

## 习 题 课

(复变函数的导数与解析函数)

1. 求下列各题中点 $z$ 的集合, 并作图:

(1)  $|z-1|=|z+1|$

(2)  $|z+i|=2$

(3)  $|z-2i|=|z+2|$

(4)  $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$

2. 计算函数值及主值:

(1)  $(-3)^{\sqrt{5}}$

(2)  $e^{\frac{2-\pi i}{3}}$

(3)  $(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{1+i}$

(4)  $\operatorname{Ln}(-3)$

3. 解方程:

(1)  $z^2-4iz-(4-9i)=0$

(2)  $e^z-1-\sqrt{3}i=0$

4. 讨论下列函数的可导性与解析性:

(1)  $f(z)=\begin{cases} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}, z=0$

(2)  $f(z)=|z^2|, z=0$

(3)  $f(z)=3x^3+3y^3i$

(4)  $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$

5. 设  $my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$  为解析函数, 试求  $l, m, n$ 。

6. 已知  $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$ , 求解析函数  $f(z) = u + iv$ , 并满足  $f(0) = 0$ 。

7. 证明函数  $f(z) = e^{z^2}$  在全平面 (复平面) 上是解析的, 并证明  $f'(z) = 2ze^{z^2}$ 。

8. 如果  $f(z) = u + iv$  是  $z$  的解析函数, 证明

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} |f(z)| \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} |f(z)| \right)^2 = |f'(z)|^2.$$

9. 由下列各个条件求出解析函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , (要求用复变量  $z$  表示)

(1)  $u(x, y) = x^2 + xy - y^2, f(i) = -1 + i.$

(2)  $u(x, y) + v(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2x - 2y.$