

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

09高A下期末试卷

一. 填空题(本题共 9 小题, 每小题 4 分, 满分 36 分)

1. 将 $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x^2+y^2+z^2) dz$ (其中 $f(t)$ 为连续函数) 写成球面坐标系下的三次积分 _____;

2. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程为 _____;

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 且以 2π 为周期, $S(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数, 则 $S(3\pi) =$ _____, $S(-2\pi) =$ _____;

4. 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 为某个二元函数 $f(x, y)$ 的全微分, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;

5. 设 C 为圆周 $|z| = 2$, 取逆时针方向, 则 $\oint_C \frac{1}{(z+i)(z-4)} dz =$ _____;

6. 留数 $\text{Res} \left[\frac{\ln(1+2z)}{1-\cos z}, 0 \right] =$ _____;

7. 设 $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则散度 $\text{div}(\mathbf{e}^r \mathbf{r}) =$ _____;

8. 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 下侧, 则 $\iint_{\Sigma} 3x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + (z-1) dx \wedge dy =$ _____;

9. 设 $F(t) = \iint_{x+y \leq t} f(x, y) dx dy$, 其中 $f(x, y) = \begin{cases} x, & y \geq x^2 \text{ 且 } x \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 $F(2) =$ _____.

二. 计算下列各题(本题共 4 小题, 每小题 7 分, 满分 28 分)

10. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $ze^z = xe^y + ye^x$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

11. 计算 $\int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\sqrt{2}}^2 e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2} dx$.

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

12. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \left(\frac{17}{9}\right)^{n-1}$ 的敛散性.

13. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\ln n}}{n} x^n$ 的收敛域. (注: 级数若在收敛区间的端点处收敛, 须说明是绝对收敛还是条件收敛.)

三 (14). (本题满分 7 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成正弦级数, 并写出它的和函数.

四(15). (本题满分 7 分) 将函数 $f(z) = \frac{2+z}{(1-z)^2}$ 在圆环域 $2 < |z+1| < +\infty$ 内展开为 Laurent 级数.

五 (16) (本题满分 7 分) 计算 $\oint_C \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$, 方向为逆时针.

六 (17) (本题满分 8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n(2n-1)}\right) x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$,

并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n(2n-1)}\right) \frac{1}{2^n}$ 的和.

七 (18) (本题满分 7 分) 计算由柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 、锥面 $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 xOy 平面所围立体的表面积.