姓名______ 学号______

密 封 线

06-07-3 高数 B 期末试卷

一。填空题(本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分)

1．已知曲面 $z=xy$ 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，则 $x_0=$____，$y_0=$______，$z_0=$______；

2．已知三角形 ΔABC 的顶点坐标为 $A(0,-1,2), B(3,4,5), C(6,7,8)$，则 ΔABC 的面积为_____；

3．曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ y^2+z^2=25 \end{cases}$ 在点 $(1,3,4)$ 处的法平面为 Π，则原点到 Π 的距离为______；

4．函数 $u=xyz^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\mathbf{e}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 的方向导数等于_____；

5. 交换积分次序 $\int_{-1}^{1}\mathrm{dx}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy=$____________________________；

6．设 $\vec{r}=\{x,y,z\}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $div\dfrac{\vec{r}}{r^3}=$__________；

7．设正向闭曲线 C：$|x|+|y|=1$，则曲线积分 $\oint_c x^2ydx+xy^2dy=$________；

8. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，则 $f^{(2n)}(0)=$____________；

9．设 $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x\le 0 \\ 1+x, & 0<x\le\pi \end{cases}$，其以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(3\pi)=$__________；

10．使二重积分 $\iint\limits_D \left(4-4x^2-y^2\right)\mathrm{d}\sigma$ 的值达到最大的平面闭区域 D 为 __________。

二．（本题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分）

11．计算二重积分$\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-y\right)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$为由$y=x, y=\frac{1}{2}x$及$y=2$围成的区域.

12．计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是$yoz$平面上的直线$z=2y-1, y=\frac{1}{3}$以及$z=1$围成的平面有界区域绕$z$轴旋转一周得到的空间区域.

三．（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

13．计算曲线积分$\int_L z\mathrm{d}s$，其中L为圆锥螺线$x=t\cos t, y=t\sin t, z=t \quad (0\le t\le 2\pi)$

14．求全微分方程$(\cos x+2xy+1)\mathrm{d}x+(x^2-y^2+3)\mathrm{d}y=0$的通解.

四．（15）（本题满分 9 分） 求函数 $f(x,y)=xy$ 在圆周$(x-1)^2+y^2=1$上的最大值和最小值.

五．（16）（本题满分 10 分） 已知流体的流速函数 $\mathbf{v}(x,y,z)=\left\{y^3-z^3,z^3-x^3,2z^3\right\}$，求该流体流过由上半球面$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体表面的外侧的流量.

六．（17）（本题满分 9 分） 计算曲线积分$\int_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y$，其中$\Gamma$是曲线$y=\sqrt{x}+1$上从点$A(1,2)$到点$C(0,1)$的部分.

七．（18）（本题满分 8 分） 设函数$f\in C([0,1])$，且$0\le f(x)<1$，利用二重积分证明不等式：

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\ge\frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$