

2005 级高等数学 (A) (上) 期中试卷

一. 填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2+1} = 2$ 2. $k = \frac{3}{4}$ 3. $dy|_{x=\pi} = -\pi dx$
4. $e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ 5. $a=1, b=-1$ 。

二. 单项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

6. C 7. C 8. C 9. B

三. 计算题 (本题共 5 小题, 每小题 7 分, 满分 35 分)

10. $\frac{1}{2}$ 11. $3 \ln 2$ 12. 1
13. $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \frac{2^{n+1} n!}{(1-2x)^{n+1}}$ 14. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + 2x \cos(x^2 + y^2) - y^2}{2xy - 2y \cos(x^2 + y^2)}$ 。

四. (本题共 4 道题, 满分 29 分)

15. (本题满分 6 分) (相关变化率问题) 半径增加的速率是 $\frac{1}{2\pi} (cm/s)$ 。

16. (本题满分 7 分) 用单调性来证。(提示: 设 $F(x) = e^x - 1 - xe^{\frac{x-1}{2}}$, 则
 $F'(x) = e^{\frac{x-1}{2}} (e^{\frac{x+1}{2}} - 1 - \frac{x}{2})$, 考虑 $g(x) = e^{\frac{x+1}{2}} - 1 - \frac{x}{2}$ 的符号即可)。

17. (本题满分 8 分) 所求点为 $P(2\sqrt{2}, 2)$, 弦 PQ 的最短长度为 $6\sqrt{3}$ 。

18. (本题满分 8 分) 提示: (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 用罗尔定理即可得证。

- (2) 利用 (1) 的结论, 对 $f(x)$ 在区间 (a, c) 、 (c, b) 分别用拉格朗日中值定理即可得证。