

东南大学学生会  
Students' Union of Southeast University

05-06-2高数AB期末试卷

一. 填空题 (本题共 9 小题, 每小题 4 分, 满分 36 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^6} =$  \_\_\_\_\_;
2. 曲线  $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$  的斜渐近线方程是 \_\_\_\_\_;
3. 设  $y = y(x)$  是由方程  $y \ln y = \ln x$  所确定的隐函数, 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_;
4. 设  $f$  在区间  $[0, \pi]$  上连续, 且  $f(x) = \sin x + \int_0^x f(x) dx$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_;
5. 设  $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $\int_1^3 f(x-2) dx =$  \_\_\_\_\_;
6.  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2 + \cos x} dx =$  \_\_\_\_\_;
7. 曲线  $y = \ln x$  相应于  $1 \leq x \leq 3$  的一段弧长可用积分 \_\_\_\_\_ 表示;
8. 已知  $y_1 = e^{-x}$  与  $y_2 = e^{2x}$  分别是微分方程  $y'' + ay' + by = 0$  的两个特解, 则常数  $a =$  \_\_\_\_\_, 常数  $b =$  \_\_\_\_\_;
9.  $f''(x_0) = 0$  是曲线  $y = f(x)$  以点  $(x_0, f(x_0))$  为拐点的 \_\_\_\_\_ 条件。

二. 计算下列各题 (本题共 4 小题, 每小题 7 分, 满分 28 分)

1. 设  $f(x) = \int_0^x t \sin \sqrt{x^2 - t^2} dt$ , 求  $f'(x)$
2.  $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 4} dx$

东南大学学生会  
Students' Union of Southeast University

3.  $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x} dx$

4.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}$

三. (本题满分 9 分) 设有抛物线  $\Gamma: y = a - bx^2$  ( $a > 0, b > 0$ ), 试确定常数  $a, b$  的值,

使得 (1)  $\Gamma$  与直线  $y = -x + 1$  相切; (2)  $\Gamma$  与  $x$  轴所围图形绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积最大。

四. (本题共 2 小题, 满分 14 分)

1. (本题满分 6 分) 求微分方程  $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy = 0$  的通解。

2. (本题满分 8 分) 求微分方程  $y'' - 2y' = x + e^{2x}$  满足初始条件  $y(0) = 2, y'(0) = \frac{9}{4}$  的特解。

五. (本题满分 7 分)

试证: (1) 设  $u > e$ , 方程  $x \ln x = u$  在  $x > e$  时存在唯一的实根  $x(u)$ ;

(2) 当  $u \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{x(u)}$  是无穷小量, 且是与  $\frac{\ln u}{u}$  等价的无穷小量。

六. (本题满分 6 分) 证明不等式:  $\ln \sqrt{2n+1} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 + \ln \sqrt{2n-1}$ ,

其中  $n$  是大于 1 的正整数。