

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

- 1- ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بباقي قسمة 9^n على 11.
- 2- ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟
- 3- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11.
- 4- عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفاً للعدد 11.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases} \quad \text{حيث: } z_1 \text{ و } z_2$$

2- تعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$ ، النقط A ، B و Ω التي

$z_\Omega = 1 - 2i$ ، $z_A = 3 + 2i$ ، $z_B = -3$ ، $z_\Omega = -2i$ حيث:

أ) أثبت أن: $(z_A - z_\Omega) = i(z_B - z_\Omega)$

ب) عين طبيعة المثلث ΩAB .

3- h هو التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبة 2.

أ) عين الكتابة المركبة للتحاكي h .

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h .

ج) عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$.

د) بيّن أن $ABCD$ مربع.

4- (E) مجموعة النقط M من المستوى التي تتحقق: $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$

أ) تحقق أن النقطة B تتبع إلى المجموعة (E)، ثم عين طبيعة (E) وعناصرها المميزة.

ب) أنشئ المجموعة (E).

التمرين الثالث: (07 نقاط)

- I - g هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$
- 1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - 2- بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$
 - 3- استنتج إشارة $g(x)$.
- II - f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2x - 2}{e^x - 2x}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول 2cm .
- 1- بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.
 - 2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$
 - ب) استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - ج) احسب $f(1)$ ، ثم استنتاج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.
 - 3- أ) بين أن: $\frac{1}{\alpha - 1} = f(\alpha)$ حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I.
 - ب) استنتاج حصراً للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).
 - ج) ارسم (C_f) .
- 4- ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$
- 5- h هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$
- أ) احسب $(h'(x))'$ بدلاً كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتاج إشارة $(h'(x))'$.
 - ب) شكل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين الرابع: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- (P) المستوى الذي يشمل النقطة $(2; -5; -2)$ و $(5; 1; -2)$ شعاع ناظمي له.
- (Q) المستوى الذي: $x + 2y - 2 = 0$ معادلة له.
- 1- عين معادلة ديكارتية للمستوى (P).
 - 2- بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.
 - 3- عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ)، تقاطع المستويين (P) و (Q).
 - 4- أ) احسب d_1 المسافة بين النقطة $(3; 3; 3)$ و المستوى (P) و d_2 المسافة بين النقطة K والمستوى (Q).
 - ب) استنتاج d المسافة بين النقطة K والمستقيم (Δ).
 - ج) احسب المسافة d بطريقة ثانية.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z :

$$(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

2- المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعمد والمتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$

A ، B ، C و D نقط من المستوى لاحقاتها على الترتيب:

$$z_D = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_C = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_B = \sqrt{3} - i, \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

أ) اكتب كلاماً من Z_A ، Z_B ، Z_C و Z_D على الشكل الأسني.

ب) تحقق أن: $i = \frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_C}$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعمدان.

z_n العدد المركب الذي طولته $\frac{2\pi}{3}n$ و عمدة له حيث n عدد طبيعي.

العدد المركب المعرف بـ: $L_n = z_D \times z_n$

أ) اكتب كلام من L_0 ، L_1 على الشكل الجبري.

ب) (U_n) هي المتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

أثبت أنَّ المتتالية (U_n) هندسية يطلب تعين أساسها وحدتها الأولى.

صور الأعداد المركبة M_n, \dots, M_1, M_0 - L_n, \dots, L_1, L_0 على الترتيب.

. $S_n = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{OM_1} + \dots + \overrightarrow{OM_n}$ حيث: S_n المجموع بدلالة n ، احسب.

- جد نهایة S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الثاني: (30 نقاط)

نسمى (S) الجملة التالية: حيث $x \in \mathbb{Z}$ عدد صحيح $\begin{cases} x \equiv 3 [15] \\ x \equiv 6 [7] \end{cases}$

١- بيّن أنَّ العدد 153 حلَّ للجملة (S) .

-2 إذا كان x_0 حل لـ (S) ، بين أن: (S) يكافئ x حل لـ (S)

3- حل الجملة .

4- يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا استعمل علباً تتسع لـ 15 كتاباً بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علباً تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.

إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتاباً، ما عدد هذه الكتب؟

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (P) المستوى الذي:

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k \\ z = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

معادلة ديكارتية له و (D) المستقيم الذي تمثل وسيطي له.

- تحقق أنَّ المستقيم (D) محتوى في المستوى (P) .

- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $(4;1;3)$ شعاع توجيه له.

ب) عين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

- بين أنَّ $3x - 4z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية لل المستوى (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ) .

- احسب المسافة بين النقطة $M(x;y;z)$ وكل من (P) و (Q) .

ب) أثبت أنَّ مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2) يطلب تعين معادلة ديكارتية لكل منهما.

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4z - 3 = 0 \\ x + 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

عين مجموعة النقط $(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

I - g هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty]$ كما يلي: $g(x) = x^2 + a + b \ln(x)$ حيث a و b عددان حقيقيان.

1- عين a و b علماً أنَّ التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(-1;1)$ مماساً معادلاً توجيهه 4.

2- نضع $a = -2$ و $b = 2$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شُكّل جدول تغيراتها.

ب) بين أنَّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $[0;+\infty]$ ، ثم استنتج إشارة $g'(x)$ على $[0;+\infty]$.

$$f(x) = x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x}$$

II - f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty]$ بـ:

تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\bar{i},\bar{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

ب) احسب $f'(x)$ ، ثم تتحقق أنَّ:

ج) استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم شُكّل جدول تغيرات الدالة f .

2- أ) بين أنَّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = x - 2$ مقارب لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

ب) بين أنَّ (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) ، ثم جِد معادلة له.

ج) نأخذ $\alpha = 1,25$. بين أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حللين x_1 و x_2 حيث:

$0,6 < x_1 < 0,7$ و $2,7 < x_2 < 2,8$.

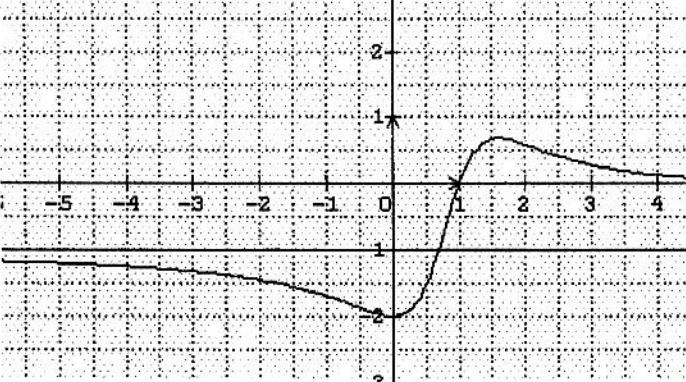
3- ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $(m+2)x + 2 \ln(x) = 0$.

