

东南大学学生会  
Students' Union of Southeast University

07-08-2高数AB期末试卷

一. 填空题 (本题共 9 小题, 每小题 4 分, 满分 36 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x^2}} =$  \_\_\_\_\_;
2. 设  $y = x^{\sin \frac{1}{x}}$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_;
3. 已知  $f'(3) = 2$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{\sin 2h} =$  \_\_\_\_\_;
4. 对数螺线  $\rho = e^\theta$  在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  对应的点处的切线方程是 \_\_\_\_\_;
5. 设  $y = y(x) \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < \sqrt{\frac{5\pi}{2}} \right)$  是由方程  $\int_0^y e^{t^2} dt - \int_0^x \cos t^2 dt = 0$  确定的隐函数, 则  $y(x)$  的单调增加区间是 \_\_\_\_\_, 单调减少区间是 \_\_\_\_\_;
6. 曲线  $y = xe^{-2x}$  的拐点坐标是 \_\_\_\_\_, 渐进线方程是 \_\_\_\_\_;
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+3} + \frac{n}{n^2+12} + \cdots + \frac{n}{n^2+3n^2} \right) =$  \_\_\_\_\_;
8.  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{1+\cos 2x} + \cos x^2 \sin^3 x) dx =$  \_\_\_\_\_;
9. 二阶常系数线性非齐次微分方程  $y'' + y = 2\sin x$  的特解形式为  $y^* =$  \_\_\_\_\_.

二. 计算下列积分 (本题共 3 小题, 每小题 7 分, 满分 21 分)

10.  $\int_0^2 x^2 \sqrt{2x-x^2} dx$
11.  $\int \arctan(1+\sqrt{x}) dx$
12.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$

东南大学学生会  
Students' Union of Southeast University

三 (13). (本题满分 8 分) 设  $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ ,  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & x < 0 \end{cases}$ .

(1) 问  $F(x)$  是否为  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的一个原函数? 为什么? (2) 求  $\int f(x)dx$ .

四 (14). (本题满分 7 分) 设  $f(x) = \int_{x^2}^x \frac{\sin(xt)}{t} dt$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ .

五 (15). (本题满分 6 分) 求微分方程  $(y \cos x + \sin 2x)dx - dy = 0$  的通解.

六 (16). (本题满分 8 分) 设  $f(x)$ 、 $g(x)$  满足  $f'(x) = g(x)$ ,  $g'(x) = 2e^x - f(x)$ , 且

$f(0) = 0, g(0) = 2$ , 求  $\int_0^\pi \left( \frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right) dx$

七 (17). (本题满分 8 分) 设直线  $y = ax$  ( $0 < a < 1$ ) 与抛物线  $y = x^2$  所围成的图形面积

为  $S_1$ , 它们与直线  $x = 1$  所围成的图形面积为  $S_2$ . (1) 试确定  $a$  的值, 使  $S_1 + S_2$  达到最小,

并求出最小值. (2) 求该最小值所对应的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

八 (18). (本题满分 6 分) 设  $f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2 dt$ , 求证: 当  $x > 0$  时,  $|f(x)| < \frac{1}{x}$ .