11-12-2 高等数学 AB 期末试题参考答案

一、

1. $(2\ \ -5)$； 2. $y\quad x+1$； 3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； 4. $2\sqrt{2}-1$；

5. 4 6. $\mathrm{e}-\dfrac{7}{6}$； 7. $Cx\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$； 8. $\dfrac{1}{18}$；

9. $\dfrac{(-1)^n\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (0<\theta<1)$ 或者 $\dfrac{(-1)^n\cos(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, 其中 ξ 介于 0 与 x 间.

二、1. **解** 令 $t=\sqrt{x}$, 则

$$\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int t\cos t\,\mathrm{d}t = 2(t\sin t+\cos t)+C = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+C.$$

2. **解** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-x-2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+2}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{3}\ln|x-2|\Big|_0^1-\frac{1}{3}\ln|x+1|\Big|_0^1=-\frac{5}{3}\ln 2.$$

3. **解** 令 $t=1-x$, 则 $\displaystyle\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0\ln t\mathrm{d}t=\int_0^1\ln t\mathrm{d}t=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\ln t\mathrm{d}t$

$$=\lim_{a\to0^+}(t\ln t-t)\Big|_a^1=\lim_{a\to0^+}(-1-a\ln a+a)=-1.$$

4. **解** $\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\arcsin x}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$. 令 $x=\sin t,\ 0<t<\frac{\pi}{2}$, 则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}=\int\csc t\mathrm{d}t=-\ln\left|\csc t+\cot t\right|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$ 于是

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

三、**解** (1) $S(t)=3\int_0^t u^2\mathrm{d}u=t^3\,(m)$. (2) 由 $t^3=343$ 得 $t=7\,(s)$.

四、**解** 设切点的坐标为 $(b,\ b(b+1)^2+3)$, 则 $y'(b)=2b(b+1)$. 于是对应的切线方程 $y=2a(b+1)x+a(b+1)^2+3-2ab(b+1)$. 因此，由切线过原点知,

$a(b+1)^2+3-2ab(b+1)=0$. 解得 $b_1=-\sqrt{1+\dfrac{3}{a}},\ b_2=\sqrt{1+\dfrac{3}{a}}$. 即 $b_1^2=b_2^2,\ b_1+b_2=0.2$

(1) $I(a)=\int_{b_1}^0\left[a(x+1)^2+3-2a(b_1+1)x\right]\mathrm{d}x+\int_0^{b_2}\left[a(x+1)^2+3-2a(b_2+1)\right]\mathrm{d}x$

$$=(a+3)(b_2-b_1)-\frac{2}{3}a(b_2^3-b_1^3)=\frac{2}{3}(a+3)\sqrt{1+\frac{3}{a}}.$$

(2) 令 $I'(a)=\dfrac{2}{3}\sqrt{1+\dfrac{3}{a}}\left(1-\dfrac{3}{2a}\right)=0$, 得 $a=\dfrac{3}{2}$. $0<a<\dfrac{3}{2}$ 时， $I'(a)<0$, 说明 $I(a)$ 在

$(0, 3/2)$ 上严格单减；$a > \frac{3}{2}$ 时，$I'(a) > 0$, 说明 $I(a)$ 在 $(3/2, +\infty)$ 上严格单增．所以 $a = \frac{3}{2}$ 是 $I(a)$ 的极小值点，且是唯一的极小值点，因而是最小值点．故 $I_{\min} = I\left(\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{3}$.

五、解 特征方程 $r^2 + 1 = 0$ 的根为 $r_1 = -\mathrm{i}, r_2 = \mathrm{i}$. 所以对应的齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

注意到 $f(x) = \cos^2 x = (\cos x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = f_1(x) + f_2(x)$. 因为 $f_1(x) = \frac{1}{2}$ 属 $e^{\alpha x}P_m(x)$ 型 $(\alpha = 0, m = 0)$, 且 $\alpha = 0$ 不是特征根 (由此知 $k = 0$), 所以可设方程 $y_1'' + y_1 = f_1(x)$ 有特解 $y_1^* = x^k \mathrm{e}^{\alpha x} Q_m(x) = A_1$. 将之带入 y_1 所满足的方程，得 $A_1 = \frac{1}{2}$, 从而 $y_1^* = \frac{1}{2}$.

又因为 $f_2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + 0\cdot\sin(2x)$ 属 $e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right]$ 型 $(\alpha = 0, \beta = 2, m = 0, n = 0)$, 且 $\alpha + \beta\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$ 不是特征根 (由此知 $k = 0$, $L = \max\{m, n\} = 0$), 所以可设方程 $y_2'' + y_2 = f_2(x)$ 有特解 $y_2^* = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}\left[R_L(x)\cos\beta x + H_L(x)\sin\beta x\right] = \left[A_2\cos(2x) + B_2\sin(2x)\right]$. 将之带入 y_2 所满足的方程，得 $A_2 = -\frac{1}{6}$, $B_2 = 0$, 从而 $y_2^* = -\frac{1}{6}\cos(2x)$.

因此，非齐次方程的通解 $y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$. 由题意知，$y(0) = 0, y'(0) = 1$. 带入通解表达式，解得 $C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = 1$. 故所求解 $y = -\frac{1}{3}\cos x + \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$.

六、(1) **证** $\int_0^1 x(x-1)f''(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x(x-1)\mathrm{d}f'(x) = x(x-1)f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x-1)f'(x)\mathrm{d}x$

$$= -(2x-1)f'(x)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) **证** 由 (1) 的结论、积分的绝对值不等式的性质和积分的单调性质，可得

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2}\int_0^1 \left|x(x-1)f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^1 \max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right||x(x-1)|\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|\int_0^1 x(x-1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{12}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|.$$