

# АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ К ПОГРЕШНОСТЯМ В ИЗМЕРЯЕМЫХ ДАННЫХ

Г. И. Рудой

## Аннотация

Для восстановления нелинейной зависимости показателя преломления среды от длины волны рассматривается набор индуктивно порожденных моделей с целью выбора оптимальной. Применяется алгоритм индуктивного порождения допустимых существенно нелинейных моделей. Предлагается критерий определения погрешности коэффициентов порожденных суперпозиций, называемый устойчивостью, а также метод оценки устойчивости полученного решения. Приводятся результаты численного моделирования на данных, полученных в ходе эксперимента по определению состава смеси по суммарной дисперсии.

**Ключевые слова:** *символьная регрессия, нелинейные модели, индуктивное порождение, устойчивость решений, дисперсия прозрачной среды.*

## Введение

Для анализа результатов физического эксперимента, как правило, требуется восстановить функциональную зависимость, описывающую соотношение измеряемых величин. При этом необходимо, чтобы эксперт имел возможность интерпретировать полученную зависимость, исходя из соответствующих теоретических моделей. Во многих случаях вид функциональной зависимости заранее известен, либо необходимо сделать выбор между несколькими (также заранее известными) вариантами моделей.

Одним из методов, позволяющих строить интерпретируемые модели, является символьная регрессия [1–5], порождающая, в том числе, и структурно сложные нелинейные модели. Различные приближения сравниваются по методу наименьших квадратов в предположении о нормальности распределения регрессионных остатков, при этом оптимизация параметров модели проводится, например, с помощью алгоритма Левенберга-Марквардта [6, 7].

Однако при анализе физического эксперимента важны не только значения самих параметров искомой функциональной зависимости, но и погрешности их определения, обусловленные погрешностями измеряемых в эксперименте величин. Для задачи линейной регрессии соответствующая задача решена в частном случае, когда погрешность определения регрессора пренебрежимо мала, а погрешность определения зависимой переменной во всех экспериментальных точках одинакова [8]. Для более сложного случая нелинейной регрессии и ситуации, когда необходимо учитывать погрешности как регрессора, так и зависимой переменной (которые при этом могут быть разными в различных экспериментальных точках), подобная задача, насколько нам известно, не ставилась.

В настоящей работе метод нелинейной регрессии применяется для восстановления зависимости показателя преломления  $n$  от длины волны  $\lambda$  в полосе прозрачности полимера, включающей видимую и ближнюю инфракрасную области спектра. Цель экспериментаторов состояла в том, чтобы по известной дисперсии для каждого полимера с учетом того, что показатель преломления смеси химически инертных полимеров равен взвешенной сумме (с соответствующими весами) показателей преломления компонентов, определить состав смеси по экспериментально определенной зависимости  $n(\lambda)$ . Другими словами, для случая двух полимеров, заранее измерив и вычислив зависимости  $n_1(\lambda)$  и  $n_2(\lambda)$ , необходимо аналогично экспериментально определить суммарную зависимость  $n(\lambda) = \alpha n_1(\lambda) + (1 - \alpha)n_2(\lambda)$  и по ней вычислить коэффициент  $\alpha$ , имеющий смысл концентрации первого полимера в смеси.

Поскольку показатели преломления для прозрачных полимеров близкого химического состава различаются незначительно, учет погрешности определения коэффициентов функциональной зависимости  $n(\lambda)$  и их связи с погрешностями экспериментального определения длины волны  $\lambda$  и показателя преломления  $n$  имеет принципиальное значение. Указанная связь важна еще и потому, что именно она определяет требования к точности и чувствительности измерительной аппаратуры и, следовательно, влияет на стоимость и продолжительность эксперимента.

Обычно в рефрактометрах используются источники широкополосного (непрерывного) спектра, а погрешность выделения конкретной длины волны связана с аппаратной функцией используемого монохроматора (прибора, выделяющего узкий спектральный диапазон) и подробно рассматривается, например, в [9, 10]. В большинстве случаев погрешность  $\lambda$  может быть рассчитана, а также определена экспериментально с использованием узкополосных источников света (лазеров, известных атомных переходов вроде триплета ртути или дублета натрия, и т. д.). Характерная относительная погрешность определения длины волны в рассматриваемой задаче составляет  $0.03 \div 0.5\%$ . Кроме того, погрешность определения длины волны, как правило, меняется с изменением самой длины волны. Экспериментальная погрешность показателя преломления  $n$  зависит от выбранного способа его измерения и при определении  $n$  по углу полного внутреннего отражения обусловлена непараллельностью используемых световых пучков, погрешностями в измерении углов и т. д. и составляет от  $(1 \div 2) \cdot 10^{-5}$  для приборов высокого класса точности до  $(1 \div 10) \cdot 10^{-4}$ . Для рассматриваемых в настоящей работе задач существенно то, что величины погрешностей могут считаться известными и, возможно, различными для каждой экспериментальной точки.

В настоящей работе на примере дисперсионной зависимости показателя преломления исследуется возможность применения предложенного в [5] алгоритма восстановления нелинейной регрессии. Результаты его работы сравниваются с результатами применения SVM-регрессии. Кроме того, рассмотрено влияние штрафа за сложность на качество и структурную сложность порождаемых суперпозиций. Формально поставлена задача определения устойчивости регрессионной зависимости от произвольного набора независимых переменных в общем виде, предложен метод оценки устойчивости решения к погрешностям измерений, и изучена зависимость этих характеристик от параметров модели для конкретного случая изучения дисперсии полимеров.

В первой части данной работы формально поставлена задача восстановления дисперсии полимера. Во второй части вкратце описывается алгоритм [5], используемый для порождения аналитической функции-суперпозиции, аппроксимирующей данные. В третьей части описывается метод, позволяющий учитывать и анализировать зависимость различных членов порожденной суперпозиции от погрешности эксперимента. В четвертой части приводятся результаты вычислительного эксперимента на реальных данных. Рассматривается три полимера в области прозрачности, для каждого из которых имеется 18 экспериментальных точек, соответствующих величине коэффициента преломления при различных значениях длины волны.

