

01-02 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 (30%) 填空题:

1. 设 $\alpha = (1, 2)$, $\beta = (1, -1)$, 则 $\alpha\beta^T = \underline{-1}$; $\alpha^T\beta = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}$; $(\alpha^T\beta)^{100} = \underline{-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}$.
2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, 则行列式 $|AB^{-1}| = \underline{-1/70}$.
3. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则当参数 $k \neq \underline{1}$ 时, $\alpha_1 - \alpha_2, k\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 也线性无关.
4. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
5. 设矩阵 A 及 $A+E$ 均可逆, 且 $G = E - (A+E)^{-1}$ (其中 E 表示单位矩阵), 则 $G^{-1} = \underline{E+A^{-1}}$.
6. 与向量 $\alpha = (1, 0, 1)$, $\beta = (1, 1, 1)$ 均正交的单位向量为 $\underline{\pm(-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)}$.
7. 四点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, 1, x)$, $C(2, 1, 1)$, $D(2, y, 3)$ 共面的充分必要条件是 $\underline{x=1}$ 或 $\underline{y=1}$.
8. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + kx_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$, 则当 k 满足条件 $\underline{k > 1}$ 时, 为 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是椭球面; 则当 k 满足条件 $\underline{k = 1}$ 时, 为 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是柱面.

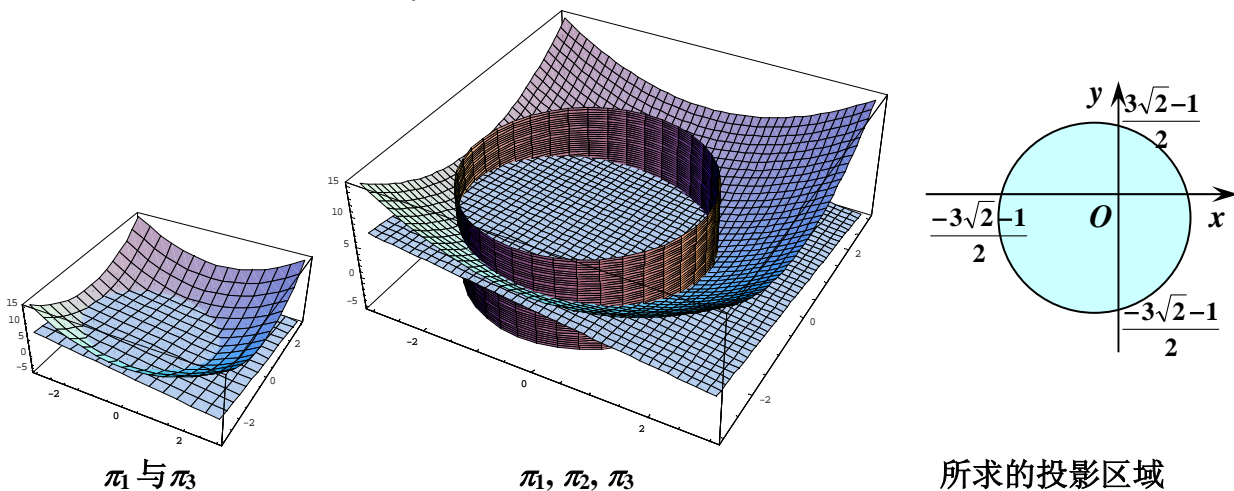
二 (8%) 记 π_1 为由曲线 $\begin{cases} z = y^2 - 3 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z -轴旋转所产生的旋转曲面, π_2 为以 π_1 与平面 π_3 :

$x + y + z = 1$ 的交线为准线, 母线平行于 z -轴的柱面. 试给出曲面 π_1 及 π_2 的方程, 并画出 π_1 被 π_3 所截有界部分在 xOy 平面上的投影区域的草图(应标明区域边界与坐标轴的交点).

解: π_1 的方程为 $z = x^2 + y^2 - 3$. 联立 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, 消去 z 得 π_2 的方程: $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$.

π_2 在 xOy 平面上的投影曲线的方程为 $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{2}$.

π_1 被 π_3 所截有界部分在 xOy 平面上的投影区域的草图如下面的右图所示:



三 (8%) 求经过直线 $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -x+y-2z=1 \end{cases}$ 且与 xOy 平面垂直的平面方程.

解: (法一) 设所求的平面方程为 $(x+2y-z-2)+\lambda(-x+y-2z-1)=0$, 即

$$(1-\lambda)x+(2+\lambda)y-(1+2\lambda)z-(2+\lambda)=0$$

因为它与 xOy 平面垂直, 所以其法向量 $\{(1-\lambda), (2+\lambda), (1+2\lambda)\}$ 与向量 $\{0, 0, 1\}$ 垂直.

因而 $1+2\lambda=0$, 即 $\lambda=-1/2$. 于是得所求平面的方程: $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$, 化简得:

$$x+y=1.$$

(法二) 直线 $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -x+y-2z=1 \end{cases}$ 的方向向量可取为 $\left\{ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{-3, 3, 3\}$.

所求平面的法向量应垂直于 $\{-3, 3, 3\}$ 和 $\{0, 0, 1\}$, 因而可取为

$$\left\{ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \{3, 3, 0\}.$$

在直线 $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -x+y-2z=1 \end{cases}$ 上取一点 $(0, 1, 0)$, 由此可得所求平面的方程: $3x+3(y-1)=0$. 化简得:

$$x+y=1.$$

(法三) 所求平面为直线 $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -x+y-2z=1 \end{cases}$ 到 xOy 平面上的投影平面. 因而从 $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -x+y-2z=1 \end{cases}$ 中消去 z , 得 $x+y=1$. 这就是所求平面的方程.

四 (12%) 求矩阵方程 $XA=2X+B$ 的解, 其中 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

解: (法一) 原方程可化为 $X(A-2E)=B$, 其中 E 表示单位矩阵. $A-2E=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$A-2E$ 的行列式 $|A-2E|=-1$, 伴随矩阵 $(A-2E)^*=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

因而 $(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

于是 $X=B(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

(注意 X 未必等于 $(A-2E)^{-1}B$!)

(法二) 原方程可化为 $X(A-2E)=B$, 其中 E 表示单位矩阵. $A-2E=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} A-2E \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E \\ B(A-2E)^{-1} \end{bmatrix}.$

于是 $X=B(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

五 (12%) 设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 2 \\ -x_2 + px_3 - 2x_4 = q \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + (p+3)x_4 = -1 \end{cases}$$

1. 问: 当参数 p, q 满足什么条件时, 方程组无解; 有唯一解; 有无穷多解?

2. 当方程组有无穷多解时, 求出其通解.

解: $[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & p & -2 & q \\ 3 & 2 & 1 & p+3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \end{array} \right] = [\tilde{A}, \tilde{b}].$

由此可见, 当参数 $p = -2$ 且 $q \neq -1$ 时, 秩(A) = 2, 而秩 $[A, b]$ = 3, 此时方程组无解;

当参数 $p \neq -2$ 时, 秩(A) = 4, 此时方程组有唯一解;

当参数 $p = -2$ 且 $q = -1$ 时, 秩(A) = 秩 $[A, b]$ = 2, 此时方程组无穷多解,

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\times(-1)} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

由此可得方程组的通解
$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_3 = x_3 (\text{自由未知量}) \\ x_4 = x_4 (\text{自由未知量}) \end{cases}$$

即
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意数}).$$

六 (12%) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & k & -2 \end{bmatrix}$. 已知秩(A) = 2.

