

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$.

(1) أ - برهن بالترابع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدتها الأولى .

ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$

ج - ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يعطي الجدول أدناه، كميات الحليب، مقدرة بالهكتولتر hL ، التي تم تجميعها في إحدى ولايات الوطن من سنة 2006 إلى سنة 2011 :

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
كمية الحليب المجمعة y_i (بالهكتولتر hL)	25000	26000	28500	29000	31000	33498

(1) مثل سحابة النقط $(x_i ; y_i)$ في معلم متعدد مبدؤه $O'(0; 20000)$ و بوحدة $1 cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1 cm$ لكل hL على محور التراتيب.

(2) أ - عين إحداثي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة.

ب - عين معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا. (تعطى نتائج كل حساب مدوراً إلى 10^{-2})

(3) قدر كمية الحليب التي يمكن تجميعها في سنة 2015 باستعمال التعديل الخطى السابق.

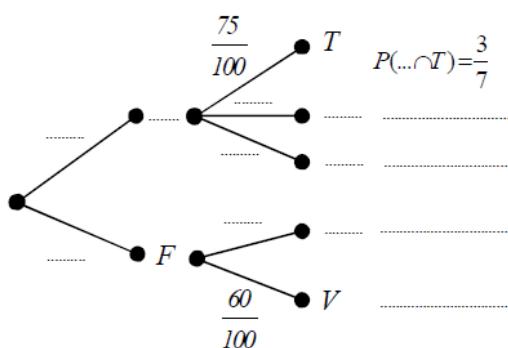
(4) إذا اعتربنا أن كمية الحليب المجمعة في السنوات المowالية لسنة 2011 تتبع بنفس الوثيرة التي تمت بها من سنة 2006 إلى سنة 2011 ، فابتداءً من أية سنة ستتعدي الكمية المجمعة hL 50000 ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).

عدد تلاميذ قسم دراسي هو 35 تلميذا من بينهم 15 بنتا. يختار كل تلميذ من القسم رياضة واحدة وواحدة فقط يمارسها في إطار نشاطات النادي الرياضي للمؤسسة. 75% من الأولاد اختاروا ممارسة كرة القدم و 15% اختاروا ممارسة كرة اليد بينما اختار 10% ممارسة الكرة الطائرة. 60% من البنات اختنرن ممارسة الكرة الطائرة والباقية اختنرن ممارسة كرة اليد. لتمثيل هذا القسم في منافسة رياضية، يتم اختيار تلميذ واحد منه بطريقة عشوائية.

يرمز G إلى الحادثة " التلميذ المختار ولد " ويرمز F إلى الحادثة " التلميذ المختار بنت " .



يرمز T إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس كرة القدم " .

يرمز M إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس كرة اليد " .

يرمز V إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس الكرة الطائرة " .

1) انقل الشجرة المقابلة على ورقة الإجابة، ثم أكملاها.

2) أحسب $P(V)$ احتمال أن تتحقق الحادثة V .

3) أحسب الاحتمال الشرطي $P_V(G)$.

4) أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

الممثل البياني (C_f) المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty)$

بالعبارة : $f(x) = ax + b + cx \ln x$ حيث a, b, c أعداد حقيقة.

1) خمن بقراءة بيانية اتجاه تغير f ونهاية f عند $+\infty$.

2) أ- أحسب بدلالة a و c عباره $(f')'(x)$ حيث ' f ' هي الدالة

المشتقة للدالة f على $[1; +\infty)$.

ب- باستعمال معطيات في الشكل، وعلما أن $f(5) = 16 - 10 \ln 5$.

-بين أن: $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln x$.

ج- تحقق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا على $[1; +\infty)$ ، ثم تتحقق أن $4,95 < \alpha < 4,96$.

(4) نعرف العدد الحقيقي S كما يلي: $S = \int_1^{\alpha} f(x) dx$ (حيث α هو حل المعادلة $f(x) = 0$.

أ- بين أن الدالة: $x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة f على $[1; +\infty)$.

ب- أعط تفسيرا هندسيا للعدد S ، ثم احسبه بدلالة α .

ج- بين أن: $S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد S .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (5 نقاط)

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره $DA 50000$ في صندوق التوفير والاحتياط. يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $DA 5000$ (بعد حساب الفوائد).

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $n+2008$.

أ- أحسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2 .

ب- هل المتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ برهن إجابتك.

ج- بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا، $-5000 - u_{n+1} = 1,05u_n$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$.

أ- بيّن أنَّ المتالية (v_n) هندسية ، حدد أساسها وحدّها الأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$.

