08高A下期末试卷答案

一. 填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=z-2$；2. $\mathbf{grad}u\big|_{(1,2,0)}=\left\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},0\right\}$；3. $(-3,1)$；4. -2；5. $xF_x=yF_y$；

6. $\frac{1}{2}$； 7. $\frac{2}{5}(1-2\mathrm{i})\pi$；8. $-\frac{1}{6}$；

9. $a_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$（注：答案不唯一），可使得级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$收敛，且级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n\ln n$发散.

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，满分 30 分)

10．解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi f_1+f_2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi' f_1+x\varphi\varphi' f_{11}+(x\varphi'-\varphi)f_{12}-f_{22}$

11．（本小题满分 7 分）判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\mathrm{e}^n-1}$的敛散性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^n-1}{\mathrm{e}^{n+1}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1-\frac{1}{\mathrm{e}^n}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$，**（5 分）**由比值法得知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\mathrm{e}^n-1}$收敛。

12．解 显然$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-2\ln n}=0$，记$f(x)=x-2\ln x$，令$f'(x)=1-\frac{2}{x}>0$，得$x>2$，当$n\geq 3$时，$\left\{\frac{1}{n-2\ln n}\right\}$单调递减，由 Leibniz 判别法得知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-2\ln n}$收敛，

且$\frac{1}{n-2\ln n}>\frac{1}{n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较判别法得知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-2\ln n}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-2\ln n}$条件收敛。

13. 解 $b_n=0,n=1,2,\cdots$，$a_0=2\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x=1$，

$a_n=2\int_0^1(1-x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n),n=1,2,\cdots$，于是由 Dirichlet 收敛定理得：

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x=1-|x|,|x|\leq 1$$

三（14）解 收敛域为$(-1,1)$，令$t=y^2$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty} nt^n=\underline{t\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)'}=\frac{t}{(1-t)^2}=\underline{\frac{x^2}{(1-x^2)^2}}$$

四（15）解 $f(z)=\underline{\frac{\mathrm{i}}{4}\left(\frac{1}{z+2\mathrm{i}}-\frac{1}{z-2\mathrm{i}}\right)}=\underline{\frac{\mathrm{i}}{4(z+\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{1+\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+\frac{\mathrm{i}(z+\mathrm{i})}{3}}}$

$$=\frac{1}{4}\left(\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{i}^{n+1}(z+\mathrm{i})^{-n-1}}+\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{i}^n}{3^{n+1}}(z+\mathrm{i})^n}\right)$$

五（16）解 记$O(0,0),A(0,2),D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\sqrt{2y-y^2}\right\}$，由Green公式得

$$I=\underline{5\iint_D y\mathrm{d}\sigma}+\underline{\int_{\overline{AO}}\sin y\mathrm{d}y}=\underline{\frac{5}{2}}\pi\underline{-1+\cos 2}$$

六（17）解 补一个面$\Sigma:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ z=0\end{cases}$，取下侧，由$S$和$\Sigma$所围成的区域记为$\Omega$，由Gauss公式得

$$I=\underline{\iiint_\Omega z\mathrm{d}v-\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}=\underline{\pi\int_0^2(2-z)^2z\mathrm{d}z}+\underline{4\pi}=\frac{4}{3}\pi+4\pi=\underline{\frac{16}{3}\pi}$$

七（18）证 由于$b_na_n-a_{n+1}b_{n+1}\ge\alpha b_{n+1}>0\,(n=1,2,\cdots)$，故正数列$\{a_nb_n\}$单调递减且有下界，数列$\{a_nb_n\}$收敛，从而得正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_na_n-a_{n+1}b_{n+1}\right)$的部分和收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_na_n-a_{n+1}b_{n+1}\right)$收敛，再由比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

或证 由$b_na_n-a_{n+1}b_{n+1}\ge\alpha b_{n+1}>0\,(n=1,2,\cdots)$，得正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_na_n-a_{n+1}b_{n+1}\right)$的部分和$S_n=a_1b_1-a_{n+1}b_{n+1}\le a_1b_1$有上界，即得$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_na_n-a_{n+1}b_{n+1}\right)$收敛，再由比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.