2007 级高等数学（A、B）（上）期中试卷

一. 填空题（每小题 4 分，满分 24 分）

1．当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n^{k-1}}-\dfrac{1}{n^k}$ 与 $1-\cos\dfrac{a}{n}\ (a>0)$ 是等价无穷小，则 $k=$，$a=$；

2．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则 $a=$，$b=$；

3．函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 带 Peano 余项的 4 阶 Maclaurin 公式是

4．$\left(e^{-2x}+\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{1+x^2}\right)dx=d(\_)$；

5．当某质点沿曲线 $y=\sqrt{x}$ 运动到点 M_0 处时，该质点的 x 坐标和 y 坐标关于时间的变化率相等，点 M_0 的坐标为

6．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln^2 x$ 的单调增加区间为　　，极大值为　　.

二. 单项选择题（每题 4 分，满分 12 分）

7．设对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $h(x)\le f(x)\le g(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-h(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$　[ ]

(A) 存在且等于零　(B) 存在且不等于零　(C) 一定不存在　(D) 不一定存在

8．极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{-x+2\sin x}=$　[ ]

(A) -2　(B) 2　(C) -3　(D) 3

9．函数 $f(x)=\left|x^3-x\right|\sin x$ 的不可导点的个数为　[ ]

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

三. 计算题（每小题 8 分，满分 32 分）

10．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin x\cdot\ln(1+x)}$

11．设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

12．设 $f(x)=\left(x^2+x\right)\sin 2x$，求 $f^{(10)}(x)$.

13. 试确定常数 a、b 的值，使得曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，并求切线方程.

四(14)．（8 分）讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt[3]{2^{3n}+x^{3n}}}\ (x\ge0)$ 的连续性，并指出间断点的类型（应说明理由）.

五(15)．（**8 分**）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义，$f'(0)=1$，并对任意实数 x 和 h，恒有 $f(x+h)=f(x)+f(h)+2hx$，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导，并求 $f'(x)$．

六(16)．（**8 分**）设 $p>1$，$q>1$，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\ge x$．

七(17)．（**8 分**）设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，在开区间 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，试证：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$．