07高A下期末试卷

一. 填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域为____________；

2. 将三次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$（其中 f 连续）化成球面坐标系下的三次积分____________________________；

3. 散度 $\operatorname{div}\left(x^3\mathbf{i}+y\cos(y-2z)\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)\Big|_{(2,0,\pi)}=$________________；

4. 曲线 $\begin{cases}x+y+z=4\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线的方向向量为________________；

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2\,,-\pi<x\le 0\\ x,\ 0<x\le\pi\end{cases}$，且以 2π 为周期，$S(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数，则 $S(4\pi)=$__________；

6. 设 C 为圆周 $|z|=2$，取逆时针方向，则 $\oint_C \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+3)}\mathrm{d}z=$____________；

7. 留数 $\operatorname{Res}\left[\frac{\ln(1-z)\sin z}{z(1-\cos z)},0\right]=$____________；

8. 已知第二型曲线积分 $\int_L (x^4+4xy^n)\mathrm{d}x+(6x^{n-1}y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则 $n=$_____；

9. 平面 $5x+4y+3z=1$ 被椭圆柱面 $4x^2+9y^2=1$ 所截的有限部分的面积为__________.

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分)

10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$ 的和函数，并指明收敛域.

11. 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$ 展开为余弦级数.

12. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\beta^n$ 的敛散性，其中 α 为任意实数，β 为正实数.

13. 判定级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$ 是否绝对收敛、条件收敛或发散？并说明理由。

三（14）.（本题满分 7 分） 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ 在圆环域 $1<|z-2\mathrm{i}|<3$ 内展开为 Laurent 级数.

四（15）。（本题满分 8 分） 计算 $I=\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y$，其中 C 是由点 $B(1+\pi,0)$ 沿曲线 $y=\sin(x-1)$ 到点 $A(1,0)$ 的一段弧.

五（16）.（本题满分 8 分） 计算 $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截部分的外侧.

六（17）（本题满分 7 分） 设 $a_1=1, a_2=2$，当 $n\geq 3$ 时，有 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，

（1） 证明不等式 $0<\dfrac{3}{2}a_{n-1}<a_n<2a_{n-1}$，$n\geq 4$；

（2） 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛，且满足不等式 $2\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}\leq\dfrac{5}{2}$.

七（18）（本题满分 6 分） 设 C 是圆周 $x^2+y^2=x+y$，取逆时针方向，连续函数 $f(x)>0$，

证明
$$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geq\pi$$