

第 20 章应用数学

20.1 运筹方法

20.1.2 线性规划

1. 【2011 年题 53 解析】

三个子公司分 4 吨金属材料。分法包括：

一、1+1+2 方案，即：1 家公司分 2 吨，另外 2 家公司分 1 吨。

该方案下的子方案包括：

 (1) 甲 2 吨 + 乙 1 吨 + 丙 1 吨： $7+5+4=16$

(2) 甲 1 吨 + 乙 2 吨 + 丙 1 吨： $4+9+4=17$

(3) 甲 1 吨 + 乙 1 吨 + 丙 2 吨： $4+5+6=15$

二、2+2 方案，即：2 家公司每家分 2 吨，另外 1 家公司不分。

该方案下的子方案包括：

(1) 甲 2 吨 + 乙 2 吨： $7+9=16$

(2) 甲 2 吨 + 丙 2 吨： $7+6=13$

(3) 乙 2 吨 + 丙 2 吨： $9+6=15$

三、3+1 方案，即：1 家公司分 3 吨，1 家公司分 1 吨，另外 1 家公司不分。

该方案有多种子方案组合，但此处是选择题，只需要做一些分析即可得到结论。3+1 的方案，无论如何组合，都是将题目表格中的 1 吨列中与 3 吨列中各取 1 个数相加得来。而此处能得到的最佳方案也就是 $5+11=16$ ，而之前我们已算出 17 的方案，所以 3+1 产生不了最佳方案。

四、4+0 方案，即：1 家公司分 4 吨，其余两家公司不分。

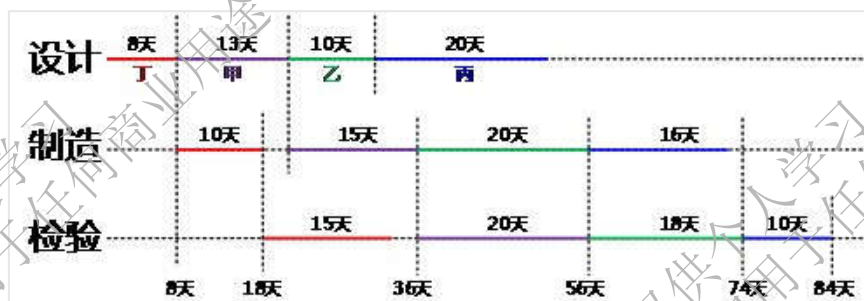
该方案也就对应着题目表格中的 4 吨这一列，最大值为 14 吨，也非最佳方案，所以最佳方案为甲 1 吨 + 乙 2 吨 + 丙 1 吨 = 17。

2. 【2013 年题 40 解析】

做这类题，有一个基本的原则：把多个任务中，第 1 步耗时最短的安排在最开始执行，再把最后 1 步耗时最短的安排在最后完成。所以在本题中最先应执行的是丁项目，最后执行的是丙项目。这样所有的安排方案只有两个：

1、丁甲乙丙

2、丁乙甲丙



通过画时空图可知丁甲乙丙执行时间如图所示，总执行时间为 84 天，而题目最小选项为 84 天，所以该方案已达最优，可以不计算方案 2。

3. 【2014 年题 44 解析】

	前两年	后五年	总概率	收益
建大厂	销路好 (70%)	销路好 (80%)	56%	$200 \times 7 = 1400$ 万
	销路好 (70%)	销路不好 (20%)	14%	$200 \times 2 + (-20) \times 5 = 300$ 万
	销路不好 (30%)	销路好 (10%)	3%	$(-20) \times 2 + 200 \times 5 = 960$ 万
	销路不好 (30%)	销路不好 (90%)	27%	$(-20) \times 7 = -140$ 万
	$EMV = -500 + 1400 \times 56\% + 300 \times 14\% + 960 \times 3\% + (-140) \times 27\% = 317$ 万			
建小厂	销路好 (70%)	销路好 (80%)	56%	$100 \times 7 = 700$ 万
	销路好 (70%)	销路不好 (20%)	14%	$100 \times 2 + 20 \times 5 = 300$ 万
	销路不好 (30%)	销路好 (10%)	3%	$20 \times 2 + 100 \times 5 = 540$ 万
	销路不好 (30%)	销路不好 (90%)	27%	$20 \times 7 = 140$ 万
	$EMV = -200 + 700 \times 56\% + 300 \times 14\% + 540 \times 3\% + 140 \times 27\% = 288$ 万			