1. 求参数 k 的值;

2. 求一个 4×2 矩阵 B , 使得 $AB = O$, 且秩(B) = 2;

3. 问是否存在秩大于 2 的矩阵 M 使得 $AM = O$? 为什么?

解: $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & k & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array} \right].$

因为秩(A) = 2, 所以参数 $k = 0$. 此时可得齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是可取矩阵 $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = O$, 且秩(B) = 2.

由于任何一个满足 $AM = O$ 的矩阵 M 的列向量组都可以由 ξ_1, ξ_2 线性表示, 所以这样的矩阵 M 的秩一定 ≤ 2 . 因而不存在秩大于 2 的矩阵 M 使得 $AM = O$.

七 (12%) 设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似.

1. 求参数 k, l 的值;
2. 求一正交阵 Q , 使得 $Q^T A Q = B$.

解: 1. 因为实对称矩阵 A 与 B 相似, 所以 $-k = |A| = |B| = l$ 且 $k = \text{迹}(A) = \text{迹}(B) = 2+l$.
由此可得 $k = 1, l = -1$.

$$2. |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

由 $(E - A)x = 0$ 可得 A 的对应于 $\lambda = 1$ 的两个特征向量 $\xi_1 = [1, 0, 1]^T, \xi_2 = [0, 1, 0]^T$,
由 $(-E - A)x = 0$ 可得 A 的对应于 $\lambda = -1$ 的一个特征向量 $\xi_3 = [1, 0, -1]^T$,

$$\text{令 } Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } Q \text{ 为正交阵且 } Q^T A Q = B.$$

八 (6%) 已知 n 阶方阵 A 相似于对角阵, 并且 A 的特征向量均是矩阵 B 的特征向量.
证明: $AB = BA$.

证明: 因为 n 阶方阵 A 相似于对角阵, 所以 A 有 n 个线性无关的特征向量, 设为 p_1, p_2, \dots, p_n ,
对应的特征值设为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

又因为 A 的特征向量均是矩阵 B 的特征向量, 所以 B 也有 n 个线性无关的特征向量
 p_1, p_2, \dots, p_n , 对应的特征值设为 t_1, t_2, \dots, t_n . (注意 A 与 B 的特征值未必相等!)

$$\text{令 } P = [p_1, p_2, \dots, p_n], A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{bmatrix}.$$

则 $AP = PA, BP = PT, AT = TA$.

于是 $AB = (PA P^{-1})(P T P^{-1}) = P A T P^{-1} = P T A P^{-1} = (P T P^{-1})(P A P^{-1}) = BA$.

噼里啪啦地编辑着这份 Word 文档,
感觉自己在玩电子游戏(做 PowerPoint 课件时, 更是如此),
心情是快乐的.
但愿您也能分享到我的快乐!~~~

我也试图努力把它做得好看一些,
因为在我看来,
出自我手中的东西都是我精心雕刻的艺术品,
尽管它还不够完美.

人们常说: 予人玫瑰, 手留余香.
我所喜欢的,
正是那淡淡的余香给我带来的晚风般的惬意.....

02-03 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 填空题(每小题 3 分, 共 36 分):

$$1. \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [5 \ 1 \ -3] \right\}^{2002} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & -2 & -6 \end{bmatrix};$$

$$2. \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix};$$

3. 若 A 是正交矩阵, 则行列式 $|A^3 A^T| = \underline{1}$;

4. 空间四点 $A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(1, 2, k), D(-1, 4, 9)$ 共面的充分必要条件是 $k = \underline{3}$;

5. 点 $P(2, -1, 1)$ 到直线 $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ 的距离为 $\underline{1}$;

6. 若 4 阶方阵 A 的秩为 2, 则伴随矩阵 A^* 的秩为 $\underline{0}$;

7. 若可逆矩阵 P 使 $AP = PB, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则方阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-3)$;

8. 若 3 阶方阵 A 使 $I-A, 2I-A, A+3I$ 都不可逆, 则 A 与对角阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 相似(其中 I 是 3 阶单位矩阵);

9. 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 与对角阵相合, 则 $(x, y) = \underline{(1, -2)}$.

10. 设 $A = [A_1, A_2, A_3, A_4]$, 其中列向量 A_1, A_2, A_4 线性无关, $A_3 = 2A_1 - A_2 + A_4$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系是 $\underline{\xi = [2, -1, -1, 1]^T}$;

11. 设 A, B 都是 3 阶方阵, $AB = O, r(A) - r(B) = 2$, 则 $r(A) + r(B) = \underline{D}$;

(A) 5;

(B) 4;

(C) 3;

(D) 2;

12. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 则以下结论中未必成立的是 \underline{B} .

(A) $A-I$ 可逆, 且 $(A-I)^{-1} = A-I$;

(B) $A = O$ 或 $A = 2I$;

(C) 若 2 不是 A 的特征值, 则 $A = O$;

(D) $|A| = 0$ 或 $A = 2I$.

二 计算题(每小题 8 分, 共 24 分)

$$13. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \times(-1) \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \times(-2) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 29.$$

14. 求直线 $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ 在平面 $\pi: x+y-2z+1=0$ 上的垂直投影直线方程.

解: 过直线 l 且垂直于平面 π 的平面 π_1 的法向量必垂直于向量 $\{2, 1, 2\}$ 和 $\{1, 1, -2\}$,

因而可取为 $\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{-4, 6, 1\}$.

又因为 π_1 过直线 l 上的点 $(2, 1, -1)$, 由此可得平面 π_1 的点法式方程

$$-4(x-2) + 6(y-1) + (z+1) = 0$$

整理得

$$4x - 6y - z - 3 = 0$$

于是可得直线 $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ 在平面 $\pi: x+y-2z+1=0$ 上的垂直投影直线的一般方程:

$$\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 4x-6y-z-3=0 \end{cases}.$$

15. 设 $XA = AB + X$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 求 X^{99} .

解: 原方程可化为 $X(A-I) = AB$, 其中 I 表示单位矩阵.

$$A-I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A-I \\ AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ AB(A-I)^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$\text{于是可得 } X = AB(A-I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, X^2 = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X^{99} = (X^2)^{49} X = \frac{3^{49}}{2^{49}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{3^{49}}{2^{49}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(注意 X 未必等于 $(A-I)^{-1}AB$!)

三 计算题, 解答题(3 小题共 32 分).

16. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ b \end{bmatrix}$. $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成

的空间. 已知 $\dim(V) = 2, \beta \in V$.

(1) 求 a, b ; (2) 求 V 的一个基, 并求 β 在此基下的坐标; (3) 求 V 的一个标准正交基.

解: (1) $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-6 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

因为 $\dim(V) = 2, \beta \in V$. 所以 $a-6 = b+2 = 0$, 即 $a = 6, b = -2$.

(2) 由上述初等行变换的结果可知 α_1, α_2 构成 V 的一个基, 且 $\beta = 3\alpha_1 - \alpha_2$.

$$(3) \text{ 令 } \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

再单位化得 V 的一个标准正交基

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

17. 用正交变换化简二次曲面方程:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$$

求出正交变换和标准形, 并指出曲面类型.

