07-08-3 期末高数 B 08.6.20

姓名________ 学号________

密 封 线

一. 填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 3 6 分)

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域为__________；

2. 设 $z=y^2+f(x^2-y^2)$，其中 $f(u)$ 可微， 则 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}$=_____；

3. 曲线 $\begin{cases}x+y+z=4\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的法平面方程是________；

4. 设 C 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4z\\ z=1\end{cases}$，则曲线积分 $\oint_c x^2+y^2+z^2ds$=________；

5. 交换二次积分的次序 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$=_____________________________；

6. 三次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$ 的值是 ______；

7. 散度 $\mathrm{div}\left(x^3\mathbf{i}+y\cos(y-2z)\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)\Big|_{(2,0,\pi)}=$____________；

8. 已知第二型曲线积分 $\int_A^B(x^4+4xy^n)\mathrm{d}x+(6x^{n-1}y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则 n=_____；

9. 平面 $5x+4y+3z=1$ 被椭圆柱面 $4x^2+9y^2=1$ 所截的有限部分的面积为___________.

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分)

10. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xy+yz+xz=1$ 所确定的隐函数， $x+y\neq 0$，试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11．计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域$D=\left\{(x,y)\middle|2y\le x^2+y^2\le 4y\right\}$.

12．设立体Ω由曲面$x^2+y^2-z^2=1$及平面$z=0,z=\sqrt{3}$围成，密度$\rho=1$，求它对z轴的转动惯量.

13. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$，$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$上满足$0<h\le z\le R$的部分.

三（14）．（本题满分 8 分）求函数 $f(x,y)=x-x^2-y^2$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|2x^2+y^2\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

四（15）。（本题满分 8 分）计算 $\iint\limits_S (z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ ，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

五（16）．（本题满分 7 分）计算 $I=\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y$，其中 C 是由点 $B(1+\pi,0)$ 沿曲线 $y=\sin(x-1)$ 到点 $A(1,0)$ 的一段弧.

六（17）（本题满分 7 分）设$a_1=1,a_2=2$，当$n\ge 3$时，有$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，

（1） 证明不等式$0<\dfrac{3}{2}a_{n-1}<a_n<2a_{n-1}, n\ge 4$；

（2） 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$收敛，且满足不等式$2\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}\le\dfrac{5}{2}$.

七（18）（本题满分 6 分）设C是圆周$x^2+y^2=x+y$，取逆时针方向，连续函数$f(u)>0$，

证明

$$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\ge\pi$$