الإجابة النموذجية و سلم التقييم

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2012

المادة : الرياضيات الشعبة : تقني رياضي

العلامة	عنصر الإجابة (الموضوع الأول)	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة	
03	<p>التمرين الأول: (03 نقط)</p> <p>$9^{5k+4} \equiv 5[11], 9^{5k+3} \equiv 3[11], 9^{5k+2} \equiv 4[11], 9^{5k+1} \equiv 9[11], 9^{5k} \equiv 1[11]$ (1) الباقي هي على الترتيب : 5، 3، 4، 9، 1، 2011²⁰¹² $\equiv 9^{2012}[11]$ ومنه [11] لدينا 9²⁰¹² $\equiv 4[11]$ فإن 2012 = 5 × 402 + 2 وبما أن 9²⁰¹² $\equiv 4[11]$ لدينا $4 \times 9^{10n} \equiv 4[11]$ أي $9^{15n+1} \equiv 3[11]$ و $9^{15n+1} \equiv 9[11]$ و $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012} \equiv 0[11]$ ومنه نجد $2n + 6 \equiv 0[11]$ تكافئ 2011²⁰¹² + 2n + 2 $\equiv 0[11]$ ومنه $n \equiv 8[11]$ إذن $n = 11k + 8$ مع عدد طبيعي k</p>	
06	<p>التمرين الثاني: (06 نقاط)</p> <p>(1) تعين z_1 و $z_2 = 1 - 2i$ و $z_1 = 3 + 2i$: $z_2 = z_1 - z_2$ الطريقة (أ) $i(z_A - z_\Omega) = (z_B - z_\Omega) = -4 + 2i$ (2) (قبل أي طريقة أخرى) ب) المثلث $\Omega A B$ قائم في Ω ومقاييس الساقين $z' = 2z - 3 - 2i$ (3) $z_c = -1 - 6i$ (ب) ج) $z_D = 5 - 4i$ (د) البرهان على أن $ABCD$ مربع (أ) لدينا $\ BA - BB + BC\ = \ BA + BC\ = \ BD\ = z_D - z_B = 4\sqrt{5}$ (4) ومنه B تتبع إلى المجموعة (E) ... $MD = 4\sqrt{5}$ و منه (E) هي الدائرة ذات المركز D ونصف القطر $4\sqrt{5}$ ب) الإنشاء: (E) الدائرة ذات المركز D والتي تشمل B</p>	
02,5	<p>التمرين الثالث: (07 نقاط)</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -4$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (1) (I) $g'(x) = 2(1-x)e^x$ جدول التغيرات (2) الدالة g مستمرة وتغير إشارتها مرتين وبما أن $g(0) = 0$ فإن العدد صفر هو حل ولدينا $0 < g(1,60) \times g(1,59) < 0$ ومنه الحل الثاني هو α حيث $1,59 < \alpha < 1,60$ (3) إشارة $g(x)$</p>	

العلامة	عنصر الإجابة (الموضوع الأول)	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة	
0.25	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ (II) ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.	
0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$+∞ و منه المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$. (1) البرهان على أن:	
0.50	$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$	
2×0.25	ب) إشارة $f''(x)$ وجدول تغيرات الدالة f ج) إشارة $f(x)$ ، $f(1) = 0$	
2×0.25	$f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1} = \frac{1+1-\alpha}{\alpha-1} = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$ (I) (3)	
0.25	ب) ليجاد حصر لـ $f(\alpha)$ ج) رسم المنحني (C_f)	
04,5		
0.50	$f(x) = m + 1$: (4) المعادلة تكافيء: ومنه لما: $m \in]-\infty; -3[\cup \left] \frac{3-2\alpha}{\alpha-1}; +\infty \right[$ ولما: $m = -3$ للمعادلة حل مضاعف معذوم ولما: $m \in]-3; -2[$ للمعادلة حلين من إشارتين مختلفتين ولما: $m \in]-2; -1[$ للمعادلة حل وحيد موجب ومنه لما: $m \in \left] -1; \frac{3-2\alpha}{\alpha-1} \right[$ للمعادلة حلين موجبين ولما: $m = \frac{3-2\alpha}{\alpha-1}$ للمعادلة حل مضاعف موجب لما: $h'(x) = 2f'(x) \times f(x)$ (I) (5) ب) جدول تغيرات h	
0.75		
2×0.25		
0.25		

العلامة	الجزء	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	محاور الموضوع
المجموع			
04	0.50 معادلة لل المستوى (P) $-2x + y + 5z - 1 = 0$ (1) هو شعاع ناظمي لـ (P) و $(1; 2; 0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) (2)	التمرین الرابع (04 نقط)
	0.50 بما أن $\bar{n} \cdot \bar{n}' = 0$ فإن $\bar{n} \perp \bar{n}'$ وبالتالي (P) و (Q) متعددان (3)	
	0.75 هو تمثيل وسيطي للمسقط (Δ) (يقبل أي تمثيل وسيطي آخر) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}$ (4)	
	2×0.5 $d_2 = \frac{7}{\sqrt{5}}$ و $d_1 = \frac{11}{\sqrt{30}}$ (4)	
	0.50 $d = \sqrt{\frac{83}{6}}$ ومنه $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ (ب)	
	0.75 (5) حساب d بطريقة ثانية 0.25 للمحاولة + 0.50 للنتيجة ()	

