2004级高等数学（A、B）（上）期中试卷

一. 填空题(每小题4分,共20分)

1. 设 $x\to 0$ 时， $e^{\sin^3 x}-1$ 与 x^n 是等价无穷小,则 $n=$________ .

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}, & x>0\\ a e^{x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$_______.

3. 设 $f(x)=x^2\cos x$,则 $f^{(10)}(0)=$___________.

4. 函数 $f(x)=2x-\ln(1+x)$ 在区间___________内单调减少.

5. 函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $x_0=1$ 处的带 *Lagrange* 余项的一阶 *Taylor* 公式为_____________

二. 选择题(每小题4分,共16分)

1. 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}\arctan\dfrac{1}{x}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的　　　　　　　　　　　　　　[　　]

(A) 连续点　　(B) 第一类(非可去)间断点　　(C) 可去间断点　　(D) 第二类间断点

2. 设 $f(x)=|x-2|g(x)$,且 $g(x)$ 在 $x=2$ 处连续, $g(x)\neq 0$,则 $f'(2)$　　　　　　　　　　[　　]

(A) $=g(2)$　　(B) $=-g(2)$　　(C) $=0$　　(D) 不存在

3. 函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为　　　　　　　　　　[　　]

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 设曲线 $y=\dfrac{2^{-x^2}+1}{2^{-x^2}-1}$,则该曲线　　　　　　　　　　[　　]

(A)有渐近线　　(B) 仅有水平渐近

(C) 仅有垂直渐近线　　(D) 既有水平渐近线，又有垂直渐近线

三. 计算题(每小题7分,共3 5分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}+\left(\dfrac{3-e^x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]$

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xe^{x+y}-\sin y^2=0$ 确定的隐函数,求 dy.

4. 设$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

5. 设函数$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & x<0; \\ ax^2+bx+c, & x \ge 0 \end{cases}$, 且$f''(0)$存在, 试确定常数$a,b,c$.

四.（8 分） 证明不等式： 当$x \ge 1$时， $(1+x)\ln(1+x) < 1 + x^2$.

五.（8 分） 求曲线$y = x^2 \quad (0 \le x \le 8)$的切线, 使切线与直线$y=0$及直线$x=8$所围成的图形的面积最大.

六.（7 分） 设$x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{4(1+x_n)}{4+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明数列$\{x_n\}$收敛, 并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

七.（6 分） 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 且$ab>0$, 证明：$\exists \xi,\eta \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{a^2+ab+b^2}{3\eta^2} f'(\eta).$$