^{T-|t_k-t_i|} a^2 f_{T_d}(t_d)dt_d = \int_0^{T-|t_k-t_i|} \frac{a^2}{T}dt_d = a^2\left(1-\frac{|t_k-t_i|}{T}\right).$$

Đặt $\tau = t_k - t_i \Rightarrow$ Hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau) = \begin{cases} a^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right) & \text{nÕu } |\tau| < T \\ 0 & \text{nÕu } |\tau| \geq T. \end{cases}$

Mật độ phổ công suất $\mathrm{P}_{XX}(f) = \mathrm{F}\left\{K_{XX}(\tau)\right\} = \int_{-T}^{T} a^2\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-i2\pi f\tau}d\tau = a^2T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$.

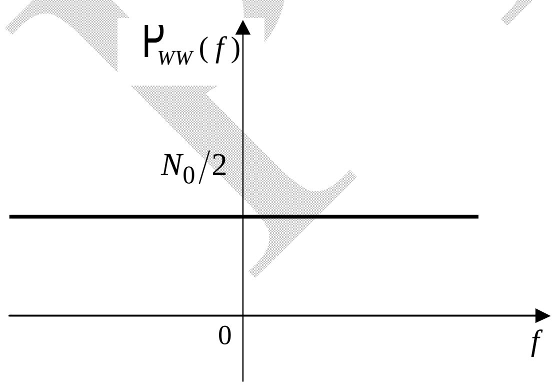
Ví dụ 4.15: Nhiễu trắng (White Noise) được mô tả như là một quá trình dừng (theo nghĩa rộng) mà mật độ phổ công suất là một hằng số $\mathrm{P}_{WW}(f) = \frac{N_0}{2}$.

Hệ số $1/2$ để chỉ một nửa công suất ứng với tần số dương và một nửa ứng với tần số âm. N_0 có đơn vị watt/ hertz. Từ công thức (4.42) ta có hàm tự tương quan của nhiễu trắng

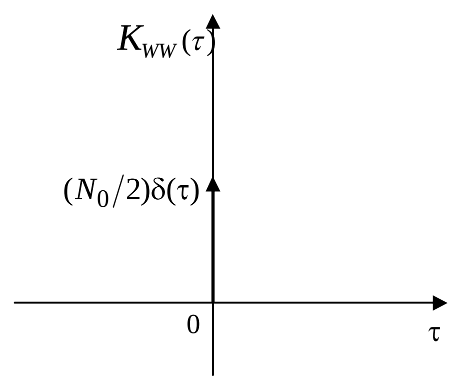
$$K_{WW}(\tau) = \mathrm{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\right\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau).$$

Như vậy hàm tự tương quan của nhiễu trắng tỉ lệ với hàm delta tập trung tại $\tau = 0$ với hằng số tỉ lệ $\frac{N_0}{2}$. Do đó $K_{WW}(\tau) = 0$ khi $\tau \neq 0$, nói cách khác hai mẫu tại hai thời điểm khác nhau của nhiễu trắng là không tương quan.

Quá trình nhiễu trắng không phải là một quá trình vật lý có thực vì có công suất bằng ∞.
Trong quang học, mật độ phổ năng lượng của ánh sáng trắng là không đổi $\mathrm{P}(\upsilon)$ = hằng số với mọi tần số υ (Năng lượng ánh sáng trắng phân bố đều theo mọi tần số υ). Vì vậy nhiễu với mật độ phổ hằng số được gọi là nhiễu trắng.



M□t □□ ph□ nhi□u tr□ng



Hàm t□ t□□ng quan nhi□u tr□ng

Hình 4.5: *M□t □□ ph□ và hàm t□ t□□ng quan c□a nhi□u tr□ng*

4.4 TRUNG BÌNH THEO THỜI GIAN VÀ TÍNH CHẤT ERGODIC

Định nghĩa 4.7: Trung bình theo thời gian của hàm số $x(t), t \in \mathbb{R}$ được định nghĩa và ký hiệu

$$A\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \quad \textbf{(4.52)}$$

Toán tử

$$A\left[\,\cdot\,\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left[\,\cdot\,\right]dt \quad \textbf{(4.53)}$$

gọi là toán tử trung bình theo thời gian. Toán tử A tương tự toán tử kỳ vọng E (trung bình theo tập hợp) của các biến ngẫu nhiên. Thực hiện toán tử trung bình theo thời gian theo các hàm mẫu $x(t)$ của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ ta được trung bình theo thời gian và hàm tự tương quan theo thời gian xác định như sau

$$\overline{x} = A\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \quad \textbf{(4.54)}$$

$$\mathsf{R}_{XX}(\tau) = A\left[x(t)x(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt \quad \textbf{(4.55)}$$

Trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp được gọi là tính ergodic. Quá trình ngẫu nhiên có tính ergodic được gọi là quá trình ergodic. Quá trình dừng là quá trình ergodic nếu

$$\overline{x} = \mathrm{E}\left[X(t)\right] = m \text{ và } \mathsf{R}_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) = \mathrm{E}\left[X(t)X(t+\tau)\right].$$

Giả thiết Ergodic cho rằng trung bình theo thời gian ở các cấp trùng với trung bình theo tập hợp cùng cấp tương ứng. Giả thiết này đáng tiếc là không phải luôn đúng như một số các nhà kỹ thuật đầu thế kỷ 20 tin tưởng. Khoảng năm 1931 hai nhà toán học G. D. Birkhoff (Mỹ) và A. Ia. Khintchine (Nga) đã chứng minh rằng trung bình theo thời gian luôn luôn tồn tại và chỉ ra các điều kiện để nó trùng với trung bình tập hợp.

Định lý sau đây cho điều kiện cần và đủ để trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp.

Định lý 4.8: Quá trình dừng thời gian rời rạc $\left\{X(n); n \ge 0\right\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(n)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n} C_{XX}(m) = 0. \quad \textbf{(4.56)}$$

Định lý 4.9: Quá trình dừng $\left\{X(t); t \in \mathbb{R}\right\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T} C_{XX}(t-s)dtds = 0. \quad \textbf{(4.57)}$$

Hệ quả 4.10: Quá trình dừng $\left\{X(t); t \in \mathbb{R}\right\}$ với hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)C_{XX}(t)dt=0. \qquad \textbf{(4.58)}$$

Hệ quả 4.11: Nếu $\lim\limits_{\tau\to\infty}C_{XX}(\tau)=0$ thì quá trình $\left\{X(t);t\in\mathbb{R}\right\}$ là ergodic.

Ví dụ 4.16: Xét quá trình ngẫu nhiên $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$. Trong đó A, ω_0 là hai hằng số. Θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ với hàm mật độ

$$f_\Theta(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & \text{nÕu}\quad 0\le u\le 2\pi\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$$

$$\mathrm{E}\left[X(t)\right]=\mathrm{E}\left[A\cos(\omega_0 t+\Theta)\right]=A\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t+u)f_\Theta(u)du=A\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+u)\frac{1}{2\pi}du=0$$

$$\begin{aligned}R_{XX}(t,t+\tau)&=\mathrm{E}\left[X(t)X(t+\tau)\right]=\mathrm{E}\left[A\cos(\omega_0 t+\Theta)A\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\right]\\&=\frac{A^2}{2}\mathrm{E}\left[\cos\left(\omega_0(2t+\tau)+2\Theta\right)+\cos\omega_0\tau\right]\\&=\frac{A^2}{2}\left(\mathrm{E}\left[\cos\left(\omega_0(2t+\tau)+2\Theta\right)\right]+\mathrm{E}\left[\cos\omega_0\tau\right]\right)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\end{aligned}$$

Như vậy $\left\{X(t)\right\}$ là một quá trình dừng với hàm tự hiệp phương sai $C_{XX}(\tau)=\dfrac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau d\tau&=\frac{A^2}{2T}\left(\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\bigg|_0^T-\frac{1}{T}\left(\tau\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\bigg|_0^T+\frac{\cos\omega_0\tau}{\omega_0}\bigg|_0^T\right)\right)\\&=\frac{A^2}{2T}\left(\frac{\sin\omega_0 T}{\omega_0}-\frac{\sin\omega_0 T}{\omega_0}+\frac{1-\cos\omega_0 T}{T\omega_0}\right)\to 0 \text{ khi } T\to\infty\end{aligned}$$

Theo hệ quả 4.10 $\left\{X(t)\right\}$ là một quá trình dừng thoả mãn điều kiện (4.58) do đó là một quá trình ergodic.

Ta cũng có thể kiểm chứng điều này bằng cách tính trực tiếp như sau: Vì quá trình tuần hoàn theo thời gian với chu kỳ $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ nên trung bình theo thời gian

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}A\cos(\omega_0 t+\theta)dt=\frac{1}{T_0}\left(A\;\frac{\sin(\omega_0 t+\theta)}{\omega_0}\bigg|_0^{T_0}\right)=0=\mathrm{E}\left[X(t)\right]$$

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}A^2\cos^2(\omega_0 t+\theta)dt=\frac{A^2}{2}=K_{XX}(0)=\mathrm{E}\left[X^2(t)\right].$$

Nhận xét 4.5: Tính ergodic là một dạng rất hạn chế của tính dừng và thật khó khăn để kiểm tra xem trong tình huống vật lý cụ thể nào thì giả thiết ergodic thỏa mãn. Dù sao chúng ta vẫn thường giả thiết quá trình là ergodic để đơn giản hóa. Trong thế giới thực, chúng ta vẫn buộc lòng phải làm việc với hàm mẫu của quá trình vì hầu như ta chỉ nhận được các hàm mẫu của quá trình. Khi ấy, dù muốn hay không ta cũng chỉ nhận được các giá trị trung bình, hàm tự tương quan theo thời gian. Từ giả thiết ergodic ta có thể xem các giá trị nhận được là các thống kê của quá trình. Nhiều người cảm thấy khó chấp nhận những lời bàn luận này, tuy nhiên cần phải nhớ rằng, lý thuyết của chúng ta chỉ để mô hình hóa những điều xảy ra trong thế giới thực.

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1 Quá trình ngẫu nhiên $\{X(t); t \in I\}$ là một hàm số của biến số t.

Đúng S ☐ . ☐

4.2 Mọi quá trình có gia số độc lập là quá trình Markov.

Đúng S ☐ . ☐

4.3 Chuỗi Markov là quá trình Markov $\{X(t); t \in I\}$ có không gian trạng thái E đếm được.

Đúng S ☐ . ☐

4.4 Ma trận xác suất chuyển sau n bước của một chuỗi Markov bằng tích n lần ma trận xác suất chuyển một bước của chuỗi Markov này.

Đúng S ☐ . ☐

4.5 Nếu tồn tại phân bố giới hạn thì nó là phân bố dừng duy nhất.

Đúng S ☐ . ☐

4.6 Mọi chuỗi Markov có hữu hạn trạng thái luôn tồn tại phân bố dừng duy nhất đó là phân bố ergodic.

Đúng S ☐ . ☐

4.7 Hàm trung bình $m(t) = \mathrm{E}X(t), \forall\, t \in I$ của quá trình ngẫu nhiên $\{X(t)\}_{t \in I}$ là một biến ngẫu nhiên.

Đúng S ☐ . ☐

4.8 Trung bình theo thời gian của quá trình ngẫu nhiên $\{X(t)\}_{t \in I}$ là $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$, trong đó $x(t)$ là một hàm mẫu của $\{X(t)\}_{t \in I}$.

Đúng S ☐ . ☐

4.9 Hàm tự tương quan của một quá trình dừng $\{X(t)\}_{t \in I}$, là một hàm 2 biến theo thời gian.

Đúng S ☐ . ☐

4.10 Mật độ phổ của quá trình dừng bằng biến đổi Fourier của hàm tự tương quan.

Đúng S ☐ . ☐

4.11 Hàm tự tương quan của quá trình dừng bằng biến đổi Fourier của mật độ phổ của quá trình.

Đúng S ☐ . ☐

4.12 Quá trình dừng có hàm trung bình là hàm hằng nên trung bình theo thời gian bằng trung bình theo tập hợp.

Đúng ☐ . ☐

4.13 Cho quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, các biến ngẫu nhiên X_n độc lập, có cùng phân bố với hàm phân bố $F_X(x)$, kỳ vọng μ và phương sai σ^2.

a. Tìm hàm phân bố đồng thời của $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

b. Tìm hàm trung bình $\mathrm{E}\left[X_n\right]$.

c. Tìm hàm tự tương quan của X_n.

d. Tìm hàm tự hiệp phương sai của X_n.