(3) أ- ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب- ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتمد على سحبه في نهاية كل سنة؟

التمرين الثاني: (6 نقاط)

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	e	0

جدول التغيرات المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال

$f(x) = (x+1)e^{1-x}$ [بالعبارة: $-1; +\infty$]

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\bar{O}; \bar{i}, \bar{j})$.

(1) بيّن أنَّ معادلة (Δ) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = -x + 3$.

(2) g هي الدالة المعرفة على المجال $[-1; +\infty)$ بالعبارة: $g(x) = -x e^{1-x} + 1$.

أ- درس اتجاه تغيير الدالة g .

ب- أحسب $(1) g$ ، ثم استنتاج إشارة $(x) g$ على المجال $[-1; +\infty)$.

(3) h هي الدالة المعرفة على المجال $[-1; +\infty)$ بالعبارة: $h(x) = (x+1)e^{1-x} + x - 3$.

أ- لاحظ أنه من أجل كل x من المجال $[-1; +\infty)$ ، ثم استنتاج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

ب- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $[-1; +\infty)$ ، $h'(x) = g(x)$ ، ثم استنتاج جدول تغيرات الدالة h .

ج- تحقق أنَّ المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا في المجال $[-1; +\infty)$ يطلب تعينه.

د- حدد إشارة $(x) h$ ، ثم استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ه- أنشئ كلا من المماس (Δ) والمنحنى (C_f) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

بيُنَت دراسة إحصائية لطلاب السنة الثالثة ثانوي بإحدى الثانويات أن 30 % من الطلاب قدموا من الإكمالية A و 45 % من الإكمالية B والبقية من الإكمالية C .

بعد اجتياز الطالب امتحان البكالوريا تبيّن ما يلي : نجح في الامتحان 25 % من الطلاب القادمين من الإكمالية A و 18 % من الذين قدموا من الإكمالية B و 84 % من الذين قدموا من الإكمالية C .
نختار طلاباً من طلاب السنة الثالثة ثانوي بطريقة عشوائية بعد اجتياز امتحان البكالوريا.

يرمز R إلى الحادثة "الطالب المختار نجح في الامتحان"

يرمز A إلى الحادثة "الطالب المختار قادم من الإكمالية A "

يرمز B إلى الحادثة "الطالب المختار قادم من الإكمالية B "

يرمز C إلى الحادثة "الطالب المختار قادم من الإكمالية C "

1) أُنجز شجرة الاحتمالات التي تُمْذِج هذه الوضعية .

2) أثبت أن $P(C \cap R) = 0,21$.

3) احسب $P(R)$ احتمال الحادثة R .

4) احسب الاحتمال الشرطي $P_R(B)$.

التمرين الرابع: (05 نقاط)

f هي الدالة المعرفة على المجال $[-1; +\infty)$ بالعبارة : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$

1) أحسب نهايتي f عند -1 - بقيم أكبر وعنده $+\infty$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $[-1; +\infty)$ ، $f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1; +\infty)$ ، ثم شُكّل جدول تغيراتها.

ج- جد الدالة الأصلية H للدالة f على المجال $[0; +\infty)$ والتي تتعدّم من أجل $x = 0$.

3) تنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الألف و 200 آلة على الأكثر.

تُمْذِج الكلفة الهاشمية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5; 200]$ بالدالة f أي أن:

من أجل كل x من المجال $[5; 200]$ ، $C_m(x) = f(x)$.

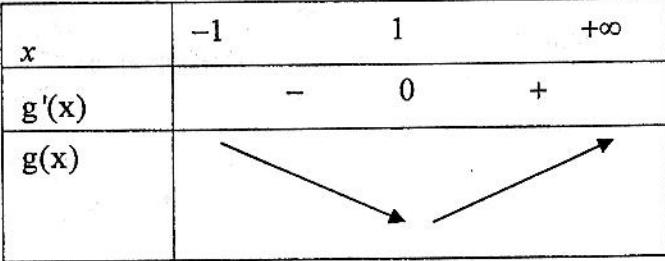
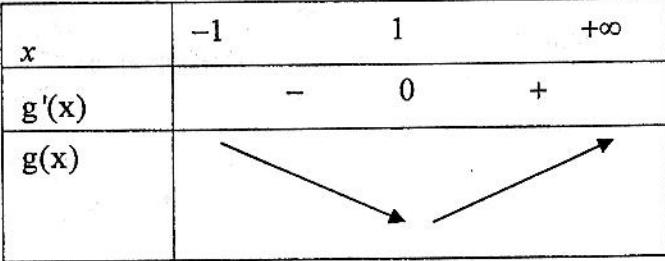
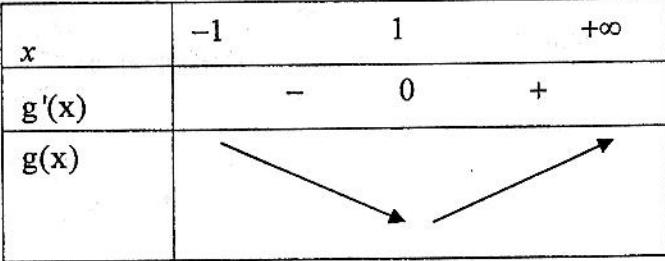
أ- ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجهما الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهاشمية أقل ما يمكن؟