解: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A \text{ 的特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda - 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

A 的特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$.

由 $(\lambda_i I - A)x = \theta$ 求得 A 的对应于 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$ 的特征值向量:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

它们已经两两正交, 单位化得 $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, p_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}, \text{ 则 } P^T P = I, \text{ 且 } P^{-1} A P = P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

令 $x = Py$, 则原二次曲面的方程化为 $3y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2 = 1$.

可见该二次曲面为单叶双曲面.

18. 设 D 为由 yOz 平面中的直线 $z = 0$, 直线 $z = y$ ($y \geq 0$) 及抛物线 $y + z^2 = 2$, 围成的平面区域. 将 D 绕 y 轴旋转一周得旋转体 Ω .

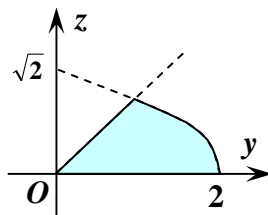
(1) 画出平面区域 D 的图形;

(2) 分别写出围成 Ω 的两块曲面 S_1, S_2 的方程;

(3) 求 S_1, S_2 的交线 l 在 zOx 平面上的投影曲线 C 的方程;

(4) 画出 S_1, S_2 和 l, C 的图形.

解: (1) 平面区域 D 的图形如右图所示:



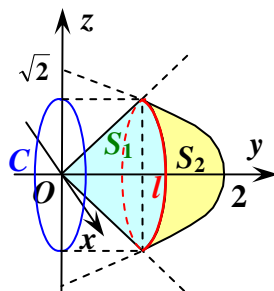
(2) Ω 由锥面 $S_1: y = \sqrt{x^2 + z^2}$ 和旋转抛物面 $S_2: y = 2 - x^2 - z^2$ 围成.

(3) 由 $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ 和 $y = 2 - x^2 - z^2$ 消去 y 得 $x^2 + z^2 = 1$.

由此可得 S_1, S_2 的交线 l 在 zOx 平面上的投影曲线

$$C \text{ 的方程: } \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

(4) S_1, S_2 和 l, C 的图形如右图所示:



四 证明题, 解答题(每小题 4 分, 共 8 分).

19. 设 η 是线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $b \neq \theta$, ξ_1, ξ_2 是导出组 $Ax = \theta$ 的基础解系. 证明: $\eta, \xi_1 + \eta, \xi_2 + \eta$ 线性无关.

证明: 因为 $A\eta = b \neq \theta$, 所以 η 不是线性方程组 $Ax = \theta$ 的解.

而 ξ_1, ξ_2 是 $Ax = \theta$ 的基础解系, 故 η, ξ_1, ξ_2 线性无关, 否则 η 能由 ξ_1, ξ_2 线性表示, 从而 η 是线性方程组 $Ax = \theta$ 的解, 矛盾!

假若 $k_1\eta + k_2(\xi_1 + \eta) + k_3(\xi_2 + \eta) = \theta$, 则 $(k_1 + k_2 + k_3)\eta + k_2\xi_1 + k_3\xi_2 = \theta$.

于是 $(k_1 + k_2 + k_3)\eta = \theta - k_2\xi_1 - k_3\xi_2$, 即 $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

所以 $\eta, \xi_1 + \eta, \xi_2 + \eta$ 线性无关.

20. 设 α 是 3 维非零实列向量, $\|\alpha\| = \sqrt{2}$. 又 $A = \alpha\alpha^T$.

(1) 求 A 的秩; (2) 求 A 的全部特征值;

(3) 问 A 是否与对角阵相似? (4) 求 $|I - A^3|$.

解: (1) 设 $\alpha = [a, b, c]^T \neq \theta$, 则 $A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{bmatrix} \neq O$, 且秩(A) = 1.

(2) 设 $\beta \neq \theta$ 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量. 即 $\alpha\alpha^T\beta = \lambda\beta$.

若 $\alpha^T\beta = 0$, 则 $\lambda\beta = \alpha\alpha^T\beta = \theta$, 而 $\beta \neq \theta$, 故 $\lambda = 0$.

此时, β 是 $\alpha^Tx = 0$ 的解向量. 而秩(α^T) = 1,

故 $\alpha^Tx = 0$ 的每个基础解系均由两个线性无关的解向量构成.

即对应于 $\lambda = 0$, A 有两个线性无关的特征向量,

若 $\alpha^T\beta \neq 0$, 则由 $\alpha\alpha^T\beta = \lambda\beta$ 可得 $\alpha^T\alpha\alpha^T\beta = \lambda\alpha^T\beta$. 从而 $\lambda = \alpha^T\alpha$.

此时, 由于 $\alpha\alpha^T\alpha = \lambda\alpha$. 故可取 $\beta = \alpha$ 作为对应于 $\lambda = \alpha^T\alpha$ 的特征向量.

综上所述, A 的全部特征值有: $\lambda = 0$ 和 $\lambda = \alpha^T\alpha = \|\alpha\|^2 = 4$.

(另解) 因为 $A^2 = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = 4\alpha\alpha^T = 4A$,

所以 $A^2 - 4A = O$, 即 $\lambda^2 - 4\lambda$ 是 A 的零化多项式,

因而 A 的所有可能的特征值有: 0, 4.

注意到秩(A) = 1, 可见都是 A 的全部特征值有 0(二重)和 4.

(3) 由(2)可见 A 有 3 个线性无关的特征向量, 所以 A 与对角阵相似.

(另解) 因为实矩阵 $A^T = (\alpha\alpha^T)^T = (\alpha^T)^T\alpha^T = \alpha\alpha^T = A$, 所以 A 与对角阵相似.

(4) 由(2)可见存在 3 阶可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

因此 $|I - A^3| = |P^{-1}[I - A^3]P| = |(P^{-1}IP - P^{-1}A^3P)| = |I - (P^{-1}AP)^3|$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 4^3 \end{vmatrix} = 1 - 4^3.$$

*If you want something badly enough
You must let it go free
If it comes back to you
It's yours
If it doesn't
You really never had it, anyway*

03-04 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 (24%) 填空题:

1. 若向量 $\vec{\alpha} = i + aj - k$, $\vec{\beta} = bi + j + k$, $\vec{\gamma} = k$ 共面, 则参数 a, b 满足 $\underline{ab = 1}$.
2. 过点 $P(1, 2, 1)$ 且包含 x 轴的平面方程为 $\underline{y - 2z = 0}$.
3. 已知矩阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3I = O$, 其中 I 表示单位矩阵, 则 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \underline{\frac{1}{3}(A+2I)}$.
4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, 则行列式 $|A^2 B^{-1}| = \underline{1/70}$.
5. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}$, 则当参数 $k = \underline{0}$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.
6. 向量空间 \mathbf{R}^2 中向量 $\eta = (2, 3)$ 在 \mathbf{R}^2 的基, 与 $\alpha = (1, 1)$ $\beta = (0, 1)$ 下的坐标为 $\underline{(2, 1)}$.
7. 满足下述三个条件的一个向量组为 $\underline{(-2, 1, 0), (1, 0, -1)}$, 这三个条件是: ①它们是线性无关的; ②其中的每个向量均与 $\alpha = (1, 2, 1)$ 正交; ③凡与 α 正交的向量均可由它们线性表示.
8. 已知 2×2 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若对任意的 2 维列向量 η 有 $\eta^T A \eta = 0$, 则 a, b, c, d 满足条件 $\underline{a = d = 0, b = -c}$.

