

МОДИФИКАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ОШИБКИ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ УЧЕТА ПОГРЕШНОСТИ В ИЗМЕРЯЕМЫХ ДАННЫХ

Г. И. Рудой

Аннотация

Рассматривается случай существенно нелинейной регрессионной зависимости в физическом эксперименте с гетероскедастичными погрешностями измерения как зависимых, так и независимых переменных. Предлагается модифицированный функционал среднеквадратичной ошибки, учитывающий погрешности определения независимых переменных и различные распределения погрешностей в разных точках. Рассматривается сходимость минимизирующего этот функционал вектора параметров к оптимальному для классического функционала среднеквадратичной ошибки. Приводятся результаты численного моделирования на данных, полученных в ходе эксперимента по измерению зависимости мощности лазера от прозрачности резонатора.

Ключевые слова: гетероскедастичные ошибки, ошибки измерения независимых переменных, символьная регрессия, нелинейные модели.

1 Введение

В ряде экспериментальных приложений возникает задача нахождения оптимальных коэффициентов ω некоторой регрессионной модели f , представленной в виде аналитической формулы, по набору экспериментальных данных. Для этого в предположении о нормальном распределении регрессионных остатков строится функционал, являющийся суммой квадратов отклонений экспериментальных точек y_i от регрессионной кривой: $\sum_i (y_i - f(x_i, \omega))^2$.

Однако, данный функционал построен и статистически обоснован в предположении о точно измеренных независимых переменных и гомоскедастичности ошибок измерения зависимой переменной. Иными словами, рассматриваются только ошибки измерения зависимой переменной, для которых дисперсия соответствующего распределения принимается одинаковой.

В большинстве естественнонаучных приложений это предположение не выполняется, особенно при измерении некоторой зависимости в достаточно широких диапазонах. Например, в задаче нахождения зависимости коэффициента преломления n прозрачного полимера от длины волны λ погрешности измерения каждого физического параметра в различных точках, вообще говоря, различны [1]. Например, если для измерения длины волны λ используется дифракционная решетка, то постоянной является относительная погрешность определения длины волны $\frac{\sigma_{\lambda_i}}{\lambda_i} \approx \text{const}$, и, следовательно, погрешность определения длины волны зависит от самой длины волны. Данная ситуация фиксированной относительной (а не абсолютной) ошибки является типичной для физических экспериментов.

Таким образом, возникает задача поиска оптимальных коэффициентов регрессионной формулы с учетом отличающихся погрешностей измерения в различных экспериментальных точках. Для некоторых частных случаев эта задача уже была решена: например, в работе [2] вводится предположение, что зависимые переменные y_i измеряются неточно, и каждая переменная y_i имеет свою собственную погрешность измерения σ_{y_i} .

В настоящей работе рассмотрена более общая ситуация, в которой независимые переменные также определяются неточно в процессе эксперимента, и каждая переменная имеет свою собственную погрешность измерения. При этом рассматривается случай нелинейной регрессионной зависимости, в отличие от, например, [3], изучающей линейную регрессионную модель.

Предлагается модифицированный функционал качества, учитывающий погрешности как зависимых, так и независимых переменных в виде, достаточном для большинства практических приложений. На примере широко применяемого алгоритма Левенберга-Марквардта [4] рассматривается модификация имеющихся методов оптимизации, применяемых в подобных задачах (классический и модифицированный алгоритмы будем в дальнейшем обозначать АЛМ и МАЛМ соответственно). По построению показывается, что модифицированный алгоритм оптимизации имеет те же свойства (такие, как скорость сходимости), что и исходный алгоритм. Приводятся результаты на экспериментальных данных по измерению параметров усиливающей среды газового лазера.

