01-02几代B答案

一 (30%) 填空题:

1. 设 $\alpha = (1, 2)$, $\beta = (1, -1)$, 则 $\alpha\beta^T = \underline{-1}$; $\alpha^T\beta = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}$; $(\alpha^T\beta)^{100} = \underline{-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}$.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, 则行列式 $|AB^{-1}| = \underline{-1/70}$.

3. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则当参数 $k \underline{\neq 1}$ 时, $\alpha_1-\alpha_2, k\alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$ 也线性无关.

4. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 $A^* = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$.

5. 设矩阵 A 及 $A+E$ 均可逆, 且 $G = E-(A+E)^{-1}$ (其中 E 表示单位矩阵), 则 $G^{-1} = \underline{E+A^{-1}}$.

6. 与向量 $\alpha = (1, 0, 1)$, $\beta = (1, 1, 1)$ 均正交的单位向量为 $\underline{\pm(-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)}$.

7. 四点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, 1, x)$, $C(2, 1, 1)$, $D(2, y, 3)$ 共面的充分必要条件是 $\underline{x = 1 \text{ 或 } y = 1}$.

8. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + kx_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$, 则当 k 满足条件 $\underline{k > 1}$ 时, 为 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是椭球面; 则当 k 满足条件 $\underline{k = 1}$ 时, 为 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是柱面.

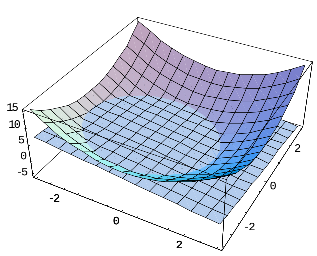
二 (8%)

记 π_1 为由曲线 $\begin{cases} z = y^2 - 3 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z-轴旋转所产生的旋转曲面, π_2 为以 π_1 与平面 π_3: $x + y + z = 1$ 的交线为准线, 母线平行于 z-轴的柱面. 试给出曲面 π_1 及 π_2 的方程, 并画出 π_1 被 π_3 所截有界部分在 xOy 平面上的投影区域的草图(应标明区域边界与坐标轴的交点).

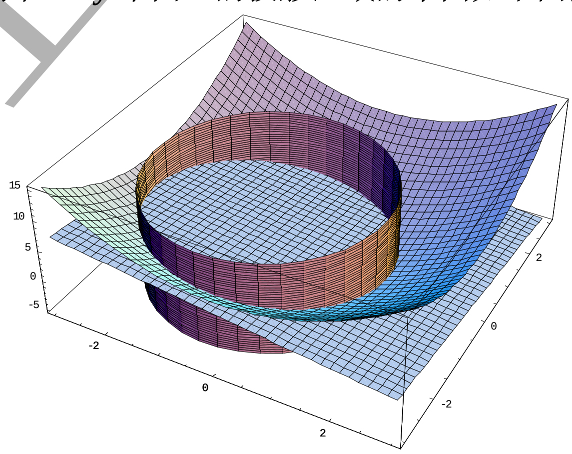
解: π_1 的方程为 $z = x^2 + y^2 - 3$. 联立 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, 消去 z 得 π_2 的方程: $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$.

π_2 在 xOy 平面上的投影曲线的方程为 $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{2}$.

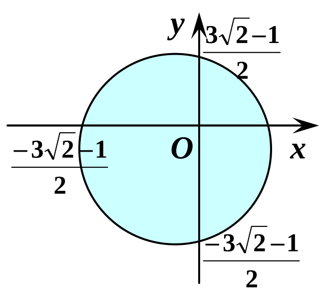
π_1 被 π_3 所截有界部分在 xOy 平面上的投影区域的草图如下面的右图所示:



π_1 与 π_3



π_1, π_2, π_3



所求的投影区域

三 (8%) 求经过直线 $\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$ 且与 xOy 平面垂直的平面方程.

解: (法一) 设所求的平面方程为 $(x+2y-z-2)+\lambda(-x+y-2z-1)=0$, 即

$$(1-\lambda)x+(2+\lambda)y-(1+2\lambda)z-(2+\lambda)=0$$

因为它与 xOy 平面垂直, 所以其法向量 $\{(1-\lambda), (2+\lambda), (1+2\lambda)\}$ 与向量 $\{0, 0, 1\}$ 垂直.

因而 $1+2\lambda=0$, 即 $\lambda=-1/2$. 于是得所求平面的方程: $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$, 化简得:

$$x+y=1.$$

(法二) 直线 $\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$ 的方向向量可取为 $\left\{\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\-2 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{-3, 3, 3\}$.

所求平面的法向量应垂直于 $\{-3, 3, 3\}$ 和 $\{0, 0, 1\}$, 因而可取为

$$\left\{\begin{vmatrix}3 & 3\\0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -3\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-3 & 3\\0 & 0\end{vmatrix}\right\}=\{3, 3, 0\}.$$

在直线 $\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$ 上取一点 $(0, 1, 0)$, 由此可得所求平面的方程: $3x+3(y-1)=0$. 化简得:

$$x+y=1.$$

(法三) 所求平面为直线 $\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$ 到 xOy 平面上的投影平面. 因而从 $\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$ 中消去 z, 得 $x+y=1$. 这就是所求平面的方程.