二 (12%) 假设矩阵 A, B 满足 $A - B = AB$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, 求 B .

解: (法一) 由 $A - B = AB$ 得 $(A+I)B = A$, 其中 I 表示单位矩阵. $A+I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$A+I$ 的行列式 $|A+I| = 1$, 伴随矩阵 $(A+I)^* = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 因而 $(A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

于是 $B = (A+I)^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(注意 B 未必等于 $A(A+I)^{-1}$!)

(法二) 由 $A - B = AB$ 得 $(A+I)B = A$, 其中 I 表示单位矩阵. $A+I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$[A+I, A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [I, (A+I)^{-1}A]$

$$\text{于是 } B = (A+I)^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

三 (15%) 设向量 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, 4)^T$, $\beta = (2, b, c)^T$, 问当参数 a, b, c 满足什么条件时

1. β 能用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示?
2. β 不能用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?
3. β 能用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示方法不唯一? 求这时 β 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的一般表达式.

解: 令 $A = [\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$, (注: 这里把 α_3 放在第一列纯粹是为了方便)

$$[A, \beta] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & a & 2 \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -a & -2 \\ 0 & -3 & 2+2a & b+4 \\ 0 & 0 & 8+2a & c-b+4 \end{bmatrix} = [\tilde{A}, \tilde{\beta}]$$

1. 当参数 $a \neq -4$ 时, 秩(A) = 3, 此时 β 能用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示.
2. 当参数 $a = -4$, 而 $b - c \neq 4$ 时, 秩(A) = 2, 秩(A, β) = 3, 此时 β 不能用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.
3. 当参数 $a = -4$, 且 $b - c = 4$ 时, 秩(A) = 秩(A, β) = 2, 此时 β 能用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示方法不唯一.

$$\text{这时 } [\tilde{A}, \tilde{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & b+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2(b+1)/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可得 $Ax = \beta$ 的通解 $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2x_3 + 2(b+1)/3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$, 其中 x_3 为自由未知量.

因而 β 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的一般表达式为

$$\beta = t\alpha_1 + [-2t + 2(b+1)/3]\alpha_2 - 2\alpha_3$$

其中 t 为任意数.

四 (8%) 设实二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz$. 问: 实数 a 满足什么条件时, 方程 $f(x, y, z) = 1$ 表示直角坐标系中的椭球面?

解: 实二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$.

A 的顺序主子式 $a_{11} = 1 > 0$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 - a^2$; $|A| = 1 - 2a^2$.

$f(x, y, z) = 1$ 表示直角坐标系中的椭球面当且仅当 A 正定, 当且仅当 A 的顺序主子式全为正数, 即 $a^2 < 1/2$.

五 (12%) 设 3 阶方阵 A 的特征值为 2, -2, 1, 矩阵 $B = aA^3 - 4aA + I$.

1. 求参数 a 的值, 使得矩阵 B 不可逆.
2. 问矩阵 B 是否相似于对角阵? 请说明你的理由.

解: 1. 因为 3 阶方阵 A 有 3 个不同的特征值 2, -2, 1, 所以存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{于是 } P^{-1}BP = P^{-1}(aA^3 - 4aA + I)P = a(P^{-1}AP)^3 - 4a(P^{-1}AP) + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{bmatrix}.$$

因而矩阵 B 不可逆当且仅当 $|B| = 0$, 而 $|B| = |P^{-1}BP| = 1 - 3a$.

所以当 $a = 1/3$ 时, 矩阵 B 不可逆.

2. 由 1 可知矩阵 B 相似于对角阵.

六 (12%) 已知二次曲面 S_1 的方程为 $z = 3x^2 + y^2$, S_2 的方程为 $z = 1 - x^2$.

1. 问: S_1 与 S_2 分别属于哪一类二次曲面?

2. 求 S_1 与 S_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程;

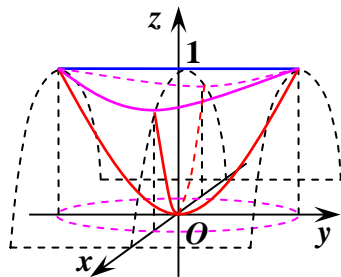
3. 画出由 S_1 与 S_2 所围成的立体的草图.

解: 1. S_1 与 S_2 分别属于椭圆抛物面和抛物柱面.

2. 由 $z = 3x^2 + y^2$ 和 $z = 1 - x^2$ 消去 z 得 S_1 与 S_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. 由 S_1 与 S_2 所围成的立体的草图如右图所示:



七 (10%) 设 3×3 实对称矩阵 A 的秩为 2, 并且 $AB = C$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

求 A 的所有特征值及相应的特征向量; 并求矩阵 A 及 A^{999} .

解: 因为 A 是 3 阶矩阵, 且秩为 2, 所以 $|A| = 0$, 因而有一个特征值为 0.

又因为 $AB = C$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 令 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

则 $Ap_1 = -p_1$, $Ap_2 = p_2$, 可见 p_1, p_2 分别是 A 的对应于 $\lambda = -1$ 和 $\lambda = 1$ 的特征向量.

由于 A 是 3×3 的实对称矩阵, 所以对应于特征值 0 的特征向量与 p_1, p_2 正交,

由此可得对应于特征值 0 的一个特征向量 $p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

令 $P = [p_1, p_2, p_3]$, 则 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

故 $A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$A^{999} = (P\Lambda P^{-1})^{999} = P\Lambda^{999}P^{-1} = P\Lambda P^{-1} = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

八 (7%) 证明题:

1. 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的线性无关的解向量, β 不是其解向量.

证明: $\beta, \beta + \eta_1, \beta + \eta_2, \dots, \beta + \eta_t$ 也线性无关.

证明: 因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的线性无关的解向量, β 不是其解向量.

所以 $\beta, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关, 否则 β 能由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表示, 从而是线性方程组 $Ax = \theta$ 的解, 矛盾!

假若 $k_1\beta + k_2(\beta + \eta_1) + k_3(\beta + \eta_2) + \dots + k_{t+1}(\beta + \eta_t) = \theta$,

则 $(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{t+1})\beta + k_2\eta_1 + k_3\eta_2 + \dots + k_{t+1}\eta_t = \theta$.

于是 $(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{t+1}) = k_2 = k_3 = \dots = k_{t+1} = 0$,

即 $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_{t+1} = 0$.

所以 $\beta, \beta + \eta_1, \beta + \eta_2, \dots, \beta + \eta_t$ 线性无关.

2. 设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明: $|I+A| > 1$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵.

证明: 因为 A 是 n 阶正定矩阵, 所以 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都是正数.

