05-06-3高数A期末试卷

一．填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1．交换积分次序：$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y =$ __________________；

2．曲面 $\mathrm{e}^z + z + xy = 3$ 在点 $M(2,1,0)$ 处的切平面方程为________________；

3．向量场 $\mathbf{A} = 3x^2yz^2\mathbf{i} + 4xy^2z^2\mathbf{j} + 2xyz^3\mathbf{k}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的散度 $\mathrm{div}\mathbf{A} =$ ________；

4．已知曲线积分 $\int_L \left(\mathrm{e}^x \cos y + yf(x)\right)\mathrm{d}x + \left(x^3 - \mathrm{e}^x \sin y\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则 $f(x) =$ ___；

5．已知微分式 $\mathrm{d}z = \left(2xy + 3x^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 + 3y^2\right)\mathrm{d}y$，则其原函数 $z =$ __________；

6．若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x = 2$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x+1)^{n-1}$ 的收敛半径 $R =$ ___；

7．将函数 $f(x) = \begin{cases} 1 \ , & 0 \le x < 1 \\ x+1, & 1 \le x < \pi \end{cases}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开为正弦级数，其和函数 $S(x)$ 在 $x = -1$ 处的函数值 $S(-1) =$ __________；

8．设 C 为正向圆周：$|z| = 1$，则 $\oint_C \frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z =$ ________；

9．设 $f(z)$ 在 z 平面上解析，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则对任一正整数 k，函数 $\frac{f(z)}{z^k}$ 在点 $z = 0$ 的留数 $\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{z^k};0\right] =$ ________。

二. 计算下列各题（本题共 4 小题，满分 33 分）

10．**（本题满分 7 分）** 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $x^2 + y^2 = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定，其中 φ 为可微函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

11.（本题满分 7 分） 将函数 $f(x)=\ln\left(2x-x^2\right)$ 展开为 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛域。

12.（本题满分 10 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 3^n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ 的和。

13.（本题满分 9 分） 计算第二型曲线积分：$I=\int\limits_L x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $A(2,1)$ 沿曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 到点 $B(1,0)$ 的一段。

三（14）.（本题满分 9 分） 试就 x 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的不同取值，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}$ 的敛散性；当级数收敛时，判别其是绝对收敛，还是条件收敛？

四（15）.（本题满分 10 分） 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1+z)}$ 分别在圆环域（1）$1<|z|<+\infty$；（2）$1<|z-1|<2$ 内展开成罗朗级数。

五（16）.（本题满分 6 分） 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\dfrac{n+1}{n}}\right)$ 收敛。

六（17）.（本题满分 6 分） 计算第二型曲面积分：

$$\iint\limits_S \left(yf(x,y,z)+x\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(xf(x,y,z)+y\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(2xyf(x,y,z)+z\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中 S 是曲面 $z=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ 介于平面 $z=2$ 与平面 $z=8$ 之间的部分，取上侧，$f(x,y,z)$ 为连续函数。