4.14 Cho chuỗi Markov $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ với không gian trạng thái $E = \{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Biết phân bố xác suất ban đầu:

$$p_0 = P\{X_0 = 0\} = 0,3; p_1 = P\{X_0 = 1\} = 0,4; p_2 = P\{X_0 = 2\} = 0,3$$

a. Tính $P\{X_0 = 0, X_1 = 2, X_2 = 1\}$.

b. Tính $P\{X_2 = 2 | X_0 = 1\}$ và $P\{X_0 = 1, X_2 = 2\}$.

4.15 Giả sử $P = \left[p_{ij}\right] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$ là một ma trận Markov, (là ma trận thỏa mãn điều kiện $p_{ij} \geq 0;\ \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ \forall i = 1,...,m$).

Chứng minh rằng P^n cũng là ma trận Markov, với mọi số tự nhiên dương n.

4.16 Cho chuỗi Markov $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ với không gian trạng thái $E = \{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

a. Tính ma trận xác suất chuyển 2 bước.

b. Tính $P\left\{X_3 = 1 \middle| X_1 = 0\right\}$; $P\left\{X_3 = 1 \middle| X_0 = 0\right\}$.

c. Tìm phân bố dừng.

4.17 Xét bài toán truyền một bức điện gồm các tín hiệu 0, 1 thông qua kênh có nhiều trạm và mỗi trạm nhận sai tín hiệu với xác suất không đổi bằng $\alpha \in (0,1)$. Giả sử X_0 là tín hiệu truyền đi và X_n là tín hiệu nhận được tại trạm n. Cho biết $\left\{X_n; n = 0,1,2,...\right\}$ lập thành chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

a. Tính $P\left\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\right\}$.

b. Tính $P\left\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\right\} + P\left\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0\right\}$.

c. Tính $P\left\{ X_5 = 0 \middle| X_0 = 0\right\}$.

4.18 Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E = \left\{a,b,c,d\right\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0.3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}$$

a. Tìm xác suất chuỗi đi theo đường đi: $b-a-b-c-b-a$.

b. Tính $P\left\{X_1 = a, X_3 = c, X_4 = b, X_5 = a \middle| X_0 = b\right\}$.

c. Tính $P^{(5)}$.

d. Tính $P\left\{X_5 = a \middle| X_0 = b\right\}$.

e. Tìm $\mathbf{P}(5)$ biết $\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$.

4.19 Xét chuỗi Markov với không gian trạng thái $E = \left\{0,1\right\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},\ 0 < a < 1,\ 0 < b < 1.$$

Giả sử phân bố đầu $P\left\{X_0 = 0\right\} = P\left\{X_0 = 1\right\} = 0,5$.

a. Tìm phân bố dừng.

b. Tìm phân bố của X_n.

c. Tìm phân bố giới hạn.

4.20 Xét mô hình kiểm kê phụ tùng thay thế với $s = 0$ và $S = 3$ là các mức căn cứ để nhập hàng cùng với ξ_n là lượng hàng khách yêu cầu trong chu kỳ n. Biết rằng

$$P\{\xi_n = 0\} = 0,4;\ P\{\xi_n = 1\} = 0,3;\ P\{\xi_n = 2\} = 0,3 \text{ với mọi } n.$$

Xác định ma trận xác suất chuyển của chuỗi Markov $\{X_n\}$, trong đó X_n là số phụ tùng còn lại tại cuối chu kỳ n.

4.21 Hai công ti *A* và *B* cung cấp cho thị trường cùng một loại sản phẩm. Hiện tại công ti *A* chiếm 60% và công ti *B* chiếm 40% thị phần. Mỗi năm *A* mất 2/3 thị phần của mình cho *B* và *B* mất 1/2 thị phần cho *A*. Tìm tỉ lệ thị phần hai công ti chiếm được sau hai năm.

4.22 Mỗi một người dân của thị trấn *N* có một trong ba nghề (*A*, *B*, *C*). Con cái họ nối tiếp nghề của cha mình với xác suất tương ứng là $(3/5,\ 2/3,\ 1/4)$. Nếu không theo nghề của cha thì chúng chọn một trong hai nghề còn lại với xác suất như nhau. Hãy tìm:

a. Phân bố theo nghề nghiệp của dân cư thị trấn ở thế hệ tiếp theo, nếu thế hệ hiện tại có tỉ lệ theo nghề nghiệp là 20% có nghề *A*, 30% có nghề *B* và 50% có nghề *C*.

b. Phân bố giới hạn theo nghề nghiệp của dân cư thị trấn ở thế hệ tương lai xa.

4.23 Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \Theta)$, A_0, ω_0 là hai hằng số và Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên khoảng $(-\pi, \pi)$. Xét quá trình ngẫu nhiên mới $Y(t) = X^2(t)$.

a. Tìm hàm tự tương quan của $Y(t)$.

b. Tìm hàm tự tương quan chéo của $X(t)$ và $Y(t)$.

c. $X(t)$ và $Y(t)$ có phải là hai quá trình dừng không?

d. $X(t)$ và $Y(t)$ có phải là hai quá trình dừng liên kết cùng nhau không?

4.24 Cho quá trình ngẫu nhiên $Y(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)$; trong đó biên độ $X(t)$ là một quá trình dừng, tần số góc ω_0 không đổi và pha Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên khoảng $(-\pi, \pi)$, Θ và $X(t)$ độc lập.

a. Tìm hàm trung bình $\mathrm{E}[Y(t)]$.

b. Tìm hàm tự tương quan của $Y(t)$.

c. $Y(t)$ có phải là quá trình dừng không?

4.25 Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, trong đó ω_0 là hằng số; *A* và *B* là hai biến ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng 0, không tương quan, có phương sai bằng nhau và bằng σ^2. Chứng minh rằng $X(t)$ là quá trình dừng (theo nghĩa rộng) nhưng không dừng theo nghĩa chặt.

4.26 Cho $\{X(t)\}_{t\in I}$ là một quá trình dừng với hàm trung bình $\mathrm{E}X(t) = m, \forall t$. Chứng minh rằng $\{Y(t)\}_{t\in I}$, $Y(t) = X(t) - m$ là quá trình dừng có hàm trung bình $\mathrm{E}Y(t) = 0, \forall t$ và hàm tự tương quan $K_{YY} = K_{XX}$.

4.27 Cho $\{X(t)\}_{t\in I}$ là một quá trình cấp 2 có tính chất $\mathrm{E}X(s)$ và $\mathrm{E}\left[X(s)X(s+t)\right]$ không phụ thuộc vào s. Chứng minh rằng $\{X(t)\}_{t\in I}$ là quá trình dừng.

4.28 Cho $\{X(t)\}_{t\in I}$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(\tau)$. Chứng minh rằng $\{Y(t)\}_{t\in I}$, $Y(t) = X(t+1) - X(t)$ cũng là quá trình dừng. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan.

4.29 Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trong khoảng $(0, 2\pi)$, A_0, ω_0 là hai hằng số. Chứng minh rằng $X(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \Theta)$ là một quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan. Quá trình $X(t)$ có phải là quá trình ergodic?

4.30 Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $[0, 2\pi]$, R là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f_R(r) = \begin{cases} \dfrac{r}{\sigma^2} e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}, & \text{nếu } \; 0 < r < \infty \\ 0, & \text{nếu } \; r \le 0 \end{cases}$.

Giả sử Θ và R độc lập, $\lambda > 0$. Chứng minh rằng $X(t) = R\cos(\lambda t + \Theta)$ là một quá trình dừng với trung bình 0 và hàm tự tương quan $K_{XX}(t) = \sigma^2 \cos \lambda t$.

4.31 Cho A là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $\mathrm{N}(0; \sigma^2)$. Đặt $X(t) = A\cos(\pi t)$.

a. Tìm hàm mật độ xác suất của $X(0)$ và $X(1)$.

b. Quá trình $\{X(t)\}_{t\in I}$ có phải là quá trình dừng theo nghĩa gì không?

4.32 Cho Z_1 và Z_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất $P\{Z_1 = -1\} = P\{Z_1 = 1\} = \dfrac{1}{2}$. Đặt $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$, λ là hằng số. Chứng minh $\{X(t)\}_{t\in I}$ là quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan.

4.33 Cho hai quá trình dừng $X(t)$, $Y(t)$ có trung bình bằng 0, độc lập nhau và có hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau) = e^{-|\tau|}$, $R_{YY}(\tau) = \cos(2\pi\tau)$.

a. Tìm hàm tự tương quan của tổng $W_1(t) = X(t) + Y(t)$.

b. Tìm hàm tự tương quan của hiệu $W_2(t) = X(t) - Y(t)$.

c. Tìm hàm tương quan chéo của $W_1(t)$ và $W_2(t)$.

4.34 Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\Theta)$, A_0,ω_0 là hai hằng số và Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên khoảng $\left(0,\pi\right)$.

a. $X(t)$ có phải là quá trình dừng không?

b. Tìm công suất của $X(t)$.

c. Tìm mật độ phổ công suất và mật độ phổ của $X(t)$.

4.35 Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$, trong đó ω_0 là hằng số

a. Chứng minh rằng nếu *A* và *B* là hai biến ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng 0, không tương quan, có phương sai bằng nhau thì $X(t)$ là quá trình dừng.

b. Tìm hàm tự tương quan của $X(t)$.

c. Tìm mật độ phổ công suất của $X(t)$.

4.36 Cho quá trình dừng $\left\{X(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ có trung bình $\mathrm{E}X(n)=2$ và hàm tự tương quan $K_X(n)=\dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{|n|}$. Tìm mật độ phổ.

4.37 Cho $W(t)$ là quá trình Wiener với tham số σ^2. Đặt $X(t)=e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t})$, $\alpha>0$ là hằng số. Chứng minh rằng $X(t)$ là quá trình Gauss dừng với hàm tự tương quan $K_{XX}(t)=\sigma^2 e^{-\alpha|t|}$, $-\infty<t<\infty$. Tìm mật độ phổ.

4.38 Cho quá trình dừng ergodic $X(t)$ có mật độ phổ $\mathsf{P}_{XX}(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^2}(B-|f|), & \text{nÕu } |f|\le B\\ 0, & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$.

Tìm hàm tự tương quan.

4.39 Tìm mật độ phổ của quá trình dừng có hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau)=P\cos^4(\omega_0\tau)$, trong đó P, ω_0 là hai hằng số. Tìm công suất của quá trình.

4.40 Tìm công suất trung bình của hai quá trình dừng có mật độ phổ công suất tương ứng sau

a. $\mathsf{P}_{XX}(f)=\dfrac{24\pi^2 f^2}{1+16\pi^4 f^4}$.

b. $\mathsf{P}_{YY}(f)=\dfrac{24\pi^2 f^2}{\left(1+4\pi^2 f^2\right)^3}$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG 1

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10
Sai	Đúng	Sai	Đúng	Đúng	Đúng	Sai	Đúng	Sai	Sai

1.11 **a.** $1-4i$ **b.** $-\frac{3}{5}i$ **c.** 25

d. $-9-46i$ **e.** -1 **f.** $\frac{16}{5}-\frac{2}{5}i$.

1.12 **a.** $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **b.** $2,\ -1+i,\ -1-i$ **c.** $3,\ \frac{1}{2},\ -1+i,\ -1-i$.

1.13 **a.** $z=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}},\ k=0,1,2$ **b.** $z=2e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}},\ k=0,1,2$.

1.15 **a.** Đường tròn tâm (3;4) bán kính 2.

b. Nửa đường thẳng gốc tại $z=i$ và tạo với trục thực góc .

c. Ellipse với tiêu điểm $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$ độ dài trục lớn $2a=6$.

d. Đường tròn tâm (2;0) bán kính 2.

e. Nhánh của Hyperbol $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ với $x\ge 3$.

f. Nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng $y=3$, kể cả đường thẳng đó.

g. Miền nằm ngoài đường tròn tâm (0;-2) bán kính 2 (kể cả đường tròn này) và nằm ngoài đường tròn tâm (0;-2) bán kính 1.

h. Miền giới hạn bởi hai nửa tia xuất phát từ gốc lập với trục thực góc $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{\pi}{2}$, kể cả hai nửa tia này.

1.16 **a.** $u(x,y)=x^3-3xy^2,\quad v(x,y)=3x^2y-y^3$.

b. $u(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2},\quad v(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$.

c. $u(x,y)=e^{3x}\cos 3y,\quad v(x,y)=e^{3x}\sin 3y$.

1.17 $w'(z)=1-\frac{1}{z^2}$, không giải tích tại $z=0$.

1.18 $u(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$. $\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hàm số không thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann tại mọi $z\ne 0$.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{w(\Delta z)-w(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\left|\Delta z\right|}{\Delta z}=0$$. Vậy $w'(0)=0$.