ب- نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونذكر أن $C'(x) = C_m(x)$.

جد عباره الكلفة الإجمالية $C(x)$ ، علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي $DA = 40000$ ، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

العلامة	عنصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجازأة
05	التمرين الأول
01	(1) أ- إثبات أن $u_n > \frac{2}{3}$ ب- اثبات أن (u_n) متاقيصة
01	
0,75	أ- (u_n) متتالية هندسية. (2)
0,5+0,25	$u_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$, $v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ - ب
0,5	$\lim u_n = \frac{2}{3}$ - ج
0,25	
0,75	$v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right]$ (3) $S_n = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right] + \frac{2}{3}(n+1)$
05	التمرين الثاني
01	(1) تمثيل سحابة النقاط
0,5	(2) أ- $G(3,5 ; 28833)$
0,5+1	ب- $b=23034$, $a=1656,86$
0,5	(3) - رتبة السنة 2015 هي 10
0,5	- الكمية المقدرة هي حوالي : 39602,6 hL
0,75	(4) $x=17$ و منه $y>5000$ أي
0,25	السنة التي رتبتها 17 هي 2022
04	التمرين الثالث
5x0,5	<p>(1)</p>

	0,5	$P(V) = 11/35$	(2)								
	0,5	$P_V(G) = 2/11$	(3)								
	0,5	$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 4/7$	(4)								
		التمرين الرابع									
	2×0,25 0,25	f متزايدة تماما على $\left[\sqrt{e}; +\infty\right]$ و متفاصلة تماما على $\left[1; \sqrt{e}\right]$ (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$									
	0,25 2×0,25	$f'(x) = a + c(\ln x + 1)$ - أ (2) $f(1) = 4$ و $f'(\sqrt{e}) = 0$ - ب $\begin{cases} a + \frac{3}{2}c = 0 \\ a + b = 4 \\ 5a + b + 5c \ln 5 = 16 - 10 \ln 5 \end{cases}$									
06	0,5										
	4×0,25	الطريقة + $c = -2$, $b = 1$, $a = 3$									
	0,25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[3 + \frac{1}{x} - \ln x \right] = -\infty$ - ج									
	0,25	$f'(x) = 1 - 2 \ln x$									
	0,25	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>\sqrt{e}</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table>	x	1	\sqrt{e}	$+\infty$	$f'(x)$	+	0	-	
x	1	\sqrt{e}	$+\infty$								
$f'(x)$	+	0	-								
	0,25	جدول تغيرات الدالة f .									
	0,25	- المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلولا على $\left[1; \sqrt{e}\right]$ (3)									
	0,25	- المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل واحدا على $\left[\sqrt{e}; +\infty\right]$									
	0,25	$f(4,95) \times f(4,96) < 0$ -									
	0,25	$g'(x) = f(x)$ - د (4)									
	0,25	ب- S هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = \alpha$ و $x = 1$, $y = 0$									
	0,25	$S = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2 \ln \alpha$									
	0,25	ج- إثبات أن $S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1) - 3$									
	0,25	$11,72 < S < 11,78$									

