03高数AB期末试卷答案

一、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分） 1． C 2． B 3． D 4． C

二、（每小题 3 分，共 18 分） 1． $e^{\frac{1}{2}}$； 2． $-\dfrac{1}{x^2+1}-2\sin x\cdot f\cdot f'\cdot e^{f^2(\cos x)}$； 3． $\alpha>2$；

4． $(-2,0)\cup(2,+\infty)$ ，$(-\infty,-2)\cup(0,2)$； 5． $(2,2e^{-2})$； 6． $C_1+(C_2+C_3x)e^{-2x}$

三、（每小题 6 分，共 36 分）

1． $\dfrac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$； 2． $\dfrac{1}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{12}\tan^3 x-\dfrac{1}{4}\tan x+C$；

3． $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}e^{-2}$ ； 4． $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ ； 5． -2； 6． 解为 $y^2=x^2(\ln|x|+C)$ 。

四、所求特解 $y=2e^x-2e^{2x}+(x^2+2x)e^x$.

五、$V=\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{2\pi}{3}$.

六、$m=\dfrac{44}{3}\rho$.

七、 由 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\eta)x^2=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\eta)x^2$（$\eta$ 在 0 与 x 之间）知

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}[f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\eta)x^2]dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx$；又因 $f''\in C$，所以 f'' 在 $[-a,a]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，于是 $mx^2\le f''(\eta)x^2\le Mx^2$ $(x\in[-a,a])$, 所以

$\int_{-a}^{a}mx^2dx\le\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx\le\int_{-a}^{a}Mx^2dx\Rightarrow\frac{2}{3}a^3m\le\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx\le\frac{2}{3}a^3M$，由推广的**积分中值**定理知，$\exists\xi\in[-a,a]$ 使得 $\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx=\frac{2}{3}a^3f''(\xi)$，即 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{a^3}{3}f''(\xi)$.

Note：还有别的解法。如“变动的观点”，构造函数 $F(x)=\int_{-a}^{x}f(t)dt$，原问题等价于证：$\exists\xi\in[-a,a]$，使 $F(a)=\dfrac{a^3}{3}F'''(\xi)$.