1.19 **a.** $w'(z)=4z^3$ **b.** $w'(z)=-\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$.

1.20 **a.** $v(x,y)=3x^2y-y^3+C$, $w(z)=z^3+Ci$.

b. $v(x,y)=2xy+2y+C$, $w(z)=z^2+2z+Ci$.

c. $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+2x+C$, $w(z)=\dfrac{1}{z}+2iz+Ci$.

1.21 **a.** $u(x,y)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}+C$, $w(z)=\dfrac{1}{z+1}+C$.

b. $u(x,y)=x^2-y^2-3y+C$, $w(z)=z^2+3iz+C$.

c. $u(x,y)=3e^x\cos y+x-y+C$, $w(z)=3e^z+(1+i)z+C$.

1.22 $I=\int\limits_C |z|dz=\int\limits_C\sqrt{x^2+y^2}\left(dx+idy\right)$.

a. $C:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx=2\int\limits_0^1 xdx=1$.

b. $C:\begin{cases}x=\cos(\pi-t)\\ y=\sin(\pi-t)\ ;\ 0\le t\le\pi\end{cases}\Rightarrow I=\int\limits_0^{\pi}\left(\sin(\pi-t)-i\cos(\pi-t)\right)dt=2$.

1.23 **a.** $I=0$ **b.** $I=\dfrac{14}{15}-\dfrac{i}{3}$.

1.24 **a.** $I=2\pi i\cos\pi=-2\pi i$.

b. $I=\oint\limits_C\dfrac{e^z}{z(z+1)}dz=\oint\limits_C e^z\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+1}\right)dz=2\pi i\left(e^0-e^{-1}\right)$.

1.25 **a.** $I=0$ **b.** $I=2\pi i$.

1.26 **a.** $\dfrac{e^{-2}-e^{-4}}{2}$ **b.** $\dfrac{\pi}{2}$.

1.27 $I=\left.\dfrac{z^2}{2}\right|_{z=-2}^{2}=0$.

1.28 $C:\left|z-1\right|=1\Rightarrow I=\oint\limits_C\dfrac{\dfrac{\sin(\pi z/4)}{z+1}}{z-1}dz=2\pi i\left.\left(\dfrac{\sin(\pi z/4)}{z+1}\right)\right|_{z=1}=\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$.

1.29 $C:4x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow I=\oint\limits_C\dfrac{\dfrac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz=2\pi i\left.\left(\dfrac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right)'\right|_{z=i}=\dfrac{\pi}{2}\left(\pi i-1\right)$.

1.30 **a.** $I = \oint_C \dfrac{\dfrac{1}{(z+1)^3}}{(z-1)^3} dz = \dfrac{2\pi i}{2!}\left(\dfrac{1}{(z+1)^3}\right)''\Bigg|_{z=1} = \dfrac{3\pi i}{8}$.

b. $I = \oint_C \dfrac{\dfrac{1}{(z-1)^3}}{(z+1)^3} dz = \dfrac{2\pi i}{2!}\left(\dfrac{1}{(z-1)^3}\right)''\Bigg|_{z=-1} = -\dfrac{3\pi i}{8}$. **c.** $I = 0$.

1.31 $I = \dfrac{2\pi i}{3!}\left(e^z + z\right)'''\Big|_{z=1} = \pi i \dfrac{e}{3}$.

1.32 $I = \dfrac{2\pi i}{2!}\left(5z^2 - 3z + 2\right)''\Big|_{z=1} = 10\pi i$.

1.33 **a.** $R = 2;\ z = 2e^{i\varphi} \Rightarrow \left|\dfrac{z^n}{n^2 2^n}\right| = \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$ miền hội tụ $|z| \le 2$.

b. Đặt $u = z^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} z(-1)^n \dfrac{u^n}{(2n+1)!}$ hội tụ với mọi z.

c. Đặt $u = z - i$; miền hội tụ $|z - i| < 3$.

d. Đặt $u = (z-i)^3; R = 3, u = 3e^{i\varphi} \Rightarrow \dfrac{u^n}{3^n + n} = \dfrac{e^{in\varphi}}{1 + \dfrac{n}{3^n}} \not\to 0$: miền hội tụ $|z - i| < \sqrt[3]{3}$

e. $z = -1 \pm i$

1.34 **a.** Cách 1: $w' = e^{\frac{1}{1-z}} \dfrac{1}{(1-z)^2}$, $w'' = e^{\frac{1}{1-z}}\left(\dfrac{1}{(1-z)^4} + \dfrac{2}{(1-z)^3}\right)$,

$$w''' = e^{\frac{1}{1-z}}\left(\frac{1}{(1-z)^6} + \frac{2}{(1-z)^5} + \frac{4}{(1-z)^5} + \frac{6}{(1-z)^4}\right)$$

$$\Rightarrow\ w = e\left(1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \cdots\right).$$

Cách 2: $e^{\frac{1}{1-z}} = e^{1+z+z^2+z^3+0(z^3)} = e\, e^{z+z^2+z^3+0(z^3)}$

$$= e\left(1 + \frac{z+z^2+z^3+0(z^3)}{1!} + \frac{\left(z+z^2+z^3+0(z^3)\right)^2}{2!} + \frac{\left(z+z^2+z^3+0(z^3)\right)^3}{3!} + 0(z^3)\right)$$

$$= e\left(1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + 0(z^3)\right).$$

b. $w = \sin\left(1 + z + z^2 + z^3 + 0(z^3)\right)$

$= \sin 1 \cos\left(z + z^2 + z^3 + 0(z^3)\right) - \sin\left(z + z^2 + z^3 + 0(z^3)\right)\cos 1$

$\Rightarrow\ w = \sin 1 + \cos 1 z + \left(\cos 1 - \dfrac{1}{2}\sin 1\right)z^2 + \left(\dfrac{5}{6}\cos 1 - \sin 1\right)z^3 + \cdots$

1.35 $w = \dfrac{2/3}{z-1} + \dfrac{1/3}{z+2}$

a. $w = \dfrac{1}{6}\left(1 - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^3}{8} + \cdots\right) + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3} + \cdots\right)$

b. $w = \dfrac{1}{6}\left(1 - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^3}{8} + \cdots\right) - \dfrac{2}{3}\left(1 + z + z^2 + \cdots\right)$

c. $w = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{4}{z^3} - \cdots\right) + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3} + \cdots\right)$.

1.36 **a.** Đặt $u = z - 1 \Rightarrow w = e\left(\dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{z-1}{3!} + \dfrac{(z-1)^2}{4!} + \cdots\right)$

$z = 1$ là cực điểm bậc 2, chuỗi hội tụ với mọi $z \neq 1$.

b. $w = z\left(1 - \dfrac{1}{2!z^2} + \dfrac{1}{4!z^4} - \dfrac{1}{6!z^6} + \cdots\right) = z - \dfrac{1}{2!z} + \dfrac{1}{4!z^3} - \dfrac{1}{6!z^5} + \cdots$

$z = 0$ là điểm cô lập cốt yếu, chuỗi hội tụ với mọi $z \neq 0$.

c. $w = \dfrac{\sin(z - \pi + \pi)}{z - \pi} = -\dfrac{\sin(z-\pi)}{z-\pi} = -1 + \dfrac{(z-\pi)^2}{3!} - \dfrac{(z-\pi)^4}{5!} + \cdots$

$z = \pi$ là điểm cô lập bỏ được, chuỗi hội tụ với mọi z.

d. $w = \dfrac{-1}{z+1} + \dfrac{2}{z+2} = \dfrac{-1}{z+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n$

$z = -1$ là cực điểm đơn, chuỗi hội tụ trong vành khăn $0 < |z+1| < 1$.

e. Tại $z = 0$, xét $f(z) = (z+2)^{-3} \Rightarrow f^{(n)}(z) = \dfrac{(-1)^n(n+2)!}{2(z+2)^{n+3}}$

$\Rightarrow\ w = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{16}z + \dfrac{3}{16}z^2 - \dfrac{5}{32}z^3 + \cdots\right)$

$z = 0$ là cực điểm đơn, chuỗi hội tụ trong vành khăn $0 < |z| < 2$.

Tại $z = -2$, xét $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z+2-2} = \dfrac{-1}{1 - \dfrac{z+2}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{2^n}$

$\Rightarrow\ w = -\dfrac{1}{2(z+2)^3} - \dfrac{1}{4(z+2)^2} - \dfrac{1}{8(z+2)} - \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32}(z+2) - \dfrac{1}{64}(z+2)^2 - \cdots$

$z=-2$ là cực điểm bậc 3, chuỗi hội tụ trong vành khăn $0<|z+2|<2$.

1.37 $I=\oint_C \frac{z^2}{(z+1)(z+3)}dz=\frac{1}{2}\left(\oint_C \frac{z^2}{z+1}dz-\oint_C \frac{z^2}{z+3}dz\right)=-8\pi i$.

1.38 $I=\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z=1}+2\pi i\left(\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\right)\Bigg|_{z=i}=-\frac{\pi i}{2}$.

1.39 Phương trình $z^4+1=0$ chỉ có hai nghiệm $\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ nằm trong đường tròn C (xem ví dụ 10). Áp dụng công thức (1.71) ta có $I=\oint_C \frac{dz}{z^4+1}=2\pi i\left(\frac{1}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3}+\frac{1}{4\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3}\right)=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$.

1.40 **a.** $I=2\pi i\left(\left[\operatorname{Res}\frac{z^2+1}{z^4+1};\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{z^2+1}{z^4+1};\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right]\right)$

$$=2\pi i\left(\frac{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2+1}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3}+\frac{\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2+1}{4\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3}\right)=\sqrt{2}\pi.$$

b. $I=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=i}=\frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-2}\left((n-1)!\right)^2}$.

c. $I=\frac{\pi}{9}$ **d.** $I=\frac{2\pi}{3a^5}$.

1.41 Áp dụng công thức (1.76).

a. $I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i\left[\operatorname{Res}\frac{ze^{i2z}}{z^2+4};z=2i\right]\right)=\frac{\pi e^{-4}}{2}$.

b. $I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}2\pi i\left(\left[\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2};z=i\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2};z=0\right]\right)=\frac{\pi(2e-3)}{4e}.$$

c. $I=\frac{\pi e^{-2\pi}}{8}$ **d.** $I=\frac{\pi^2e^{-\pi}}{4}$.

1.42 Áp dụng công thức (1.77).

a. $I=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ **b.** $I=\frac{\pi}{8}$ **c.** $I=\pi\sqrt{2}$ **d.** $I=\frac{2\pi a^n}{1-a^2}$.

1.44 **a.** $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in\omega}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}}{z}\right)^n=\frac{z}{z-e^{i\omega}}$; $|z|>1$.

b. Ta có $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-na}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^a z}\right)^n=\frac{e^a z}{e^a z-1}$; $|z|>e^{-a}$.

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-na}z^{-n}=-z\left(\frac{e^a z}{e^a z-1}\right)'=\frac{e^a z}{(e^a z-1)^2}\ ;\ |z|>e^{-a}.$$

1.45 **a.** $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n\eta(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}a^nz^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n=\frac{a}{a-z}$; $|z|<|a|$.

b. $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-a^n\eta(-n-1)z^{-n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{n+1}=\frac{z}{z-a}$; $|z|<|a|$.

c. $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{n+1}=\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}$; $\forall z$.

1.46 Trong miền $|z|>\frac{1}{2}$;

$$X(z)=\frac{4}{z^3(2z-1)}=\frac{2}{z^4\left(1-\frac{1}{2z}\right)}=\frac{2}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2^{n-5}}z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n)=\frac{1}{2^{n-5}}\eta(n-4).$$

1.47 **a.** $X(z)=\frac{2z}{2z-1}$, $|z|>\frac{1}{2}$.

b. $X(z)=\frac{z^6-1}{z^6-z^5}$, $|z|>0$.

c. $X(z)=\frac{a^2+a-z}{z(z-a)}$, $|z|>a$.