## 1 Постановка задачи

**Задача регрессии.** Дана выборка  $D$  из  $\ell$  результатов измерений коэффициента преломления для некоторого полимера:  $D = \{\lambda_i, n_i \mid i \in \{1, \dots, \ell\}\}$ , где  $\lambda_i$  — длина волны, а  $n_i$  — измеренный коэффициент преломления в  $i$ -ом измерении.

Требуется найти функцию  $\hat{f} = \hat{f}(\lambda)$ , минимизирующую функционал потерь в предположении о нормальности случайной ошибки эксперимента:

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{\ell} (f(\lambda_i) - n_i)^2 \rightarrow \min_{f \in \mathcal{F}}, \quad (1)$$

где  $D = \{\lambda_i, n_i\}$ , а  $\mathcal{F}$  — некоторое множество суперпозиций, из которого выбирается оптимальная.

Иными словами,

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{f}_D(\lambda) = \arg \min_{f \in \mathcal{F}} S(f, D). \quad (2)$$

**Задача оценки устойчивости.** Введем в общем виде понятие устойчивости суперпозиции  $f$ , характеризующей, как меняются коэффициенты суперпозиции  $\hat{f}$  при небольшом случайном изменении исходной обучающей выборки  $D = \{\mathbf{x}_i, y_i\}$ , где  $\mathbf{x}_i$  — исходное (полученное в ходе эксперимента) признаковое описание  $i$ -го объекта, а  $y_i$  — соответствующее экспериментально измеренное значение функции, которую требуется восстановить.

Функционал потерь (1) в этом случае выглядит следующим образом:

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{\ell} (f(\mathbf{x}_i) - y_i)^2 \rightarrow \min_{f \in \mathcal{F}}. \quad (3)$$

Условимся также обозначать матрицу плана  $X = \|x_{ij}\|$ , строками которой являются признаковые описания объектов выборки  $D$ . Иными словами,  $x_{ij}$  обозначает  $j$ -ую компоненту признакового описания  $i$ -го объекта.

Рассмотрим вектор параметров  $\omega_f = \{\omega_i^f \mid i \in \{1, \dots, l_f\}\}$  некоторой суперпозиции  $f$ :  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \omega_f)$ . Пусть для некоторой выборки  $D = \{\mathbf{x}_i, y_i\}$  и функции  $f$  вектор параметров  $\hat{\omega}_f(D)$  минимизирует функционал (3) с фиксированной функцией  $f$ :

$$\hat{\omega}_f(D) = \arg \min_{\omega_f} S(f, D).$$

Пусть также дана матрица стандартных отклонений независимых переменных  $\Sigma^{\mathbf{x}} = \|\sigma_{ij}^{\mathbf{x}}\|$ , где  $\sigma_{ij}^{\mathbf{x}}$  характеризует стандартное отклонение  $j$ -ой компоненты признакового описания  $\mathbf{x}_i$   $i$ -го объекта обучающей выборки, и вектор стандартных отклонений  $\sigma^y$ , где  $\sigma_i^y$  характеризует стандартное отклонение зависимой переменной, соответствующей  $i$ -му объекту. Рассмотрим выборку  $\dot{D}$ , полученную из исходной выборки  $D$  добавлением к каждой компоненте реализаций нормально распределенных случайных величин с нулевым матожиданием и соответствующей  $\Sigma^{\mathbf{x}}$  и  $\sigma^y$  дисперсией:

$$\dot{D}(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma^y) = \{\mathbf{x}_i + \xi_i^{\mathbf{x}}, y_i + \xi_i^y \mid i \in 1, \dots, \ell; \xi_i^{\mathbf{x}} \sim \mathcal{N}(0; \sigma_{ii}^{\mathbf{x}}); \xi_i^y \sim \mathcal{N}(0; \sigma_i^y)\}. \quad (4)$$

Для этой выборки  $\dot{D}$  найдем оптимальный вектор  $\hat{\omega}_f(\dot{D}(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y))$  параметров суперпозиции  $f$ , минимизирующий функционал (1):

$$\hat{\omega}_f(\dot{D}(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y)) = \arg \min_{\omega_{f_D} \in R^{|\hat{\omega}_f|}} S(f_D(\cdot, \omega_{f_D}), \dot{D}(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y)). \quad (5)$$

Понятно, что  $\hat{\omega}_f(\dot{D}(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y))$  — векторная случайная величина, и, следовательно,

$$\Delta \hat{\omega}_f(\dot{D}(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y)) = \hat{\omega}_f(D) - \hat{\omega}_f(\dot{D}(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y))$$

также векторная случайная величина.

Пусть дано множество  $\dot{D}_N$  из  $N$  таких выборок, где каждая выборка соответствует отдельным реализациям случайных величин из (4):

$$\dot{D}_N(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y) = \{\dot{D}_1(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y), \dots, \dot{D}_N(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y)\},$$

и пусть  $\bar{\sigma}_i$  — эмпирическое стандартное отклонение  $i$ -ой компоненты векторной случайной величины  $\Delta \hat{\omega}_f(\dot{D}(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y))$  на множестве  $\dot{D}_N(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y)$ .

**Определение 1.** *Относительной устойчивостью* (или просто *устойчивостью*) параметра  $\omega_i$  относительно  $\dot{D}_N(\Sigma^{\mathbf{x}}, \sigma_y)$  при исходной обучающей выборке  $D$  будем называть следующий вектор из  $|\mathbf{x}| + 1$  компонент:

$$\mathbf{T}_f^N(i) = \left\{ \frac{\bar{\sigma}_i}{\hat{\omega}_i}, \dots, \frac{\bar{\sigma}_i}{\hat{\omega}_i}, \frac{\bar{\sigma}_i}{\hat{\omega}_i} \right\}, \quad (6)$$

где  $r(\alpha, \mathbf{a}) = r(\frac{\alpha_1}{a_1}, \dots, \frac{\alpha_{|\mathbf{a}|}}{a_{|\mathbf{a}|}})$  — функция, переводящая вектор, составленный из отношений соответствующих компонент векторов  $\alpha$  и  $\mathbf{a}$  в скаляр.

Функция  $r$  позволяет сопоставить, вообще говоря, различным отношениям стандартного отклонения зависимой переменной  $y_i$   $i$ -го объекта обучающей выборки и самого значения  $y_i$  единственное число (аналогично и для  $x_i$ -й независимой переменной и ее стандартного отклонения). Примерами такой функции могут являться среднее арифметическое всех отношений или максимальное значение отношения, а конкретная функция выбирается экспертом в зависимости от физического смысла задачи.

