Data Structure : Tree Basics

Def (樹等價定義們)

下列敘述等價:

1. G 是 Tree $\equiv$ G 是個連通、無環、無向的圖。

$$G \text{ is a tree} \equiv \begin{cases} G \text{ is undirected}, and \\ G \text{ is connected}, \ and \\ G \text{ is acyclic} \end{cases}$$

2. 任兩點存在唯一 simple path 的圖:

$$\forall u, u' \in V, u \neq u'. \exists! p. \, p \text{ is a simple path}$$

3. 隨便砍一條邊就會不連通的連通圖:
    1. G is connected, and
    2. $\forall e \in E. G' = (V, E \setminus e)$ is not connected
4. 連通,而且邊數 = 點數 - 1 的圖:
    1. G is connected, and
    2. $|E| = |V| - 1$
5. 無環,而且邊數 = 點數 - 1 的圖
    1. G is acyclic, and
    2. $|E| = |V| - 1$
6. 無環, 但任意加一條邊之後就有環。
    1. G is acyclic
    2. $\forall e \in \{(u_i, u_j) | u_i, u_j \in V, (u_i, u_j) \notin E\}. \forall G' \in \{(V, E \cup e)\}.$ G' is cyclic

---

(1. ⇒ 2.)：反證

1. 如果不存在 path，顯然與連通的前提矛盾。
2. 若存在超過兩個相異 simple path，任選兩條 $p_1 = (a_0 \ldots a_{k_a})$，$p_2 = (b_0 \ldots b_{k_b})$，其中 $a_0 = b_0$, $a_{k_A} = b_{k_b}$ 。
    1. 在 p_1, p_2 中，選擇最小的 k_1 與最小的 k_2 ，使得 $a_{k_1} = b_{k_2}$。以及次小的 k'_1, k'_2，使得 $a_{k'_1} = b_{k'_2}$ 。
    2. 這樣的 k_1, k_2 與 k'_1, k'_2必定存在，因為最差狀況下 $k_1 = 0, k_2 = 0$，以及 $k'_1 = a_{k_a}, k'_2 = b_{k_b}$ 。
    3. $p = (a_{k_1} \ldots a_{k'_1}, b_{k'_2 - 1} \ldots b_{b_{k_1}})$ 為一個 cycle。與前提矛盾。

Remark : 敘述的意思並不是「任兩點存在的 path 都是 simple path」，而是「如果兩點間有 simple path，則該 simple path 唯一」。

(2. ⇒ 3.)：

1. 因為任兩點都存在 simple path，故 connected.
2. 假定 $\exists e = (u, v). G' = (V, E \setminus (u, v))$ **is connected**，則可知 u, v 仍然 **rechable**，令這條 path 為 p'，則可知 G 當中，至少有兩個方法構造 u 往 v 的相異 simple path：
    1. p'：因為「u, v 有 path ⇒ u, v 有 simple path」
    2. (u, v)

    發現 u, v 沒有唯一的 simple path，矛盾。

（3.⇒4.）：

前面 Thm 已經證完 $|E| \geq |V| - 1$，僅證 $|E| \leq |V| - 1$ 即可。