2006 级高等数学（A）（上）期中试卷

一. 填空题（前四题每题 4 分，第 5 题 8 分，满分 24 分）

1． $x=0, x=1$；第一类（跳跃）间断点，第二类（无穷）间断点

2． $a=1, b=-1$　　3． $\mathrm{d}y=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$　　4． $a=3, b=-2$

5．（1） $y=|\operatorname{sgn} x|$　（2） $y=|x|$　（3） $y=x^3$（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

二. 单项选择题（每题 4 分，满分 12 分）　1．C　2．B　3．D。

三. 计算题（每题 7 分，满分 35 分）

1. $\dfrac{1}{3}$　　**2.** e^{-6}　　**3.** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=1}=\dfrac{4}{27}$

4. $y^{(10)}(x)=3^9\left(3x^2+20x+30\right)\mathrm{e}^{3x}$　　**5.** $4x-3y+6=0$

四.（**8** 分）用单调有界原理，数列 $\{x_n\}$ 单调递增，有上界 $1+\sqrt{2}$，故收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

五.（**8** 分）用单调性证明。

六. **(7 分)** 提示：对 $F(x)=(1-x)^3 f(x)$ 用罗尔定理。

七.（**6** 分）（**1**）令 $g_n(x)=\dfrac{\arctan x}{x}-\dfrac{1}{n+1}$，$x\in(0,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}g_n(x)=1-\dfrac{1}{n+1}>0$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)=-\dfrac{1}{n+1}<0$，故 $\exists\, 0<x_1<x_2<+\infty$，使得 $g_n(x_1)>0$, $g_n(x_2)<0$，

$g_n(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上连续，$g_n(x)$ 在 (x_1,x_2) 内至少存在一个零点。

$g_n'(x)=\dfrac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}$，记 $h(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-\arctan x$, $h'(x)=-\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}<0$，

$x\in(0,+\infty)$，$h(x)<h(0)=0$, $x>0$，即 $g_n'(x)<0$, $x>0$，$g_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递减，$g_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至多存在一个零点。$g_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在唯一零点，即 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在唯一零点，记为 $x_n\in(0,+\infty)$。

（**2**）由于 $\dfrac{\arctan x_{n+1}}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{\arctan x_n}{x_n}$，而 $\dfrac{\arctan x}{x}$ 严格单调递减，故

$x_n<x_{n+1}$，所以 $(n+1)\arctan x_1\le x_n<\dfrac{\pi}{2}(n+1)$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)\arctan x_{n+1}}{(n+1)\arctan x_n}=1$ 。