

Strongly Connected Components - Math

Def (Strongly Connected Component)

$G = (V, E)$ 是個有向圖， $C \subseteq V$ 是個 G 的 connected component。若：

$$\forall u, v \in C. u \rightsquigarrow v \text{ and } v \rightsquigarrow u$$

且：

$$\forall w \in V \setminus C. V \cup \{w\} \text{ is not a connected component}$$

則稱 C 是個 Strongly Connected Component.

更精簡的訂法：

SCC is the equivalent class of "mutually reachable"

Observation (轉置後 SCC 不變)

$G = (V, E)$ 是一張有向圖，則：

$$U \text{ is a SCC of } G \iff U \text{ is a SCC of } G^T$$

假定 G 中 $u \xrightarrow{p_1} v$ 且 $v \xrightarrow{p_2} u$ 。則顯然 G^T 中 $v \xrightarrow{p_1^T} u$ 且 $u \xrightarrow{p_2^T} v$ ，因此在 G 中連通的各點，在 G^T 中仍然連通。

因為 $G = (G^T)^T$ ，所以 G^T 中連通的各點，在 G 中也保持連通。

所以知道：

$$u, v \text{ mutually reachable in } G \iff u, v \text{ mutually reachable in } G^T$$

由此得證。

Lemma (SCC 們是個 DAG)

$G = (V, E)$ 是一張有向圖， C', C 是 G 相異的 SCC， $u, v \in C$ ， $u', v' \in C'$ ，則：

$$u \rightsquigarrow u' \Rightarrow v' \not\rightsquigarrow v$$

若 $v \rightsquigarrow v'$ ，則對於 C 中的任意點 w 及 C' 中任一點 w' ：

$$\begin{aligned} w &\rightsquigarrow u \\ u &\rightsquigarrow u' \Rightarrow w \rightsquigarrow w' \\ u' &\rightsquigarrow w' \end{aligned}$$

及：

$$\begin{aligned} w' &\rightsquigarrow v' \\ v' &\rightsquigarrow v \Rightarrow w' \rightsquigarrow w \\ v &\rightsquigarrow w \end{aligned}$$

故 C' ， C 都不是 Strongly Connected Component，矛盾。

Def (Discovery and Finish Time for Sets of Vertices)

$G = (V, E)$ 是一張有向圖， $U \subseteq V$ ，則定義 DFS 的起始與結束時間：

$$\begin{cases} d(U) = \min(\{u.d \mid u \in U\}) \\ f(U) = \max(\{u.f \mid u \in U\}) \end{cases}$$

Lemma (邊的指向就是遍歷順序)

$G = (V, E)$ 是一張有向圖， C', C 是 G 相異的 SCC。假定 $v \in C$ ， $v' \in C'$ ，且 $(v, v') \in E$ ，則：

$$f(C) > f(C')$$

假定 $d(C) < d(C')$ ，令 $x \in C$ 是 C 中第一個被發現的點。在 $x.d$ 時間時， C, C' 全白。對於任意 $w' \in C'$ ：

$$x \rightsquigarrow v \rightarrow v' \rightsquigarrow w$$

是一條全白路徑。因此 C 中所有點都是 x 的子節點。由 Nestings 得證。

假定 $d(C) > d(C')$ ，假定 x' 是 C' 中第一個發現的點。因 $d(C) > d(C')$ ，故在 $x'.d$ 時， C 為全白。由 Lemma 知：

$$\neg \exists u \in C, u' \in C'. (u', u) \in E$$

所以在 $x'.d$ 時：

$$\forall w \in C. x' \xrightarrow{\text{WHITE}} w$$

因此 C 中任意點，都不是 x' 的子節點。由 Nestings 的狀況 1. 知 C 中每一點的 f 值都比 C' 中每一點的 f 值大。由此得證。

如果把 SCC 收縮之後的圖想成 DAG，再用 DAG 的性質下去做感覺也可以？

Corollary

$G = (V, E)$ 是一張有向圖， C', C 是 G 相異的 SCC。假定 $v \in C$ ， $v' \in C'$ ，且 $(v', v) \in E^T$ ，則：

$$f(C) > f(C')$$

$$(v', v) \in E^T \iff (v, v') \in E$$

因為 G 和 G^T 的 SCC 相同，因此套用 Lemma 即得證。