Каждый компонент вектора  $\mathbf{T}_f^N(i)$  показывает, как относится стандартное отклонение параметра  $\hat{\omega}_i$ , нормированное на значение этого параметра, к характерному стандартному отклонению соответствующего элемента признакового описания, нормированного на значение этого элемента. Например, если это отношение больше единицы, то погрешности определения коэффициента растут быстрее погрешностей измерения параметра.

**Замечание 1.** В настоящей работе предлагается выбирать значения стандартных отклонений так, чтобы все значения соответствующих переменных были равны, поэтому функция  $r$  может выбирать любой из своих аргументов.

В частности, в искомой задаче восстановления дисперсионной зависимости с учетом замечания 1:

$$\mathbf{T}_f(i) = \left\{ \frac{\bar{\sigma}_i}{\hat{\omega}_i}, \frac{\bar{\sigma}_i}{\hat{\omega}_i} \right\}.$$

Матрицу, столбцами которой являются векторы  $\mathbf{T}_f(i) \mid i \in \{1, \dots, l_f\}$ , будем называть устойчивостью функции  $f$  и обозначать  $\mathbb{T}_f$ .

Требуется исследовать зависимость устойчивости  $\mathbb{T}_{\hat{f}}$  относительно  $\sigma_n$  и  $\sigma_\lambda$ .

## 2 Алгоритм индуктивного порождения суперпозиций

Опишем предложенный в [5] алгоритм.

Пусть задано некоторое множество  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  порождающих функций. Набор суперпозиций  $\mathcal{F} = \{f\}$  инициализируется случайными суперпозициями функций  $g \in G$ . Суперпозиции из  $\mathcal{F}$  содержат как свободные переменные, соответствующие компонентам вектора-описания объектов из генеральной совокупности, так и константы, которые оптимизируются на каждом шаге алгоритмом Левенберга-Марквардта согласно введенному функционалу потерь (1). Также на каждой итерации над суперпозициями выполняется набор модифицирующих операций с целью улучшения качества  $Q_f$  суперпозиций.

Качество  $Q_f$  суперпозиции  $f$  вычисляется по совокупности точности приближения экспериментальных данных и структурной сложности суперпозиции по следующей формуле:

$$Q_f = \frac{1}{1 + S(f)} \left( \alpha + \frac{1 - \alpha}{1 + \exp(C_f - \tau)} \right), \quad (7)$$

где:

$S(f)$  — значение функционала потерь (1) на данной выборке  $D$ ;

$C_f$  — сложность суперпозиции, соответствующая количеству элементарных функций, свободных переменных и констант;

$\alpha = 0 \ll \alpha < 1$ , характеризует влияние штрафа за сложность на качество суперпозиции (большие значения  $\alpha$  отдают предпочтение более точным моделям, а меньшие — более простым);

$\tau$  — коэффициент, характеризующий желаемую сложность модели.

Второй множитель в (7) выполняет роль штрафа за слишком большую сложность суперпозиции, что подавляет эффект переобучения и позволяет получать более простые суперпозиции ценой большей ошибки на обучающих данных при большей обобщающей способности.

Отметим, что параметры  $\alpha$  и  $\tau$  выбираются экспертом.

Таким образом, исходная задача минимизации функционала (1) заменяется на задачу минимизации функционала (7):

$$Q_f = \frac{1}{1 + S(f)} \left( \alpha + \frac{1 - \alpha}{1 + \exp(C_f - \tau)} \right) \rightarrow \min_{f \in \mathcal{F}}. \quad (8)$$

### 3 Метод исследования стабильности решения

Для оценки устойчивости  $\mathbb{T}_{\hat{f}}$  решения  $\hat{f}$  задачи (7) предлагается следующий подход. Фиксируется структурный вид суперпозиции  $\hat{f}$ , и исследуется зависимость стандартного отклонения ее коэффициентов как функция стандартного отклонения нормально распределенной случайной добавки в исходных данных.

Иными словами, выбираются значения  $\sigma_\lambda$  и  $\sigma_n$ , затем для этих значений генерируется выборка  $\dot{D}(\sigma_n, \sigma_\lambda)$  согласно (4). Для этой выборки вычисляются значения коэффициентов суперпозиции  $\hat{f}$ , минимизирующие функционал (1) согласно (5), методом Левенберга-Марквардта.

Данная процедура для фиксированной пары  $\sigma_\lambda$  и  $\sigma_n$  повторяется до достижения некоторого критерия останова (например, по количеству итераций), после которого и рассчитывается  $\mathbb{T}_{\hat{f}}$ .

Повторяя описанные выше шаги для различных  $\sigma_\lambda$  и  $\sigma_n$ , можно оценить зависимость стандартного отклонения коэффициентов суперпозиции от стандартного отклонения шума.

Из физических соображений ясно, что гладкая зависимость означает устойчивое в физическом смысле решение, тогда как отклонения от гладкости означают ту или иную ошибку в суперпозиции и могут являться свидетельством переобучения.

Кроме того, сравнение различных суперпозиций может также производиться по критерию устойчивости в дополнение к сравнению по сложности и по значению функционала (1).

## 4 Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте используются данные, полученные в ходе изучения возможности определения состава смеси прозрачных полимеров по суммарной дисперсионной зависимости, если известна экспериментальная зависимость дисперсии для каждого конкретного полимера. Рассматривается три полимера, для каждого из которых имеется 18 экспериментальных точек, соответствующих коэффициенту преломления при разных значениях длины волны. Значения приведены в таблице 1.

$\lambda$ , нм	Первый полимер	Второй полимер	Третий полимер
435.8	1.36852	1.35715	1.34850
447.1	1.36745	1.35625	1.34767
471.3	1.36543	1.35449	1.34620
486.1	1.36446	1.35349	1.34542
501.6	1.36347	1.35275	1.34461
546.1	1.36126	1.35083	1.34294
577.0	1.3599	1.34968	1.34191
587.6	1.3597	1.34946	1.34174
589.3	1.35952	1.34938	1.34158
656.3	1.35767	1.34768	1.34005
667.8	1.35743	1.34740	1.33987
706.5	1.35652	1.34664	1.33917
750	1.35587	1.34607	1.33855
800	1.35504	1.34544	1.33794
850	1.3544	1.34487	1.33741
900	1.35403	1.34437	1.33685
950	1.35364	1.34407	1.33652

Таблица 1: Экспериментальные значения коэффициентов преломления для трех разных полимеров.