2 Постановка задачи

Дана обучающая выборка D :

$$D = \{\mathbf{x}_i, y_i\} | i \in \{1, \dots, \ell\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m, y_i \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Для каждой зависимой переменной y_i известно стандартное отклонение ошибки ее измерения σ_{y_i} , а для соответствующего вектора независимых переменных \mathbf{x}_i аналогично известны стандартные отклонения его компонент $\sigma_{x_{ij}} | j \in \{1, \dots, m\}$. Пусть, кроме того, дана некоторая регрессионная модель $y = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$, параметризованная вектором $\boldsymbol{\omega}$.

Для удобства введем вектор, составленный из ошибок измерений зависимых переменных σ_{y_i} :

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \{\sigma_{y_1}, \dots, \sigma_{y_\ell}\}.$$

Аналогично введем матрицу, составленную из ошибок измерений независимых переменных $\sigma_{x_{ij}}$:

$$\Sigma_x = \|\sigma_{x_{ij}}\| | i \in \{1, \dots, \ell\}, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Требуется построить функционал ошибки $S(\boldsymbol{\omega})$ вектора параметров $\boldsymbol{\omega}$ модели f , учитывающий ошибки измерений $\boldsymbol{\sigma}_y$ и Σ_x :

$$S(\boldsymbol{\omega}) = S(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}_y, \Sigma_x), \quad (2)$$

и, кроме того, найти вектор параметров $\boldsymbol{\omega}$, минимизирующий функционал (2):

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} S(\boldsymbol{\omega}). \quad (3)$$

3 Модифицированный функционал качества

Воспользуемся следующим естественным качественным физическим соображением: чем больше погрешность определения зависимой и независимых переменных для некоторой экспериментальной точки, тем меньше соответствующий регрессионный остаток должен

учитываться при оптимизации параметров модели. Кроме того, с физической точки зрения складывать можно только величины, имеющие одинаковую размерность, либо безразмерные величины, поэтому необходима соответствующая нормировка невязок по каждому из измерений.

Сначала рассмотрим случай одной независимой переменной: $x \in \mathbb{R}$. С учетом приведенных выше соображений введем следующее определение расстояния $\rho(x, i)$ от точки (x_i, y_i) из обучающей выборки до некоторой точки $(x, f(x, \omega))$ на кривой, описываемой регрессионной моделью:

$$\rho^2(x, i) = \frac{(x_i - x)^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{(y_i - y)^2}{\sigma_{y_i}^2}, \quad (4)$$

где $y = f(x, \omega)$.

