Problème du sac à dos en nombres entiers : ceci est un TP noté.

Soit un ensemble de n objets N={1,2,…,n} et un sac à dos pouvant contenir un poids maximal de W. Chaque objet i a un poids w_i et un gain v_i. Le problème consiste à choisir un ensemble d'objets parmi les n objets, au plus un de chaque, à mettre dans le sac à dos, de telle manière à maximiser le gain total (des objets dans le sac), sans dépasser la capacité du sac.

En termes mathématiques, nous avons ce qui suit :

$$\max \Sigma_{i=1}^{n} (v_i x_i)$$

$$\Sigma_{i=1}^{n} (w_i x_i) <= W$$

$$x_i = 0,1$$

Ceci est un problème difficile, c'est même un problème NP-complet dans sa version initiale. Cependant, dans cette version (en nombre entier) on va utiliser la programmation dynamique pour réduire la complexité de l'algorithme et trouver un algorithme polynomiale.

Propriété récursive du problème :

La programmation dynamique peut être développée en divisant le problème en deux sous-problème comme suit :

$P_{i,j}$ désigne la gain maximum généré par le choix des i premiers objets dont la somme des poids ne dépasse pas j. Alors, résoudre le problème revient à trouver la valeur $P_{n,W}$.

En calculant $P_{i,j}$ la séquence d'objets peut être divisés en deux : les (i-1) premiers objets et l'objet i. L'objet i est soit choisi soit ignoré dans P.

Si l'objet i est choisi, avant de l'inclure, on doit s'assurer que son poids ne dépasse pas la capacité j du sac à dos. Si tel est le cas, alors il contribue à la solution optimale par le gain v_i . Par conséquent, nous avons bien :

$$P_{ij} = P_{i-1,\, j-wi} + v_i$$

Si l'objet i n'est pas choisi dans la solution optimale, dans ce cas, nous avons la capacité du sac inchangé. Il suffirait donc de trouver la solution optimale parmi les i-1 premiers objets, soit $P_{i-1,\, j}$.

Bien entendu, pour trouver $P_{i,j}$, il suffirait de prendre la maximum entre le cas où l'objet est choisi ou ignoré.

Les cas de base sont : $P_{i,j} = 0$ pour i =0 ou j=0

Finalement, nous avons les équations suivantes :

$$P_{i,j} = \begin{cases} 0 \; ; \text{ si } i=0 \text{ ou } j=0 \\ P_{i-1,j} \text{ si } j<w_i \text{ et } i>0 \\ \max\{P_{i-1,j} \;,\; P_{i-1,j-w_i} + v_i\} \text{ sinon} \end{cases}$$