10-11-2几代B答案

一. 填空(每空 2 分, 共 30 分)

1. 设向量$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 2, 2)$, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 则 $\boldsymbol{A}^{10} = $ $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 2^{10} & 2^{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 2^{10} \end{pmatrix}}$,

$\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = $ ____1____, $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}| = $ ____0____,

$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的夹角为 ____$\pi/3$____ , 若$\boldsymbol{\gamma}$ 是垂直于$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$的单位向量,

则$\boldsymbol{\gamma} = $ ____$\pm\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$____ .

2. 设平面π过点 $P(1, 0, -1)$且垂直于直线 l: $\begin{cases} x = t - 9, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t, \end{cases}$ 则平面π的方程为

____$x - 3y + 2z + 1 = 0$____, 直线l与平面π的交点坐标为____$(-8, -1, 2)$____.

3. 原点 O 到平面 $x + y - z + 3 = 0$ 的距离为 ____$\sqrt{3}$____ .

4. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, 则$\begin{pmatrix} 2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix}^{-1} = $ $\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}}$.

5.设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$线性相关, 则 $a = $ __1__, 这个向量组

的一个极大线性无关组是__$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$__.

6. 向量空间 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \middle| x - 2y + 3z = 0 \right\}$的一组基为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 或其它两个向量构成的与的之等价的向量组 ,

V 的维数 $\dim V = $ ____2____.

7.矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$中, ____$\boldsymbol{A}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$____ 与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$相似,

____$\boldsymbol{B}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$____ 与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$合同.

二. (6 分)计算行列式$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

解: $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \overset{r_i - r_1}{\underset{i=2,3,4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 & 2d+1 \\ 4a+4 & 4b+4 & 4c+4 & 4d+4 \\ 6a+9 & 6b+9 & 6c+9 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$\overset{r_3 - 2r_2}{\underset{r_4 - 3r_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 & 2d+1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

三. (8 分)设三个平面π_1: $x + 2y + z = 0$;　π_2: $2x + 5y + z = 1$;　π_3: $x - y + az = b$ 交于一条直线 l.

1. 求参数 a, b 的值.

解: 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$.

因为平面π_1, π_2, π_3交于一条直线, 所以 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = 2$.

故由$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & a-1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & b+3 \end{pmatrix}$

可见 $a - 4 = b + 3 = 0$, 即 $a = 4, b = -3$.

2. 求直线 l 的方向向量和对称方程.

解: 由$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$的通解$\begin{cases} x = -3t - 2, \\ y = t + 1, \\ z = t, \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$

可见直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s} = (-3, 1, 1)$, 对称方程为$\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$.

注: 也可以由$(1, 2, 1)\times(2, 5, 1) = (-3, 1, 1)$求 $\boldsymbol{s}$.

四. (8 分)设 3×2 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: 由 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}$ 得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

由$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$得 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

注: 也可以先求得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 再得 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

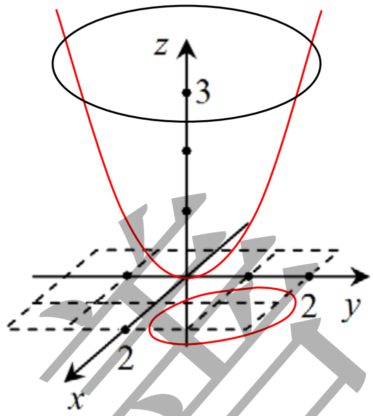
五. (8 分)设 S 为曲线 $\begin{cases} y^2 - z - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面.

1. 曲面S的方程为 $\underline{\quad x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \quad}$.

2. 设曲面 S 与平面 $2x + 2y - z - 2 = 0$ 的交线为 c. 求曲线 c 到 xOy 平面的投影柱面 S_1 和投影曲线 c_1 的方程.

解: 将 $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$ 与 $2x + 2y - z - 2 = 0$
相减并整理得$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
这就是投影柱面 S_1 的方程.
进而得投影曲线 c 的方程为
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

3. 在右边的坐标系中作出曲面 S 和曲线 c_1 的图形



六. (20 分)设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_2 = 2$.

2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征向量.

解: $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可见$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{A}$ 的对应于$\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $k\xi_1$ $(k \neq 0)$.

$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

可见$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.
故 $\boldsymbol{A}$ 的对应于$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的特征向量为 $k\xi_2$ $(k \neq 0)$.

3. $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵? 请说明理由.

答: $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵. 因为 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 但只有一个线性无关的特征向量与之对应. (另外, 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$能由$\xi_1, \xi_2$线性表示, 因而$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关, 可见 $\boldsymbol{A}$ 不可能有 3 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵.)

4. 若 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似, 求 x, y.