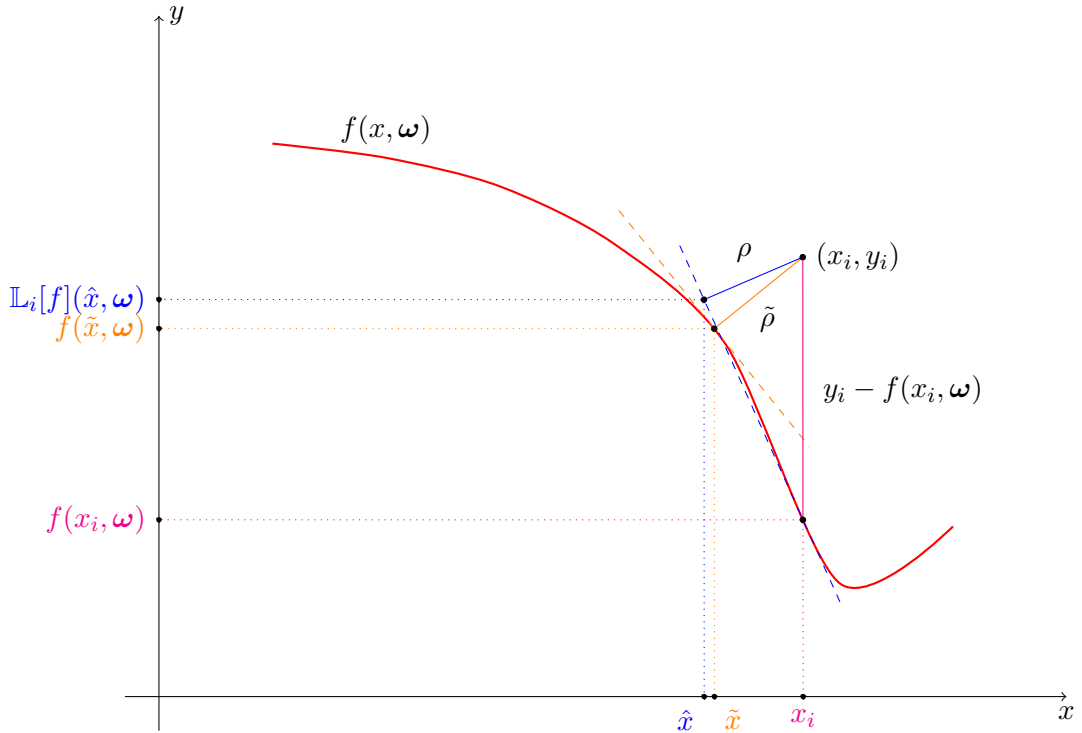


Рис. 1: Различные способы определения расстояния от точки до прямой: $\tilde{\rho}$ — истинное расстояние как минимум расстояния от точки (x_i, y_i) до какой-либо точки на прямой, $y_i - f(x_i, \omega)$ — расстояние в классическом функционале среднеквадратичной ошибки в предположении об отсутствии ошибок измерения независимой переменной, ρ — предлагаемое нами расстояние.

Непосредственное точное определение расстояния от экспериментальной точки до регрессионной кривой представляется отдельной сложной вычислительной задачей, однако, в подавляющем большинстве практических приложений регрессионные зависимости

достаточно гладкие, а погрешности измерения достаточно малы. При этих предположениях будем рассматривать расстояние не от точки до кривой, а от точки до линеаризованной кривой в окрестности этой точки. Так, на рис. 1 показаны различные варианты определения расстояния, при этом в иллюстративных целях размерности и погрешности определения x и y приняты одинаковыми.

Итак, линеаризуем $f(x, \omega)$ в окрестности точки $(x_i, f(x_i, \omega))$, обозначив оператор линеаризации в окрестности этой точки как \mathbb{L}_i :

$$f(x, \omega) \approx \mathbb{L}_i[f](x, \omega) = f(x_i, \omega) + (x - x_i) \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, \omega), \quad (5)$$

Расстояние (4) выражается для линеаризованной функции (5) следующим образом:

$$\rho^2(x, i) = \frac{(x_i - x)^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{(y_i - f(x_i, \omega) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, \omega)(x - x_i))^2}{\sigma_{y_i}^2}. \quad (6)$$

Минимизируя это выражение по x :

$$\hat{x} = \arg \min_x \rho^2(x, i),$$

находим расстояние от точки (x_i, y_i) из обучающей выборки до линеаризованной в ее окрестности регрессионной зависимости f при данном векторе параметров ω :

$$\rho^2(f, \omega, i) = \rho^2(\hat{x}, i) = \frac{(y_i - f(x_i, \omega))^2}{\sigma_{y_i}^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, \omega)^2 \sigma_{x_i}^2}. \quad (7)$$

Аналогично можно получить выражение для случая, когда объекты в обучающей выборке представлены m независимыми переменными ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$):

$$\rho^2(f, \omega, i) = \frac{(y_i - f(\mathbf{x}_i, \omega))^2}{\sigma_{y_i}^2 + \sum_{j=1}^m (\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_i, \omega))^2 \sigma_{x_{ij}}^2}.$$

Таким образом, предлагаемый нами функционал, минимизирующий сумму введенных согласно (4) расстояний, для достаточно гладких функций выглядит следующим образом:

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{(y_i - f(\mathbf{x}_i, \omega))^2}{\sigma_{y_i}^2 + \sum_{j=1}^m (\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_i, \omega))^2 \sigma_{x_{ij}}^2}. \quad (8)$$

Отметим следующее:

