Algorithm : Minimun Spanning Tree

Problem (Minimun Spanning Tree)

輸入

一張圖 $G = (V, E)$，權重函數 $w : E \to \mathbb{R}$

輸出

請構造一棵樹 $M = (V, E_M)$，$E_M \subseteq V$，使得：

$$\sum_{e \in M} w(e)$$

最小。

Def (Cut)

$G = (V, E)$。是一張無向圖。則一個 G 的「分割」(cut)，定義為：

$$(S, V - S)$$

其中 $S \subseteq V$。

Def (Cross)

$G = (V, E)$，$(S, V - S)$ 是 G 的一個分割。若 $e = (u, v) \in E$ 滿足：

$$\begin{cases} u \in S \text{ and } v \in V - S & \text{or} \\ u \in V - S \text{ and } v \in S \end{cases}$$

白話文：「端點各自在 S 跟 $V - S$ 當中」。

Def (Repects)

假定，$(S, V - S)$ 是 G 的一個分割。若對於某一個邊的集合 E，$(S, V - S)$ 滿足：

$$\neg\left(\exists (u, v) \in E.\, (u, v) \text{ crosses } (S, V - S)\right)$$

則稱 $(S, V - S)$ respects E。

這還真不知道中文要怎麼翻。

Def (Light Edge)

$G = (V, E)$，$(S, V - S)$ 是 G 的一個分割。若 $e = (u, v) \in E$ 穿越 $(S, V - S)$ ，且滿足：

$$w(e) = \min\{c \mid c \in E, \text{and } c \text{ crosses } (S, V - S)\}$$

則稱 e 是一個 Light Edge。

未必唯一。

Thm (合併 MST)

$G = (V, E)$ 是一張無向圖，且 G 連通。$w : E \to \mathbb{R}$ 是一個權重函數。假定存在一個 MST，T，使：

$$A \subseteq E\,(T)$$

且:

$$A \text{ respects } (S, V-S)$$

則:

$$\begin{aligned}&(u,v) \text{ is a light edge crossing } (S, V-S) \\ &\Rightarrow A \cup \{(u,v)\} \subseteq E(T)\end{aligned}$$

假定 T' 是一個不含 (u,v) 的 MST。

1. 因 T' 是 MST，故 $\exists (x,y) \in T'.(x,y)$ crosses $(S, V-S)$ 。否則 $(S, V-S)$ 之間的點不連通。
2. 但 T' 中連接 $(S, V-S)$ 的邊只能有一條，否則將形成環，與 T' 是樹的前提矛盾。
3. 因此，(x,y) 是 T' 中連接 $(S, V-S)$ 的唯一邊。

因為 A respects $(S, V-S)$，故可以知道

$$(x,y) \notin A$$

令 T:

$$T = T' \setminus \{(x,y)\} \cup \{(u,v)\}$$

則可知:

1. 因 (x,y) 是 T' 中連接 $(S, V-S)$ 的唯一邊。故 $T' \setminus \{(x,y)\}$ 會變成分屬 $(S, V-S)$ 的兩棵樹。

2. 但 T' 又加上了 $\{(u,v)\}$ ，因此兩棵樹又恢復連通，變回一棵樹。

3. $A \subseteq T$: 因為定義 T 時唯一被去掉的邊 $(x,y) \notin A$:

$$\begin{cases} A \subseteq T' \\ T = T' \setminus \{(x,y)\} \cup \{(u,x)\} \\ (x,y) \notin A \end{cases} \Rightarrow A \subseteq T$$

這時計算 T' 的權重:

$$\begin{aligned} w(T) &= w(T') - w(x,y) + w(u,v) \\ &\leq w(T') \end{aligned}$$

$$(\ (u,v) \text{ 是 light edge} \Rightarrow w(x,y) \geq w(u,v))$$

但 T' 是 MST，因此:

$$w(T') \leq w(T)$$

綜合起來:

$$w(T) = w(T')$$

故 T 也是個 MST，且:

$$\begin{cases} (u,v) \in T & (\text{T 的定義}) \\ A \subseteq T & (\text{上面 3. }) \end{cases} \Rightarrow A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$$

由此得證。