1.48 **a.** $X(z)=\frac{zTe^{aT}}{(ze^{aT}-1)^2}$ **b.** $X(z)=\frac{z(z+a)}{(z-a)^3}$

c. $X(z)=\frac{z-\cos 1}{z\left(z^2-2z\cos 1+1\right)}$ **d.** $X(z)=\frac{z\left[z\sin\theta+\sin(\omega_0T-\theta)\right]}{z^2-2z\cos(\omega_0T)+1}$

e. $X(z)=\frac{z}{z+1}$

1.49 **a.** $x(n)=8-8\left(\frac{1}{2}\right)^n-6n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **b.** $x(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ **c.** $x(n)=\frac{a^n}{n!}$

d. $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-10}\eta(n-10)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-11}\eta(n-11)$ e. $x(n)=\frac{1}{9}(6n-4)\left(-1\right)^n+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1.50 **a.** $x(n)=1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$ **b.** $x(n)=\frac{1}{2}n(n-1)$ **c.** $x(n)=\frac{1}{6}\left[5^n-(-1)^n\right]$

d. $x(n)=(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ e. $\begin{cases}x(n)=2+(-1)^n\\ y(n)=1+(-1)^n\end{cases}$ **f.** $\begin{cases}x(n)=1-2(-6)^n\\ y(n)=-7(-6)^n\end{cases}$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG 2

2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	2.10
Đúng	Sai	Đúng	Đúng	Sai	Sai	Đúng	Sai	Đúng	Đúng

2.11 Tìm biến đổi Laplace

a. $x(t)=\sin^3 t=\frac{3\sin t-\sin 3t}{4}\Rightarrow X(s)=\frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$.

b. $\cos^4\omega t=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\omega t+\frac{1}{8}\cos 4\omega t\Rightarrow X(s)=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{s}+\frac{4s}{s^2+4\omega^2}+\frac{s}{s^2+16\omega^2}\right)$

c. $\mathcal{L}\left\{\cosh 3t\right\}=\frac{s}{s^2-9}\Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cosh 3t\right\}=\frac{s+2}{(s+2)^2-9}$.

d. $x(t)=\left(1+te^{-t}\right)^3=1+3te^{-t}+3t^2e^{-2t}+t^3e^{-3t}$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{s}+\frac{3}{(s+1)^2}+\frac{6}{(s+2)^3}+\frac{6}{(s+3)^4}.$$

e. $x(t)=\cosh 2t\cos t=\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\cos t\Rightarrow X(s)=\frac{s^3-3s}{s^4-s^2+25}$.

f. $x(t)=e^{-t}\sin 2t\cos 4t=\frac{e^{-t}}{2}\left(\sin 6t-\sin 2t\right)$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{3}{s^2+2s+37}-\frac{1}{s^2+2s+5}.$$

2.12 Tìm biến đổi Laplace

a. $X(s)=-\left(\frac{s}{s^2-9}\right)'=\frac{s^2+9}{(s^2-9)^2}$.

b. $\mathcal{L}\left\{t\cos\omega t\right\} = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{t\cos\omega t\cosh at\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+a)^2-\omega^2}{\left((s+a)^2+\omega^2\right)^2} + \frac{(s-a)^2-\omega^2}{\left((s-a)^2+\omega^2\right)^2}\right).$$

c. $\mathcal{L}\left\{t^2\sin t\right\} = \left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)'' = \dfrac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}.$

d. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin 4t}{t}\right\} = 4\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin 4t}{4t}\right\} = \arctan\dfrac{4}{s}.$

e. $X(s) = \mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty \left(\frac{u}{u^2+a^2} - \frac{u}{u^2+b^2}\right)du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right).$

f. $X(s) = \mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty \left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\right)du = \ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right).$

2.13 Tìm biến đổi Laplace

a. $\mathcal{L}\left\{\cos^2 t\right\} = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\eta(t-b)\cos^2(t-b)\right\} = e^{-bs}\dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$

b. $x(t) = (t-1)^2\eta(t-1) \quad \Rightarrow X(s) = e^{-s}\dfrac{2}{s^3}.$

c. $x(t) = t\left(\eta(t) - \eta(t-1)\right) + (2-t)\left(\eta(t-1) - \eta(t-2)\right)$

$$= t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2) \quad \Rightarrow X(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}.$$

d. $x(t) = \cos t\left(\eta(t) - \eta(t-\pi)\right) + \sin t\,\eta(t-\pi)$

$$= \eta(t)\cos t + \eta(t-\pi)\left(\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi)\right) \Rightarrow X(s) = \frac{s+(s-1)e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

2.14 Tìm biến đổi Laplace

a. $\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{2}{s^3} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s+1}\right)$

b. $\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{s^3+s^2+\omega^2 s-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}.$

c. $x(t) = \cos t * e^{2t} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \dfrac{s}{(s-2)(s^2+1)}.$

d. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right)$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right\} = \frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s}\right).$$

2.15 Đặt $y(t) = \int_0^t x(u)du \;\Rightarrow\; Y(s) = \dfrac{X(s)}{s} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(t_1)dt_1\right\} = \dfrac{Y(s)}{s} = \dfrac{X(s)}{s^2}$.

2.16 a. Đặt $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tương tự ví dụ 2.47 ta được nghiệm

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{C}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = CJ_0(t)$, thay điều kiện đầu ta có

b. Sử dụng tính đồng dạng.

c. $\left(e^{2t}J_0(2t)\right)' = 2e^{2t}J_0(2t) + e^{2t}J'_0(2t)$. Từ phương trình suy ra $J'_0(0) = 0$.

$$\mathcal{L}\left\{\left(e^{2t}J_0(2t)\right)''\right\} = \frac{s^2}{\sqrt{(s-2)^2+4}} - s\left(e^{2t}J_0(2t)\right)\Big|_{t=0} - \left(e^{2t}J_0(2t)\right)'\Big|_{t=0} = \frac{s^2}{\sqrt{(s-2)^2+4}} - s - 2$$

d. Sử dụng tính chất dịch chuyển ảnh và đạo hàm ảnh.

e. Áp dụng công thức $\int_0^\infty e^{-st}J_0(t)dt = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, $\forall s > 0$.

2.17 Tìm biến đổi Laplace

a. $\dfrac{1}{s}\tanh\dfrac{s}{2}$

b. $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$

c. $\dfrac{1}{s^2}\tanh\dfrac{s}{2}$

d. $\dfrac{1}{s^2+1}\left(s + \dfrac{2}{e^{\frac{\pi}{2}s}(1-e^{-\pi s})}\right)$.

2.18 Áp dụng công thức định nghĩa biến đổi Laplace.

a. Sử dụng câu 2, c, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^3\sin t dt = \frac{24s(s^2-1)}{\left(s^2+1\right)^4}\bigg|_{s=1} = 0$.

b. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}dt = \arctan\frac{1}{s}\bigg|_{s=1} = \frac{\pi}{4}$.

c. Áp dụng câu 2. e, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+4^2}{s^2+6^2}\right)\bigg|_{s=0} = \ln\frac{2}{3}$.

d. Áp dụng câu 2. f, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt = \ln\left(\frac{s+6}{s+3}\right)\bigg|_{s=0} = \ln 2$.

e. $\mathrm{L}\left\{\dfrac{\sin^2 t}{t}\right\} = \mathrm{L}\left\{\dfrac{1-\cos 2t}{2t}\right\} = \dfrac{1}{2}\int\limits_s^{\infty}\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{u}{u^2+4}\right)du$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-ot}\, \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{2}\int\limits_s^{\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right)duds$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} du \int\limits_0^{u}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right)ds = \int\limits_0^{\infty}\left(1 - \frac{u^2}{u^2+4}\right)du = \arctan\frac{u}{2}\bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

2.19 Chứng minh theo quy nạp và sử dụng công thức sau:

a. $\left(\sin^{2n+1} t\right)'' = (2n+1)(2n)\sin^{2n-1} t - (2n+1)^2 \sin^{2n+1} t$.

b. $\left(\sin^{2n+2} t\right)'' = (2n+2)(2n+1)\sin^{2n} t - (2n+2)^2 \sin^{2n+2} t$.

2.20 Tìm hàm gốc

a. $\dfrac{s^2}{(s-1)^3} = \dfrac{(s-1+1)^2}{(s-1)^3} = \dfrac{1}{(s-1)^3} + \dfrac{2}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{s-1} \Rightarrow x(t) = e^t\left(1 + 2t + \dfrac{t^2}{2}\right)$.

b. $e^{-3t}\cos\sqrt{2}t$

c. $2e^{2t}\left(3\cos 4t + \sin 4t\right)$

d. $4e^{-4t}\left(1-t\right)$

e. $\cos 2t - t\sin 2t$

f. $e^{2t}\left[\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}t + \sqrt{2}\right)\sin\sqrt{2}t - 2t\cos\sqrt{2}t\right]$.

2.21 Tìm hàm gốc

a. $2e^t - 2\cos t + \sin t$.

b. $\dfrac{1}{s^3(s^3+1)} = \dfrac{1}{s^3} - \dfrac{1}{s^3+1} = \dfrac{1}{s^3} - \dfrac{1}{3(s+1)} + \dfrac{s-2}{3(s^2-s+1)}$

$$= \frac{1}{s^3} - \frac{1}{3(s+1)} + \frac{(s-1/2)-3/2}{3\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

c. $\dfrac{1}{5}e^{-t}\left(4\cos t - 3\sin t\right) - \dfrac{4}{5}e^{-3t}$

d. $-\dfrac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}\left(\dfrac{1}{3} + 4t - \dfrac{7t^2}{2}\right)$

e. $\dfrac{1}{3}e^{-t}\left(\sin t + \sin 2t\right)$

f. $\dfrac{1}{2a}\left(\sinh at + at\cosh at\right)$.

2.22 Tìm hàm gốc

a. $3 + \dfrac{t^2}{2} - e^{2t}\left(2\cos t + \sin t\right)$.

b. $\dfrac{1}{6}t^3\left(\eta(t) + e^{-3t}\eta(t-2)\right)$

c. $\eta(t-1/3)-\eta(t-1/3)\cos(t-1/3)$ **d.** $2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$

e. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{-\frac{3t}{2}}}{\sqrt{t}}$ **f.** $\dfrac{4\sqrt{(t-3)^3}e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}}\eta(t-3)$.

2.24 **a.** $x(t)=\dfrac{t^2e^t}{12}$ **b.** $x(t)=t^3e^{-t}$

c. $x(t)=-2\sin t-\cos 2t$ **d.** $x(t)=\dfrac{4}{5}\cos 3t+\dfrac{4}{5}\sin 3t+\dfrac{1}{5}\cos 2t$.

2.25 **a.** $x(t)=\cos at-2\dfrac{\sin at}{a}+f(t)*\dfrac{\sin at}{a}$

b. $x(t)=C_1\cosh at+C_2\dfrac{\sinh at}{a}+g(t)*\dfrac{\sinh at}{a}$.

2.26 $x(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

2.27 **a.** $\begin{cases} x(t)=2+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}e^{-t}-\dfrac{3}{2}\sin t+\dfrac{1}{2}\cos t \\ y(t)=1-\dfrac{1}{2}e^{-t}+\dfrac{3}{2}\sin t-\dfrac{1}{2}\cos t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{9}e^{-t}+\dfrac{4}{45}e^{2t}-\dfrac{2}{5}\sin t-\dfrac{1}{8}\cos t+\dfrac{1}{3}te^{-t} \\ y(t)=\dfrac{1}{9}e^{-t}-\dfrac{1}{9}e^{2t}+\dfrac{1}{3}te^{-t} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x(t)=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{5}{3}t-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-t} \\ y(t)=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}te^{-t}+\cos t \end{cases}$.

2.28 Phương trình ảnh $\left(16+\dfrac{50}{s}+2s\right)I=\mathcal{L}\{E\}$

Hay $\left(16+\dfrac{50}{s}+2s\right)(sQ-q(0))=\mathcal{L}\{E\}\Rightarrow\left(16s+50+2s^2\right)Q=\mathcal{L}\{E\}$.

a. $Q=\dfrac{150}{s(s^2+8s+25)}\Rightarrow q(t)=6-6e^{-4t}\cos 3t-8e^{-4t}\sin 3t$;

$i(t)=\dfrac{dq}{dt}=50e^{-4t}\sin 3t$.

b. $Q=\dfrac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$

$$\Rightarrow q(t)=\frac{25}{52}\big(2\sin 3t-3\cos 3t\big)+\frac{25}{52}e^{-4t}\big(2\sin 3t+3\cos 3t\big)$$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{75}{52}\big(2\cos 3t+3\sin 3t\big)-\frac{25}{52}e^{-4t}\big(17\sin 3t+6\cos 3t\big).$$

2.29 Áp dụng hai định luật Kirchoff ta có hệ phương trình ảnh

$$\begin{cases} I=I_1+I_2 \\ 30I+2sI_1+10I_1=\dfrac{110}{s} \\ 10I_1+2sI_1=20I_2+4sI_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1=2I_2 \\ I=3I_2 \\ I_2=\dfrac{55}{s(2s+55)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_2=1-e^{-\frac{55}{2}t} \\ i_1=2i_2=2-2e^{-\frac{55}{2}t} \\ i=3i_2=3-3e^{-\frac{55}{2}t} \end{cases}$$

2.30 Trở kháng ảnh tương đương Z thỏa mãn: $\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{R_1+Ls}+\dfrac{1}{R_2+\dfrac{1}{Cs}}$.