- Функционал (8) соответствует классической сумме квадратов регрессионных остатков при условии нормировки квадрата каждого остатка на сумму квадратов погрешности определения зависимой величины σ_{y_i} и произведения частной производной регрессионной модели по j -ой компоненте вектора независимых величин на погрешность определения соответствующей компоненты $\sigma_{x_{ij}}$.
- При прочих равных условиях в выражении для расстояния (7) и, соответственно, в функционале (8) с большим весом учитываются те точки, в которых производная регрессионной модели $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ по соответствующей компоненте x_j больше, что соответствует соображениям здравого смысла: чем меньше наклон регрессионной зависимости в окрестности данной точки, тем меньше влияние неточного измерения соответствующей независимой переменной на значение регрессионной зависимости в этой точке.

- Если все независимые переменные измерены точно, то есть, $\forall i, j : \sigma_{x_{ij}} = 0$, то предложенный функционал переходит в рассмотренный в [2]. Если же, кроме того, все зависимые переменные имеют одну и ту же погрешность, то предложенный функционал переходит в известную сумму квадратов регрессионных остатков с точностью до некоторого множителя σ_y , не влияющего на точки минимума функционала среднеквадратичной ошибки.

4 Модифицированный алгоритм Левенберга-Марквардта

Для численной оптимизации функционала (8) представим его в виде суммы квадратов регрессионных остатков путем следующего переобозначения переменных. Вместо выборки (1) рассмотрим выборку

$$\tilde{D} = \{\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{y}_i\} | i \in \{1, \dots, \ell\}, \tilde{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^{m+1}, y_i \in \mathbb{R},$$

где $\tilde{y}_i \equiv 0$, а $\tilde{\mathbf{x}}_i = \{\mathbf{x}_i, y_i\}$ — исходный вектор \mathbf{x}_i с дополнительно приписанным к нему значением y_i . Кроме того, примем

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\omega}) = \frac{f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\omega}) - y_i}{\sqrt{\sigma_{y_i}^2 + \sum_{j=1}^m (\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\omega}))^2 \sigma_{x_{ij}}^2}}.$$

Тогда минимизация функционала (8) возможна известными методами оптимизации, так как легко видеть, что (8) в этом случае эквивалентен

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{\ell} (\tilde{y}_i - \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\omega}))^2.$$

Как видно из построения алгоритма, в качестве базового алгоритма оптимизации может быть использован любой метод решения задачи о наименьших квадратах, как, например, метод градиентного спуска или алгоритм Левенберга-Марквардта. Кроме того, при соответствующих условиях гладкости частных производных функции f (что практически всегда выполняется в реальных физических приложениях) предлагаемый алгоритм сохраняет все свойства исходного алгоритма.

При невозможности выполнить аналитическое дифференцирование функции f предлагается следующий итеративный алгоритм, предназначенный для использования с уже имеющимися реализациями методов оптимизации. Предполагается, что соответствующая реализация «принимает на вход» массив значений y_i , функцию вычисления значения f в точках \mathbf{x}_i с вектором параметров $\boldsymbol{\omega}$, и критерий останова в виде числа итераций. Пример такой реализации представлен в [5].

Алгоритм выглядит следующим образом:

1. Выбирается некоторое начальное приближение вектора параметров $\boldsymbol{\omega}$.
2. Для каждой пары (\mathbf{x}_i, y_i) из обучающей выборки численно или аналитически рассчитывается значение частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ в точке $(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\omega})$.
3. Каждое значение зависимой переменной y_i и значение функции $f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\omega})$ нормируется на соответствующую величину

$$\sigma_{y_i}^2 + \sum_{j=1}^m (\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\omega}))^2 \sigma_{x_{ij}}^2.$$

4. Выполняется итерация классического алгоритма оптимизации для таким образом модифицированных значений функции f и зависимых переменных y_i , таким образом получается новое значение вектора ω .
5. Если критерий останова не достигнут, алгоритм продолжает выполнение с пункта 2.

