

2005 级高等数学 (A、B) (上) 期中试卷

一. 填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} =$ _____;
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = \sqrt{1+x} \arcsin x - \sqrt{\cos x}$ 与 $\beta(x) = kx^2$ 是等价无穷小, 则 $k =$ _____;
3. 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} =$ _____;
4. 函数 $f(x) = xe^x$ 在 $x=1$ 处带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 _____;
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2ae^x + \sin x, & x < 0 \\ 2b(x-1)^3 + 9 \arctan x, & x \geq 0 \end{cases}$ 可导, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

二. 单项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

6. 设函数 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x-1}{x}}}$, 则 []
(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点 (B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点 (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点
7. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x=3$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标是 []
(A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3$ (B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3$ (C) $-8 \ln 2 + 3$ (D) $8 \ln 2 + 3$
8. 以下四个命题中, 正确的是 []
(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
9. 当 a 取下列哪个数值时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰有两个不同的零点 []
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

三. 计算题 (本题共 5 小题, 每小题 7 分, 满分 35 分)

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(1+2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right]$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$

13. 设 $f(x) = \frac{1}{x(1-2x)}$, 求 $f^{(n)}(x)$

14. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

四. (本题共 4 道题, 满分 29 分)

15. (本题满分 6 分) 如果以每秒 50cm^3 的匀速给一个气球充气, 假设气球内气压保持常值, 且形状始终为球形, 问当气球的半径为 5cm 时, 半径增加的速率是多少?

16. (本题满分 7 分) 证明不等式: $e^x \geq 1 + xe^{\frac{x-1}{2}} \quad (x \geq 0)$

17. (本题满分 8 分) 在抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上求一点 $P\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$, ($a > 0$), 使弦 PQ 的长度最短, 并求最短长度, 其中 Q 是过点 P 的法线与抛物线的另一个交点。

18. (本题满分 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = b, f(b) = a$, 证明:

(1) 至少存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = c$;

(2) 至少存在互异的两点 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) \cdot f'(\eta) = 1$