2.31 $q(t)=\sin 10t-2\cos 10t+e^{-10t}\big(\sin 10t+2\cos 10t\big)$.

2.32 Áp dụng các công thức (2.36)-(2.38) ta được nghiệm: $u(x,t)=3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x$.

2.33 **a.** $a_0=3,\ a_n=0;\ b_n=\dfrac{3\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi}$.

Chuỗi Fourier $\dfrac{3}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}t$.

b. $x(-5)=x(0)=x(5)=\dfrac{3}{2}$.

2.34 **a.** $x(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big(1-(-1)^n\big)\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{4}t$.

b. $x(t)=4+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big((-1)^n-1\big)\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{4}t$.

2.35 **a.** $x(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\big[(2n-1)\pi t\big]}{2n-1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\big[(2n-1)t-\pi/2\big]}{2n-1}$

b.

$$x(t)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left[nt+(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left[\left\{nt+\left[1+(-1)^n\right]\frac{\pi}{2}\right\}\right]$$

2.36 a. $x(t)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(2n-1)t}}{(2n-1)^2}$ b. $x(t)=1+\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty;n\neq 0}^{\infty}\frac{e^{n\pi it}}{n}$

c. $x(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2(2n-1)it}}{2n-1}$

2.37 **a.** Biến đổi Z: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3z}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3z}}=\frac{3z}{3z-1}$, $|z|>\frac{1}{3}$.

b. Biến đổi Fourier:

$$\widehat{X}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i2\pi nf}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3e^{i2\pi f}\right)^{-n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3e^{i2\pi f}}}=\frac{3e^{i2\pi f}}{3e^{i2\pi f}-1}=X(z)\Big|_{z=e^{i2\pi f}}.$$

c. $\frac{d}{df}\widehat{X}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i2\pi n)x(n)e^{-i2\pi nf}\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)e^{-i2\pi nf}=\frac{1}{-i2\pi}\frac{d}{df}\widehat{X}(f)$

$$\Rightarrow \widehat{Y}(f)=\frac{i}{2\pi}\frac{d}{df}\left(\frac{3e^{i2\pi f}}{3e^{i2\pi f}-1}\right)=\frac{3e^{i2\pi f}}{\left(3e^{i2\pi f}-1\right)^{2}}.$$

2.38 $x(n)=\int_{-1}^{1}\widehat{X}(f)e^{i2n\pi f}df=\int_{-1/4}^{1/4}e^{-i8\pi f}e^{i2n\pi f}df=\int_{-1/4}^{1/4}e^{i2\pi(n-4)f}df$

$$=2\int_{0}^{1/4}\cos\left(2\pi(n-4)f\right)df=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\sin\left((n-4)\pi/2\right)}{(n-4)\pi/2} & n\neq 4\\ \frac{1}{2} & n=4\end{cases}=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n-4}{2}\right).$$

2.39 **a.** $\widehat{X}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i2\pi ft}dt=2\int_{0}^{T}\cos\left(2\pi ft\right)dt=2T\operatorname{sinc}(2Tf)$.

b. $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda T\cos\lambda t}{\lambda}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda T}{\lambda}e^{i\lambda t}d\lambda$.

Đổi biến số $\lambda=2\pi f\Rightarrow I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi f}e^{i2\pi ft}2\pi df=\pi\,\mathrm{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\}=\begin{cases}\pi & |t|<T\\ \pi/2 & |t|=T\\ 0 & |t|>T\end{cases}$.

c. Sử dụng kết quả b. với $T=1,\ t=0\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=\frac{\pi}{2}$.

d. $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^{2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{X}(f)\right|^{2}df$

$$\Rightarrow 2T=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2}2\pi Tf}{(\pi f)^{2}}df=\frac{2T}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2}u}{u^{2}}du=\frac{4T}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^{2}u}{u^{2}}du\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^{2}u}{u^{2}}du=\frac{\pi}{2}.$$

2.40 Áp dụng công thức (2.93) tích phân Fourier cho hàm chẵn:

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\lambda t\,d\lambda\int_{0}^{\infty}x(u)\cos\lambda u\,du=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}(1-\lambda)\cos\lambda t\,d\lambda=\frac{2(1-\cos t)}{\pi t^{2}}.$$

2.41 Áp dụng công thức (2.93) tích phân Fourier cho hàm chẵn:

$$e^{-|t|} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda t\, d\lambda \int_0^\infty e^{-|u|}\cos\lambda u\, du \quad \text{và} \quad \int_0^\infty e^{-u}\cos\lambda u\, du = \mathcal{L}\left\{\cos\lambda t\right\}\Big|_{s=1} = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

2.42 **a.** $\widehat{X}(f) = i\dfrac{A}{2}T\left[\operatorname{sinc}T(f+f_0) - \operatorname{sinc}T(f-f_0)\right]$.

b. $\widehat{X}(f) = T\operatorname{sinc}^2(Tf)$.

2.43 **a.** $\widehat{X}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}}e^{-i2\pi ft}dt = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{t}{T}+i2\pi f\right)t}dt = \frac{T}{1+i2\pi Tf}$.

b. $\widehat{X}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{T}}e^{-i2\pi ft}dt = 2\int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}}\cos(2\pi ft)dt = \mathcal{L}\left\{\cos(2\pi ft)\right\}\Big|_{s=\frac{1}{T}} = \frac{2T}{1+(2\pi Tf)^2}$.

c. $\widehat{X}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi ft}}{t^2+a^2}dt = 2\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi ft)}{t^2+a^2}dt = \frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi fa)\lambda}{\lambda^2+1}d\lambda = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|f|}$.

d. $\widehat{X}(f) = 2\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\cos(2\pi ft)dt = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi f)-(2\pi f)\cos(2\pi f)}{2\pi^3 f^3} & f \neq 0 \\ 4/3 & f = 0 \end{cases}$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG 3

3.1	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**3.10**
Sai	Đúng	Đúng	Sai	Sai	Đúng	Đúng	Đúng	Sai	Sai

3.13 **a.** $\dfrac{16}{315}$ **b.** $\dfrac{4}{3}$ **c.** $-2\sqrt{\pi}$ **d.** $-\dfrac{8}{12}\sqrt{\pi}$

e. $-4\sqrt{2\pi}$ (sử dụng $\Gamma\left(-1/4\right) = -4\Gamma\left(3/4\right)$).

3.14 **a.** 3! **b.** Đổi biến số $y = 2x$ suy ra $\dfrac{\Gamma(7)}{2^7} = \dfrac{45}{8}$

3.15 **a.** Đổi biến số $x = y^3$ suy ra $\dfrac{1}{3}\Gamma(1/2) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{4\ln 3}}$

3.16 Đổi biến số $y = -\ln x = \ln\dfrac{1}{x}$.

3.17 $M = \dfrac{8R^3R^3R^3}{2^3}\cdot\dfrac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(1+9/2)} = \dfrac{4\pi R^9}{945}$.

3.18 Đổi biến và tính tương tự ví dụ 3.7.

3.19 $\dfrac{\pi abck}{30}(a^2+b^2+c^2)$, k là hằng số tỷ lệ.

3.20 $V = \dfrac{8\left[\Gamma(1/m)\right]^3}{3m^2\Gamma(3/m)}a^3$.

3.21 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\Gamma(2/m)\Gamma(3/m)}{\Gamma(1/m)\Gamma(4/m)}a$.

3.22 **a.** $\dfrac{1}{180}$ **b.** $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}$ **c.** $\dfrac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

3.23 **a.** $\dfrac{8}{315}$ **c.** $\dfrac{5\pi}{12}$ **c.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

3.22 **a.** Đặt $y = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = B(p, 1-p)$.

b. Đặt $x = y^p$ và áp dụng a.

3.28 **a.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$ **b.** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ **c.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3.29 a. Áp dụng công thức (1.90)

$$\left(1+z\right)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n + \cdots \text{ với } |z| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+z}} = \left(1+z\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}z^n$$

Với mọi $s > 0$, $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \dfrac{1}{s.\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{s}\right)^2}} = \dfrac{1}{s}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{s^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{s^{2n+1}}$

$$\Rightarrow J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

b. $\dfrac{1}{s}e^{-1/s} = \dfrac{1}{s}\left(1 - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2!s^2} - \dfrac{1}{3!s^3} + \cdots\right) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{2!s^3} - \dfrac{1}{3!s^4} + \cdots$

$$\Rightarrow x(t) = 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^2} - \frac{t^3}{(3!)^2} + \cdots = 1 - \frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{2^2} + \frac{\left(2\sqrt{t}\right)^4}{2^2 4^2} - \frac{\left(2\sqrt{t}\right)^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots = J_0(2\sqrt{t}).$$

3.30 $J_0(t) * J_0(t) = \sin t$

3.31 **a.** $x^n J_n(x) + C$ **b.** $-\dfrac{J_n(x)}{x^n} + C$

c. $(8x^2 - x^4)J_0(x) + (4x^3 - 16x)J_1(x) + C$.

3.32 **a.** $J_3(x) = \dfrac{8-x^2}{x^2}J_1(x) - \dfrac{4}{x}J_0(x)$ **b.** $6\sqrt[3]{x}J_1(\sqrt[3]{x}) - 3\sqrt[3]{x^2}J_0(\sqrt[3]{x}) + C$

c. $xJ_0(x)\sin x - xJ_1(x)\cos x + C$.

3.34 **a.** 1 **b.** 1

3.41 $y = x^{\frac{1-a}{2}} z_{\frac{1-a}{2}}(x\sqrt{b})$

3.42 **a.** $y = z_0(2\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}})$ **b.** $y = z_0(x^{\frac{1}{2}})$ **c.** $y = x^{-1/2} z_{1/2}(x)$

c. $y = z_0(x^{\frac{1}{2}})$ **d.** $y = x^{1/2} z_{1/4}(\frac{1}{2}x^2)$ **e.** $y = x^{1/2} z_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG 4

4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	4.10	4.11	4.12
Sai	Sai	Đúng	Đúng	Đúng	Sai	Sai	Đúng	Sai	Đúng	Sai	Sai

4.13 a. $F_{X_1 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x_i)$ b. $\mu_X(n) = \mathrm{E}\left[X_n\right] = \mu$

c. $R_{XX}(n,m) = \begin{cases} \mu^2 & n \neq m \\ \sigma^2 + \mu^2 & n = m \end{cases}$ d. $C_{XX}(n,m) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \sigma^2 & n = m \end{cases}$

4.14 a. $P\left\{X_0 = 0, X_1 = 2, X_2 = 1\right\}$

$$= P\left\{X_0 = 0\right\} P\left\{X_1 = 2 \middle| X_0 = 0\right\} P\left\{X_2 = 1 \middle| X_0 = 0, X_1 = 2\right\}$$

$$= P\left\{X_0 = 0\right\} P\left\{X_1 = 2 \middle| X_0 = 0\right\} P\left\{X_2 = 1 \middle| X_1 = 2\right\} = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,168.$$

b. $P\left\{X_2 = 2 \middle| X_0 = 1\right\} = 0,63$; $P\left\{X_0 = 1, X_2 = 2\right\} = 0,4.0,63 = 0,252$.