Предполагается, что дисперсионные свойства полимеров описываются одной и той же функциональной зависимостью, так как подчиняются одним и тем же законам. Поэтому сначала получена суперпозиция  $\hat{f}$ , минимизирующая (7) для первого полимера, а затем для каждого из трех полимеров находятся соответствующие векторы параметров  $\hat{\omega}_f$  и оценивается устойчивость полученного решения.

Разделение на обучающую и контрольную выборку не производилось, однако переобучения удастся избежать и без такого разделения, опираясь целиком на штраф за сложность.

Из физических соображений следует [11], что зависимость коэффициента преломления  $n$  от длины волны  $\lambda$  должна выражаться суммой отрицательных четных степеней длины волны, поэтому множество элементарных функций состоит из стандартных

операций сложения и умножения:

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

а также из функции

$$g_3(\lambda, p) = \frac{1}{\lambda^{2p}}.$$

В ходе вычислительного эксперимента константы, меньшие  $10^{-7}$ , заменялись на 0.

В результате применения описанного выше алгоритма со значениями  $\alpha = 0.05$ ,  $\tau = 10$  получена следующая суперпозиция (константы округлены до пятой значащей цифры):

$$f(\lambda) = 1.3495 + \frac{3.5465 \cdot 10^3}{\lambda^2} + \frac{2.023 \cdot 10^3}{\lambda^4}, \quad (9)$$

со сложностью 13, среднеквадратичной ошибкой  $2.4 \cdot 10^{-8}$  и значением  $Q_f \approx 0.095$ .

Отметим, что обычно в приложениях учитывают только квадратичный член, а более высокими степенями пренебрегают. Коэффициент при  $\frac{1}{\lambda^4}$  указывает на полное согласие полученных результатов с принятой практикой.

**Влияние штрафа за сложность.** Исследуем, как влияет добавление нечетных степеней на результат решения задачи (8), заменив функцию  $g_3$  в порождающем наборе на

$$g_3(\lambda, p) = \frac{1}{\lambda^p}.$$

Следует отметить, что при тех же  $\alpha = 0.05$  и  $\tau = 10$  результирующей функцией остается (9).

Увеличим  $\tau$  до 30. Получим следующую формулу (константы округлены до третьей значащей цифры):

$$n(\lambda) = 1.34 + \frac{11.6}{\lambda} + \frac{17.37}{\lambda^2} + \frac{0.0866}{\lambda^3} + \frac{2.95 \cdot 10^{-4}}{\lambda^4} + \frac{8.54 \cdot 10^{-7}}{\lambda^5}, \quad (10)$$

сложность которой составляет 31, и для которой среднеквадратичная ошибка на выборке составляет  $\approx 3.9 \cdot 10^{-9}$ , а значение  $Q_f \approx 0.31$ .

Иными словами, при большей желаемой сложности, регулируемой параметром  $\tau$ , выигрывает более сложная (а в данном случае и физически некорректная) модель, которая лучше описывает экспериментальные данные.

То есть, как и следовало ожидать, чрезмерное увеличение  $\tau$  ведет к переобучению.

**SVM.** В качестве базового алгоритма используется SVM-регрессия с RBF-ядром [12]. Параметр  $\gamma$  ядра подбирался по методу скользящего контроля, наилучшим результатом является комбинация из 15 опорных векторов с  $\gamma \approx 2 \cdot 10^{-6}$ , при этом среднеквадратичная ошибка при кросс-валидации с тестовой выборкой, содержащей по 2 объекта, составляет  $8.96 \cdot 10^{-8}$ . Однако, проинтерпретировать полученную решающую функцию не представляется возможным.



**Исследование стабильности решения.** Для оценки стабильности решения фиксировалась формула (9) и исследовалась зависимость стандартного отклонения ее коэффициентов от стандартного отклонения нормально распределенного случайного шума в исходных данных описанным выше методом. Критерием останова в нем являлось достижение 10000 итераций для каждой пары  $(\sigma_\lambda, \sigma_n)$ .

Численные значения эмпирического матожидания и дисперсии для первого, второго и третьего коэффициентов формулы (9) для первого полимера для некоторых значений  $(\sigma_\lambda, \sigma_n)$  приведены в таблицах ??, ?? и ?? соответственно. По строкам указаны значения для  $\sigma_n$ , по столбцам — для  $\sigma_\lambda$ .

В таблице 2 представлены поверхности уровня дисперсии для первого, второго и третьего коэффициентов каждого из полимеров соответственно.

