03-04-2几代B

一．（24%）填空题

1．若向量$\vec{\alpha}=\vec{i}+a\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{\beta}=b\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{\gamma}=\vec{k}$共面，则参数$a,b$满足______.

2．过点$P(1,2,1)$且包含x轴的平面方程为______.

3．已知矩阵A满足$A^2+2A-3I=O$，则A的逆矩阵$A^{-1}=$________.

4．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3&\\0&5&\\0&0&7\end{pmatrix}$，则行列式$\left|A^2B^{-1}\right|=$________.

5．设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}$，则当$k$___时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

6．向量空间R^2中向量$\eta=(2,3)$在R^2的基$\alpha=(1,1)$，$\beta=(0,1)$下的坐标为_____.

7．满足下述三个条件的一个向量组为________，这三个条件是：①它是线性无关的；②其中的每个向量均与向量$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}$正交；③凡与$\alpha$正交的向量均可由它们线性表示.

8．已知2×2矩阵$A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$，若对任意2维列向量$\eta$有$\eta^TA\eta=0$，则$a,b,c,d$满足条件_______.

二．**（12%）**假设矩阵A,B满足$A-B=AB$，其中$A=\begin{pmatrix}0&-2&0\\1&-2&0\\-1&2&0\end{pmatrix}$.求$B$.

三．**（15%）**设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}a&2&10\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2&1&5\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1&2&4\end{pmatrix}^T$，

$\beta=\begin{pmatrix}1&b&c\end{pmatrix}^T$. 问：当参数$a,b,c$满足什么条件时

1．β能用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示？

2．β不能用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？

3．β能用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示法不唯一？求这时$\beta$用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示的一般表达式.

四．**（8%）**设实二次型

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2axy+2ayz$$

问：实数a满足什么条件时，方程$f(x,y,z)=1$表示直角坐标系中的椭球面？

五．**（12%）**设3阶方阵A的特征值为2，-2，1，矩阵$B=aA^3-4aA+I$。

1．求参数 a 的值，使得矩阵 B 不可逆；

2．问：矩阵 B 是否相似于对角阵？请说明你的理由.

六．**（12%）** 已知二次曲面 S_1 的方程为：

$z=3x^2+y^2$，S_2 的方程为：$z=1-x^2$。

1．问：S_1，S_2 分别是哪种类型的二次曲面？

2．求 S_1 与 S_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程；

3．画出由 S_1 及 S_2 所围成的立体的草图.

七．**（10%）** 假设 3×3 实对称矩阵 A 的秩为 2，并且 $AB=C$，其中 $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$。求 A 的所有特征值及相应的特征向量；并求矩阵 A 及 A^{9999}.

八．（7%）证明题：

1．设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的线性无关的解向量，β 不是其解向量。证明：$\beta,\beta+\eta_1,\beta+\eta_2,\cdots,\beta+\eta_t$ 也线性无关.

2．设 A 是 n 阶正定矩阵，证明：$|I+A|>1$.