4.15 Điều kiện thứ hai của ma trận Markov có thể viết dưới dạng

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ hay là } P\mathbf{a} = \mathbf{a} \text{ trong đó } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó $P^2\mathbf{a} = P\mathbf{a} = \mathbf{a} \ \dots \Rightarrow P^n\mathbf{a} = P^{n-1}\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

4.16 **a.** $P^2 = \begin{bmatrix} 0,47 & 0,13 & 0,40 \\ 0,42 & 0,14 & 0,44 \\ 0,26 & 0,17 & 0,57 \end{bmatrix}$.

b. $P\left\{X_3 = 1 \middle| X_1 = 0\right\} = P\left\{X_2 = 1 \middle| X_0 = 0\right\} = 0,13$;

$$P\left\{X_3 = 1 \middle| X_0 = 0\right\} = P\left\{X_3 = 1, X_2 = 0 \middle| X_0 = 0\right\} + P\left\{X_3 = 1, X_2 = 1 \middle| X_0 = 0\right\}$$

$$+P\left\{X_3=1,X_2=2\middle|X_0=0\right\}$$

$$=P\left\{X_2=0\middle|X_0=0\right\}P\left\{X_3=1\middle|X_0=0,X_2=0\right\}$$

$$+P\left\{X_2=1\middle|X_0=0\right\}P\left\{X_3=1\middle|X_0=0,X_2=1\right\}$$

$$+P\left\{X_2=2\middle|X_0=0\right\}P\left\{X_3=1\middle|X_0=0,X_2=2\right\}$$

$$=P\left\{X_2=0\middle|X_0=0\right\}P\left\{X_3=1\middle|X_2=0\right\}+P\left\{X_2=1\middle|X_0=0\right\}P\left\{X_3=1\middle|X_2=1\right\}$$

$$+P\left\{X_2=2\middle|X_0=0\right\}P\left\{X_3=1\middle|X_2=2\right\}=0,47\cdot 0,2+0,13\cdot 0,2+0,40\cdot 0,1=0,16.$$

c. Phân bố dừng $\left[x,y,z\right]$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\left[x \quad y \quad z\right]P=\left[x \quad y \quad z\right]\\ x,y,z\ge 0;\ x+y+z=1\end{cases}.$$

Như vậy x,y,z là nghiệm không âm của hệ phương trình

$$\begin{cases}-9x & +2y & +6z & = & 0\\ 2x & -8y & +z & = & 0\\ x & +y & +z & = & 1\end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $x=\dfrac{50}{139},\ y=\dfrac{21}{139},\ z=\dfrac{68}{139}$.

4.17 Đặt $p_0=P\left\{X_0=0\right\}$.

a) $P\left\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\right\}=P\left\{X_0=0\right\}P\left\{X_1=0,X_2=0\middle|X_0=0\right\}$

$$=P\left\{X_0=0\right\}P\left\{X_1=0\middle|X_0=0\right\}P\left\{X_2=0\middle|X_0=0,X_1=0\right\}=p_0(1-\alpha)^2.$$

b) $P\left\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\right\}+P\left\{X_0=0,X_1=1,X_2=0\right\}=p_0\left(\alpha^2+(1-\alpha)^2\right)$.

c) $P\left\{X_5=0\middle|X_0=0\right\}=16\alpha^5+40\alpha^4+40\alpha^3+20\alpha^2+5\alpha+1$.

4.18 a) $P=(0,2)(0,3)(0,2)(0,5)(0,2)=0,0012$.

b) $P^2=\begin{bmatrix}0,21 & 0,26 & 0,26 & 0,27\\ 0,20 & 0,28 & 0,24 & 0,28\\ 0,18 & 0,30 & 0,21 & 0,31\\ 0,22 & 0,32 & 0,22 & 0,24\end{bmatrix}$

$P\left\{X_1=a,X_3=c,X_4=b,X_5=a\middle|X_0=b\right\}$

$$=P\left\{X_1=a\middle|X_0=b\right\}P\left\{X_3=c\middle|X_1=a\right\}P\left\{X_4=b\middle|X_3=c\right\}P\left\{X_5=a\middle|X_4=b\right\}$$

$$=(0,2)(0,26)(0,5)(0,2)=0,0052.$$

c) $P^5=\begin{bmatrix}0,2029 & 0,2912 & 0,2319 & 0,2740\\ 0,2028 & 0,2914 & 0,2317 & 0,2740\\ 0,2027 & 0,2918 & 0,2313 & 0,2742\\ 0,2030 & 0,2916 & 0,2317 & 0,2737\end{bmatrix}$

d) $P\left\{X_5=a\middle|X_0=b\right\}=0,2028$

e) $\mathbf{P}(5) = \begin{bmatrix} 0,2028 & 0,2915 & 0,2316 & 0,2740 \end{bmatrix}$.

4.19 a) Hệ phương trình $\begin{cases} \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ x \ge 0, y \ge 0; x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 0 \\ x + y = 1 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b}{a+b} \\ y = \dfrac{a}{a+b} \end{cases}$

b) $P^n = \dfrac{1}{a+b}\left\{ \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix} \right\}$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)P^n = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \frac{1}{a+b}\left\{ \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2(a+b)} \begin{bmatrix} 2b + (1-a-b)^n (a-b) & 2a + (1-a-b)^n (b-a) \end{bmatrix}$$

c) Nếu $a + b \le 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix}$

4.20 Không gian trạng thái sẽ là $E = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Theo công thức (5.21) ta có

$$p_{ij} = P\left\{ X(n+1) = j \middle| X(n) = i \right\} = \begin{cases} P\{\xi = 3 - j\} & \text{nÕu} \quad i \le 0, \\ P\{\xi = i - j\} & \text{nÕu} \quad 0 < i \le 3. \end{cases}$$

$$p_{-1,-1} = P\left\{ X(n+1) = -1 \middle| X(n) = -1 \right\} = P(\varphi) = 0,$$

$$p_{-1,0} = P\left\{ X(n+1) = 0 \middle| X(n) = -1 \right\} = P(\xi = 3) = P(\phi) = 0,$$

$$p_{-1,1} = P\left\{ X(n+1) = 1 \middle| X(n) = -1 \right\} = P(\xi = 2) = 0,3,$$

$$p_{-1,2} = P\left\{ X(n+1) = 2 \middle| X(n) = -1 \right\} = P(\xi = 1) = 0,3,$$

$$p_{-1,3} = P\left\{ X(n+1) = 1 \middle| X(n) = -1 \right\} = P(\xi = 0) = 0,4,$$

. . . .

Ma trận xác suất chuyển:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$$

4.21 *A* có 43,3% và *B* có 56,7% thị phần.

4.22 a) $P = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{bmatrix}$;

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix}2/10 & 3/10 & 5/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/6 & 2/3 & 1/6\\ 3/8 & 3/8 & 1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}143/400 & 171/400 & 86/400\end{bmatrix}.$$

b) $P^n=\begin{bmatrix}0,3659 & 0,4390 & 0,1951\\ 0,3659 & 0,4390 & 0,1951\\ 0,3659 & 0,4390 & 0,1951\end{bmatrix}$ với mọi $n\geq 15$.

Vậy chuỗi có phân bố giới hạn $\mathbf{P}^*=\begin{bmatrix}0,3659 & 0,4390 & 0,1951\end{bmatrix}$.

4.28 $\mathrm{E}\left[Y(t)\right]=\mathrm{E}\left[X(t+1)-X(t)\right]=\mathrm{E}\left[X(t+1)\right]-\mathrm{E}\left[X(t)\right]=0$.

$$\mathrm{cov}\left(Y(t+\tau);Y(t)\right)=\mathrm{cov}\left(X(t+\tau+1)-X(t+\tau);X(t+1)-X(t)\right)$$
$$=\mathrm{cov}\left(X(t+\tau+1);X(t+1)\right)-\mathrm{cov}\left(X(t+\tau);X(t+1)\right)$$
$$-\mathrm{cov}\left(X(t+\tau+1);X(t)\right)+\mathrm{cov}\left(X(t+\tau);X(t)\right)$$

$=K_{XX}(\tau)-K_{XX}(\tau-1)-K_{XX}(\tau+1)+K_{XX}(\tau)$ không phụ thuộc t. Vậy $Y(t)$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $K_{YY}(\tau)=2K_{XX}(\tau)-K_{XX}(\tau-1)-K_{XX}(\tau+1)$.

4.29 $\mathrm{E}\left[X(t)\right]=\mathrm{E}\left[A_0\sin(\omega_0 t+\Theta)\right]=\int\limits_0^{2\pi}A_0\sin(\omega_0 t+\theta)\dfrac{1}{2\pi}d\theta=-\dfrac{A_0}{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\Big|_{\theta=0}^{2\pi}=0$

$$\mathrm{cov}\left[X(t+\tau);X(t)\right]=\mathrm{E}\left[\left(A_0\sin(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\right)\left(A_0\sin(\omega_0 t+\Theta)\right)\right].$$
$$=\frac{A_0^2}{2}\mathrm{E}\left[\cos(\omega_0\tau)-\cos(\omega_0(2t+\tau)+2\Theta)\right]=\frac{A_0^2}{2}\cos(\omega_0\tau).$$

Vậy $\left\{X(t)\right\}$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $K_X(\tau)=\dfrac{A_0^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$.

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau\,d\tau=\frac{A_0^2}{2T}\left(\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\Big|_0^T-\frac{1}{T}\left(\tau\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\Big|_0^T+\frac{\cos\omega_0\tau}{\omega_0^2}\Big|_0^T\right)\right)$$
$$=\frac{A_0^2}{2T\omega_0}\left(\sin\omega_0 T-\sin\omega_0 T+\frac{1-\cos\omega_0 T}{T\omega_0}\right)\to 0\quad\text{khi}\quad T\to\infty$$

Theo định lý 5.11 $\left\{x(t)\right\}$ là một quá trình dừng thoả mãn điều kiện (5.16) do đó là một quá trình ergodic.

4.30 Theo giả thiết R và Θ độc lập, do đó

$$\mathrm{E}\left[X(t)\right]=\mathrm{E}\left[R\cos(\lambda t+\Theta)\right]=\mathrm{E}\left[R\right]\mathrm{E}\left[\cos(\lambda t+\Theta)\right].$$

Mặt khác $\mathrm{E}\left[R\right]=\int\limits_0^\infty\dfrac{r^2}{\sigma^2}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}dr=\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\sigma\sqrt{2}\Gamma(3/2)=\dfrac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}$;

$\mathrm{E}\left[\cos(\lambda t+\Theta)\right]=0$. Vậy $\mathrm{E}\left[X(t)\right]=0$.

$$\mathrm{cov}\left[X(t+\tau);X(t)\right]=\mathrm{E}\left[\left(R\cos(\lambda(t+\tau)+\Theta)\right)\left(R\cos(\lambda t+\Theta)\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[R^2\right]\mathrm{E}\left[\left(\cos(\lambda(t+\tau)+\Theta)\right)\left(\cos(\lambda t+\Theta)\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[R^2\right]\mathrm{E}\left[\frac{\cos\left(\lambda(2t+\tau)+2\Theta\right)+\cos\lambda\tau}{2}\right] = \mathrm{E}\left[R^2\right]\frac{\cos\lambda\tau}{2}$$

$$\mathrm{E}\left[R^2\right] = \int_0^\infty \frac{r^3}{\sigma^2}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}dr = 2\sigma^2\int_0^\infty te^{-t}dt = 2\sigma^2\Gamma(2) = 2\sigma^2.$$

Vậy $\{X(t)\}$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $K_X(\tau) = \sigma^2\cos\lambda\tau$.

4.31 **a**. $\mathrm{E}\left[X(t)\right] = \mathrm{E}\left[A\cos(\pi t)\right] = \cos(\pi t)\mathrm{E}\left[A\right] = 0$.

$\mathrm{D}\left[X(t)\right] = \mathrm{E}\left[A^2\cos^2(\pi t)\right] = \cos^2(\pi t)\sigma^2$

Do đó và $X(1)$ có phân bố chuẩn $\mathrm{N}(0;\sigma^2)$.

b. $\mathrm{cov}\left[X(t+\tau);X(t)\right] = \mathrm{E}\left[\left(A\cos(\pi(t+\tau))\right)\left(A\cos(\pi t\right)\right]$

$$= \mathrm{E}\left[A^2\right]\cos(\pi(t+\tau))\cos(\pi t) = \sigma^2\cos(\pi(t+\tau))\cos(\pi t).$$

Hàm tương quan phụ thuộc t do đó quá trình $X(t)$ không dừng theo nghĩa rộng, suy ra không dừng cấp $n \geq 2$.

$X(t)$ có phân bố chuẩn $\mathrm{N}(0;\sigma^2\cos^2(\pi t))$;

$X(t+h)$ có phân bố chuẩn $\mathrm{N}(0;\sigma^2\cos^2(\pi t+\pi h))$

Do đó quá trình $X(t)$ không dừng dừng cấp 1. Vậy $X(t)$ không dừng theo mọi cấp.

4.32 $\mathrm{E}\left[X(t)\right] = \mathrm{E}\left[Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t\right] = \cos\lambda t\,\mathrm{E}\left[Z_1\right] + \sin\lambda t\,\mathrm{E}\left[Z_2\right] = 0$.

Theo giả thiết Z_1, Z_2 độc lập do đó:

$$\mathrm{cov}\left[Z_1\cos\lambda(t+\tau)+Z_2\sin\lambda(t+\tau);Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t\right]$$

$$= \cos\lambda(t+\tau)\cos\lambda t\,\mathrm{E}\left[Z_1^2\right] + \sin\lambda(t+\tau)\sin\lambda t\,\mathrm{E}\left[Z_2^2\right] = \cos\lambda\tau.$$

Vậy $\{X(t)\}$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $K_X(\tau) = \cos\lambda\tau$.