解: 若 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似, 则 $x + 2 + y = 5$, $2xy = 4$, 故 $x = 2, y = 1$, 或 $x = 1, y = 2$.
当 $x = 2, y = 1$ 时, $\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = 1$, $\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 2$, $\boldsymbol{B}$ 不与 $\boldsymbol{A}$ 相似;
当 $x = 1, y = 2$ 时, 设 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$, 由此可得
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = 2\boldsymbol{p}_2,\ (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}_3 = 3\boldsymbol{p}_2,$$
根据第 2 题的结果, 取 $\boldsymbol{p}_1 = \xi_1$, $\boldsymbol{p}_2 = \xi_2$ 及$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{p}_2$的一个特解 $\boldsymbol{p}_3 = (-3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ 的确成立. 因此 $x = 1, y = 2$.

5. 若$f(x) = x^2 - x - 1$, 则行列式$|f(\boldsymbol{A})| = \underline{\quad -1 \quad}$.

七. (10 分) 用**配方法**把二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + kz^2 + 4yz$ 化为标准形. 请写出所用的可逆线性变换, 并就参数 k 不同的取值范围, 讨论二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 的类型.

解: $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + kz^2 + 4yz = x^2 + 2(y+z)^2 + (k-2)z^2$.

令 $\begin{cases} u = x, \\ v = y + z, \\ w = z \end{cases}$ 则 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$f(x, y, z) = u^2 + 2v^2 + (k-2)w^2$.

由此可见:

当 $k < 2$ 时, 二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 为单叶双曲面;

当 $k = 2$ 时, 二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 为椭圆柱面;

当 $k > 2$ 时, 二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 为椭球面.

八. (10 分) 1. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解. 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的一个基础解系.

证明: 因为$\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,

所以 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的非零解. 因而$|\boldsymbol{A}| = 0$.

又因为 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零, 可见 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1$.

因而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的基础解系中只有一个解向量.

所以$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的一个基础解系.

(2) 存在不全为零的数 $k_1, k_2, ..., k_n$ 使得 $\boldsymbol{A}^* = (k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), ..., k_n(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2))$.

证明: 由上题知$|\boldsymbol{A}| = 0$. 于是 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 可见 $\boldsymbol{A}^*$的列向量都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的解.

又因为 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的一个基础解系, 且 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$,

所以存在不全为零的数 $k_1, k_2, ..., k_n$ 使得

$$\boldsymbol{A}^* = (k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), ..., k_n(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)).$$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实矩阵, 而且$\|\boldsymbol{A\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|$对于任意的 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$都成立. 证明: $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证一: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

由条件可知$\|\boldsymbol{\alpha}_i\| = \|\boldsymbol{Ae}_i\| = \|\boldsymbol{e}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, 且对于任意的 $1 \le i < j \le 3$, 有

$2 = \|\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j\|^2 = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j)\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2 + 2\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j + \|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2 = 2 + 2\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j$,

可见$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j = 0$.

综上所述, $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证二：由条件可知, 对于任意的 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = (\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \|\boldsymbol{A\alpha}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E\alpha}.$$

所以$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, $\forall\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $B = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵.

下证 $B = \mathbf{O}$. $\boldsymbol{b}_{ii} = \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ae}_j = \mathbf{0}$, $(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{b}_{ii} + \boldsymbol{b}_{jj} + 2\boldsymbol{b}_{ij} = \mathbf{0}$, **从而** $\boldsymbol{b}_{ij} = \mathbf{0}$.

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证三: 由条件可知, 对于任意的 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = (\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \|\boldsymbol{A\alpha}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E\alpha},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵.

可见 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$ 是同一个二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ex}$ 的矩阵,

因而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证四: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$. 由条件可知

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1x_1^2 + \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2x_2^2 + \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3x_3^2 + 2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2x_1x_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3x_1x_3 + 2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3x_2x_3$$

$= (\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \|\boldsymbol{A\alpha}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}$.

由$\boldsymbol{\alpha}$的任意性可知$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3 = 1$, $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$,

因而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证五： 由条件可知, 对于任意的 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = (\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \|\boldsymbol{A\alpha}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E\alpha},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵.

所以$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \forall\boldsymbol{\alpha}$.

可见二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$ 的矩阵为 O.

因而由惯性定理可知，存在可逆矩阵 P，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}$.

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证六： 由条件可知, 对于任意的 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = (\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \|\boldsymbol{A\alpha}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E\alpha}.$$

所以$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \forall\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵.

从而存在正交变换$\alpha=Qy$，使得 $f(\alpha)=\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A-E)\alpha = \lambda_1 y_1^{\ 2}+\lambda_2 y_2^{\ 2}+\lambda_3 y_3^{\ 2}= 0$,

注意到上式对于任意的 y 都成立，所以$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3= 0$.

因而存在正交矩阵 Q，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{O}$.

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证七：设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，则

$$\|A\alpha\|^2 = \|\alpha\|^2$$

$$\Rightarrow (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3)^2 + (a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3)^2 + (a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3)^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$\Rightarrow (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2)b_1^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2)b_2^2 + (a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2)b_3^2$$

$$+2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32})b_1b_2 + 2(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33})b_1b_3$$

$$+2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33})b_2b_3 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.