06高A期中试卷

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．曲线 $\begin{cases} xyz=1 \\ x=y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为____________________________；

2．方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分为________________________；

3．交换二次积分的积分次序 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________________________；

4．设曲线 $C: x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}, 0\le t\le\pi$，则 $\int_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s=$________；

5．设曲面 $\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$______________________.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．设 $f(z)=2xy-\mathrm{i}\,x^2$，那么 [ ]

(A) $f(z)$ 在原点解析　　(B) $f(z)$ 在复平面上处处不可导

(C) $f(z)$ 仅在原点可导　　(D) $f(z)$ 仅在实轴上可导

7．二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$ 可以写成 [ ]

（A）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　（D）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

8．设 Ω 由 $3x^2+y^2=z, z=1-x^2$ 所围成，则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=$ [ ]

（A）$4\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$　　（B）$2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

C）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$　　（D）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{1-x^2}^{3x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

9．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\ne0 \\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,\ 0)$ 点处 [ ]

（A）连续且偏导数存在　　（B）连续但偏导数不存在

（C）不连续但偏导数存在　　（D）不连续且偏导数不存在

三. 计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10. 设 $f(x,y),g(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，令 $\varphi(x)=f(x,g(x,x^2))$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}$.

11. 求函数 $u=z^2\sqrt{x^2+2y^2}$ 在点 $M_0\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$ 处沿曲面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{2}=1$ 在该点的外法线方向上的方向导数.

12. 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=2xy+\mathrm{e}^{-y}\sin x$，求实部 $u(x,y)$ 及解析函数 $f(z)$ 和 $f'(\mathrm{i})$.

13. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \middle| z\le x^2+y^2+z^2\le 2z\right\}$

14. 计算 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$，其中 L 是由极坐标方程 $\rho=2-\sin\varphi$ 所表示的曲线上从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 的一段弧.

四（15）.（本题满分 9 分）在平面 $3x-2z=0$ 上求一点，使它与点 $A(1,1,1)$ 及点 $B(2,3,4)$ 的距离平方之和为最小.

五（16）.（本题满分 9 分）设在 xoy 平面上有薄板 $a^2\le x^2+y^2\le a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$（其中常数 $a>0$），其面密度为 $\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求此薄板的质心坐标.

六（17）.（本题满分 6 分）设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f_y\ne 0$，证明：对任意常数 C，$f(x,y)=C$ 为一直线的充分必要条件是

$$(f_y)^2 f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}+f_{yy}(f_x)^2=0$$