# Data Structure : Graph Basics

## Def (Graph)

一個圖 (Graph) $G = (V, E)$ 由兩個部分組成:

1. $V$ 是一個有限的集合，稱作 Virtices。
2. $E$ 是一個 V 上的 Binary Relation，稱作 Edge Set。這個 Relation 通常用 $(\_, \_)$ 表示。
3. 如果 $E$ 是 ordered pair，則這個圖稱作「有向圖」; 如果 $E$ 是 unordered pair，則稱作無向圖。

---

1. 雖然 $E$ 中的元素有 order/unordered 之別，但符號上都用 $(u, v)$ 表示。
2. 在無向圖中 $(u, v) \not\Rightarrow (u, v)$; 但有向圖中 $(u, v) \Rightarrow (u, v)$

---

## Def (Incident)

1. 若 $G = (V, E)$ 是有向圖，且 $(u, v) \in E$，則稱 $(u, v)$ 「incident from / leaves u」，且「incident to / enters v」。
2. 若 $G = (V, E)$ 是無向圖，且 $(u, v) \in E$，則稱 $(u, v)$ 「incident on u and v」。

---

1. 其實這比較像英文的用語介紹。
2. 接下來的內文為了方便，在有向圖中，用「從 $u$ 離開」表示「incident from/leaves u」; 用「進入 $u$」表示「incident to / enters v」。
3. 用「經過 $u$ 的邊」表示「incident on u」。

---

## Def (Degree)

1. 若 $G = (V, E)$ 是個有向圖，$u \in V$, 則：
   1. In-degree of $u$：進入 $u$ 的邊數。

   $$d_{u,i} = |\{(i, u)|(i, u) \in E\}|$$

   2. Out-degree of $u$：從 $u$ 出發的邊數。

   $$d_{u,o} = |\{(u, i)|(u, i) \in E\}|$$

   3. Degree of u：$u$ 的 in-degree 加 out-degree。

   $$\deg(u) = d_{u,i} + d_{u,o}$$

2. 若 $G = (V, E)$ 是個無向圖，且 $u \in V$，則：
   1. Degree of $u$：

   $$\deg(u) = |\{(u, i)|(u, i) \in E\}|$$

---

## Thm (Hand-Shaking Lemma)

假定 $G = (V, E)$ 是個無向圖，則：

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2|E|$$

---

用邊來計數 Degree 的數目即得。

---

## Def (Path)

一個從 $u$ 到 $u'$，長度為 $k \geq 0$ 的 path, $p$, 定義為一個由 $V$ 中的元素形成的序列：

$$p = \langle v_0, v_1 \ldots v_k \rangle$$

且該序列滿足「$(v_i, v_{i+1})$ 是邊」「頭尾分別是 $u, u'$」即:

$$\begin{cases} v_0 = u \\ v_k = u' \\ \forall i \in \{0 \dots k-1\}. (v_i, v_{i+1}) \in E \end{cases}$$

---

用:

$$u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$$

來說明 $p$ 是一個從 $u$ 到 $v$ 的 path

---

### Def (Simple)

若 $u \overset{p}{\rightsquigarrow} u'$，且 $p$ 的長度為 $k$。若 $p$ 中沒有重複經過的點，即:

$$\forall (i, j) \in \{(i, j) | 0 \leq i, j \leq k, i \neq j\}. v_i \neq v_j$$

---

### Def (Cycle)

若 $u \overset{p}{\rightsquigarrow} u'$，且:

$$u = u'$$

則稱 $p$ 為一個 「cycle」。

---

## Def (Reachable)

$G = (V, E)$ 是一張圖。若 $u, v \in V$ ，且:

$$\exists p. u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$$

則稱「$v$ is reachable from $u$ via $p$」。

---

1. $k$ 可以是 0，所以不管是否 $(u, u)$，$u$ 自己一定跟自己是 reachable

的。

---

## Def (Connected)

$G = (V, E)$ 是一張圖。假定:

$$\forall u, u' \in V.\, u \rightsquigarrow u'$$

則稱圖是 Connected.

---

## Def (Cyclic Graph)

$G = (V, E)$ 。假定:

$$\exists p.\, p \text{ is a cycle}$$

則稱 $G$ 是 cyclic。

---

## Thm : 無向圖有 Path ⇒ 有 Simple Path

$G = (V, E)$ 是個無向圖。則:

$$u \overset{p}{\rightsquigarrow} v \Rightarrow u \overset{p'}{\rightsquigarrow} v, p' \text{is simple}$$

---

$|V| = 2$: 只有兩個點。顯然成立。

假定 $|V| = |V'| - 1$ 時命題成立，則對於任意 $u, v \in V$:

1. $u, v \in V'$: 由歸納法假設可知命題成立。
2. $u \in V', v \notin V'$，且 $u, v$ 存在 path，且僅有最後一個點為 $v$。令該 path 為:

$$p = \langle u, u_1 \dots u_{k-1}, v \rangle$$

3. 由歸納法假設知 $u, u_{k-1}$ 間存在 simple path, $p'$。又 $v \notin V'$，故 $v \notin p'$，因此可知 $p$ 為一 simple path。

4. $u \in V', v \notin V'$，且 $u, v$ 存在 path，且 $v$ 不只最後一個點為 $v$:

- 假定 $v$ 第一次出現在 $u_k$
- 取 $p' = \langle u, \dots u_k \rangle$
- 由於 $p'$ 中 $v$ 僅在最後出現，故套用 2. 可知 $u, u_k = v$ 之間存在 simple path。

---

## Thm：Undirected, Connected ⇒ |E| ≥ |V| - 1

1. |V| = 1 原題顯然成立。
2. 假定 $|V| = |V'| + 1$，隨便挑出一個點 $v \in V$，並令剩下的子圖 $G' = (V', E')$ 。$V = V' \cup \{v\}, v \notin V'$, $E' \subset E$:

   已知：$|E'| \geq |V'| - 1$，且 $|V| = |V'| + 1$。若原圖 $G = (V, E) = (V' \cup \{v\}, E)$ 連通，則 $\exists u \in V'. (u, v) =: e \in E$，否則 $v$ 不連通。而 $v \notin V'$，故 $e \notin E'$，因此：

   $$|E| \geq |E'| + 1 \geq |V'| + 1 = |V|$$

3. 由數學歸納法知原題成立。