13-14-3高等数学A期中试卷

一、 填空题（本题共6小题，每小题4分，共24分）

1. 设 $f(x,y)=y^2\mathrm{e}^{2x}+(x-1)\arctan\dfrac{\mathrm{e}^y}{x}$，则 $f_y(1,1)=$________；

2. 设 $z=x\mathrm{e}^{xy}$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_________；

3. 曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程是______________ ;

4. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1|x-y|\mathrm{d}y=$ ________________；

5. 设 $z=x^2-xy+y^2$在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\mathbf{a}$ 的方向导数取到最大值，且 $|\mathbf{a}|=1$，则 $\mathbf{a}=$_____________；

6. 复数 $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的主值是____________.

二、 单项选择题（本题共4小题，每小题4分，共16分）

1. 设函数 $f(u)$ 连续，则 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x=$ [ ]

(A) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x-1}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(B) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0f(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}f(\rho^2)\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$

(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$

2. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\},\Omega_1$ 为 Ω 在第一卦限的部分，则下列等式成立的是 [ ]

(A) $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v=8\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v$ (B) $\iiint\limits_{\Omega} x^2y\mathrm{d}v=8\iiint\limits_{\Omega_1} x^2y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+\sin x)\mathrm{d}v=8\iiint\limits_{\Omega_1}(z^2+\sin x)\mathrm{d}v$

(D) $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+\cos x)\mathrm{d}v=8\iiint\limits_{\Omega_1}(z^2+\cos x)\mathrm{d}v$

3. 设 C 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t,y=\mathrm{e}^t\sin t,z=\mathrm{e}^t$ 上对应于 t 从 0 变到 2 的一段弧，则曲线积分 $\displaystyle\int_C\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s=$ [ ]

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\mathrm{e}^{-2}-1)$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{e}^{2})$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\mathrm{e}^{2}-1)$

4. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}v=$ [ ]

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\dfrac{3}{2}\pi$ (D) 2π.

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. 设 $z=x^2f(xy,\dfrac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 计算二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} \mathrm{d}y$.

3. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+3y-9x$ 的极值.

4. 设上半球面 $\Sigma=\{(x,y,z)|z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},R>0\}$，面密度为常数 μ，求 Σ 的质心坐标.

5. 已知函数 $u=f(x,y,z,t)$ 关于各变量都具有一阶连续偏导数，其中函数 $z=z(y)$ 和 $t=t(y)$ 由方程组 $\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0 \\ t+2z=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

四、（本题满分8分） 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是解析函数，其中实部 $u(x,y)=\mathrm{e}^{-y}\cos x+xy$，求虚部 $v(x,y)$，并求 $f(z)$ 的表达式.
(自变量单独用 z 表示)

五、（本题满分6分） 计算三次积分

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z.$$

六、（本题满分6分） 设函数 $f(u)$ 满足：$f(0)=0, f'(0)=1$，$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 2tz\}$，计算

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{t^5}.$$