Algorithm - Strongly Connected Components

Def (Strongly Connected Component)

$G=(V,E)$ 是個有向圖，$C \subseteq V$ 是個 G 的 connected component。若:

$$\forall u, v \in G.\ u \rightsquigarrow v \text{ and } v \rightsquigarrow u$$

且:

$$\forall w \in V \setminus C. V \cup \{w\} \text{ is not a connected coponent}$$

則稱 C 是個 Strongly Connected Component.

更精簡的訂法:

$$\text{SCC is the equivalent class of ”mutually reachable”}$$

Observation (轉置後 SCC 不變)

$G=(V,E)$ 是一張有向圖，則:

$$U \text{ is a SCC of } G \iff U \text{ is a SCC of } G^T$$

假定 G 中 $u \overset{p_1}{\rightsquigarrow} v$ 且 $v \overset{p_2}{\rightsquigarrow} u$。則顯然 G^{T} 中 $v \overset{p_1^{\mathrm{T}}}{\rightsquigarrow} u$ 且 $u \overset{p_2^{\mathrm{T}}}{\rightsquigarrow} v$，因此在 G 中連通的各點，在 G^{T} 中仍然連通。

因為 $G=(G^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，所以 G^{T} 中連通的各點，在 G 中也保持連通。由此得證。

Lemma (SCC 們是個 DAG)

$G=(V,E)$ 是一張有向圖，C',C 是 G 相異的 SCC，$u,v\in C$，$u',v'\in C'$，則:

$$u\leadsto u' \Rightarrow v' \not\leadsto v$$

若 $v\leadsto v'$，則對於 C 中的任意點 w 及 C' 中任一點 w' ：

$$\begin{aligned} &w\leadsto u \\ &u\leadsto u' \quad \Rightarrow w\leadsto w' \\ &u'\leadsto w' \end{aligned}$$

及:

$$\begin{aligned} &w'\leadsto v' \\ &v'\leadsto v \quad \Rightarrow w\leadsto w' \\ &v\leadsto w \end{aligned}$$

故 C'，C 都不是 Strongly Connected Component，矛盾。

Def (Discovery and Finish Time for Sets of Vertices)

$G=(V,E)$ 是一張有向圖，$U\subseteq V$，則定義 DFS 的起始與結束時間:

$$\begin{cases} d(U)=\min\left(\{u.d \mid u\in U\}\right) \\ \\ d(U)=\max\left(\{u.d \mid u\in U\}\right) \end{cases}$$

Lemma

$G=(V,E)$ 是一張有向圖，C',C 是 G 相異的 SCC。假定 $v \in C$，$v' \in C'$，且 $(v,v') \in E$，則:

$$f(C) > f(C')$$

假定 $d(C) < d(C')$，令 $x \in C$ 是 C 中第一個被發現的點。在 $x.d$ 時間時，C,C' 全白。對於任意 $w' \in C'$:

$$x \rightsquigarrow v \to v' \rightsquigarrow w$$

是一條全白路徑。因此 C 中所有點都是 x 的子節點。由 Nestings 得證。

假定 $d(C) > d(C')$，假定 x' 是 C' 中第一個發現的點。因 $d(C) > d(C')$，故在 $x'.d$ 時， C 為全白。由 Lemma 知：

$$\neg\exists u \in C, u' \in C'. (u', u) \in E$$

所以在 $x'.d$ 時:

$$\forall w \in C. x' \cancel{\xrightarrow{\texttt{WHITE}}} w$$

因此 C 中任意點，都不是 x' 的子節點。由 Nestings 的狀況 1. 知 C 中每一點的 f 值都比 C' 中每一點的 f 值大。由此得證。

Corollary

$G=(V,E)$ 是一張有向圖，C',C 是 G 相異的 SCC。假定 $v \in C$，$v' \in C'$，且 $(v,v') \in E^T$，則:

$$f(C) < f(C')$$

$$(v,v') \in E^T \iff (v',v) \in E$$

因為 G 和 G^T 的 SCC 相同，因此套用 Lemma 即得證。

Kosaraju's Algorithm