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)											
	مجموع مجزأة												
05	0,75	التمرين الأول											
	0,25	أ - حساب u_{2,u_1,u_0} (1)											
	0,25	ب - (u_n) ليست هندسية لأن $u_1^2 \neq u_0 \times u_2$											
	0,5	$u_0 + u_2 \neq 2u_1$ (ليس حسابية لأن (u_n)) $u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{5}{100} - 5000$ \Rightarrow											
	2x0,25 +0,5	$q = 1,05 ; v_0 = -5 \times 10^4 ; v_{n+1} = 1,05 v_n$ - أ (2)											
	2x0,5	$u_n = -5 \times 10^4 (1,05)^n + 10^5 ; v_n = -5 \cdot 10^4 \times (1,05)^n$ - ب											
	0,5	أ - المبلغ في نهاية 2015 هو $u_8 = 26127,23 DA$ (3)											
	0,25	ب - $u_n < 5000$											
06	0,25	$n = 14$ أي $n > 13,16$ ، $n > \frac{\ln(1,9)}{\ln(1,05)}$											
	0,25	ابتداء من سنة 2022 لا يسمح لهذا الشخص بسحب المبلغ المعطى											
	3x0,25	التمرين الثاني											
	0,25	$f(l) = 2 , f'(l) = -1 , f'(x) = -xe^{l-x}$ (1) $(D) : y = -x + 3$											
	0,25	$g'(x) = (x - l)e^{l-x}$ - أ (2)											
	2x0,25	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	x	-1	1	$+\infty$	$g'(x)$	-	0	+	$g(x)$		
x	-1	1	$+\infty$										
$g'(x)$	-	0	+										
$g(x)$													
0,25	ب - $g(x) \geq 0$ ، من أجل كل x من $[-1; +\infty[$ من $g(l) = 0$												

0,25

$$h(x) = f(x) + x - 3 \quad (3)$$

0,25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

0,25

$$h'(x) = g(x) \quad \text{بـ}$$

0,5

	x	-1	$+\infty$
h(x)			$\nearrow -\infty$
		-4	

2x0,25

جـ- تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة + الرتابة.

2x0,25

$$(C_f) \text{ يعني } x = 1 \text{ و } (\Delta) \text{ معانـ } []$$

$$[h(x) = f(x) - (-x + 3)]$$

$$\text{دـ- بما أن } h(1) = 0 \text{ فإن}$$

0,5

	x	-1	1	$+\infty$
h(x)		-	0	+

0,25

يقع (C_f) أعلى (Δ) في $[1; +\infty[$ و يقع أسفله في المجال $[-1, 1]$.

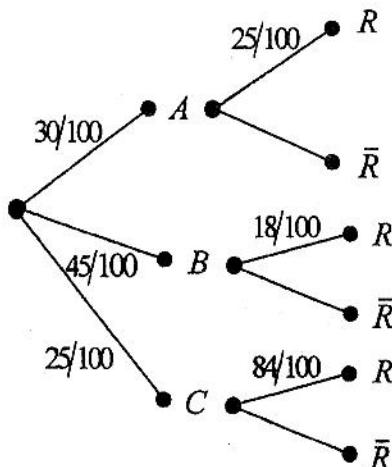
1

ـ رسم (C_f) و (Δ)

التمرين الثالث

(1) شجرة الاحتمالات

6x0,25



04

0,5

$$P(C \cap R) = \frac{25}{100} \times \frac{84}{100} \quad (2)$$

4x0,25

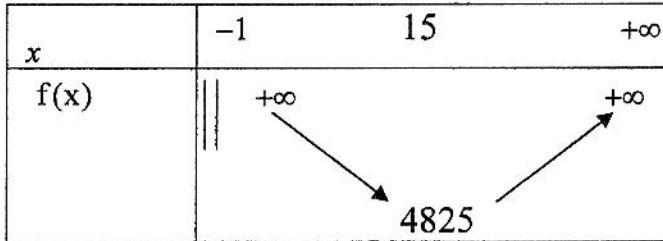
$$P(R) = \frac{30}{100} \times \frac{25}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{18}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{84}{100} = 0,366 \quad (3)$$

0,25x2

$$P_R(B) = \frac{45}{100} \times \frac{18}{100} = 0,081 \quad P_R(B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)} \quad (4)$$

0,5

$$P_R(B) = 0,22$$

	2x025	التمرين الرابع								
		$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ (1)								
	0,5	$f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2}$ -١ (2)								
	0,25	$f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$								
	0,25	ب - من أجل كل x من $] -1; +\infty [$ و $x^2 + x + 240 > 0$ و $(x+1)^2 > 0$								
	0,5	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">15</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$x^2 + x - 240$</td> <td style="padding: 5px;"> </td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> </table>	x	-1	15	$+\infty$	$x^2 + x - 240$		-	0
x	-1	15	$+\infty$							
$x^2 + x - 240$		-	0							
05	0,5	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">15</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="padding: 5px;"> </td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> </table> 	x	-1	15	$+\infty$	$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$
x	-1	15	$+\infty$							
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$							
	3x0,25	$C = 0$ ، $H(0) = 0$ و $H(x) = \ln(x+1) + c$ -ج								
	0,5	أ - عدد الآلات هو 15 (3)								
	2x0,25	ب - C الدالة الأصلية للدالة $C_m = f$ حيث $C(5) = 4 \cdot 10^4$								
	0,5	$C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12}$								
	0,25	$C(15) = 101662,43 \text{ DA}$								