07-08-3 高数 A 期中试卷参考答案

一. 填空题(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 2 5 分)

1. 交换二次积分的次序 $\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y=$________；

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x^2-y^2,y^2-z^2)=0$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 是可微函数，且 $zF_v\neq 0$，则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_；

3. 二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_；

4. 曲线 $\begin{cases} y^2=x-1, \\ z=x^2+y^2, \end{cases}$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切线方程为______；

5. 设曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases}$，则曲线积分 $\int_L \dfrac{z^2+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}s=$_ .

二. 单项选择题(本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分)

6. $\left(-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ 的主值为 [ ]

(A) $\mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)-\mathrm{i}\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)\right)$ (B) $\mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)\right)$

(C) $\mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)-\mathrm{i}\sin\left(2\sqrt{2}\pi\right)\right)$ (D) $\mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\sqrt{2}\pi\right)\right)$

7. 设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V,\Omega: x^2+y^2+z^2\le 4z$， f 为连续函数，则 $I=$ [ ]

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta} f\left(r^2\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r$ (B) $2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta} f\left(r^2\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r$

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta} f\left(r^2\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r$ (D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta} f\left(r^2\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r$

8. 设 $z=f\left(\dfrac{x}{y},y\mathrm{e}^x\right)$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ [ ]

(A) $-\dfrac{x}{y^3}f_{11}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{y}(1-x)f_{12}+y\mathrm{e}^{2x}f_{22}-\dfrac{1}{y^2}f_1+\mathrm{e}^x f_2$ (B) $\dfrac{x}{y^3}f_{11}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{y}(1-x)f_{12}+y\mathrm{e}^{2x}f_{22}$

(C) $\dfrac{x}{y^3}f_{11}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{y}f_{12}+y\mathrm{e}^{2x}f_{22}-\dfrac{1}{y^2}f_1$ (D) $\dfrac{x}{y^3}f_{11}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{y}f_{12}+y\mathrm{e}^{2x}f_{22}+\mathrm{e}^x f_2$

9. 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $f(1,1)=2$，$f_x(m,n)=m+n$，$f_y(m,n)=m\cdot n$，令 $g(x)=f(x,f(x,x))$，则 $g'(1)=$ [ ]

（A）3 （B）6 （C）9 （D）12

三．计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 9 分，满分 36 分）

10．计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\sqrt{2y-y^2}\right\}$.

11．求函数 $u(x,y,z)=\int_z^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿曲面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{6}=1$ 在该点处的法线方向的方向导数.

12．计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega(xy^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是由旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 围成的空间闭区域.

13．计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma\dfrac{x^2+y^2+R^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}A$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 含在圆柱面 $x^2+y^2-Ry=0\ (R>0)$ 内的部分.

四（14）．（本题满分 8 分） 设曲线段 $L:y=x^2(0\le x\le1)$ 上任意一点 (x,y) 处的线密度函数 $\mu=12x$，求该曲线段的质量.

五（15）。（本题满分 8 分） 已知曲线 $C:\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y+z=4\end{cases}$，求 C 上距离原点最远的点和最近的点，并求最远距离和最近距离.

六（16）．（本题满分 7 分） 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数，其中实部与虚部的乘积满足 $u(x,y)\cdot v(x,y)=2xy\left(x^2-y^2\right)$，试求 $f^2(z)$ 的表达式（必须用变量 z 表示）.