4.36 Áp dụng công thức (5.9) ta có

$$\mathrm{P}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in2\pi f}K_x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in2\pi f}\frac{1}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^{|n|}$$

$$= \frac{1}{7}\left(1 - \frac{3e^{-i2\pi f}}{4+3e^{-i2\pi f}} - \frac{3e^{i2\pi f}}{4+3e^{i2\pi f}}\right) = \frac{1}{25+24\cos 2\pi f}.$$

4.37 Theo ví dụ 5.1 ta có $\mathrm{E}\left[X(t)\right] = \mathrm{E}\left[e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t})\right] = e^{-\alpha t}\mathrm{E}\left[W(e^{2\alpha t})\right] = 0$.

Với mọi $\tau \geq 0$:

$$\mathrm{E}\left[X(t+\tau)X(t)\right] = e^{-\alpha(2t+\tau)}\mathrm{E}\left[W(e^{\alpha(2t+\tau)})W(e^{2\alpha t})\right] = e^{-\alpha(2t+\tau)}\sigma^2e^{2\alpha t} = \sigma^2e^{-\alpha\tau}.$$

Do đó $K_X(\tau) = \sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$.

Theo công thức (5.10) và ví dụ 2.39 ta được:

$$\mathrm{P}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\tau f} K_X(\tau)d\tau=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\tau f} e^{-\alpha|\tau|}d\tau=\frac{2\sigma^2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f}.$$

4.38 Theo công thức (5.10) và ví dụ 2.64

$$K_X(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\tau f}\mathrm{P}(f)df=\frac{1}{B^2}\int_{-B}^{B} e^{i2\pi\tau f}\left(B-|f|\right)df=\operatorname{sinc}^2 B\tau .$$

PHỤ LỤC A: Biến đổi Z của dãy các tín hiệu thường gặp

STT	$x(n)$, $n \ge 0$	$X(z)$	Miền hội tụ
1	$x(0)=k$, $x(n)=0$, $n \ge 1$	k	$\lvert z\rvert > 0$
2	$x(m)=k$, $x(n)=0$, $n \ne m$	kz^{-m}	$\lvert z\rvert > 0$
3	k	$kz / z-1$	$\lvert z\rvert > 1$
4	nk	$kz/(z-1)^2$	$\lvert z\rvert > 1$
5	n^2k	$kz(z+1)/(z-1)^3$	$\lvert z\rvert > 1$
6	ke^{-anT}, a là số phức	$kz/(z-e^{-aT})$	$\lvert z\rvert > \lvert e^{-aT}\rvert$
7	kne^{-anT}, a là số phức	$kze^{-aT}/(z-e^{-aT})^2$	$\lvert z\rvert > \lvert e^{-aT}\rvert$
8	$\sin(\omega_0 nT)$	$\dfrac{z\sin(\omega_0 T)}{z^2-2z\cos(\omega_0 T)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$\cos(\omega_0 nT)$	$\dfrac{z\left(z-\cos(\omega_0 T)\right)}{z^2-2z\cos(\omega_0 T)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
10	$e^{-anT}\sin(\omega_0 nT)$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin(\omega_0 T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)+e^{-2aT}}$	$\lvert z\rvert > e^{-aT}$
11	$e^{-anT}\cos(\omega_0 nT)$	$\dfrac{ze^{-aT}\left[ze^{-aT}-\cos(\omega_0 T)\right]}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)+e^{-2aT}}$	$\lvert z\rvert > e^{-aT}$
12	a^n	$z/(z-a)$	$\lvert z\rvert > a$
13	na^n	$az/(z-a)^2$	$\lvert z\rvert > a$
14	n^2a^n	$az(z+a)/(z-a)^3$	$\lvert z\rvert > a$
15	$\sinh(\omega_0 nT)$	$\dfrac{z\sinh(\omega_0 T)}{z^2-2z\cosh(\omega_0 T)+1}$	$\lvert z\rvert > \cosh(\omega_0 T)$
16	$\cosh(\omega_0 nT)$	$\dfrac{z\left[z-\cosh(\omega_0 T)\right]}{z^2-2z\cosh(\omega_0 T)+1}$	$\lvert z\rvert > \sinh(\omega_0 T)$
17	$a^n/n!$	$e^{a/z}$	$\lvert z\rvert > 0$
18	$[\ln a]^n/n!$	$a^{1/z}$	$\lvert z\rvert > 0$

PHỤ LỤC B

Bảng tóm tắt các tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier

$$\widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} x(t)dt$$

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\widehat{X}_1(f) + B\widehat{X}_2(f)$
2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}\widehat{X}\left(f / a\right)$
3. Liên hợp	$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{X}(-f)}$
4. Đối ngẫu	$\widehat{X}(t)$	$x(-f)$
5. Trễ	$x(t - T_d)$	$e^{-i2\pi T_d}\widehat{X}(f)$
6. Dịch chuyển ảnh	$e^{i2\pi f_0 t}x(t)$	$\widehat{X}(f - f_0)$
7. Điều chế	$x(t)\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}\widehat{X}(f - f_0) + \frac{1}{2}\widehat{X}(f + f_0)$
8. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\left(i2\pi f\right)^n \widehat{X}(f)$
9. Tích phân	$\int_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f) + \frac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f)$
10. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$\left(-i2\pi\right)^{-n}\frac{d^n\widehat{X}(f)}{df^n}$
11. Tích chập	$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) * x_2(t-u)du$	$\widehat{X}_1(f)\widehat{X}_2(f)$
12. Tích	$x_1(t)x_2(t)$	$\widehat{X}_1(f) * \widehat{X}_2(f)$

PHỤ LỤC C:
Các cặp biến đổi Fourier thường gặp

STT	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1	$\Pi(t/T)$	$T\,\mathrm{sinc}(Tf)$
2	$2W\,\mathrm{sinc}(2Wt)$	$\Pi(f/2W)$
3	$\Lambda(t/T)$	$T\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$
4	$e^{-\lambda t}u(t);\ \lambda > 0$	$\dfrac{1}{\lambda + i2\pi f}$
5	$te^{-\lambda t}u(t);\ \lambda > 0$	$\dfrac{1}{(\lambda + i2\pi f)^2}$
6	$e^{-\lambda\lvert t\rvert};\ \lambda > 0$	$\dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + (2\pi f)^2}$
7	$\dfrac{1}{\lambda^2 + (2\pi t)^2};\ \lambda > 0$	$\dfrac{e^{-\lambda\lvert f\rvert}}{2\lambda}$
8	$\delta(t)$	1
9	1	$\delta(f)$
10	$\delta(t - t_0)$	$e^{-i2\pi f t_0}$
11	$e^{i2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
12	$\cos 2\pi f_0 t$	$\dfrac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$
13	$\sin 2\pi f_0 t$	$\dfrac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2i}$
14	$u(t)$	$\dfrac{1}{i2\pi f} + \dfrac{1}{2}\delta(f)$
15	$\mathrm{sgn}(t)$	$\dfrac{1}{i\pi f}$
16	$\dfrac{1}{\pi t}$	$-i\,\mathrm{sgn}(f)$

PHỤ LỤC D
Bảng tóm tắt các tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace

$$X(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt$$

Tính chất	**Hàm** $x(t)$	**Biến đổi Laplace** $X(s)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t)+Bx_2(t)$	$AX_1(s)+BX_2(s)$
2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
3. Dịch chuyển ảnh	$e^{at}x(t)$	$X(s-a)$
4. Trễ	$x(t-a)\eta(t-a)$	$e^{-as}X(s)$
5. Đạo hàm	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0)$
6. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)-s^{n-1}x(0)-\cdots x^{(n-1)}(0)$
7. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$(-1)^n\frac{d^n X(s)}{ds^n}$
8. Tích phân	$\int_0^t x(u)du$	$\frac{X(s)}{s}$
9. Tích phân	$\int_0^t\cdots\int_0^t x(u)du^n=\int_0^t\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}x(u)du$	$\frac{X(s)}{s^n}$
10. Tích phân ảnh	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} X(u)du$
11. Tích chập	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
12. Duhamel	$x_1(0)x_2(t)+x'_1*x_2(t)$	$sX_1(s)X_2(s)$
13. Tuần hoàn	$x(t+T)=x(t)$	$X(s)=\frac{\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}$
14.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4t}}x(u)du$	$\frac{X\left(\sqrt{s}\right)}{\sqrt{s}}$

15.	$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{ut})x(u)du$	$\frac{1}{s}X\left(\frac{1}{s}\right)$
16.	$t^{\frac{n}{2}}\int_0^{\infty} u^{-\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{ut})x(u)du$	$\frac{1}{s^{n+1}}X\left(\frac{1}{s}\right)$
17.	$\int_0^{t} J_0(2\sqrt{u(t-u)})x(u)du$	$\frac{1}{s^2+1}X\left(s+\frac{1}{s}\right)$
18.	$x(t^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} u^{\frac{-3}{2}}e^{-\frac{s^2}{4u}}X(u)du$
19.	$\int_0^{\infty} \frac{t^u x(u)}{\Gamma(u+1)}du$	$\frac{X(\ln s)}{s\ln s}$
20.	$\sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_k t}$	$\frac{P(s)}{Q(s)}$ Bậc *P(s)* < bậc *Q(s)*, *Q(s)* chỉ có các nghiệm đơn là $a_1,\ldots,a_n$ và không phải là nghiệm của $P(s)$

PHỤ LỤC E

Biến đổi Laplace của các hàm thường gặp

$$X(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt$$

TT	Ảnh biến đổi Laplace $X(s)$	Hàm gốc $x(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1

2.	$\dfrac{1}{s^n}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
3.	$\dfrac{1}{s^\alpha}$; $\alpha > 0$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
4.	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\dfrac{1}{(s-a)^n}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
6.	$\dfrac{1}{(s-a)^\alpha}$; $\alpha > 0$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{at}$
7.	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{\sin at}{a}$
8.	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
9.	$\dfrac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\dfrac{e^{bt}\sin at}{a}$
10.	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
11.	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{\sinh at}{a}$
12.	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
13.	$\dfrac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\dfrac{e^{bt}\sinh at}{a}$
14.	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
15.	$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$
16.	$\dfrac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{t\sin at}{2a}$

17.	$\dfrac{s^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{\sin at + at\cos at}{2a}$
18.	$\dfrac{s^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\cos at - \dfrac{1}{2}at\sin at$
19.	$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
20.	$\dfrac{1}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$\dfrac{at\cosh at - \sinh at}{2a^3}$
21.	$\dfrac{s}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$\dfrac{t\sinh at}{2a}$
22.	$\dfrac{s^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$\dfrac{\sinh at + at\cosh at}{2a}$
23.	$\dfrac{s^3}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$\cosh at + \dfrac{1}{2}at\sinh at$
24.	$\dfrac{s^2+a^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$t\cosh at$
25.	$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at - 3at\cos at}{8a^5}$
26.	$\dfrac{s}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{t\sin at - at^2\cos at}{8a^3}$
27.	$\dfrac{s^2}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\sin at - at\cos at}{8a^3}$
28.	$\dfrac{s^3}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{3t\sin at + at^2\cos at}{8a}$
29.	$\dfrac{s^4}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at + 5at\cos at}{8a}$

30.	$\dfrac{s^5}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at-7at\sin at}{8}$
31.	$\dfrac{3s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{t^2\sin at}{2a}$
32.	$\dfrac{s^3-3a^2s}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2\cos at$
33.	$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{\left(s^2+a^2\right)^4}$	$\dfrac{1}{6}t^3\cos at$
34.	$\dfrac{s^3-a^2s}{\left(s^2+a^2\right)^4}$	$\dfrac{t^3\sin at}{24a}$
35.	$\dfrac{1}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\sinh at-3at\cosh at}{8a^5}$
36.	$\dfrac{s}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh at-t\sinh at}{8a^3}$
37.	$\dfrac{s^2}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{at\cosh at+(a^2t^2-1)\sinh at}{8a^3}$
38.	$\dfrac{s^3}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{3t\sinh at+at^2\cosh at}{8a}$
39.	$\dfrac{s^4}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\sinh at+5at\cosh at}{8a}$
40.	$\dfrac{s^5}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh at+7at\sinh at}{8}$
41.	$\dfrac{3s^2+a^2}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{t^2\sinh at}{2a}$
42.	$\dfrac{s^3+3a^2s}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2\cosh at$