四 (12%) 求矩阵方程 $XA=2X+B$ 的解, 其中 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\3 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

解: (法一) 原方程可化为 $X(A-2E)=B$, 其中 E 表示单位矩阵. $A-2E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

$A-2E$ 的行列式 $|A-2E|=-1$, 伴随矩阵 $(A-2E)^*=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

因而 $(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

于是 $X=B(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\3 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\3 & 1 & -4\end{bmatrix}$.

(注意 X 未必等于 $(A-2E)^{-1}B$!)

(法二) 原方程可化为 $X(A-2E)=B$, 其中 E 表示单位矩阵. $A-2E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix}A-2E\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1\\3 & 2 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -1 & 2\\3 & 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E\\B(A-2E)^{-1}\end{bmatrix}.$$

于是 $X=B(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\3 & 1 & -4\end{bmatrix}$.

五 (12%) 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2+5x_3+5x_4=2 \\ -x_2+px_3-2x_4=q \\ 3x_1+2x_2+x_3+(p+3)x_4=-1 \end{cases}$.

1. 问: 当参数 p, q 满足什么条件时, 方程组无解; 有唯一解; 有无穷多解?
2. 当方程组有无穷多解时, 求出其通解.

解: $[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & p & -2 & q \\ 3 & 2 & 1 & p+3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \end{array}\right] = [\tilde{A}, \tilde{b}]$.

由此可见, 当参数 $p = -2$ 且 $q \neq -1$ 时, 秩$(A) = 2$, 而秩$[A, b] = 3$, 此时方程组无解;
当参数 $p \neq -2$ 时, 秩$(A) = 4$, 此时方程组有唯一解;
当参数 $p = -2$ 且 $q = -1$ 时, 秩$(A) =$ 秩$[A, b] = 2$, 此时方程组无穷多解,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times(-1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可得方程组的通解 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_3 = x_3(\text{自由未知量}) \\ x_4 = x_4(\text{自由未知量}) \end{cases}$,

即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c_1, c_2 为任意数).

六 (12%) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & k & -2 \end{bmatrix}$. 已知秩$(A) = 2$.

1. 求参数 k 的值;
2. 求一个 4×2 矩阵 B, 使得 $AB = O$, 且秩$(B) = 2$;
3. 问是否存在秩大于 2 的矩阵 M 使得 $AM = O$? 为什么?

解: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & k & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$.

因为秩$(A) = 2$, 所以参数 $k = 0$. 此时可得齐次线性方程组 $Ax = \theta$的一个基础解系:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是可取矩阵 $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = O$, 且秩$(B) = 2$.

由于任何一个满足 $AM = O$ 的矩阵 M 的列向量组都可以由ξ_1, ξ_2线性表示, 所以这样的矩阵 M 的秩一定≤ 2. 因而不存在秩大于 2 的矩阵 M 使得 $AM = O$.

七 (12%) 设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似.

1. 求参数 k, l 的值;
2. 求一正交阵 Q, 使得 $Q^{T}AQ = B$.

解: 1. 因为实对称矩阵 A 与 B 相似, 所以 $-k = |A| = |B| = l$ 且 $k =$ 迹$(A) =$ 迹$(B) = 2+l$.
由此可得 $k = 1, l = -1$.

2. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$,

由$(E-A)x = \theta$可得 A 的对应于$\lambda = 1$ 的两个特征向量$\xi_1 = [1, 0, 1]^T$, $\xi_2 = [0, 1, 0]^T$,
由$(-E-A)x = \theta$可得 A 的对应于$\lambda = -1$ 的一个特征向量$\xi_3 = [1, 0, -1]^T$,

令 $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, 则 Q 为正交阵且 $Q^{T}AQ = B$.

八 (6%) 已知 n 阶方阵 A 相似于对角阵, 并且 A 的特征向量均是矩阵 B 的特征向量.
证明: $AB = BA$.

证明: 因为 n 阶方阵 A 相似于对角阵, 所以 A 有 n 个线性无关的特征向量, 设为 $p_1, p_2, \ldots, p_n$, 对应的特征值设为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
又因为 A 的特征向量均是矩阵 B 的特征向量, 所以 B 也有 n 个线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \ldots, p_n$, 对应的特征值设为 $t_1, t_2, \ldots, t_n$. (注意 A 与 B 的特征值未必相等!)

令 $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$.

则 $AP = P\Lambda$, $BP = PT$, $\Lambda T = T\Lambda$.
于是 $AB = (P\Lambda P^{-1})(PTP^{-1}) = P\Lambda TP^{-1} = PT\Lambda P^{-1} = (PTP^{-1})(P\Lambda P^{-1}) = BA$.