第 12 卷　第 3 期　　石家庄铁道学院学报　　Vol. 12　No. 3
1999 年 9 月　　JOURNAL OF SHIJIAZHUANG RAILWAY INSTITUTE　　Sep. 1999

数值积分法计算线路中线坐标

李孟山　李少元

(石家庄铁道学院交通工程系　石家庄　050043)

【摘要】从组成线路中线的曲率变化出发, 用复化辛甫生公式导出了适合各种线型的线路中线坐标计算公式。

【关键词】中线坐标　曲率　复化辛甫生公式

【分类号】U 212

组成线路的线型都可分解成直线、圆曲线和缓和曲线。对于缓和曲线点位坐标计算, 常规的解算是以幂级数展开式逐项积分得到, 这种解算总要用曲率为零的点作为一个局部坐标系的原点, 不能在线路方向上连续解算点位坐标。用数值积分方法可以克服这种缺点。

1　线路中线曲率

线路中线上任意一点的曲率与该点曲率半径成反比, 即 $\rho_i = 1/R_i$; 直线上各点的曲率半径都为无穷大, 由此在直线段上各点曲率都为 0, 即 $\rho = 0$; 圆曲线上各点曲线半径都为 R, 则圆曲线上各点的曲率也相等, 即 $\rho = 1/R$; 对于铁路和公路选用的缓和曲线都满足 $R_i l_i = c$ (c 为常数), 即各点曲率是一个变量, 则 $\rho_i = 1/R_i = l_i/c$。可见, 缓和曲线上各点的曲率与曲线长度成线性变化。若已知缓和曲线终点 A 和终点 B 的曲率, 便可求出缓和曲线上任意一点的曲率, 即

$$\rho_i = \rho_A + \frac{\rho_B - \rho_A}{DK_B - DK_A}(DK_i - DK_A) \tag{1}$$

式中, ρ_i 为缓和曲线上 i 点曲率; ρ_A 为缓和曲线起点 A 曲率; ρ_B 为缓和曲线终点 B 曲率; DK_A 为缓和曲线起点 A 的里程; DK_B 为缓和曲线起点 B 的里程; DK_i 为缓和曲线 i 点里程。

对于(1)式, 当曲线右偏时取"+", 当曲线左偏时取"-"。

2　缓和曲线点位坐标公式导证

如图 1 所示, 有

$$\begin{cases} \mathrm{d}x \approx \mathrm{d}l \cdot \cos\beta \\ \mathrm{d}y \approx \mathrm{d}l \cdot \sin\beta \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x \approx \displaystyle\int_{K_A}^{K_i} \cos\beta \,\mathrm{d}l \\ y \approx \displaystyle\int_{K_A}^{K_i} \sin\beta \,\mathrm{d}l \end{cases} \tag{3}$$

收稿日期　1998-12-31　李孟山　男　1964 年 1 月出生　讲师

若已知起点A的坐标(x_A, y_A)及A点切线坐标方位角α_A,则缓和曲线上任意点i的坐标便可表示为

$$\begin{aligned} X_i &= X_A + \int_{K_A}^{K_i} \cos(\alpha_A + \beta_i)\,\mathrm{d}l \\ Y_i &= Y_A + \int_{K_A}^{K_i} \sin(\alpha_A + \beta_i)\,\mathrm{d}l \end{aligned} \tag{4}$$

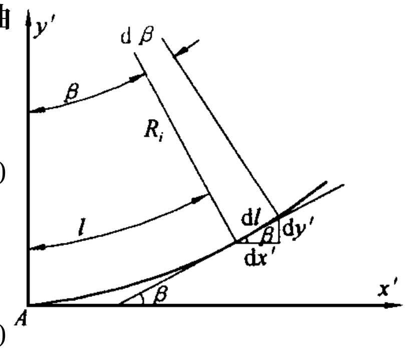

图1 曲线坐标增量

式中β_i由$\mathrm{d}\beta = \frac{\mathrm{d}l}{R_i}$积分得到,即

$$\beta_i = \int_{K_A}^{K_i} \frac{1}{R_i}\mathrm{d}l = \frac{(\rho_i + \rho_A)}{2}(DK_i - DK_A) \tag{5}$$

由此可得到缓和曲线上任意一点i的切线坐标方位角

$$\alpha_i = \alpha_A + \frac{(\rho_i + \rho_A)}{2}(DK_i - DK_A) \tag{6}$$

对于(4)式解算由于后半部分是定积分,引入复化辛甫生公式:

首先将积分区间$(DK_A、DK_i)$划分为n等分,步长$H = (DK_i - DK_A)/n$,分点里程为$DX_k = DK_A + kH$,$k = 0, 1, 2, \cdots, n$。