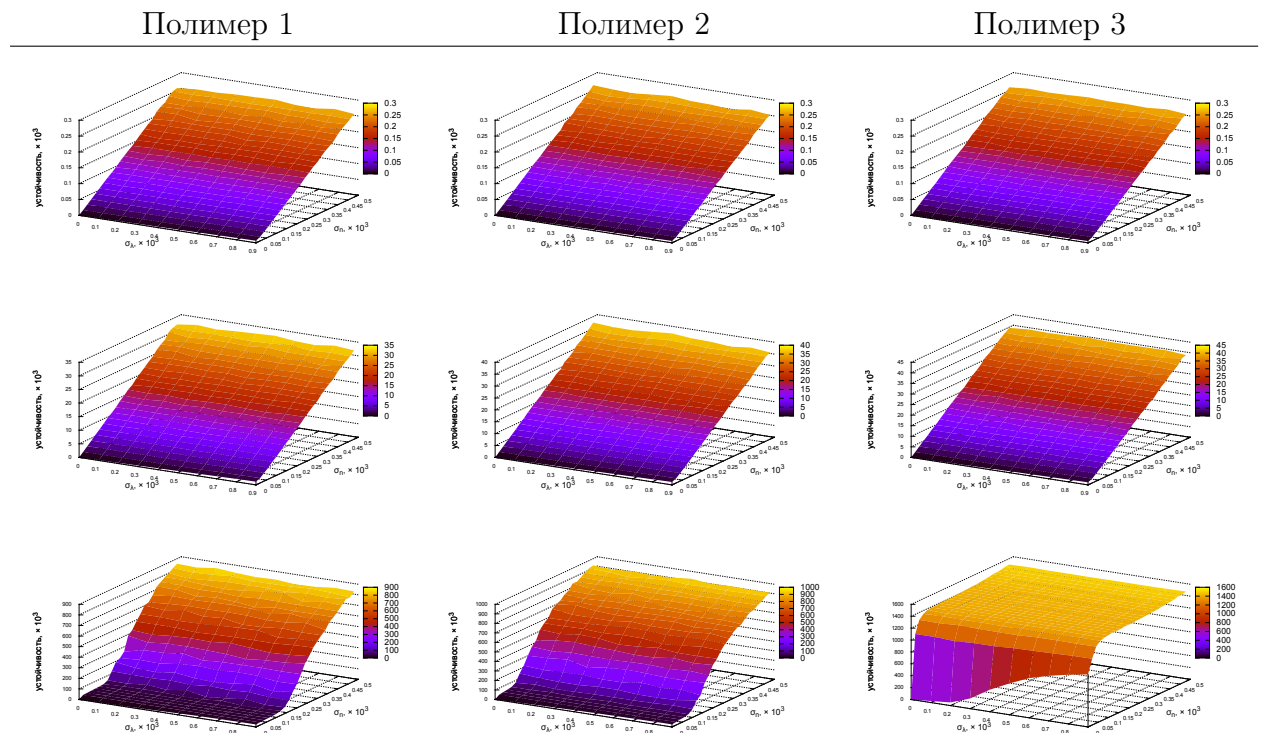


Таблица 2: Поверхности дисперсии для формулы (9).

Из графиков видно, что от шума, накладываемого на значения длины волны, дисперсия значений первого и второго коэффициентов практически не зависит. В то же время дисперсия значений первого коэффициента зависит от дисперсии шума коэффициента преломления практически линейно, тогда как для второго коэффициента после некоторого характерного значения зависимость теряется. Кроме того, дисперсия третьего коэффициента формулы не имеет явной гладкой зависимости от дисперсии шума длины волны или коэффициента преломления, что еще раз подтверждает его достаточно случайную природу.

Физическая интерпретация этих результатов — при построении прибора для измерения дисперсии следует уделять значительное внимание точности измерения коэффициента преломления, тогда как измерения длины волны могут быть неточны вплоть до нескольких процентов. Кроме того, предложенный метод прямо указывает, на каких интервалах шума какой будет выигрыш в точности предсказания от небольшого увеличения точности.

Отметим так же, что для коэффициентов, стоящих на одних и тех же местах, графики дисперсии похожи даже для разных полимеров. Из этого можно сделать вывод, что полученная формула действительно описывает наблюдаемое физическое явление — именно такая зависимость и «должна» была бы получиться, и что полученная зависимость носит универсальный характер, не являясь переобученной моделью.

Кроме того, значения дисперсии не превосходят настоящие значения параметров по порядку величины, что означает, в частности, что полимеры могут быть различены даже не очень точным рефрактометром.

**Стабильность некорректного решения.** Аналогично исследуем стабильность решения (10). Приведем только графики зависимости первых трех коэффициентов, см. таблицу 3.

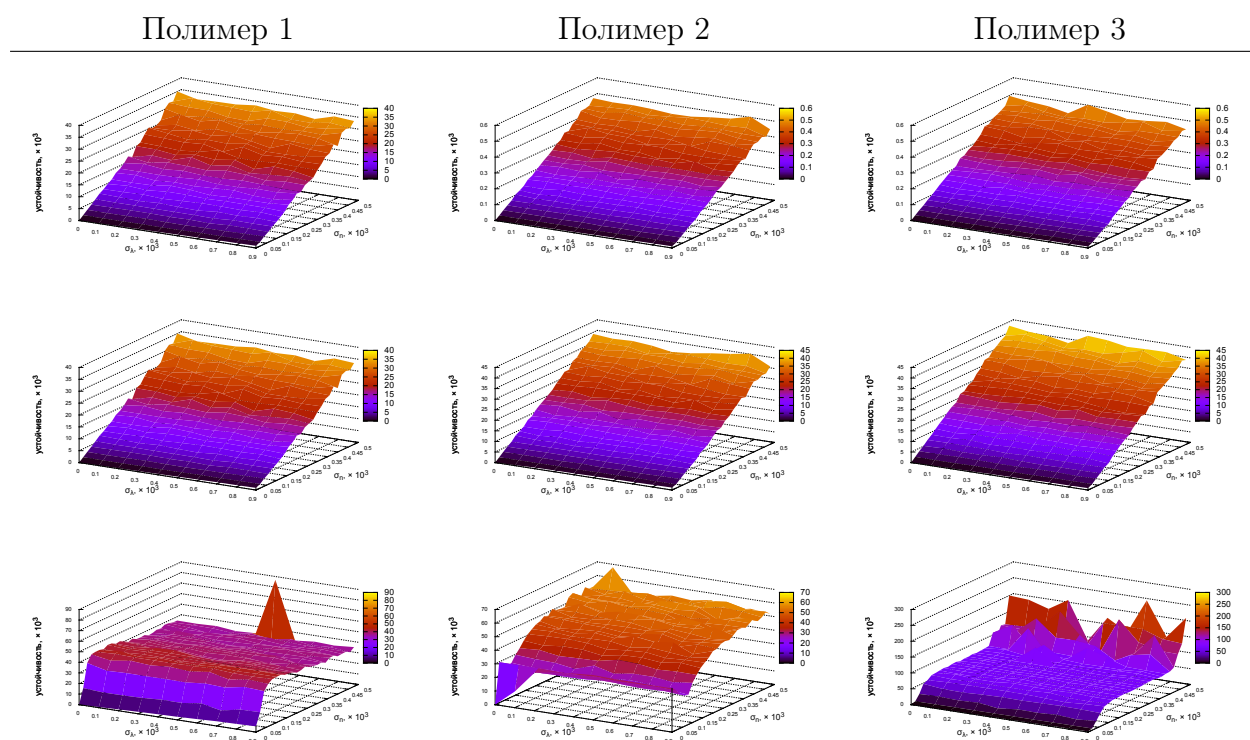


Таблица 3: Поверхности дисперсии для формулы (10).