于是存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{因而 } |I+A| &= |P^{-1}| |I+A| |P| = |P^{-1}(I+A)P| = |I + P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\lambda_n \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots(1+\lambda_n) > 1. \end{aligned}$$



生活的辩证法就是这样:
当苦难压来时,
只有具备善良的愿望, 坚定信念的人;
只有不计回报, 只求奉献的人;
只有坚强不屈, 不屈不挠的人,
才有希望越过苦难, 收获甘甜。
苦难的尽头将是:
你不期而遇的幸福,
不曾奢望的甘甜。

——摘自《知音》1999.5 下半月版

04-05 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 (24%) 填空题:

1. 以点 $A(1, 1, 2), B(-2, -1, 1), C(-1, 1, -1)$ 为顶点的三角形的面积为 $\sqrt{101}/2$;
2. 设 3 阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], B = [\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_3, \alpha_1]$. 若 A 的行列式 $|A| = 3$, 则 B 的行列式 $|B| = \underline{-6}$.
3. 若向量 $\alpha = (1, 0, 1), \beta = (2, 1, -1), \gamma = (-1, 1, k)$ 共面, 则参数 $k = \underline{-4}$;
4. 若 A 为 n 阶方阵, 则方阵 $B = \begin{bmatrix} I & O \\ A & 2I \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $B^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -\frac{1}{2}A & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}$ (其中 I 是 n 阶单位矩阵, O 是 n 阶零矩阵);
5. 已知向量 $\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征向量, 则参数 $a = \underline{1}$, 相应的特征值等于 $\underline{3}$;
6. 假设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则在实矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 中, 与 A 相抵的有 $\underline{B, C, D, F}$; 与 A 相似的有 \underline{F} ; 与 A 相合的有 $\underline{B, C}$;

二 (8%) 计算行列式

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 & 0 \\ x & 1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第 3 列展开}} (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ x & 1-x & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\
 & \quad \times (-1) \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{matrix} \\
 & = (1-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & 1-x & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^2 (1-x-x^2).
 \end{aligned}$$

三 (10%) 假设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求矩阵方程 $3X = B + XA$ 的解.

解: 原方程可化为 $X(3I - A) = B$, 其中 I 表示单位矩阵, $3I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 3I-A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ B(3I-A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

于是可得 $X = B(3I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$. (注意 X 未必等于 $(3I - A)^{-1}B$!)

四 (14%) 假设矩阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. 已知齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的基础解系中含有两个线性无关的解向量, 试确定这时参数 λ 的值, 并求这时 $Ax = \theta$ 的一个基础解系.
2. 若在非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集中存在两个线性无关的解向量, 但不存在更多的线性无关的解向量, 试确定这时参数 λ 及 a 的值, 并求这时 $Ax = b$ 的通解.

解: 1. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{bmatrix}$.

因为齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的基础解系中含有两个线性无关的解向量,

所以秩(A) = 1, 因而 $\lambda = 1$. 此时 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

由此可得 $Ax = \theta$ 的一个基础解系:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. 若非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集中有两个线性无关的解向量, 但不存在更多的线性无关的解向量, 则 $Ax = \theta$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量.

所以秩(A, b) = 秩(A) = 2. 此时 $\lambda = -1$.

$$[A, b] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}.$$

可见 $a = -2$, $Ax = b$ 化为 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 3/2 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$, 于是 $Ax = b$ 的通解为:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c \text{ 为任意数}).$$

五 (10%) 已知直线 l 过点 $P(1, 1, 3)$, 与平面 $\pi: x + y - z = 1$ 平行, 且与直线 λ :

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ 相交. 求直线 l 的方向向量, 并写出直线 l 的方程.

解: 过点 $P(1, 1, 3)$ 且与平面 $\pi: x + y - z = 1$ 平行的平面方程为: $(x-1) + (y-1) - (z-3) = 0$, 即: $x + y - z = -1$.

把直线 λ 的参数方程: $x = t, y = 2t, z = t+1$ 代入 $x + y - z = -1$ 得 $t = 0$.

故直线 λ 与平面 $x + y - z = -1$ 的交点为 $Q(0, 0, 1)$, 且点直线 PQ 平行于平面 π .

因此直线 l 的方向向量可取为 $\{1-0, 1-0, 3-1\} = \{1, 1, 2\}$.

直线 l 的方程为 $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$.

六 (10%) 假设二次曲面 π_1 的方程为: $x^2 + 4y^2 = 2z$; 平面 π_2 的方程为: $x = z - 1$.

1. π_1 与 π_2 的交线向 xOy 平面作投影所得的投影曲线 l 的方程为. $\begin{cases} (x-1)^2 + 4y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$.

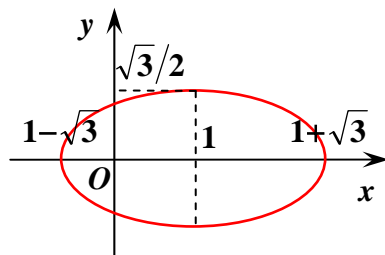
该投影曲线绕 x 轴旋转所得的旋转曲面 π 的方程为 $(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 3$.

2. 在坐标系(1)中画出投影曲线 l 的草图(请给坐标轴标上名称).

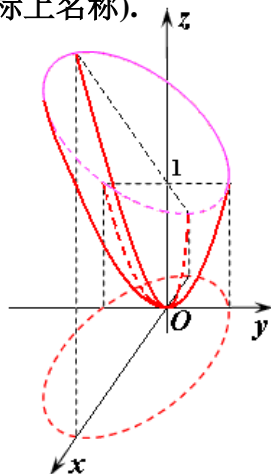
解: 投影曲线 l 的草图如(1)所示.

3. 在坐标系(2)中画出 π_1 与 π_2 所围成的立体的草图(请给坐标轴标上名称).

解: π_1 与 π_2 所围成的立体的草图如(2)所示.



(1) 投影曲线 l 的草图



(2) π_1 与 π_2 所围成的立体的草图

七 (14%) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2kx_1x_3$.

- 试就参数 k 不同的取值范围, 讨论二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型.
- 假设 $k > 0$. 若经正交变换 $x = Qy$, $f(x_1, x_2, x_3)$ 可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$, 求参数 k 及一个合适的正交矩阵 Q .

解: 1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2kx_1x_3$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$$A \text{ 的特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -k \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -k & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1-k)(\lambda+1+k).$$

A 的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k-1, \lambda_3 = -1-k$.

k 的取值	$k < -1$	$k = -1$	$-1 < k < 1$	$k = 1$	$k > 1$
$\lambda_2 = k-1$	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0
$\lambda_3 = -1-k$	> 0	$= 0$	< 0	< 0	< 0
$f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型	单叶双曲面	双曲柱面	双叶双曲面	双曲柱面	单叶双曲面

2. 若经正交变换 $X = QY$, $f(x_1, x_2, x_3)$ 可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

则 A 的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k-1 = 2, \lambda_3 = -1-k = -4$. 即 $k = 3$.

此时由 $(\lambda_i I - A)x = \theta$ 求得 A 的分别对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 和 $\lambda_3 = -4$ 的特征值向量

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

它们已经两两正交, 单位化得 $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

令 $Q = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$, $x = Qy$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

四 (10%) 证明题.

- 假设 n 维向量 $\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2, \beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$. 若 β_1, β_2 线性无关. 证明: α_1, α_2 线性无关, 且行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

证明: 令 $A = [\alpha_1, \alpha_2], B = [\beta_1, \beta_2], C = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, 则 $B = AC$.