【答案】B。

4. 【2015 年题 46 解析】

【答案】：D。

5. 【2016 年题 43 解析】

序号	解决方案			收益情况			总收益
	甲	乙	丙	甲	乙	丙	
1	0	0	4	3.8	4.0	7.8	15.6
2	0	1	3	3.8	4.2	7.8	15.8
3	0	2	2	3.8	5.0	6.8	15.6
4	0	3	1	3.8	6.0	6.4	16.2
5	0	4	0	3.8	6.6	4.8	15.2
6	1	0	3	4.1	4.0	7.8	15.9
7	1	1	2	4.1	4.2	6.8	15.1
8	1	2	1	4.1	5.0	6.4	15.5
9	1	3	0	4.1	6.0	4.8	14.9
10	2	0	2	4.8	4.0	6.8	15.6
11	2	1	1	4.8	4.2	6.4	15.4
12	2	2	0	4.8	5.0	4.8	14.6
13	3	0	1	6.0	4.0	6.4	16.4
14	3	1	0	6.0	4.2	4.8	15
15	4	0	0	6.6	4.0	4.8	15.4

6. 【2018 年题 42 解析】

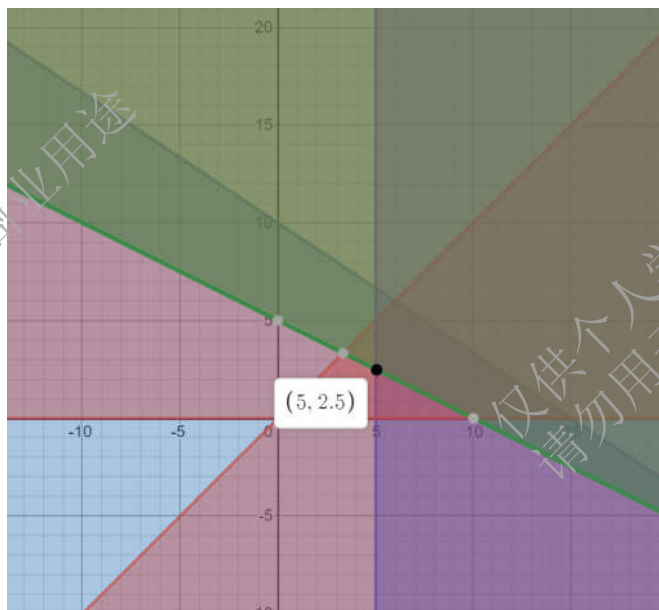
这题比较特殊每行找到前一位最小，如下：

	A	B	C	D
甲			2	
乙			3	
丙		4		
丁	4			

其中甲的最小值为 2，但是不满足，则找第二小的为 3。总的天数为：4+4+3+3=14。个人感觉这类型最好的方法就是穷举。

7. 【2018 年题 43 解析】

通过画图，得到最小值的坐标为(5,2.5)，如下图所示：



最小值为： $2x+3y=2 \times 5+3 \times 2.5=17.5$ 。答案 B。

20.1.3 决策论

1. 【2009 年题 57 解析】

根据题意，该地区冰箱品牌 A 与 B 每月占有率的变化描述为常数转移矩阵 P。不管初始时刻这两种品牌的市场占有率(以概率向量来描述)如何，最终将稳定到概率向量 Z，而且有关系式 $ZP=Z$ 。这表明，Z 的下一时刻仍然是 Z。

设 $Z=(Z_1, Z_2)$ ，其中 $Z_1 \geq 0, Z_2 \geq 0, Z_1+Z_2=1$ ，从 $ZP=Z$ 可以列出方程：

$$0.8Z_1+0.4Z_2=Z_1$$

$$0.2Z_1+0.6Z_2=Z_2$$

根据上述条件，求解该方程，得到 $Z_1=2/3, Z_2=1/3$ 。

因此，冰箱品牌 A 与 B 在该地区最终将逐步稳定到市场占有率(2/3, 1/3)。品牌 A 将占有 2/3 的市场，品牌 B 将占有 1/3 的市场。

20.2 数学建模

1. 【2009 年题 56 解析】

选项 D 中，企业负责人需要提供一切必要的支持来解决问题。至于解决过程中采用的技术问题，则需要由技术人员研究决定。企业负责人只需要听取汇报，从宏观上认可就可以，不需要理解其中的技术细节。