Из графиков видно, что в случае формулы (10) дисперсия соответствующих параметров существенно превышает таковую для (9). В частности, второй, третий и

четвертый коэффициенты имеют дисперсию, на порядки превышающую характерные значения самих коэффициентов.

Данные результаты свидетельствуют о переобучении, и что полученная модель не может быть использована для надежного приближения экспериментальных данных ввиду большой чувствительности к шумам.

**Исследование экспертного предположения.** Экспертом предположено, что формула также может иметь вид

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{c - \frac{1}{\lambda^2}}, \quad (11)$$

если измерения находятся вблизи точки резонанса.

Результаты нахождения параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  методом Левенберга-Марквардта приведены в таблице 4.

Материал	$a$	$b$	$c$
1	1.385	$1.79 \cdot 10^{-7}$	$-4.49 \cdot 10^{-6}$
2	1.372	$1.62 \cdot 10^{-7}$	$-4.59 \cdot 10^{-6}$
3	1.361	$1.21 \cdot 10^{-7}$	$-3.75 \cdot 10^{-6}$

Таблица 4: Значения коэффициентов формулы (11).

Коэффициент  $c$  в формуле (11) имеет смысл резонансной частоты, поэтому он должен быть неотрицательным. Ввиду этого полученные результаты не имеют физического смысла.

Тем не менее, исследуем стабильность данного решения тем же методом, что и в предыдущих случаях. Поверхности дисперсии приведены в таблице 5.

Отметим, что характерная дисперсия первого коэффициента на порядок больше, чем для формулы (9), что затрудняет различение полимеров в смеси при достаточно большой погрешности измерения  $\lambda$ , однако дисперсии второго и третьего коэффициента примерно на порядок меньше, чем для формулы (9).

Поверхности дисперсии также не являются настолько же гладкими, как для формулы (9).

Все это позволяет заключить, что, хотя экспериментальные данные хорошо описываются формулой (11), они не являются корректными с экспертно-физической точки зрения. Это, в частности, подтверждается экспертным соображением об ограничениях на коэффициенты формулы (11), которые не выполняются в полученной модели.

## 5 Сходимость к классическому случаю

Рассмотрим случай, когда зависимость линейна:

$$y = ax + b,$$

Полимер 1

Полимер 2

Полимер 3

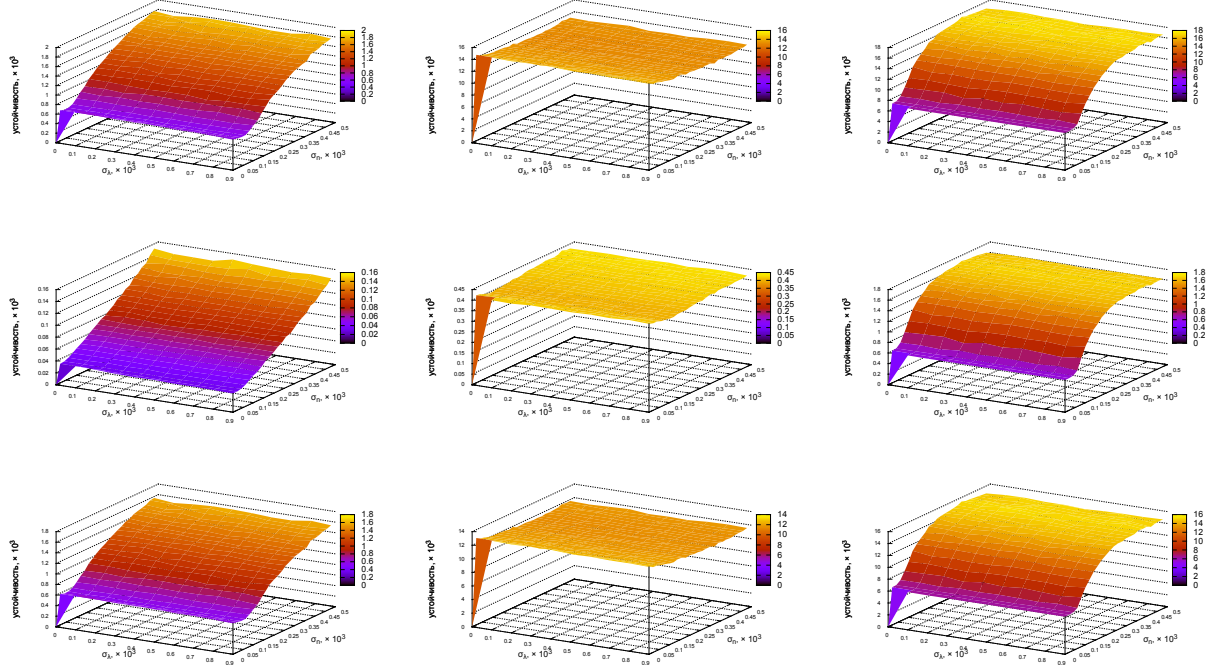


Таблица 5: Поверхности дисперсии для формулы (11).

и с учетом ошибок измерений представима в виде

$$y_i = ax_i + b + \xi_i \mid i \in \{1, \dots, n\},$$

где ошибки  $\xi_i$  независимы,  $E(\xi_i) = 0$ ;  $D(\xi_i) = \sigma^2$  [8]. То есть, рассматривается случай независимости ошибки измерения от точки измерения. При этом считается, что независимая переменная измеряется точно.