所以 $\text{秩}(B) \leq \text{秩}(A) \leq 2, \text{秩}(B) \leq \text{秩}(C) \leq 2$.

若 β_1, β_2 线性无关, 则 $\text{秩}(B) = 2$. 因而 $\text{秩}(A) = \text{秩}(C) = 2$.

所以 α_1, α_2 线性无关, 且行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

2. 假设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 并且, A 的特征值均大于 a, B 的特征值均大于 b , 证明: $A+B$ 的特征值均大于 $a+b$.

证明: 由假设条件可知, 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > a$. 于是

$$P^{-1}(A-aI)P = \begin{bmatrix} \lambda_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - a \end{bmatrix},$$

其中, I 是 n 阶单位矩阵, $\lambda_1 - a, \lambda_2 - a, \dots, \lambda_n - a > 0$.

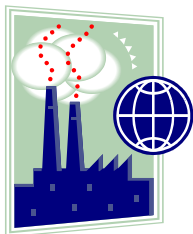
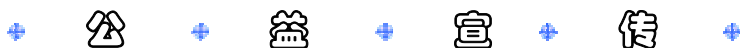
所以 $A-aI$ 是正定矩阵. 类似的, $B-bI$ 也是正定矩阵.

因而对于任意的 n 维向量 x ,

$$x^T(A+B-(a+b)I)x = x^T(A-aI)x + x^T(B-bI)x > 0.$$

这就是说, $A+B-(a+b)I$ 也是正定矩阵. 因此其特征值都大于 0.

下面设 λ 是 $A+B$ 的任意一个特征值, 则 $\lambda-(a+b)$ 是 $A+B-(a+b)I$ 的特征值, 故 $\lambda-(a+b) > 0$, 即 $\lambda > a+b$.



保护环境



节约资源



关爱弱者

05-06 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 (24%) 填空题:

1. 过点 $P(1, 0, 1)$ 且与直线 $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 垂直的平面的方程为 $\underline{2x + y + z - 3 = 0}$;
2. 设 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $P^5 A Q^5 = \begin{bmatrix} c + 5d & d \\ a + 5b & b \end{bmatrix}$.
3. 直角坐标系中向量 $\alpha = (1, 1, 2)$ 与 $\beta = (1, 0, 1)$ 的向量积为 $\underline{(1, 1, -1)}$;
4. 若 3×3 矩阵 A 的秩为 2, α_1, α_2 是线性方程组 $Ax = b$ 的解向量, 并且 $\alpha_1 + \alpha_2 = (2, 2, 4)^T$, $\alpha_1 - \alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, 则 $Ax = b$ 的通解是 $\underline{x = k(0, 1, 1)^T + (1, 3/2, 5/2)^T}$.
5. 设 A 是 3×3 矩阵, 若矩阵 $I + A$, $2I - A$, $2I - 3A$ 均不可逆 (其中 I 表示 3 阶单位矩阵), 则行列式 $|A| = \underline{-4/3}$.
6. 若 3 是 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值, 行列式 $|A| = 2$, 则 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值为 $\underline{2/3}$.
7. 若 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2kxz = 1$ 表示一单叶双曲面, 则 k 满足条件是 $\underline{k > 1 \text{ 或 } k < -1}$.
8. 设 α 是 n 维列向量 ($n > 1$), 则 n 阶方阵 $A = \alpha\alpha^T$ 的行列式 $|A|$ 的值为 $\underline{0}$.

二 (12%) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} , B^{-1} 以及矩阵 X , 使

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix}, \text{ 其中 } O \text{ 表示相应的零矩阵.}$$

解: $[A, I, C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I, A^{-1}, A^{-1}C],$

$[B, I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = [I, B^{-1}].$

于是可得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$,

$$X = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}C \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

三 (12%) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 问: 参数 l, m 满足什么条件时, 向量组 $\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 也线性无关?

解: 因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 $\text{秩}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$.

向量组 $\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 线性无关等价于 $\text{秩}(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) = 3$.

而 $(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$, 其中 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}$,

并且有 $\text{秩}(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) \leq \text{秩}(P) \leq 3$.

所以向量组 $\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow \text{秩}(P) = 3 \Leftrightarrow \text{行列式}|P| = 1 + lm \neq 0$
 $\Leftrightarrow lm \neq -1$.

四 (14%) 已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为:

$$\pi_1: x + y + 2z = 1, \pi_2: x + \lambda y + z = 2, \pi_3: \lambda x + y + z = 1 + \lambda.$$

1. 问: λ 取何值时这三个平面交于一点? 交于一直线? 没有公共交点?

2. 当它们交于一直线时, 求该直线的方程.

解: 1. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 + \lambda \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 + \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \end{bmatrix} = C.$$

这三个平面交于一点 $\Leftrightarrow \text{秩}(A) = \text{秩}(B) = 3 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 1$.

这三个平面交于一直线 $\Leftrightarrow \text{秩}(A) = \text{秩}(B) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

这三个平面没有公共交点 $\Leftrightarrow \text{秩}(A) < \text{秩}(B) \Leftrightarrow \lambda = 0$.

2. 当这三个平面交于一直线时, $\lambda = 1$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是可得交线的方程为 $\begin{cases} x + y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$.

五 (12%) 已知 3×3 矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$ 有一个二重特征值.

1. 试求参数 a 的值, 并讨论矩阵 A 是否相似于对角阵.

2. 如果 A 相似于对角阵, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 是对角阵.

解: 1. A 的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ a & \lambda - 2 & -a - 3 \\ a + 3 & 0 & \lambda - a - 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - a - 2)$.

A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = a + 2$.

因为 A 有一个二重特征值, 所以 $\lambda_3 = -1$ 或 2 , 即 $a = -3$ 或 0 .

$$\text{当 } a = -3 \text{ 时, } \lambda_3 = \lambda_1 = -1, -I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{秩}(-I - A) = 1,$$

因而 $\lambda_3 = \lambda_1 = -1$ 有2个线性无关的特征向量, 此时 A 相似于对角阵.

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, } \lambda_3 = \lambda_2 = 2, 2I - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{秩}(2I - A) = 2,$$

因而 $\lambda_3 = \lambda_2 = 2$ 只有1个线性无关的特征向量, 此时 A 不相似于对角阵.

2. 当 $a = -3$ 时, $(-I - A)x = 0$ 的基础解系可取为

$$p_1 = (1, -1, 0)^T, p_2 = (0, 0, 1)^T.$$

$$2I - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, (2I - A)x = 0 \text{ 的基础解系可取为}$$

$$p_3 = (0, 1, 0)^T,$$

$$\text{令 } P = (p_1, p_2, p_3), \text{ 则 } P \text{ 可逆, 且 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

六 (12%) 假设 A, B 是实对称矩阵. 证明: 分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 是正定矩阵的充分必要条

件是 A, B 都是正定矩阵.

证明: (充分性)

[方法一]

A, B 都是正定矩阵

\Rightarrow 对于任意非零的列向量 X, Y (其中 X, Y 的维数分别等于 A, B 的阶数), 有

$$X^T A X > 0, Y^T B Y > 0$$

\Rightarrow 对于任意非零的列向量 $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ (其中 X, Y, Z 的维数分别等于 A, B, M 的阶数),

$$Z^T M Z = [X^T, Y^T] \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = X^T A X + Y^T B Y > 0$$

$\Rightarrow M$ 是正定矩阵.