Отметим следующее:

- Критерием останова могут служить обычные критерии вроде достижения некоторого числа итераций, нормы изменения вектора ω , и т. п.
- Если известно, что производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ является достаточно гладкой в окрестности $(\mathbf{x}_i, \omega) \mid i \in \{1, \dots, \ell\}$, на шаге 4 алгоритма представляется разумным выполнить сразу несколько итераций классического алгоритма во избежание потенциально ресурсоемкого пересчета производных и перенормировки значений y_i и f .

5 Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте рассматриваются данные, полученные в ходе измерения зависимости интенсивности излучения I лазера от прозрачности его резонатора. Изучался лазер высокого давления (≈ 3 атм He , ≈ 60 Торр Ne , ≈ 20 Торр Ar) на $3p - 3s$ переходах неона (основной переход — 585 нм), возбуждаемый электронным пучком.

Пусть насыщающая переход интенсивность излучения — I_s , наблюдаемая интенсивность — I_l . В таком случае для безразмерной величины $y = \frac{I_l}{I_s}$ с учетом однородного уширения линии усиления при высоком давлении газа и хорошей однородности возбуждения, обеспечиваемой электронным пучком, можно получить нелинейное уравнение [6]:

$$\alpha_0 L - \frac{1}{2} \ln R_0 = g_0 L \frac{1 + \sqrt{R_0}}{1 - \sqrt{R_0}} \frac{1}{y} \ln \left(1 + \frac{y^{\frac{1-\sqrt{R_0}}{1+\sqrt{R_0}}}}{1 + y^{\frac{2\sqrt{R_0}}{1-R_0}}} \right), \quad (9)$$

где α_0 — распределенные потери (например, на рассеяние света), g_0 — коэффициент усиления слабого сигнала, R_0 — коэффициент отражения выходного зеркала лазера. Однородность накачки означает, что g_0 и α_0 одинаковы по всему объему с хорошей точностью.

Значение R_0 является независимой переменной, изменяемой экспериментаторами, и в данном разделе также обозначается как x сообразно остальной части работы.

Для достаточно больших R_0 , близких к единице, можно заменить $2\sqrt{R_0} \approx 1 + R_0$ в (9), получив хорошо известное выражение

$$y(R_0) = \gamma \frac{1 - R_0}{1 + R_0} \left(\frac{g_0}{\alpha_0 - \frac{1}{2} L \ln R_0} - 1 \right), \quad (10)$$

где γ — нормировочный коэффициент.

Длина активной среды $L = 150$ см, точность определения мощности лазера y имеет относительную погрешность в 2%, точность определения прозрачности R_0 имеет абсолютную погрешность и составляет 0.01 при $R_0 \geq 0.6$ и 0.02 при $R_0 < 0.6$.

В ходе физических измерений получены значения $y(R_0)$, приведенные в таблице 1.

Таблица 1: Экспериментальные значения $y(R_0)$.

R_0	0.48	0.56	0.65	0.73	0.80	0.87	0.94
y	3.25	10.2	16.5	20.5	22.5	23.2	18.2

Таким образом, решается задача минимизации функционала (8) при

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\gamma, \alpha_0, g_0),$$

$$f(x, \boldsymbol{\omega}) = y(R_0, \gamma, \alpha_0, g_0),$$

$$\sigma_{y_i} = 0.02y_i,$$

$$\sigma_{x_i} = \begin{cases} 0.01 & | x_i \geq 0.6, \\ 0.02 & | x_i < 0.6. \end{cases}$$

5.1 Оптимальные параметры модели

Кроме предложенного в настоящей работе функционала (8) рассмотрен также и классический функционал среднеквадратичной ошибки:

$$S = \sum_{i=1}^{\ell} (y_i - f(x_i, \boldsymbol{\omega}))^2, \quad (11)$$

В таблице 2 приведены значения параметров $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}^0$ функции (10), минимизирующие (8) и (11) соответственно, а также относительные разности их компонент. Кроме того, приведены значения функционалов (8) и (11) для обоих векторов параметров.