العلامة المجموع	مجزأة	عناصر الإجابة <u>الموضوع الثاني</u>	محاور الموضوع
05	0.25	(05) التمرين الأول: $z^2 + 2z + 4 = 0 \quad (1)$ $\Delta = (2i\sqrt{3})^2$ $z_2 = -1 - i\sqrt{3} \quad z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ $\Delta = (2i)^2$ $z_4 = \sqrt{3} + i \quad z_3 = \sqrt{3} - i$ $z_D = 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}, z_C = 2e^{i(\frac{4\pi}{3})}, z_B = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}, z_A = 2e^{i(\frac{\pi}{6})} \quad (1) \quad (2)$ $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_C} = i \quad \text{إثبات أن:}$ $(\overline{CA}, \overline{BD}) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{نستنتج أن:}$ $\text{ومنه: المستقيمان } (AC) \text{ و } (BD) \text{ متعمدان}$ $L_1 = z_D \times z_1 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad L_0 = z_D \times z_0 = z_D = -1 + i\sqrt{3} \quad (1) \quad (3)$ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n : n \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n \quad \text{لدينا:}$ $u_0 = \frac{1}{2} \text{ هندسية أساسها } 2 \text{ وحدتها الأولى } u_0 = 2$ $s_n = \ \overrightarrow{OM}_0\ + \ \overrightarrow{OM}_1\ + \dots + \ \overrightarrow{OM}_n\ $ $= L_0 + L_1 + \dots + L_n $ $= u_0 + u_1 + \dots + u_n$ $s_n = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) \quad \text{ومنه:}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 4$	
	0.50		
	0.25		
	0.50		
	4×0.25		
	0.25		
	0.25		
	0.25		
	2×0.25		
	0.25		

العلامة	عنصر الإجابة	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة	
	التمرين الثاني: (03.5) $\begin{cases} 153 \equiv 3[15] \\ 153 \equiv 6[7] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 153 = 150 + 3 \\ 153 = 147 + 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases}$ حل للجملة (s) معناه (2) $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ و x حل للجملة (s) معناه (3) $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$ وبالتالي: x حل للجملة (s) يكفي (أو إثبات صحة الالتزامين) $x - 153 \equiv 0[105]$ حل للجملة (s) معناه (3) $x = 105k + 48$ حيث k عدد صحيح $x = 105k + 48 \leq 600$ حيث $5 \leq k \leq 5$ معناه (4) إذن: عدد الكتب هو 573	3.50
	التمرين الثالث: (04.5) (P) محتوى في (D) 1 $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$ (قبل أي تمثيل وسيطي آخر) (1.2) ب (D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $(-\frac{5}{19}, \frac{13}{19}, -\frac{18}{19})$ $3x - 4z - 3 = 0$ (3) المسافة بين M و (P) (4) المسافة بين M و (Q) (5) ب - مجموعة النقط M هي نصف الفضاء (P_1) : $7x + 3y - 4z - 4 = 0$ أو نصف الفضاء (P_2) : $x + 3y + 4z + 2 = 0$ (P) و (P ₂) متوازيان (P) و (P ₂) تتقاطع وفق المستقيم (5)	04.50

العلامة المجموع	عناصر الإجابة	محاور الموضوع												
	التمرين الرابع: (07)													
0.50 $g'(+1) = 4$ و $g(1) = -1$ (I)													
0.50 $b = 2$ ، $a = -2$													
2×0.25 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ (2)													
2×0.25 $g'(x) > 0$ ، $g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$													
0.25 جدول التغيرات													
0.25 ب) مبرهنة القيم المتوسطة													
0.25 إشارة $g(x)$													
2×0.25 (ا) النهايات (1) (II)													
0.50 $f'(x) = \frac{x^2 - 2 + 2 \ln(x)}{x^2}$ (ب)													
	جدول التغيرات													
07	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td style="text-align: center;">↗</td><td>$+\infty$</td></tr> </table>	x	0	α	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	$+\infty$	↗	$+\infty$	
x	0	α	$+\infty$											
$f'(x)$	-	0	+											
$f(x)$	$+\infty$	↗	$+\infty$											
0.25 (ا) مستقيم مقارب (2)													
0.50 دراسة الوضعية													
0.25 $x = e$ يكفي (ب)													
0.25 $y = x - 2 - \frac{2}{e}$													
2×0.25 ج) مبرهنة القيم المتوسطة التمثل البياني													
0.5														
0.75 (3) مناقشة حلول المعادلة المطوبة حسب قيم m													