[方法二]

A, B 都是正定矩阵

$\Rightarrow A$ 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 以及 B 的特征值 μ_1, \dots, μ_t 都大于零 (其中 s, t 分别为 A, B 的阶数)

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t$ 都大于零

$\Rightarrow M$ 是正定矩阵.

[方法三]

A, B 都是正定矩阵

\Rightarrow 存在可逆矩阵 P, Q 使得 $P^TAP = I_s, Q^TBQ = I_t$, (其中 I_s, I_t 为单位矩阵, 阶数分别与 A, B 的阶数相同)

\Rightarrow 存在可逆矩阵 $\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$, 使得

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^T & O \\ O & Q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^TAP & O \\ O & Q^TBQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_t \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M$ 是正定矩阵.

[方法四]

A, B 都是正定矩阵

\Rightarrow 存在可逆矩阵 P, Q 使得 $A = P^TP, B = Q^TQ$ (其中 P, Q 的阶数分别与 A, B 的阶数相同)

\Rightarrow 存在可逆矩阵 $\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$, 使得

$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^TP & O \\ O & Q^TQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M$ 是正定矩阵.

[方法五]

A, B 都是正定矩阵

$\Rightarrow A, B$ 的各阶顺序主子式都大于零

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 的各阶顺序主子式都大于零

(事实上, 设 A, B 的阶数分别为 s, t ; Δ_k 是 M 的 k 阶顺序主子式,

则当 k 小于或等于 s 时, Δ_k 也是 A 的 k 阶顺序主子式, 因而大于零;

当 k 大于 s 时, $\Delta_k = |A| \Delta_{k-s}$, 其中 Δ_{k-s} 是 B 的 $k-s$ 阶顺序主子式, 因而 Δ_k 大于零)

$\Rightarrow M$ 是正定矩阵.

(必要性)**[方法一]**

M 是正定矩阵

\Rightarrow 对于任意非零的列向量 Z (其中 Z 的维数等于 M 的阶数), 有 $Z^TMZ > 0$

\Rightarrow 对于任意非零的列向量 X, Y (其中 X, Y 的维数分别等于 A, B 的阶数), $Z_1 = \begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix}$ 和

$Z_2 = \begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix}$ 都非零 (其中 Z_1, Z_2 的维数都等于 M 的阶数, θ 为相应的零向量), 于是有

$$X^TAX = [X^T, \theta^T] \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix} = Z_1^TMZ_1 > 0,$$

$$Y^TBY = [\theta^T, Y^T] \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix} = Z_2^TMZ_2 > 0$$

$\Rightarrow A, B$ 都是正定矩阵.

[方法二]

设 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, B 的特征值 μ_1, \dots, μ_t (其中 s, t 分别为 A, B 的阶数), 则 M 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t$.

若 M 是正定矩阵, 则 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t$ 都大于零, 因而 A, B 都是正定矩阵.

[方法三]

设 A, B 的阶数分别为 s, t .

若 M 是正定矩阵, 则存在 $s+t$ 阶可逆矩阵 U 使得

$$U^T M U = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_t \end{bmatrix} \text{ (其中 } I_s, I_t \text{ 分别为 } s, t \text{ 阶单位矩阵)}$$

将 U 分块为 $\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$, 其中 U_{11}, U_{22} 分别为 s, t 阶矩阵,

$$\text{则 } \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_t \end{bmatrix} = U^T M U = \begin{bmatrix} U_{11}^T & U_{21}^T \\ U_{12}^T & U_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^T A U_{11} & O \\ O & U_{22}^T B U_{22} \end{bmatrix}.$$

因而 U_{11}, U_{22} 都可逆, 且 $U_{11}^T A U_{11} = I_s, U_{22}^T B U_{22} = I_t$.

所以 A, B 都是正定矩阵.

[方法四]

设 A, B 的阶数分别为 s, t .

若 $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 是正定矩阵, 则 M 的各阶顺序主子式都大于零.

于是, 我们可以断言 A, B 的各阶顺序主子式都大于零.

事实上, 假若 A 有一个 k 阶顺序主子式 $\Delta_k \leq 0$,

由于 Δ_k 也是 M 的 k 阶顺序主子式, 这就与 M 是正定矩阵矛盾!

假若 A 的各阶顺序主子式都大于零, 而 B 有一个 k 阶顺序主子式 $\Delta_k \leq 0$,

则 M 的 $s+k$ 阶顺序主子式的值等于 $|A| \Delta_k \leq 0$ (注意行列式 $|A| > 0$),

这又与 M 是正定矩阵矛盾!

所以 A, B 都是正定矩阵.

七 (8%) 由与平面 $z = -1$ 及点 $M(0, 0, 1)$ 等距离运动的动点 $P(x, y, z)$ 所生成的曲面记为 π_1 , 将

yOz 平面上曲线 $\begin{cases} y^2 + z = 5 \\ x = 0 \end{cases}$ 以 z 轴为旋转轴所生成的旋转曲面记为 π_2 . 则

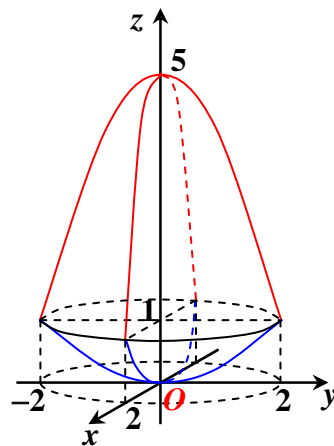
1. π_1 的方程为 $4z = x^2 + y^2$.

2. π_2 的方程为 $x^2 + y^2 + z = 5$.

3. π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程是

$x^2 + y^2 = 4$.

4. 在右边的坐标系中画出由这两个曲面所围成的有限立体的简图.



八 (6%)证明题.

1. 若 2×2 矩阵 A 的行列式 $|A| < 0$. 证明: A 一定相似于对角阵.

证明: 设 A 的特征值为 λ_1, λ_2 , 则 $\lambda_1 \lambda_2 = |A| < 0$.

所以 λ_1 和 λ_2 是异号的两个实数.

而 A 的阶数恰好为2, 因而 A 一定相似于对角阵.

2. 假设 $n \times n$ 实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, α 是 A 的属于特征值 λ_1 的单位特征向量, 矩阵 $B = A - \lambda_1 \alpha \alpha^T$. 证明: B 的特征值为 $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

证明: 由假设条件可知, 存在 n 阶正交矩阵 $P = [\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

于是

$$P^TBP = P^T(A - \lambda_1 \alpha \alpha^T)P = P^TAP - \lambda_1 P^T(\alpha \alpha^T)P = P^TAP - \lambda_1 (P^T \alpha)(\alpha^T P)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha^T [\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n])$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [1, 0, \dots, 0]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

GOOD LUCK!

