

一. 填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分):

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} (x-1)^n$ 的收敛域为_____。
2. 当常数 p 满足条件_____时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ 绝对收敛。
3. 设 $f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)z^2}$, 则 $f(z)$ 在 $z=0$ 的留数 $\text{Res}[f(z), 0] =$ _____。
4. 微分方程 $y'''(x) - 9y'(x) = 0$ 的通解为_____。
5. 设 C 为抛物线 $y = 1 - x^2$ 上自点 $A(-1, 0)$ 到点 $B(1, 0)$ 的一段弧, 则曲线积分 $\int_{C(AB)} (x^2 + y)dx + (x - y^2)dy$ 的值为_____。

二. 单项选择题 (每小题 4 分, 满分 12 分):

1. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$ 的特解形式为 (其中 A, B 为常数) ()
 (A) $y^* = Ae^{3x}$ (B) $y^* = Axe^{3x}$
 (C) $y^* = (Ax + B)e^{3x}$ (D) $y^* = x(Ax + B)e^{3x}$
2. 设 $f(x) = \begin{cases} 2+x, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{4} (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin \frac{n\pi x}{4} dx (n=1, 2, \dots)$, 则 $S(2) + S(-9)$ 等于 ()
 (A) -1 (B) 1 (C) 5 (D) 7
3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛, 则必有 ()
 (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 都收敛

三. (每小题 7 分, 满分 35 分):

1. 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ 。
2. 计算复积分 $\oint_c \frac{e^{2z}-1}{z^2(z-1)^2} dz$, 其中 c 为正向圆周: $|z|=3$ 。
3. 将 $f(x) = \frac{2}{x^2-8x+15}$ 展成 $x-1$ 的幂级数。
4. 将 $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ 在圆环域 $1 < |z-2| < 3$ 内展成罗朗级数。
5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n} x^n$ 的和函数。

四. 1. (6 分) 求微分方程 $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ 的通解。

2. (9 分) 求微分方程 $y'' + 4y = 8x - 4\sin 2x$ 满足条件 $y(0) = 0, y'(0) = 5$ 的特解。

五. (8 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + (z^3 + x) dx \wedge dy$, 其中 Σ 为抛物面

$z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 取下侧。

六. (9 分) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(1) = 1, f'(1) = 7$, 试确定函数 $f(x)$, 使曲线积分

$I = \int_{AB} [x^2 f'(x) - 11xf(x)] dy - 32f(x)y dx$ 与路径无关, 并对点 A (1,1), B (0,3) 计算曲线积分的值。

七. (6 分) 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n - u_{n-1}|$ 收敛, 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$ 收敛。