Таблица 2: Оптимальные значения параметров модели.

	g_0	α_0	γ	Значение (8)	Значение (11)
$\boldsymbol{\omega}$	$2.920 \cdot 10^{-3}$	$2.156 \cdot 10^{-4}$	100.324	0.577	0.208
$\boldsymbol{\omega}^0$	$2.917 \cdot 10^{-3}$	$2.129 \cdot 10^{-4}$	101.5	0.645	0.183
$ \omega_i - \omega_i^0 /\omega_i^0$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-2}$	0.11	0.14

Отдельно отметим, что сравнивать непосредственные значения функционалов (8) и (11) не имеет смысла. Вместо этого необходимо сравнивать различные модели по каждому из этих функционалов в отдельности. Так, результаты, приведенные в таблице 2, показывают вполне естественный результат: каждый из двух векторов параметров ($\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}^0$) является оптимальным лишь для того функционала, который он минимизирует.

Графики модели (10), соответствующие $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}^0$, приведены на рис. 2.

5.2 Сходимость оптимальных параметров

Численно исследована зависимость сходимости параметров $\boldsymbol{\omega}$ к параметрам $\boldsymbol{\omega}^0$, получаемым минимизацией функционалов (8) и (11) соответственно, от погрешности σ_y измерения зависимой переменной y .

Разумно ожидать, что при увеличении погрешности измерения величины y при фиксированной погрешности измерения R_0 оптимальный вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет приближаться к $\boldsymbol{\omega}^0$, так как тем более незначителен вклад ошибки измерения независимой переменной.

Рассматриваются два случая:

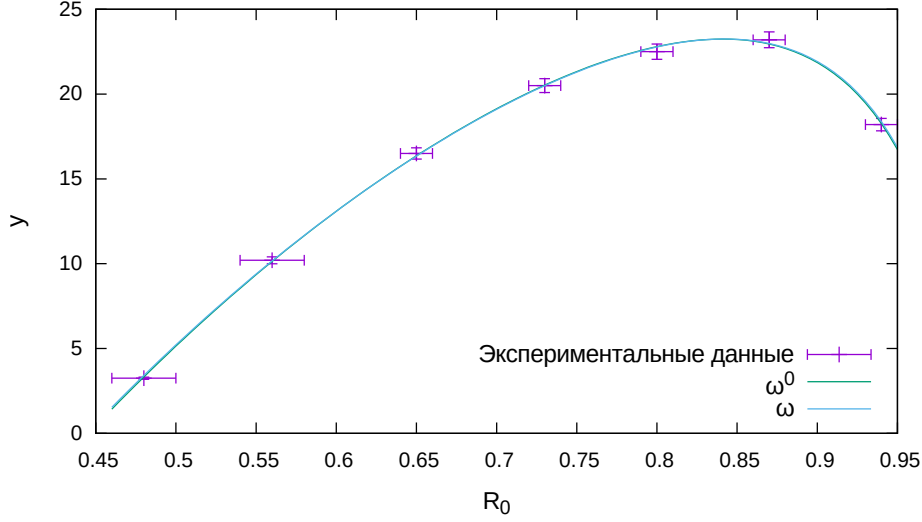


Рис. 2: Графики (10), соответствующие параметрам, минимизирующим (8) и (11).

1. Погрешность i -го измерения y_i задается как $\sigma_{y_i} = 0.02ky_i$, т. е. погрешность зависит от значения самого y_i .
2. Погрешность i -го измерения y_i задается как $\sigma_{y_i} = 0.02ky_{\max}$, т. е. погрешность от значения конкретного y_i не зависит. Заметим, что выбор конкретного значения y , определяющего погрешность, является в данном случае достаточно произвольным и соответствует умножению всех погрешностей на некоторую константу.

В первом случае ошибки измерения y распределены неодинаково, следовательно, применение стандартного метода наименьших квадратов не обосновано. В то же время во втором случае ошибки принадлежат одному и тому же распределению, и, кроме того, независимы, поэтому в данном случае МНК-оценка применима (с точностью до ошибки измерения независимой переменной).

