

东南大学学生会 Students' Union of Southeast University

02-03-2高数AB期末试卷

一 填空题

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan x)^{3 \cot x} =$ _____。

2、曲线 $y = e^{2x}$ 上点_____出的切线通过原点。

3、若 $y = (x+1)^{\sin 2x}$ ，则 $y' =$ _____。

4、若 $\int \frac{f(x)}{x} dx = \arctan x + C$ ，则 $\int f(x) dx =$ _____。

5、 $\int_{-2}^2 \frac{\sin^5 x + x^2}{x^2 + 1} dx =$ _____。

6、微分方程 $xy' = y \ln y$ 满足条件 $y|_{x=1} = e$ 的特解是_____。

二 选择题

1、若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + ax - b) = 0$ ，则 ()

(A) $\begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

(B) $\begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

(C) $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

(D) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

2、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin 2x$ ，则 $\int xf'(x) dx =$ ()

(A) $2x \sin 2x - \cos 2x + C$

(B) $2x \sin 2x + \cos 2x + C$

(C) $x \sin 2x - \cos 2x + C$

(D) $x \sin 2x + \cos 2x + C$

3、设 $f'(x)$ 连续， $f(0) = 0, f'(0) \neq 0, F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$ ，若当 $x \rightarrow 0$ 时， $F'(x)$ 与 x^k

是同阶的无穷小，则 $k =$ ()

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1

4、圆 $r = \sqrt{2} \sin \theta$ 与双纽线 $r^2 = \cos 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 所围成的平面图形的面积可表示为 ()

(A) $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos 2\theta} - \sqrt{2} \sin \theta)^2 d\theta$

(B) $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta - 2 \sin^2 \theta) d\theta$

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

$$(C) \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{\cos 2\theta} - \sqrt{2} \sin \theta)^2 d\theta$$

$$(D) \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sqrt{2} \sin \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$$

三、计算题

$$1、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^2 \sin x}$$

$$2、\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

$$3、\text{设} \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \int_0^t \frac{u^2}{1+u^2} du \end{cases}, \text{求} \frac{dy}{dx} \text{及} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$4、\text{设} f(x) \text{具有二阶连续导数, 且满足关系式} f'(x) + \int_0^x f(x-t) dt = e^t, \text{又} f(0) = \frac{1}{2}, \text{求} f(x).$$

$$5、\text{计算积分} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$6、\text{计算积分} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$$

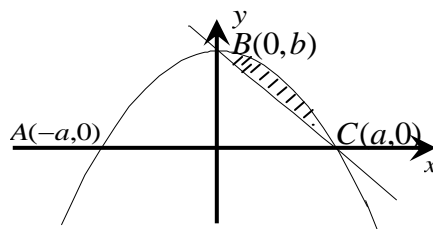
四、求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$ 的特解。

五、设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$, 令 $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ 。

(1) 求 $\varphi'(x)$

(2) 讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

六、已知抛物线过三点 $A(-a, 0), B(0, b), C(a, 0)$, 又 $a+b=3$, 问 a, b 取何值时, 图中阴影部分绕 Ox 轴旋转所成的旋转体的体积最大。



七、设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) = \frac{1}{e^x + |f(x)|} (x \geq 0)$, 又 $f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$,

试证: $1 \leq A \leq 1 + \ln 2$