2. 【2010 年题 57 解析】

本题主要考查数学建模的基本过程，在对实际应用问题建立数学模型并求得结果后，还需要根据建模的目的和要求，利用相关知识，结合研究对象的特点，进行模型分析。模型分析工作主要包括模型的合理性分析、模型的误差分析和参数的灵敏性分析等，一般不包括模型的先进性分析。

20.3 其他

1. 【2011 年题 52 解析】

对于结点 E, 它的输出运力为 15, 而所有输入运力之和为 14, 则 E 的最大真实运力, 只能达到 14, 所以将 E 的输出运力修改为 14。对于 D 结点, 其输出运力和为 7, 而输入运力为 8, 则需要平衡为 7。结点 B 也需要调, 但情况比较复杂, 我们需要综合分析 B 的输出运力与 C 的输出运力, 分析可知, 当 B 到 C 的运力调整为 1 时, 既能达到结点运力的平衡, 又能使运力最大, 所以应调整为 1。当完成这些调整之后, 可轻易得出结论, 最大运力为 22。

2. 【2012 年题 3 解析】

本题考查应用数学基础知识。

为便于直观分析, 题中的叙述可以用下图来表示:

A11 ○	A12 ●	A13
A21 ○	A22 ○	A23 ○
A31	A32	A33

九个项目 $A_{ij}(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$ 的成本值(单位为百万, 从 1 到 9 各不相同)将分别填入 i 行 j 列对应的格中。格间的黑点表示相邻格有一倍关系, 白点表示相邻格相差 1。

已知 A22 与 A12 的值有一倍关系, 那就只可能是 1-2, 2-4, 3-6 或 4-8, 因此 A22 的值只可能是 1, 2, 3, 4, 6, 8。

如果 A22=1, 则 A23=A12=2, 出现相同值, 不符合题意。

如果 A22=2, 则 A12 只能是 4(A12=1 将导致 A11=A22=2 矛盾), A23 只能为 3(A23=1 将导致 A33=A22=2 矛盾), A33 出现矛盾。

如果 A22=3, 则 A12=6, A11=5 或 7, 不可能与 A21 有一倍关系。

如果 A22=4, 则 A12=2 或 8。A12=8 将导致 A11=7 或 9, 不可能与 A21 有成倍关系。因此 A12=2, A23 只能是 5(A23=3 将导致 A33 矛盾), A33=6, 而 A11=1 或 3 都将导致 A21 矛盾。

如果 A22=8, 则 A12=4, A23 只能是 7(A23=9 将导致 A33=8 矛盾), A33 只能是 6, A11 只能是 3(A11=5 将导致 A21 矛盾), A21=6 矛盾。

因此, A22 只可能为 6。

实际上, 当 A22=6 时, A12=3, A23 只能为 7(A23=5 将最终导致矛盾), A33=8。此时, A11、A21、A31 可能分别是 2、4、5, 也可能是 4、2、1。

【答案】C。

3. 【2012 年题 4 解析】

用函数曲线来表示事物随时间变化的规律十分常见。我们可以用函数 $f(t)$ 表示肿瘤细胞数量随时间变化的函数。那么, 当肿瘤细胞数目超过 10^{11} 时才是临床可观察的, 可以表示为 $f(0)=10^{11}$ 。在肿瘤生长初期, 几乎每隔一定时间就会观测到肿瘤细胞数量翻一番, 可以表示为 $t < t_0$ 时, $f(t+c)=2f(t)$ 。符合这种规律的函数是指数函数: $f(t)=at$, 其曲线段呈凹形上升态。在肿瘤生长后期, 肿瘤细胞的数目趋向某个稳定值, 表示当 $t > T$ 时, $f(t)$ 逐渐逼近某个常数, 即函数曲线从下往上逐渐靠近直线 $y=L$ 。

