Single Source Shortest Path - Math

Problem (Single Source Shortest Path)

輸入

一張圖 $G=(V,E)$ ，權重函數 $w: E \to \mathbb{R}$，某一個起點 $s \in V$。

輸出

對於任意 $v \in V$，尋找路徑 $s \overset{p}{\leadsto} v$，使得：

$$w(p) = \sum_{e \in p} w(e)$$

最小。

Def (Shortest Path Weight)

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) \mid u \overset{p}{\leadsto} v\} & \text{if } u \leadsto v \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Def (Shortest Path)

$$\{p \mid w(p) = \delta(u,v)\}$$

Thm (Triangular Inequality)

$$\forall (u,v) \in E.\, \delta(s,v) \le \delta(s,u) + w(u,v)$$

假定存在 p_1, p_2 兩條各往 u, v 的最短路徑。因：

$$\begin{cases} s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} u,\ w(p_1) = \delta(s,u) \\ s \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v,\ w(p_2) = \delta(s,v) \\ (u,v) \in E \end{cases} \Rightarrow s \overset{p}{\rightsquigarrow} v \text{ , where } p = p_1 +\!\!+\, v$$

所以：

$$\begin{aligned} w(p) \le \delta(s,v) \Rightarrow w(p) &= w(p_1) + w(u,v) \\ &= \delta(s,u) + w(u,v) \\ &\le \delta(s,v) \end{aligned}$$

Lemma (最短路徑的子路徑都是最短路徑)

若：

$$p = \langle v_0 \dots v_k \rangle$$

滿足：

$$\begin{aligned} &\forall 0 \le i \le j \le k. \\ &\quad p_{ij} = \langle v_i \dots v_j \rangle \text{ is a shortest path from } v_i \text{ to } v_j \end{aligned}$$

不然就可以構造出更短的最短的路徑，然後矛盾。

Observation (最短路徑沒有環)

(有負環，沒最短路徑)

假定 p 是一個最短路徑，而且中間有一個負環。那麼多繞一圈負環就會產生一個更短的最短路徑。矛盾。

(最短路徑沒有正環)

把所有環砍掉後會得到一條更短的最短路徑。

Observation (最短路徑至多 |V| - 1 條邊)

因為最短路徑必定 simple，而最長的 simple path 只可能有 $|V|$ 個頂點，也就是 $|V|-1$ 條邊。

Def (Shortest Path Tree)

若 G' 滿足：

$$G'(V', E'),\ \text{where } \begin{cases} V' = \{u \mid u \in V, s \rightsquigarrow u\} \\ E' \subseteq E \end{cases}$$

且：

$$\begin{aligned} &\forall v \in V.\, \exists!\, p. \\ &\quad s \overset{p}{\rightsquigarrow} v,\ \text{and } w(p) = \delta(s, v) \end{aligned}$$

則稱 G' 是一個「Shortest Path Tree」。
