一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} e^{t^2}\sin t\,dt}{x^2\tan^2 x} = \underline{\dfrac{1}{2}}$；

2. 设常数 $k>0$，则方程 $\dfrac{\ln x}{x}+k=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数为 $\underline{1}$；

3. 曲线 $\begin{cases} x=\sec t \\ y=e^{4t-\pi} \end{cases}$ 在点 $(x,y)=(\sqrt{2},1)$ 处的切线方程是 $\underline{y=2\sqrt{2}x-3}$；

4. 设 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，则 $f'(x)$ 的间断点是 $\underline{x=\pm 1}$，其类型 $\underline{\text{第一类}}$；

5. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $f(x)=\underline{0}$；

6. $\int_0^{2\pi}(\sin^3 x\cdot e^{\cos x}+\sin^4\dfrac{x}{2})dx=\underline{\dfrac{3}{4}\pi}$；

7. 曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率 $k=\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$；

8. $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+e^x}=\underline{\ln 2}$；

9. 微分方程 $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$ 的通解为 $\underline{x=\dfrac{1}{2}\ln y+\dfrac{C}{\ln y}}$。

二. 计算下列各积分（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

1. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx$ $\qquad = 1$

2. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+2}}$ $\qquad = \frac{4}{3}\ln(\sqrt{x+2}+2)+\frac{2}{3}\ln(\sqrt{x+2}-1)+C$

3. $\int \frac{2\sin x - x}{1+\cos x}dx$

$$=\int \frac{2\sin x}{1+\cos x}dx-\int \frac{x}{1+\cos x}dx=-2\ln(1+\cos x)-\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=-2\ln(1+\cos x)-\int x d\tan\frac{x}{2}=-2\ln(1+\cos x)-x\tan\frac{x}{2}-2\ln\cos\frac{x}{2}+C$$

4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \arctan e^x dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x\arctan e^x+\cos(-x)\arctan e^{-x})dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x(\arctan e^x+\arctan e^{-x})dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2014$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx$。

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^n f(t)dt}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1}=2014$$

三. **（本题满分 6 分）** 设方程 $x^y+\sin\pi x+y=0$ 确定了 $x=1$ 附近的一个二阶可导的隐函数 $y=y(x)$，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$

$$e^{y\ln x}+\sin\pi x+y=0,\quad x=1\Rightarrow y=-1$$

$$e^{y\ln x}(y'\ln x+\frac{y}{x})+\pi\cos\pi x+y'=0\quad\Rightarrow y'|_{x=1}=1+\pi$$

$$\cdots\cdots\qquad\Rightarrow y''|_{x=1}=-2(\pi+2)$$

四．（本题满分 6 分） 设 $f(x)=a|\cos x|+b|\sin x|$ 在$x=-\dfrac{\pi}{3}$处取得极小值，且 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=2(\sqrt{3}+\pi)$，求常数$a$和$b$。

$$\text{在}x=-\frac{\pi}{3}\text{附近，}f(x)=a\cos x-b\sin x,\text{由}f'(-\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow b=\sqrt{3}a\quad(1)$$

$$\because f(x)\text{为偶},\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos x+b\sin x)^2dx$$

$$=2[\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)+ab]=2(\sqrt{3}+\pi)\quad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow a=\pm1,b=\pm\sqrt{3}$$

$$\because x=-\frac{\pi}{3}\text{为极小点，}f''(-\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}(a+\sqrt{3}b)>0,\therefore a=-1,b=-\sqrt{3}$$

五．（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 为二阶可导函数，且满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$。试求函数 $f(x)$。

$$\text{方程：}f''(x)+f(x)=-\sin x,f(0)=0,f'(0)=1$$

$$\text{通解为 }f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$

$$\text{特解为}f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$$

六．（本题满分 9 分）

（1）求由曲线 $y=x^2$与$y=\sin(\dfrac{\pi}{2}x)$ 围成的平面图形 D 的面积；

（2）求（1）中平面图形 D 绕直线 $y=1$ 旋转而成的旋转体的体积。

$$A=\int_0^1(\sin\frac{\pi}{2}x-x^2)dx=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}$$

$$V=V_{\text{大}}-V_{\text{小}}=\pi\int_0^1(1-x^2)^2dx-\pi\int_0^1(1-\sin\frac{\pi}{2}x)^2dx=4-\frac{29}{30}\pi$$