Перейдем к представлению

$$y_i = a(x_i - \bar{x}) + b + \xi_i \mid i \in \{1, \dots, n\},$$

для которого, согласно [8], случайные величины  $a$  и  $b$  независимы и нормально распределены, и, кроме того, их дисперсии выражаются как:

$$D(a) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (12)$$

$$D(b) = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (13)$$

Рассмотрим, насколько результаты предложенного метода отличаются от значений, полученных согласно (12) и (13). Для этого исследуем зависимость разницы между этими значениями и эмпирическими значениями устойчивости от числа итераций

N:

$$\delta_1 = \frac{|\mathbf{T}_y^N(1) - D(a)|}{D(a)},$$

$$\delta_2 = \frac{|\mathbf{T}_y^N(2) - D(b)|}{D(b)}.$$

Соответствующие графики для функции  $y = 2x + 1 + \xi_i$  на интервале  $x \in [0; 10]$  при различном количестве порожденных точек (10 и 50) приведены на рис. 1 для значений  $D(\xi_i)$ , равных 1 и 10. По оси  $x$  отложено число итераций в тысячах (до  $10^7$ ), по  $y$  — значения  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

На рис. 2 и 3 приведены отдельные графики, соответствующие интервалам от 0 до  $5 \cdot 10^5$  итераций и от  $10^6$  до  $10^7$  итераций соответственно. Рис. 2 демонстрирует сходимость в начале работы алгоритма, в то время как рис. 3 показывает характер сходимости при достаточно больших  $N$ .

Из графиков видно, что значения разности стабилизируются в районе  $(1.5 \div 3) \cdot 10^6$  итераций и не демонстрируют явной зависимости от числа точек или дисперсии погрешности.

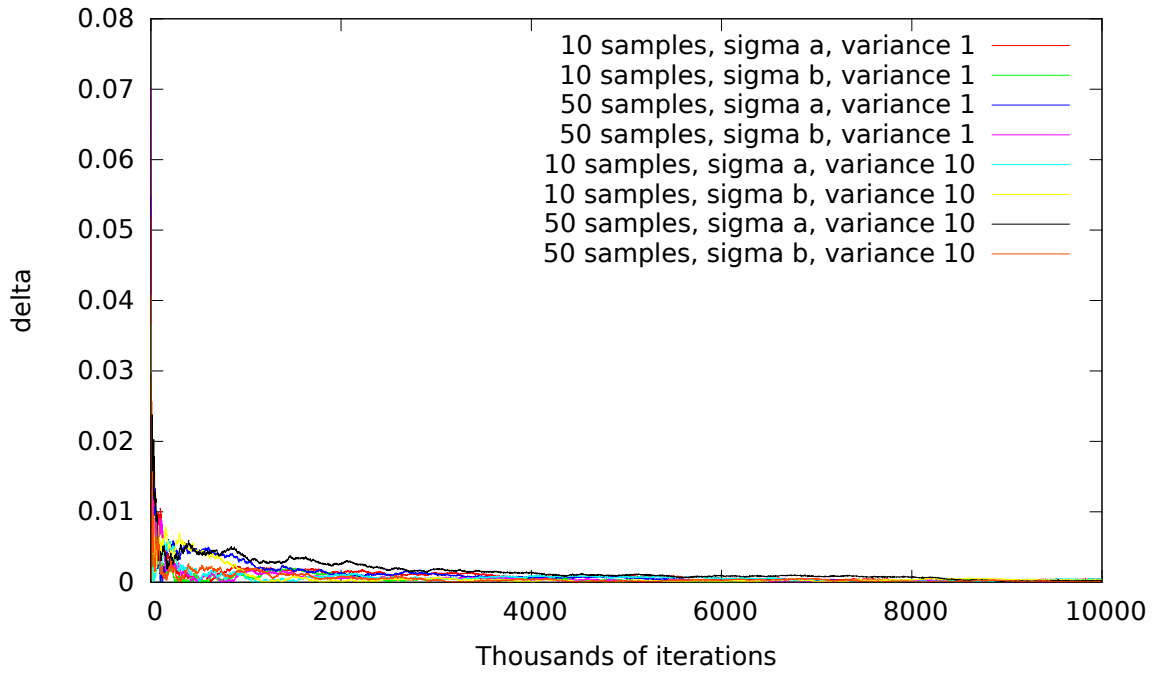


Рис. 1: График зависимости  $\delta$  от числа итераций (от 0 до  $10^7$  итераций).

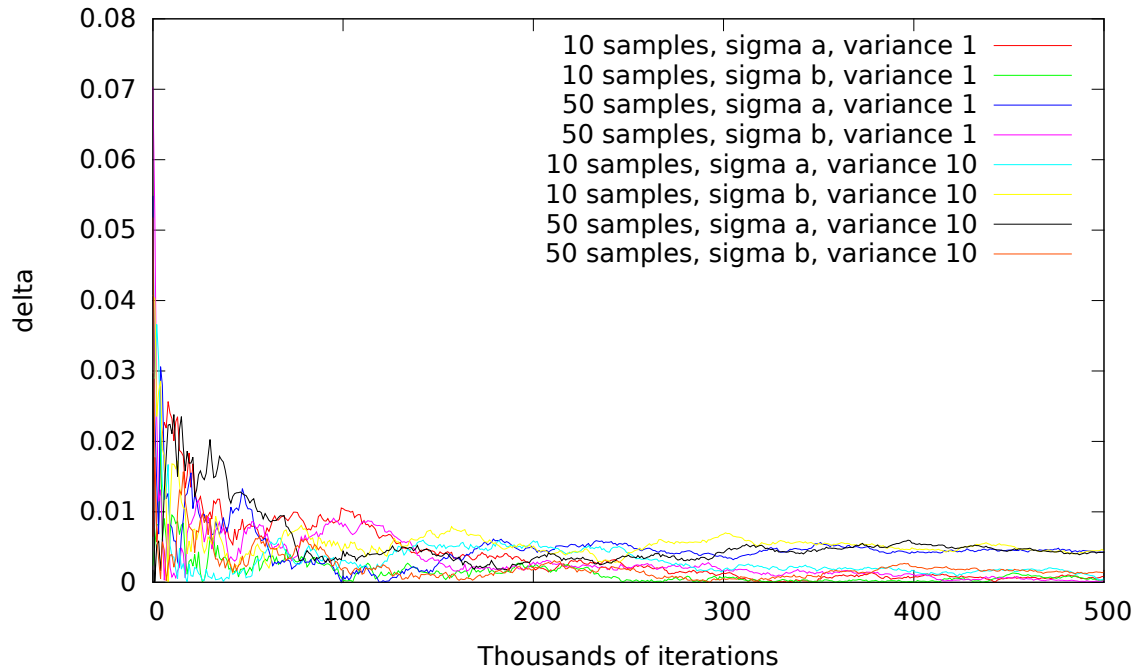


Рис. 2: График зависимости  $\delta$  от числа итераций (от 0 до  $5 \cdot 10^5$  итераций).