东南大学考试卷(A卷)

课程名称 几何与代数 考试学期 07-08-2 得分 _____
 适用专业 工科电类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一. (21%) 填空题

1. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, n 是正整数, 则 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{pmatrix}$;
2. 假设 4 阶方阵 $A = (\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $B = (\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 的行列式分别等于 2, 3, 矩阵 $A+B$ 的行列式 $|A+B| = 40$;
3. 点 $P(1, 2, 3)$ 到平面 $2x + y - z = 5$ 的距离为 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$;
4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix}$, 则满足 $AP=B$ 的初等矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
5. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$ 正定的充分必要条件是参数 x 满足条件 $0 < x < 2$;
6. 已知二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2tyz$, 若 $f(x, y, z) = 1$ 表示直角坐标系中的单叶双曲面, 则参数 t 满足条件 $t^2 > 1$ 或 $t < -1$ 或 $t > 1$;
7. 设 $n > s$, 若 A 是 $s \times n$ 矩阵, 则 n 阶方阵 $A^T A$ 的行列式 $|A^T A| = 0$.

二. (9%) 选择题

1. 假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, 若对任意 2 阶方阵 B 都有 $AB=BA$, 则 $(a, b, c) = \underline{B}$;
 A. (1, 1, 1); B. (1, 0, 0); C. (0, 1, 0); D. (0, 0, 1)
2. 假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 下述结论中完全正确的一项是 C
 A. A 与 C 相似, B 与 D 合同; B. A 与 C 合同, B 与 D 相似;
 C. A 与 B 相似, C 与 D 合同; D. A 与 B 合同, C 与 D 相似.
3. 假设 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 则必定有 C
 A. 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$; B. 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^T AP = B$
 C. 存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$; D. $A(A+B)B$ 是可逆矩阵.

三. (16%) 已知平面 π 的方程为 $x-y+z=1$, 直线 l 的方程为 $\begin{cases} x+ty+z=-7 \\ 3x-2y+tz=1 \end{cases}$.

1. 问: 当 t 取何值时, l 与 π 有惟一交点?
2. 问: 当 t 取何值时, l 与 π 没有公共交点?
3. 问: 当 t 取何值时, l 在 π 内? 求这时 l 的对称方程.

解: 联立平面 π 和直线 l 的方程得 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+ty+z=-7 \\ 3x-2y+tz=1 \end{cases}$, 其增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & -7 \\ 3 & -2 & t & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-3 & -2 \\ 0 & 0 & (t-3)(t+1) & 2(t-3) \end{array} \right) \xrightarrow{\text{记为 } C}$$

由此可见, 当 $t \neq 3$ 且 $t \neq -1$ 时, 上述方程组有惟一解, 即 l 与 π 有惟一交点.

当 $t = -1$ 时, 上述方程组无解, 即 l 与 π 没有公共交点.

当 $t = 3$ 时, 上述方程组有无数解, 即 l 在 π 内.

此时, $(1, t, 1) \times (3, -2, t) = (1, 3, 1) \times (3, -2, 3)$

$$= \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (11, 0, -11),$$

因此直线 l 的方向向量可取为 $(1, 0, -1)$.

在 $\begin{cases} x+3y+z=-7 \\ 3x-2y+3z=1 \end{cases}$ 中令 $z=0$ 可得 $x=-1, y=-2$. 即直线 l 过点 $P(-1, -2, 0)$

故 l 的对称方程为 $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{-1}$.

四. (14%) 假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X , 使得 $A^{-1}X = 2X - B$.

解: $AX = 2X - B \Leftrightarrow X = 2AX - AB \Leftrightarrow (E - 2A)X = -AB \Leftrightarrow X = (E - 2A)^{-1}(-AB)$

$$E - 2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad -AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(E - 2A, -AB) = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{由此可得 } X = (E - 2A)^{-1}(-AB) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

五. (16%) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似。

1. 求参数 a, b 的值;

2. 求一可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$ 。

3. 问: 是否存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = B$? 为什么?

解: 1. A 与 B 相似 $\Rightarrow |A| = |B|$ 且 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \Rightarrow \begin{cases} 2a-3 = b \\ 3+a = 2+b \end{cases}$

$\Rightarrow a = 4, b = 5$.

2. 由条件及 $a=4, b=5$ 可知 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$.

且 $(E-A)X=0$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, 1)^T$,

$(5E-A)X=0$ 的一个基础解系为: $\xi_3 = (1, -2, 3)^T$.

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = B$.

3. 假设存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = B$.

则 $A = Q Q^T A Q Q^T = Q B Q^T$.

$A^T = (Q B Q^T)^T = Q B^T Q^T = Q B Q^T = A$

即 A 为对称矩阵, 但事实上 A 不是对称矩阵.

此矛盾表明: 不存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = B$.

六. (8%) 已知空间直角坐标系中曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} 3z = (y+1)(y-1) \\ x = 0 \end{cases}$, 平面 π_1 的方

程为 $x+z=2$. 记 π_2 是 Γ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面。

1. 求 π_2 的方程;

2. 求 π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线 Ω 的方程。

解: 1. 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 替换 $3z = (y+1)(y-1)$ 中的 y 得 π_2 的方程: $3z = x^2 + y^2 - 1$.

2. 由 $\begin{cases} x+z=2 \\ 3z = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$ 消去 z 得 $6-3x = x^2 + y^2 - 1$ 即 $x^2 + y^2 + 3x - 7 = 0$

故 π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线 Ω 的方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

七. (12%) 假设 A 是 2 阶方阵, x 是 2 维非零列向量, 并且 x 不是 A 的特征向量。

1. 证明: x, Ax 线性无关;

2. 若 $A^2x + Ax - 6x = 0$, $B = (x, Ax)$, 求矩阵 C , 使得 $AB = BC$;

3. 若 $A^2x + Ax - 6x = 0$, 求 A 的特征值, 并问: A 是否相似于对角阵? 为什么?

证明 1: 假设 x, Ax 线性相关, 则 x 与 Ax 成比例。

又因为 $x \neq 0$, 故可设 $Ax = kx$, 可见 x 是 A 的特征向量。

但这与已知条件矛盾! 故 x, Ax 线性无关。

解 2: 由 1 知 $B = (x, Ax)$ 为可逆矩阵, 又因为 $A^2x + Ax - 6x = 0$, 所以

$$AB = A(x, Ax) = (Ax, A^2x) = (Ax, -Ax + 6x) = (x, Ax) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{可见 } B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 故 } AB = BC \Leftrightarrow C = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. 由上题可知 A 与 $C = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似

$$\text{故 } |\lambda E - A| = |\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3)$$

可见 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

因为 A 是 2 阶方阵, 且有两个不同的特征值,

所以 A 相似于对角矩阵。

八. (4%) 证明: 对于任意 $s \times n$ 实矩阵 B , n 阶方阵 $A = I + B^T B$ 的特征值全大于零。

证明: 对于任意 $s \times n$ 实矩阵 B , $A = I + B^T B$ 也是实矩阵,

$$\text{且 } A^T = (I + B^T B)^T = I^T + (B^T B)^T = I + B^T B = A.$$

可见 A 为 n 阶实对称矩阵。

又因为对于任意 n 维非零列向量, 有

$$x^T A x = x^T (I + B^T B) x = x^T I x + x^T B^T B x = x^T x + (Bx)^T (Bx) > 0$$

可见 A 是正定的, 故 A 的特征值全大于零。