04高A下期末试卷

一、填空题(本题共5小题，每小题4分，满分20分)

1．曲面 $2xy+4z-e^z=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的法线方程________.

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n\ln(n+1)}x^n$ 的收敛域为________.

3. 交换积分次序: $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx=$________.

4. 设曲线 C 为圆周 $x^2+y^2=1$, 则曲线积分 $\oint_C(x^2+y^2-3x)ds=$________.

5. 当 $\alpha=$_____, $\beta=$______时, 向量场 $\mathbf{A}=(2x+\alpha y)\mathbf{i}+(x+3z)\mathbf{j}+(\beta y-z)\mathbf{k}$ 为有势场.

二、单项选择题(本题共4小题，每小题4分，满分16分)

1. 在下列级数中，收敛的级数是

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ （B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n+1}$ （C）$\sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n}$ （D）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$

2．设区域 D 由直线 $y=x, y=-x$ 和 $x=1$ 围成，D_1 是 D 位于第一象限的部分，则[ ]

（A）$\iint\limits_D(xy+y\sin(xy))dxdy=2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

（B）$\iint\limits_D(xy+y\sin(xy))dxdy=2\iint\limits_{D_1}y\sin(xy)dxdy$

（C）$\iint\limits_D(xy+y\sin(xy))dxdy=2\iint\limits_{D_1}(xy+y\sin(xy))dxdy$

（D）$\iint\limits_D(xy+y\sin(xy))dxdy=0$

3．设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{ds}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的值为 [ ]

（A）4π （B）$\frac{16}{5}\pi$ （C）$\frac{16}{3}\pi$ （D）$\frac{8}{3}\pi$

4．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 存在是函数 f 在该点可微的 [ ]

(A) 充分而非必要条件 （B）必要而非充分条件

（C）充分必要条件 （D）既非充分也非必要条件

三、（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 3 5 分）

1． 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-2z=f\left(y^2-3z\right)$所确定的隐函数，其中 f 可微，求

$2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+3x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2． 确定λ的值，使曲线积分$\int_C\left(x^2+4xy^\lambda\right)\mathrm{d}x+\left(6x^{\lambda-1}y^2-2y\right)\mathrm{d}y$在 XoY 平面上与路径无关。当起点为$(0,0)$，终点为$(3,1)$时，求此曲线积分的值。

3． 将函数 $f(x)=\ln\left(x^2+x-2\right)$展成$x-2$的幂级数。

4． 设 $f(x)=\begin{cases}x, 0\le x<1\\0, 1\le x<2\end{cases}$，（1）试将 $f(x)$在$[0,2]$上展成正弦级数；（2）记此正弦级数的和函数为$S(x)$，求$S(1)$和$S(\frac{7}{2})$。

5. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ 分别在圆环域(1)$0<|z-1|<2$； (2)$3<|z+2|<+\infty$内展成罗朗级数。

四．（本题满分 7 分） 计算复积分 $\oint_{|z|=2}\dfrac{z}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}\mathrm{d}z$

五．（本题满分 8 分） 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数。

六．（本题满分 8 分） 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$的敛散性。若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

七．（本题满分 6 分） 设级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^{k+1}$ 在$[0,1]$上收敛，其和函数为 $f(x)$，证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$收敛。