05高A下期末试卷

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. 交换积分次序：$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy =$______________________________。

2. 曲面 $e^z + z + xy = 3$ 在点 $M(2,1,0)$ 处的切平面方程为______________________。

3. 向量场 $\mathbf{A} = 3x^2yz^2\mathbf{i} + 4xy^2z^2\mathbf{j} + 2xyz^3\mathbf{k}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的散度 $\mathrm{div}\mathbf{A} =$___________。

4. 已知曲线积分 $\int_L \left(e^x\cos y + yf(x)\right)dx + \left(x^3 - e^x\sin y\right)dy$ 与路径无关，则 $f(x) =$___。

5. 已知微分式 $dz = \left(2xy + 3x^2\right)dx + \left(x^2 + 3y^2\right)dy$，则其原函数 $z =$_________________。

6. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1}$ 的收敛半径 $R =$___。

7. 将函数 $f(x) = \begin{cases} 1\ , & 0 \le x < 1 \\ x+1, & 1 \le x < \pi \end{cases}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开为正弦级数，其和函数 $S(x)$ 在 $x=-1$ 处

的函数值 $S(-1) =$_________________。

8. 设 C 为正向圆周：$|z| = 1$，则 $\oint_C \frac{\sin z}{z^2}dz =$____________。

9. 设 $f(z)$ 在 z 平面上解析，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则对任一正整数 k，函数 $\frac{f(z)}{z^k}$ 在点 $z=0$

的留数 $\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{z^k};0\right] =$_________。

二. 计算下列各题（本题共 4 小题，满分 33 分）

10.（本题满分 7 分） 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $x^2 + y^2 = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定，其中 φ 为可微函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

11.（本题满分 7 分） 将函数 $f(x) = \ln\left(2x - x^2\right)$ 展开为 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛域。

12.（本题满分 10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{n+1}x^{n+1}$的收敛域及和函数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$的和。

13.（本题满分 9 分）计算第二型曲线积分：$I=\int\limits_L x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y$，

其中L是从点$A(2,1)$沿曲线$y=\sqrt{x-1}$到点$B(1,0)$的一段。

三（14）.（本题满分 9 分）试就x在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上的不同取值，讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$的敛散性；当级数收敛时，判别其是绝对收敛，还是条件收敛？

四（15）.（本题满分 10 分）将函数$f(z)=\frac{1}{z^2(1+z)}$分别在圆环域（1）$1<|z|<+\infty$；（2）$1<|z-1|<2$内展开成 Laurent 级数。

五（16）.（本题满分 6 分）证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$收敛。

六（17）.（本题满分 6 分）计算第二型曲面积分：

$$\iint\limits_S\left(yf(x,y,z)+x\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(xf(x,y,z)+y\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(2xyf(x,y,z)+z\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中S是曲面$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$介于平面$z=2$与平面$z=8$之间的部分，取上侧，$f(x,y,z)$为连续函数。