## 6 Заключение

Предложенный в [5] алгоритм позволяет получить интерпретируемую аналитическую формулу, описывающую зависимость коэффициента преломления среды от длины волны. Введенный штраф за сложность позволяет избежать переобучения без прибегания к методам вроде скользящего контроля, и таким образом отпадает необходимость в контрольной выборке.

Хотя другие алгоритмы, такие как SVM-регрессия, могут демонстрировать более высокое качество приближения данных, их результаты неинтерпретируемы и не защищены от переобучения «по построению», поэтому требуют разделения выборки на обучающую и контрольную. Кроме того, их структурные параметры так же требуют оценки по методам вроде кросс-валидации.

Предложенный в настоящей работе метод оценки стабильности решения позволяет исследовать вклад различных членов результирующей суперпозиции в решение, и зависимость изменения этих членов от случайных шумов во входных данных. В частности, в прикладных областях данный метод позволяет выявить, какие именно элементы признакового описания объектов в генеральной совокупности наиболее чувствительны к шуму. Кроме того, для корректных с экспертной точки зрения решений оказывается, что они стабильны, в то время как некорректные результаты нестабильны.

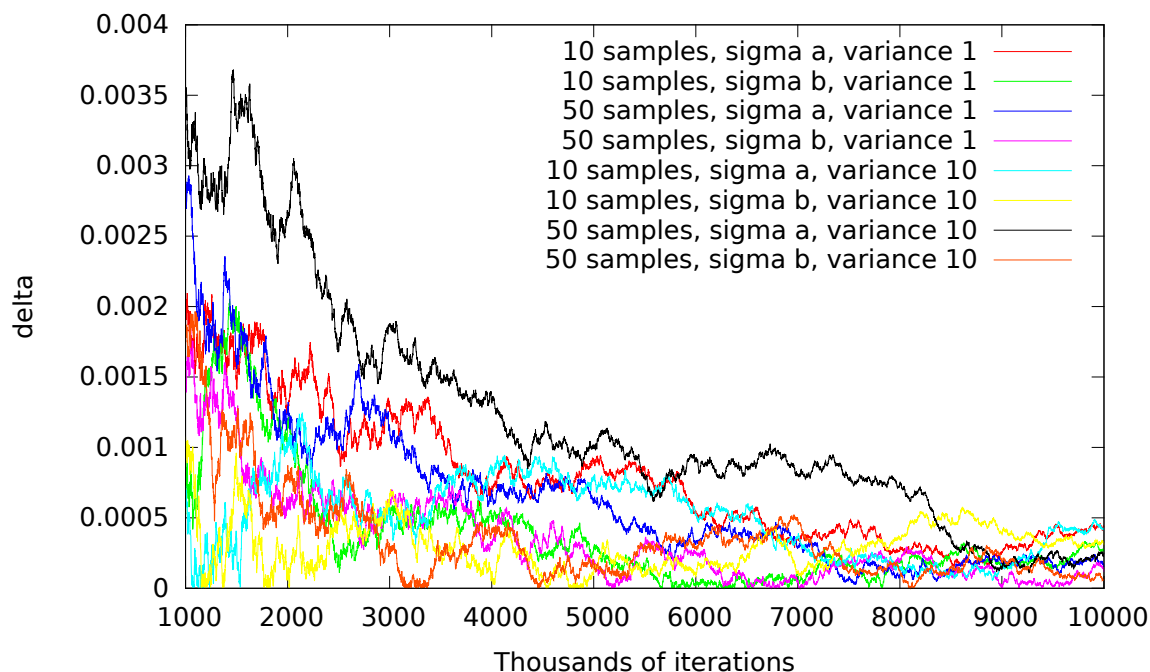


Рис. 3: График зависимости  $\delta$  от числа итераций (от  $10^6$  до  $10^7$  итераций).

## Список литературы

- [1] Davidson, J. W., Savic, D. A., and Walters, G. A.: *Symbolic and numerical regression: experiments and applications*. In John, Robert and Birkenhead, Ralph (editors): *Developments in Soft Computing*, pages 175–182, De Montfort University, Leicester, UK, 29-30 6 2000. 2001. Physica Verlag, ISBN 3-7908-1361-3.
- [2] Sammut, C. and Webb, G. I.: *Symbolic regression*. In Sammut, Claude and Webb, Geoffrey I. (editors): *Encyclopedia of Machine Learning*, page 954. Springer, 2010, ISBN 978-0-387-30768-8. <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-30164-8>.
- [3] Strijov, V. and Weber, G. W.: *Nonlinear regression model generation using hyperparameter optimization*. Computers & Mathematics with Applications, 60(4):981–988, 2010. <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.021>.
- [4] Стрижов, В. В.: *Методы индуктивного порождения регрессионных моделей*. Препринт ВЦ РАН им. А. А. Дородницына. — М., 2008.
- [5] Рудой, Г. И. и Стрижов, В. В.: *Алгоритмы индуктивного порождения суперпозиций для аппроксимации измеряемых данных*. Информатика и ее применения, 7(1):44–53, 2013.
- [6] Marquardt, D. W.: *An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters*. Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 11(2):431–441, 1963.

- [7] More, J. J.: *The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory*. In *G.A. Watson, Lecture Notes in Mathematics* 630, pages 105–116. Springer-Verlag, Berlin, 1978. Cited in Åke Björck’s bibliography on least squares, which is available by anonymous ftp from `math.liu.se` in `pub/references`.
- [8] Ватутин, В. А., Ивченко, Г. И., Медведев, Ю. И., и Чистяков, В. П.: *Теория вероятностей и математическая статистика в задачах*. Дрофа, 3 редакция, 2005.
- [9] Мальшев, В. И.: *Введение в экспериментальную спектроскопию*. Наука, 1979.
- [10] Зайдель, И. Н.: *Техника и практика спектроскопии*. Наука, 1972.
- [11] Серова, Н. В.: *Полимерные оптические материалы*. Научные основы и технологии, 2011.
- [12] Вапник, В. Н.: *Восстановление зависимостей по эмпирическим данным*. М.: Наука, 1979.