Для обоих случаев подробно рассматривалась область $k \in [1; 100]$, значение k изменялось с шагом 0.01. Отметим, что уже при $k = 50$ характерная погрешность измерения величины y сопоставима с самой величиной y , а при больших значениях k превышает ее.

Результаты приведены на рис. 3. На графиках отображены компоненты вектора ω , нормированные на соответствующие значения ω^0 , в зависимости от значения k .

Видно, что в случае фиксированной погрешности σ_{y_i} значения ω действительно стремятся к ω^0 для разумных значений k , а в случае гетероскедастичности ошибки такой зависимости не наблюдается, хотя значения ω и оказываются достаточно близки к ω^0 .

6 Заключение

Предложен модифицированный функционал среднеквадратичной ошибки для существенно нелинейных моделей, применимый в случае наличия ошибок измерения независимых переменных и различия распределения, к которому принадлежат ошибки, в разных точках обучающей выборки.

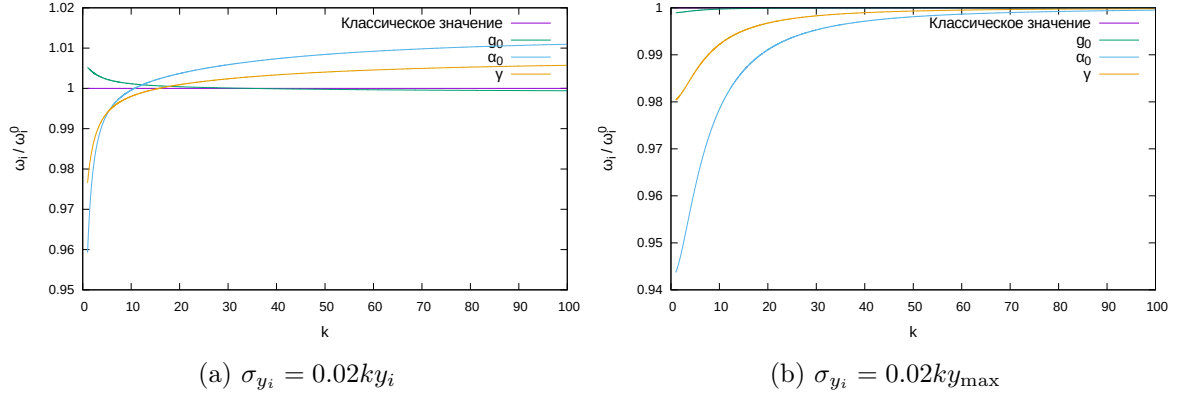


Рис. 3: Зависимость оптимальных параметров от $k \in [1; 100]$.

Показана сходимость предложенного функционала к классическому функционалу среднеквадратичной ошибки для случая гомоскедастичности погрешностей зависимой переменной и пренебрежимо малой погрешности измерения независимых переменных.

Список литературы

- [1] Рудой, Г. И.: *О возможности применения методов Монте-Карло в анализе нелинейных регрессионных моделей*. Сибирский Журнал Вычислительной Математики, 4, 2015.
- [2] Jukić, Dragan: *On nonlinear weighted least squares estimation of Bass diffusion model*. Applied mathematics and computation, 219(14):7891–7900, 2013.
- [3] Kiryati, Nahum и Bruckstein, Alfred M: *Heteroscedastic Hough transform (HtHT): An efficient method for robust line fitting in the ‘errors in the variables’ problem*. Computer Vision and Image Understanding, 78(1):69–83, 2000.
- [4] Marquardt, D. W.: *An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters*. Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 11(2):431–441, 1963.
- [5] King, Davis E.: *Dlib-ml: A Machine Learning Toolkit*. Journal of Machine Learning Research, 10:1755–1758, 2009.
- [6] Champagne, LF: *Transient optical absorption in the ultraviolet*. In McDaniel, E. W. and Nighan, William L. (editors): *Applied Atomic Collision Physics, Volume 3: Gas Lasers*, volume 3, pages 349–386, 1982.