

东南大学学生会  
Students' Union of Southeast University

08-09-2几代B

一. (30%) 填空题

1. 设  $n$  是正整数, 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A^n =$  \_\_\_\_\_;
2. 若分块矩阵  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} A & B \\ O & I \end{pmatrix}$  可交换, 且  $B$  是可逆矩阵, 则  $A - B =$  \_\_\_\_\_;
3. 如果向量组  $(1,1,1), (1,2,2), (0,1,k)$  的秩为 2, 则参数  $k =$  \_\_\_\_\_;
4. 若 3 阶方阵  $A$  的行列式  $|A| = 3$ , 则  $A$  的伴随矩阵的行列式  $|A^*| =$  \_\_\_\_\_;
5. 已知  $A$  是 2 阶方阵, 若  $\text{tr}A = 2$ ,  $|A| = -3$ , 则  $A$  的特征值为 \_\_\_\_\_;
6.  $R^3$  的子空间  $V = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$  的一组基为 \_\_\_\_\_;
7. 直线  $\begin{cases} y + z = 3 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转所得旋转面的方程为 \_\_\_\_\_;
8. 如果方程  $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2kxz = 1$  表示双叶双曲面, 则参数  $k$  满足条件 \_\_\_\_\_;
9. 若矩阵  $A, B$  满足  $BA^T - A^T B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $B^T A - AB^T =$  \_\_\_\_\_;
10. 如果矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$  合同, 则参数  $a, b$  满足条件 \_\_\_\_\_。

二. (10%) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $X$ , 使得  $XA = 2X + B$ 。

三. (10%) 假设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 问: 参数  $a, b, c$  满足什么条件时, 向量组

$\beta_1 = a\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = b\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = c\alpha_3 - \alpha_1$  线性相关?

东南大学学生会  
Students' Union of Southeast University

四. (16%) 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 。

1. 当参数  $a$  满足什么条件时, 线性方程组  $Ax = b$  有唯一解? 有唯一解时, 用 Cramer 法则求  $x_1$ 。
2. 当参数  $a$  满足什么条件时, 线性方程组  $Ax = b$  没有解?
3. 当参数  $a$  满足什么条件时, 线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解? 有无穷多解时, 求方程组的通解。

五. (14%) 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

1. 问: 参数  $a, b$  满足什么条件时,  $\eta$  是  $A$  的特征向量? 若  $\eta$  是  $A$  的特征向量, 求相应的特征值。
2. 若  $\eta$  是  $A$  的特征向量, 且  $A$  有一个二重特征值, 求  $a, b$  的值, 并讨论  $A$  是否相似于对角阵。如果  $A$  相似于对角阵, 求对角阵及相应的相似变换矩阵。

六. (8%) 设有球面  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 0$ , 平面  $\pi$  过球面  $\Sigma$  的球心且垂直于直线  $L: \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ 。求  $\Sigma$  与  $\pi$  的交线在  $xOy$  平面上的投影曲线的方程。

七. (12%) 设  $n \geq 2$ ,  $\alpha, \beta$  都是实  $n$  维列向量, 且  $\alpha, \beta$  是一标准正交向量组,  $p, q$  都是非零实数,  $A = p\alpha\alpha^T + q\beta\beta^T$ 。

1. 证明  $\alpha, \beta$  都是  $A$  的特征向量, 并求相应的特征值;
2.  $A$  相似于对角阵。试说明理由, 并求相应的对角阵;
3. 问: 当参数  $k$  满足什么条件时,  $kI + A$  是正定矩阵?