记子区间(DX_k, DX_{k+1})的中点里程为$DX_{k+\frac{1}{2}}$,有

$$DX_{k+\frac{1}{2}} = (DX_k + DX_{k+1})/2 \tag{7}$$

缓和曲线上任意点i与起点A的坐标差由复化辛甫生公式表示为

$$\begin{cases} \Delta X_i = \int_{K_A}^{K_i} \cos\alpha_i \mathrm{d}l = \frac{H}{6}\left[\cos\alpha_A + 4\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\cos\alpha_k + \cos\alpha_i\right] \\ \Delta Y_i = \int_{K_A}^{K_i} \sin\alpha_i \mathrm{d}l = \frac{H}{6}\left[\sin\alpha_A + 4\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\alpha_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sin\alpha_k + \sin\alpha_i\right] \end{cases} \tag{8}$$

由此缓和曲线上任意点i在线路坐标系里的坐标便可求得

$$\begin{cases} X_i = X_A + \Delta X_i \\ Y_i = Y_A + \Delta Y_i \end{cases} \tag{9}$$

3 线路中线点位坐标计算步骤

(1) 选择适当的n值,根据试验当$n = 4$时无论何种线型都能获得较满意的结果。

(2) 由起点A的里程和解求点i的里程计算步长$H = (DK_i - DK_A)/n$。

(3) 计算分点里程$DX_k = DK_A + kH$,$k = 0, 1, 2, \cdots, n$。

(4) 由(7)式计算子区间$[DX_k, DX_{k+1}]$中点$DX_{k+\frac{1}{2}}$的里程,其中,$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$。

(5) 由(1)式计算分点的曲率。当$\rho_A = \rho_B = 0$时表示直线段;当$\rho_A = \rho_B = 1/R$时表示圆曲线段;当$\rho_A = 0$,$\rho_B = 1/R$或$\rho_A = \frac{1}{R}$,$\rho_B = 0$,或$\rho_A = 1/R_1$,$\rho_B = 1/R_2$,$(R_1 > R_2$或$R_1 < R_2)$时表示缓和曲线段。

(6) 由(6)式计算每一个分点的切线坐标方位角。

(7) 由(8)、(9)式计算解求点i的线路坐标系坐标。

4 举例

如图2为一座喇叭型立交,是收费立交常用形式。现仅以其中环形匝道说明其计算方法。

环形匝道为水滴形,与主线的交叉点O的里程设为$DK_0 + 116$,坐标为$x_0 = 1378.214$,$y_0 = 2822.950$,OA直线的坐标方位角为200°,其它数据见表1。计算结果见表2。

表1　匝道已知数据表

路段名称	曲线类型	曲线长度/m	曲率半径/m
OA	直线	34.000	-
AB	缓和曲线	74.000	-
BC	圆曲线	117.840	124
CD	缓和曲线	65.810	-
DE	圆曲线	88.176	60
EF	缓和曲线	81.667	-
FG	直线	62.507	-

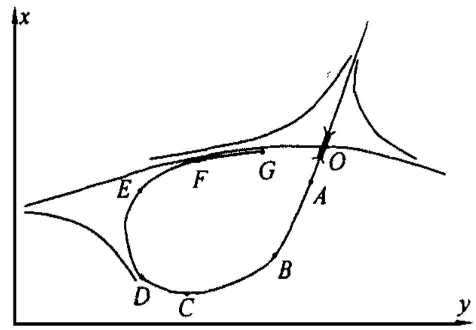

图2　喇叭型立交

表2　中线坐标计算成果表

曲线类型	路段名称	桩号	*X* 坐标/m	*Y* 坐标/m	坐标方位角	曲率/m
直线	*O*	K_0+ 116	1378.2140	2822.9500	200°	0
缓和曲线	*A*	K_0+ 150	1346.2644	2811.3213	200°	0
圆曲线	*B*	K_0+ 224	1279.8452	2779.3638	217°05′46″76	1/124
缓和曲线	*C*	K_0+ 341.840	1230.6817	2677.1135	217°32′44″8	1/124
圆曲线	*D*	K_0+ 407.650	1254.7844	2617.8309	318°10′18″8	1/60
缓和曲线	*E*	K_0+ 495.826	1335.2366	2618.2140	42°22′25″56	1/60
直线	*F*	K_0+ 577.493	1364.6584	2692.6049	81°22′0″79	0
	O	K_0+ 640	1374.0411	2754.4037	81°22′0″79	0

5　结论

通过算例验证本文导证的计算线路中线坐标公式是完全正确的; 本文导证的公式适用于各种线型; 无论沿线路方向正推线路点位坐标, 还是逆推线路点位坐标, 本文导证的公式都适用; 特别当半径较小时(例如高速公路匝道), 使用本文导证的公式计算点位坐标更能显示其优越性。

参　考　文　献

1　李庆扬, 王能超, 易大义编. 数值分析. 北京: 华中理工大学出版社, 1988. 124～135.

2　朱成磷编. 铁道工程测量学. 下册. 北京: 中国铁道出版社, 1989. 9～20.

The Coordinate Computation of Central Line Using Numeracal Integral

Li Mengshan　Li Shaoyuan

(Department of Communication Engineering, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043)

【**Abstract**】By means of combined Simpson's formula, this paper derives the central line coordinate calcution formule from the central line curvature variant, which can be used for all kinds of line pattern.

【**Key words**】the central line coordinate　curvature　combined Simpson's formula

(责任编辑　刘志春)