

# Algorithm : Minimum Spanning Tree

## Problem (Minimum Spanning Tree)

### 輸入

一張圖  $G = (V, E)$ ，權重函數  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

### 輸出

請構造一張圖  $M = (V, E_M)$ ， $E_M \subseteq E$ ，使得：

$$\sum_{e \in M} w(e)$$

最小。

---

## Def (Cut)

$G = (V, E)$ 。是一張無向圖。則一個  $G$  的「分割」(cut)，定義為：

$$(S, V \setminus S)$$

其中  $S \subseteq V$ 。

---

## Def (Cross)

$G = (V, E)$ ， $(S, V - S)$  是  $G$  的一個分割。若  $e = (u, v) \in E$  滿足：

$$\begin{cases} u \in S \text{ and } v \in V - S & \text{or} \\ u \in V - S \text{ and } v \in S \end{cases}$$


---

白話文：「端點各自在  $S$  跟  $V - S$  當中」。

---

## Def (Respects)

假定， $(S, V - S)$  是  $G$  的一個分割。若對於某一個邊的集合  $E$ ， $(S, V - S)$  滿足：

$$\neg (\exists (u, v) \in E. (u, v) \text{ crosses } (S, V - S))$$

則稱  $(S, V - S)$  respects  $E$ 。

---

這還真不知道中文要怎麼翻。

---

## Def (Light Edge)

$G = (V, E)$ ， $(S, V - S)$  是  $G$  的一個分割。若  $e = (u, v) \in E$  穿越  $(S, V - S)$ ，且滿足：

$$w(e) = \min\{c \mid c \in E, \text{ and } c \text{ crosses } (S, V - S)\}$$

則稱  $e$  是一個 Light Edge。

---

未必唯一。

---

## Thm (合併 MST)

$G = (V, E)$  是一張無向圖，且  $G$  連通。 $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  是一個權重函數。假定  $A \subseteq E(\text{MST}(G)) \subseteq E(G)$ ，且  $A$  respects  $(S, V - S)$ 。則：

$(u, v)$  is a light edge crossing  $(S, V - S)$   
 $\Rightarrow A \cup \{(u, v)\} \subseteq E(\text{MST}(G))$

---