XLIX PROGRAMA DE VERÃO (2020)
Introdução ao Aprendizado por Reforço
Preliminares

Fevereiro 2020

Esse material delineia os principais princípios matemáticos e estatísticos para um bom acompanhamento do curso. Para os alunos que não estejam familiarizados com algum dos tópicos: não se preocupem; procurem pelos links e referências em cada seção para materiais externos que os ajudarão com o conteúdo.

Uma boa leitura e nos vemos semana que vem!

1 Vetores e Matrizes

O curso assume que o aluno está familiarizado com o básico de vetores e operações sobre vetores. Seja $\mathbf{x}$ um vetor n-dimensional com componentes

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Então $\|\mathbf{x}\|$ denota o comprimento, ou norma, desse vetor, normalmente usando a definição Euclidiana:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

O produto interno $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ é definido como:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

e tem uma interpretação natural como:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{x}\| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores. Logo, se as normas dos dois vetores são fixadas, então seu produto interno é maior quando $\theta = 0$, ou seja, quando um é múltiplo de outro.

Matrizes são denotadas por letras maiúsculas como A. Se o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna é A_{ij}, então A^T denota a matriz que tem a_{ji} no seu lugar - a *transposta* de A. Por exemplo, se A é uma matriz 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

então sua transposta é:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

O produto de duas matrizes A e B tem $\sum_k A_{ik} B_{kj}$ na i-ésima linha e j-ésima coluna. A matriz I é a *identidade* ou matriz unitária, necessariamente quadrada, com 1s na diagonal e 0s em todo o resto. Para informações sobre vetores e matrizes, veja os vídeos introdutórios do Linear Algebra Review do Machine Learning by Stanford no Coursera.

2 Probabilidade básica e distribuições

Neste curso, representaremos **distribuições de probabilidade** sobre um conjunto $\mathcal{X}$ usando funções da seguinte maneira. Se $\mathcal{X}$ é um conjunto discreto (de cardinalidade finita ou infinita enumerável), então por distribuição de probabilidade em $\mathcal{X}$ queremos dizer uma função $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$p(x) \geq 0 \ (\forall x \in \mathcal{X}) \quad \text{e} \quad \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1 \ .$$

Se $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, então queremos dizer uma função $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$p(x) \geq 0 \ (\forall x \in \mathcal{X}) \quad \text{e} \quad \int p(x) dx = 1 \ .$$

Em outras palavras, p é a função densidade de probabilidade em $\mathcal{X}$. Aqui o domínio de integração é o conjunto $\mathcal{X}$ inteiro. Quando $n \geq 2$, $\int$ denota uma integral múltipla.

Escrevemos $x \sim p$ quando a variável x é amostrada de $\mathcal{X}$ de acordo com a distribuição p. Seja $f : \mathcal{X} :\to \mathbb{R}$ um função qualquer de x. Definimos então o valor esperado de $f(x)$ no caso discreto como

$$\mathbb{E}_{x \sim p} \left[f(x) \right] = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) p(x) \ .$$

No caso contínuo, o valor esperado de $f(x)$ é dado por

$$\mathbb{E}_{x \sim p} \left[f(x) \right] = \int f(x) p(x) dx \ .$$

Para uma visão geral sobre distribuições de probabilidade, confira o artigo na Wikipedia.

3 Derivadas e gradientes

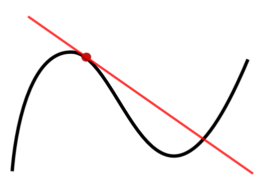

Figura 1: Tangente de uma função. A inclinação da reta tangente é equivalente à derivada da função naquele ponto. Fonte: en.wikipedia.org

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função univariada. Sua derivada é definida como

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \ ,$$

e pode ser interpretado como a inclinação da reta tangente a f em x.

Neste curso, lidaremos com funções de várias variáveis com frequência. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. A derivada parcial de $f(\mathbf{x})$ com relação a x_i é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \epsilon, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\epsilon} \ .$$

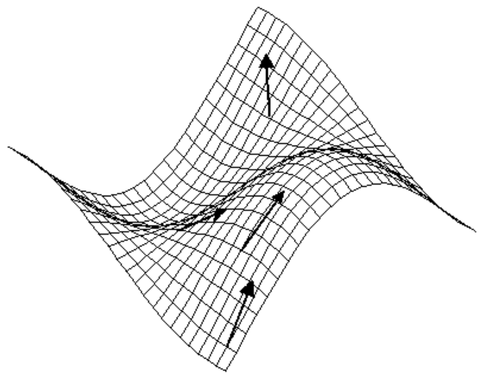

Figura 2: Vetores gradiente em vários pontos da função $f(x_0, x_1) = \cos(x_0)\sin(x_1)$ (fonte: citadel.sjfc.edu).

O *gradiente* de $f(\mathbf{x})$ é o vetor de derivadas parciais de f em $\mathbf{x}$:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

e pode ser interpretado como a direção de crescimento máximo de f, localmente em $\mathbf{x}$. Para mais informações sobre gradientes, confira o material na Wikipedia.