Algorithm : Minimun Spanning Tree

Problem (Minimun Spanning Tree)

輸入

一張圖 $G = (V, E)$，權重函數 $w : E \to \mathbb{R}$

輸出

請構造一棵樹 $M = (V, E_M)$，$E_M \subseteq V$，使得:

$$\sum_{e \in M} w(e)$$

最小。

Def (Cut)

$G = (V, E)$。是一張無向圖。則一個 G 的「分割」(cut)，定義為:

$$(S, V - S)$$

其中 $S \subseteq V$。

Def (Cross)

$G = (V, E)$，$(S, V - S)$ 是 G 的一個分割。若 $e = (u, v) \in E$ 滿足:

$$
\begin{cases} u \in S \text{ and } v \in V - S & \text{or} \\ u \in V - S \text{ and } v \in S \end{cases}
$$

白話文：「端點各自在 S 跟 $V-S$ 當中」。

Def (Repects)

假定，$(S, V-S)$ 是 G 的一個分割。若對於某一個邊的集合 E，$(S, V-S)$ 滿足：

$$
\neg\left(\exists (u, v) \in E .(u, v) \text{ crosses }(S, V-S)\right)
$$

則稱 $(S, V-S)$ respects E。

這還真不知道中文要怎麼翻。

Def (Light Edge)

$G=(V, E)$，$(S, V-S)$ 是 G 的一個分割。若 $e=(u, v) \in E$ 穿越 $(S, V-S)$，且滿足：

$$
w(e)=\min \{c \mid c \in E, \text{and } c \text{ crosses } (S, V-S)\}
$$

則稱 e 是一個 Light Edge。

未必唯一。

Thm (合併 MST)

$G=(V, E)$ 是一張無向圖，且 G 連通。$w: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是一個權重函數。若：

$$
\exists T^{\prime}, T^{\prime} \text{ is a MST. } A \subseteq E\left(T^{\prime}\right)
$$

且：

$$A \text{ respects } (S, V - S)$$

則：

$$\begin{aligned}&(u, v) \text{ is a light edge crossing } (S, V - S) \\ &\qquad \Rightarrow \exists T, T \text{ is a MST. } A \cup \{(u, v)\} \subseteq E(T)\end{aligned}$$

假定 T' 是一個不含 (u, v) 的 MST，且 $A \subseteq T'$。

1. 因 T' 是 MST，故 $\exists (x, y) \in T'. (x, y)$ crosses $(S, V - S)$ 。否則 $(S, V - S)$ 之間的點不連通。
2. 但 T' 中連接 $(S, V - S)$ 的邊只能有一條，否則將形成環，與 T' 是樹的前提矛盾。
3. 因此，(x, y) 是 T' 中連接 $(S, V - S)$ 的唯一邊。

因為 A respects $(S, V - S)$，故可知：

$$(x, y) \notin A$$

令 T：

$$T = T' \setminus \{(x, y)\} \cup \{(u, v)\}$$

則可知：

1. 因 (x, y) 是 T' 中連接 $(S, V - S)$ 的唯一邊。故 $T' \setminus \{(x, y)\}$ 會變成分屬 $(S, V - S)$ 的兩棵樹。
2. 但 T' 又加上了 $\{(u, v)\}$ ，因此兩棵樹又恢復連通，變回一棵樹。
3. $A \subseteq T$。因為定義 T 時，唯一被去掉的邊 $(x, y) \notin A$：

$$\begin{cases} A \subseteq T' & (\text{前提}) \\ T = T' \setminus \{(x, y)\} \cup \{(u, x)\} & (T' \text{ 的定義}) \\ (x, y) \notin A & (\text{A respects}) \end{cases} \Rightarrow A \subseteq T$$

這時計算 T 的權重:

$$
\begin{aligned}
w(T) &= w(T') - w(x,y) + w(u,v) \\
&\le w(T')
\end{aligned}
$$

$$((u,v) \text{ 是 light edge} \Rightarrow w(x,y) \ge w(u,v))$$

但 T' 是 MST,因此:

$$w(T') \le w(T)$$

綜合起來:

$$w(T) = w(T')$$

故 T 也是個 MST,且:

$$\begin{cases} (u,v) \in T & (\text{T 的定義}) \\ A \subseteq T & (\text{上面 } 3.\ ) \end{cases} \Rightarrow A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$$

由此得證。