A 选项, 可以看出增加倍数依次减少。

B 选项, 最后没有趋于稳定值。

C 选项, 每隔一段时间翻倍, 是 2,4,8,16,32 这种, 不是线性。

【答案】D。

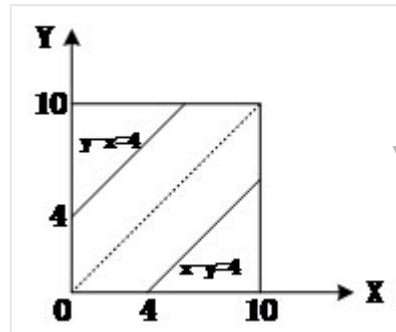
4. 【2013 年题 41 解析】

本题考查数学应用能力（概率）。

设 1 路和 2 路公交车将分别在 x 和 y 分钟内到达该站，则 x 和 y 是在 $[0, 10]$ 内独立均匀分布的随机变量。本题需要计算 $|x-y| \leq 4$ 的概率。

平面上的点 (x, y) 必然在正方形 $[0, 10; 0, 10]$ 内均匀分布。 $|x-y| \leq 4$ 的概率应当等于该正方形中 $|x-y| \leq 4$ 的部分面积的比例。

该正方形的面积为 100，其中 $|x-y| \leq 4$ 部分的面积为 64（如下图），



因此， $|x-y| \leq 4$ 的概率为 0.64。

5. 【2015 年题 47 解析】

方案①②③④⑤⑦的畅通概率为：

$$(1-0.2) \times (1-0.6) \times (1-0.1) \times (1-0.4) \times (1-0.25) = 0.1296$$

方案①②③④⑥⑦的畅通概率为：

$$(1-0.2) \times (1-0.6) \times (1-0.1) \times (1-0.35) \times (1-0.5) = 0.0936$$

方案①②③⑤⑦的畅通概率为：

$$(1-0.2) \times (1-0.6) \times (1-0.3) \times (1-0.25) = 0.168$$

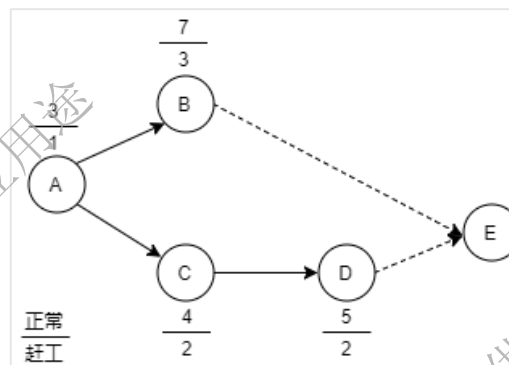
方案①②④⑥⑦的畅通概率为：

$$(1-0.2) \times (1-0.8) \times (1-0.35) \times (1-0.5) = 0.052$$

【答案】：C。

6. 【2015 年题 44 解析】

根据题意，作图如下：



正常作业：

总工期：12 天。

总费用： $(10+15+12+18)+12 \times 5=115$ 。

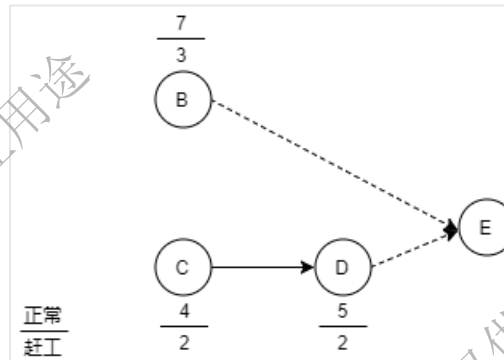
赶工进度中成本=赶工天数×“每天需增加直接费用/万元”。

(1)针对 A 作业，所有作业的起点，可单独分析：

正常费用： $3 \times 5+10=25$ ；

赶工费用: $2 \times 4 + 10 + 1 \times 5 = 23$; 所以 A 赶工费用减少, 可赶工。

(2) 针对 B、C、D 作业, 将 A 独立开来, 工程总费用最少, 则 B、C、D 作业总费用最少即可, 作业图如下:



不同的赶工方式可能影响到关键路径, 其中 B、C、D 作业直接费用: $15 + 12 + 18 = 45$ 。

假设 B 赶工天数为 x ($0 \leq x \leq 4$), C 赶工天数为 y ($0 \leq y \leq 2$), D 赶工天数为 z ($0 \leq z \leq 2$)。

则有下列关系式成立:

通过穷举法:

B 赶工 1 天, C 不赶工, D 赶工 3 天。此时关键路径长度为 6 天。

B、C、D 作业总花费 = $(1 \times 2 + 3 \times 2) + 6 \times 5 + 45 + 23 = 8 + 30 + 45 + 23 = 106$ 。

共工期: $1 + 6 = 7$ 。

【答案】A、A。