Single Source Shortest Path - Math

Problem (Single Source Shortest Path)

輸入

一張圖 $G = (V, E)$，權重函數 $w : E \to \mathbb{R}$，某一個起點 $s \in V$。

輸出

對於任意 $v \in V$，尋找路徑 $s \overset{p}{\rightsquigarrow} v$，使得：

$$w(p) = \sum_{e \in p} w(e)$$

最小。

Def (Shortest Path Weight)

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) \mid u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{if } u \rightsquigarrow v \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Def (Shortest Path)

$$\{p \mid w(p) = \delta(u, v)\}$$

Thm (Triangular Inequality)

$$\forall (u,v) \in E.\, \delta(s,v) \leq \delta(s,u) + w(u,v)$$

假定存在 p_1 , p_2 兩條各往 u, v 的最短路徑。因:

$$\begin{cases} s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} u,\ w(p_1) = \delta(s,u) \\ s \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v,\ w(p_2) = \delta(s,v) \\ (u,v) \in E \end{cases} \Rightarrow s \overset{p}{\rightsquigarrow} v \text{ , where } p = p_1 \mathbin{+\!\!+} v$$

所以:

$$\begin{aligned} w(p) \leq \delta(s,v) \Rightarrow w(p) &= w(p_1) + w(u,v) \\ &= \delta(s,u) + w(u,v) \\ &\leq \delta(s,v) \end{aligned}$$

Lemma (最短路徑的子路徑都是最短路徑)

若:

$$p = \langle v_0 \ldots v_k \rangle$$

滿足:

$$\begin{aligned} &\forall 0 \leq i \leq j \leq k. \\ &\quad p_{ij} = \langle v_i \ldots v_j \rangle \text{ is a shortest path from } v_i \text{ to } v_j \end{aligned}$$

不然就可以構造出更短的最短的路徑，然後矛盾。

Observation (最短路徑沒有環)

Observation (有負環，沒最短路徑)

假定 p 是一個最短路徑，而且中間有一個負環。那麼多繞一圈負環就會產生一個更短的最短路徑。矛盾。

Observation (最短路徑沒有正環)

把所有環砍掉後會得到一條更短的最短路徑。

Observation (最短路徑至多 |V| - 1 條邊)

因為最短路徑必定 simple，而最長的 simple path 只可能有 $|V|$ 個頂點，也就是 $|V|-1$ 條邊。

Def (Shortest Path Tree)

若 G' 滿足：

$$G'(V',E'),\ \text{where}\ \begin{cases} V'=\{u \mid u\in V, s\rightsquigarrow u\} \\ E'\subseteq E \end{cases}$$

且：

$$\begin{aligned} &\forall v\in V.\,\exists!\,p. \\ &\quad s\overset{p}{\rightsquigarrow} v,\ \text{and}\ w(p)=\delta(s,v) \end{aligned}$$

則稱 G' 是一個「Shortest Path Tree」。

(Algo) Relaxaton

```
REXATION (u, v, w)
if v.d > u.d + w(u, v)
    v.d = u.d + w.d
    v.pi = u
```

Thm (Upper-Bound Property)

無論程式對 G 執行多少次 RELAX：

$$\begin{aligned}&\forall v \in V. \\ &\quad v.d \geq \delta(s, v)\end{aligned}$$

且在任意時刻，若:

$$v.d = \delta(s, v)$$

則在這之後，任意次的 Relax 都不會影響 $v.d$ 的值。

Thm (No-Path Property)

$$\neg(\exists p.\, s \overset{p}{\rightsquigarrow} v) \Rightarrow v.d = \delta(s, v) = \infty$$