43.	$\dfrac{s^4+6a^2s^2+a^4}{\left(s^2-a^2\right)^4}$	$\dfrac{1}{6}t^3\cosh at$
44.	$\dfrac{s^3+a^2s}{\left(s^2-a^2\right)^4}$	$\dfrac{t^3\sinh at}{24a}$
45.	$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+e^{-3at/2}\right\}$
46.	$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$
47.	$\dfrac{s^2}{s^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
48.	$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right\}$
49.	$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
50.	$\dfrac{s^2}{s^3-a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
51.	$\dfrac{1}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}\left\{\sin at\cosh at-\cos at\sinh at\right\}$
52.	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{\sin at\sinh at}{2a^2}$
53.	$\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{2a}\left\{\sin at\cosh at+\cos at\sinh at\right\}$
54.	$\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
55.	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}\left\{\sinh at-\sin at\right\}$

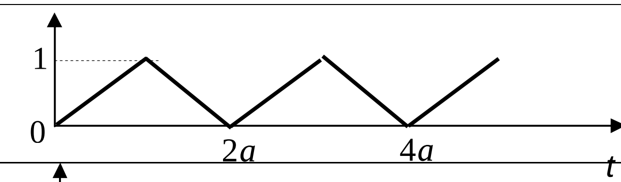
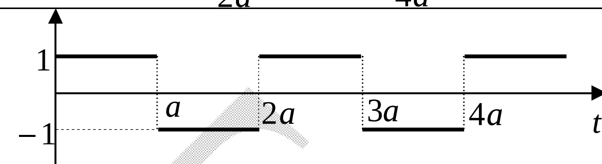
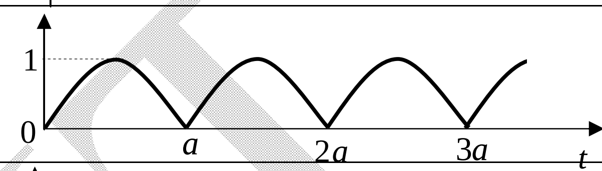
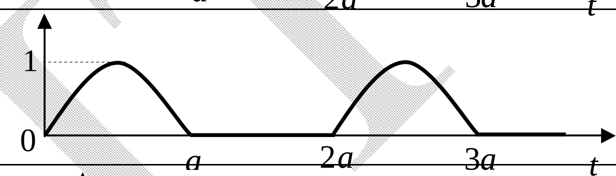
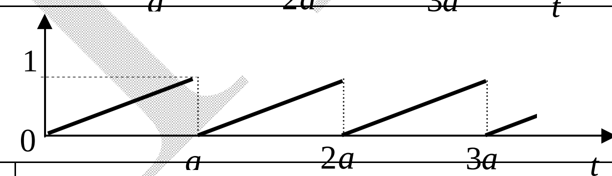
56.	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2}\left\{\cosh at - \cos at\right\}$
57.	$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a}\left\{\sinh at + \sin at\right\}$
58.	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a}\left\{\cosh at + \cos at\right\}$
59.	$\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
60.	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
61.	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\frac{e^{at}\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
62.	$\frac{1}{\sqrt{s-a} + b}$	$e^{at}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - b e^{b^2 t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})\right\}$
63.	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
64.	$\frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}}$	$I_0(at)$
65.	$\frac{\left(\sqrt{s^2 + a^2} - s\right)^n}{\sqrt{s^2 + a^2}}$; $n > -1$	$a^n J_n(at)$
66.	$\frac{\left(s - \sqrt{s^2 - a^2}\right)^n}{\sqrt{s^2 - a^2}}$; $n > -1$	$a^n I_n(at)$
67.	$\frac{e^{b(s - \sqrt{s^2 + a^2})}}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0\left(a\sqrt{t(t+2b)}\right)$
68.	$\frac{e^{-b\sqrt{s^2 + a^2}}}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$\eta(t-b)J_0\left(a\sqrt{t^2 - b^2}\right)$
69.	$\frac{1}{\sqrt{(s^2 + a^2)^3}}$	$\frac{tJ_1(at)}{a}$

70.	$\dfrac{s}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$	$tJ_0(at)$
71.	$\dfrac{s^2}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$	$J_0(at)-tJ_1(at)$
72.	$\dfrac{1}{s(e^s-1)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$	$x(t)=n,\ \ n\le t<n+1,\ \ n=0,1,2,\ldots$
73.	$\dfrac{1}{s(e^s-r)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$x(t)=\sum_{k=1}^{[t]} r^k$; $[t]$ là phần nguyên của t
74.	$\dfrac{e^s-1}{s(e^s-r)}=\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$x(t)=r^n,\ n\le t<n+1,\ \ n=0,1,2,\ldots$
75.	$\dfrac{e^{-s/a}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$
76.	$\dfrac{e^{-s/a}}{\sqrt{s^3}}$	$\dfrac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
77.	$\dfrac{e^{-s/a}}{s^{\alpha+1}}\ ;\ \ \alpha>-1$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{at})$
78.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$
79.	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$
80.	$\dfrac{1-e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
81.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
82.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$	$e^{b(bt+a)}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t}+\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
83.	$\dfrac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{\alpha+1}}\ ;\ \ \alpha>-1$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}\,a^{2\alpha+1}}\int_0^\infty u^\alpha e^{-\frac{u^2}{4a^2t}}J_{2\alpha}(2\sqrt{u})du$

84.	$\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$
85.	$\dfrac{1}{2s}\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{a^2}\right)$	$\mathrm{Ci}(at)$
86.	$\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s+a}{a}\right)$	$\mathrm{Ei}(at)$
87.	$-\dfrac{\gamma+\ln s}{s}$	$\ln t$; γ là hằng số Euler
88.	$\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\dfrac{2(\cos bt-\cos at)}{t}$
89.	$\dfrac{\pi^2}{6s}+\dfrac{(\gamma+\ln s)^2}{s}$	$\ln^2 t$; γ là hằng số Euler
90.	$\dfrac{\ln s}{s}$	$-(\ln t+\gamma)$
91.	$\dfrac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t+\gamma)^2-\dfrac{\pi^2}{6}$
92.	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)-\Gamma(\alpha+1)s}{s^{\alpha+1}}$; $\alpha>-1$	$t^{\alpha}\ln t$
93.	$\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$	$\dfrac{\sin at}{t}$
94.	$\dfrac{1}{s}\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$	$\mathrm{Si}(at)$
95.	$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{a/s}\right)$	$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
96.	$e^{s^2/4a^2}\,\mathrm{erfc}\left(s/2a\right)$	$\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t^2}$
97.	$\dfrac{e^{s^2/4a^2}\,\mathrm{erfc}\left(s/2a\right)}{s}$	$\mathrm{erf}\left(at\right)$
98.	$\dfrac{e^{as}}{\sqrt{s}}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{as}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$

99.	$e^{as}\,\mathrm{Ei}(as)$	$\dfrac{1}{t+a}$
100.	$\dfrac{\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}-\sin as\,\mathrm{Ci}(as)}{a}$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$
101.	$\sin as\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}+\cos as\,\mathrm{Ci}(as)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
102.	$\dfrac{\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}-\sin as\,\mathrm{Ci}(as)}{s}$	$\arctan(t/a)$
103.	$\dfrac{\sin as\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}+\cos as\,\mathrm{Ci}(as)}{s}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
104.	$\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}^2+\mathrm{Ci}^2(as)$	$\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
105.	1	$\delta(t)$ - hàm Dirac
106.	e^{-as}	$\delta(t-a)$
107.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$\eta(t-a)$
108.	$\dfrac{1}{s}\dfrac{\sinh xs}{\sinh as}$	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi t}{a}$
109.	$\dfrac{1}{s}\dfrac{\sinh xs}{\cosh as}$	$\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\sin\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
110.	$\dfrac{1}{s}\dfrac{\cosh xs}{\sinh as}$	$\dfrac{t}{a}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi t}{a}$
111.	$\dfrac{1}{s}\dfrac{\cosh xs}{\cosh as}$	$1+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
112.	$\dfrac{1}{s^2}\dfrac{\sinh xs}{\sinh as}$	$\dfrac{xt}{a}+\dfrac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi t}{a}$

113.	$\frac{1}{s^2}\frac{\sinh xs}{\cosh as}$	$x+\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
114.	$\frac{1}{s^2}\frac{\cosh xs}{\sinh as}$	$\frac{t^2}{2a}+\frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\left(1-\cos\frac{n\pi t}{a}\right)$
115.	$\frac{1}{s^2}\frac{\cosh xs}{\cosh as}$	$t+\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
116.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{2\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\sin\frac{n\pi x}{a}$
117.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
118.	$\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
119.	$\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}}\cos\frac{n\pi x}{2a}$
120.	$\frac{1}{s}\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}}\sin\frac{n\pi x}{2a}$
121.	$\frac{1}{s}\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
122.	$\frac{1}{s^2}\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{xt}{a}+\frac{2a^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(1-e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}})\sin\frac{n\pi x}{2a}$
123.	$\frac{1}{s^2}\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{x^2-a^2}{2}+t-\frac{16a^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
124.	$\frac{1}{s}\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{J_0(ia\sqrt{s})}$	$1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ là các nghiệm dương của $J_0(\lambda)=0$

125.	$\frac{1}{s^2}\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{x^2-a^2}{4}+t+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ là các nghiệm dương của $J_0(\lambda)=0$
126.	$\frac{1}{as^2}\tanh(\frac{as}{2})$	
127.	$\frac{1}{s}\tanh(\frac{as}{2})$	
128.	$\frac{\pi a}{a^2s^2+\pi^2}\cosh(\frac{as}{2})$	
129.	$\frac{\pi a}{(a^2s^2+\pi^2)(1-e^{-as})}$	
130.	$\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	
131.	$\frac{e^{-as}}{s}(1-e^{-bs})$	$\eta(t-a)-\eta(t-a-b)$
132.	$\frac{1}{s(1-e^{-as})}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n\left[\eta\left(t-(n-1)a\right)-\eta\left(t-na\right)\right]$
133.	$\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n^2\left[\eta(t-n)-\eta(t-(n+1))\right]$
134.	$\frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-as})^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[\eta(t-n)-\eta(t-(n+1))\right]$
135.	$\frac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$(\eta(t)-\eta(t-a))\sin\frac{\pi t}{a}$

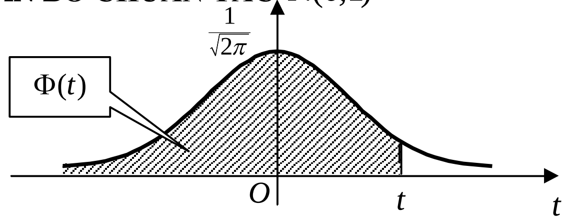
PHỤ LỤC F

GIÁ TRỊ HÀM MẬT ĐỘ XÁC SUẤT PHÂN BỐ CHUẨN TẮC $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2370	2347	2320	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	00080	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

GIÁ TRỊ HÀM PHÂN BỐ CHUẨN TẮC **N**(0;1)

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0,6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7156	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8132
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	0,9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9712	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	0,9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	0,9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\Phi(t)$	0,9987	9990	9993	9995	9996	9997	9998	9999	9999	9999

CÁC THUẬT NGỮ

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Phạm Anh Dũng, *Các hàm và xác suất ứng dụng trong viễn thông*. Trung Tâm Đào Tạo Bưu Chính Viễn Thông 1, 1999.
2. Nguyễn Duy Tiến, *Các mô hình xác suất và ứng dụng*. NXB Đại học Quốc gia Hà nội. 2000.
3. Nguyễn Quốc Trung, *Xử lý tín hiệu và lọc số*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2004
4. L. W. Couch, II, *Digital and Analog Communication Systems*. 6th ed, Prentice Hall, 2001.
5. V. Ditkine et A. Proudnikov, *Transformation intégrales et calcul opérationnel*. Dịch ra tiếng Pháp bởi Djilali Embarex, Mir 1978.
6. Charles Dixon, *Applied Mathematics of science & Engineering*. John Wiley & Sons: London, New York, Sydney, Toronto 1980.
7. Dean G. Duffy, *Advanced Engineering Mathematics*, CRC Press LLC, 1998.
8. E. J. Savant JR, *Fundamentals of the Laplace Transformation*. Mc Graw - Hill Book company, Inc. 1962.
9. M. R. Spiegel, PhD, *Theory and Problems of Laplace Transform*. Schaum's outline series. Mc Graw - Hill Book company, Inc. 1986.
10. Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban; *Applied Mathematics*. c 2003 Peter J. Olver.
11. Robert Wrede. Muray R. Spigel. *Theory and Problems of Advanmced Calculus*. Schaum's outline series. Mc Graw - Hill Book company, Inc. 2002.
12. R. E. Ziemer & R. L.Peterson, *Introduction to digital communication*, Macmillan Publishing Company, 1992.