06-07-2高数ＡＢ期末试卷答案

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x(\cos x-1)}=\underline{\dfrac{2}{3}}$；

2. $\underline{y=3x-7}$；

3. $\underline{(-1,0)}$；

4. $y'(0)=\underline{e^{-2}}$；

5. $\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^5}{1+x^2+x^4}-x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)dx=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$；

6. $\int_1^2 f(x)dx=\underline{\dfrac{3}{4}}$；

7. $y(1)=\underline{\pi e^{\frac{\pi}{4}}}$；

8. $\underline{y=x+\dfrac{1}{e}}$；

9. $\underline{y''-4y'+3y=0}$

二. 计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

1. 解：$\displaystyle\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx=2\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}=-2\int\arccos\sqrt{x}\,d\arccos\sqrt{x}$

$=-\left(\arccos\sqrt{x}\right)^2+C$

2. 解：$\displaystyle\int_0^{2\pi}x\left|\sin x\right|dx\underline{\underline{x=t+\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\left|\sin t\right|dt=2\pi\int_0^{\pi}\sin t\,dt=4\pi$

3. 解：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}d(x^2)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2$

4. 解：$\displaystyle\int_0^1 G(x)dx=xG(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xG'(x)dx=-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

三.（本题满分 7 分）

解： $S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2-\cos^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\mathrm{d}t$

$$=\left(\ln(\sec t+\tan t)-\frac{1}{2}\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

四.（本题共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 9 分，满分 16 分）

1．　**解：** $\left(y^2\right)'+2\cot x\left(y^2\right)=2\cos x$

$$y^2=\mathrm{e}^{-2\int\cot x\mathrm{d}x}\left(2\int\cos x\mathrm{e}^{2\int\cot x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=C\csc^2 x+\frac{2}{3}\sin x$$

2．**解：** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x-\frac{x}{2}\cos x$，　由题设条件得

$y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，求得 $C_1=0, C_2=1$，于是 $y=\sin x+x-\frac{x}{2}\cos x$

五.（本题满分 7 分）　　**解：** $I(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{a}(a-x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int_a^1(x-a)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$$=a\int_{-1}^{a}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-\int_{-1}^{a}x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int_a^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-a\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$$

令 $I'(a)=\int_{-1}^{a}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+a\mathrm{e}^{2a}-a\mathrm{e}^{2a}-a\mathrm{e}^{2a}-\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+a\mathrm{e}^{2a}=\int_{-1}^{a}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$=\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}\right)=\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{ch}2=0$，得 $a=\ln\sqrt{\mathrm{ch}2}$ 为唯一驻点，　$I''(a)=2\mathrm{e}^{2a}>0$，

$I\left(\ln\sqrt{\mathrm{ch}a}\right)$ 为 $I\left(a\right)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值，而最大值只能在端点 $x=-1, x=1$ 取得。

$I\left(-1\right)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}$，$I\left(1\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2-\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2}$，所以 $I_{\max}=I\left(-1\right)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}$

（2分）

六.（本题满分 6 分）证： $f(3)=0$，$f(x)=f'(3)(x-3)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-3)^2$，$\eta\in(2,4)$，

由于 $f''(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续，$f''(x)$ 在 $[2,4]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，故

$$\frac{m}{2}(x-3)^2\le\frac{f''(\eta)}{2}(x-3)^2\le\frac{M}{2}(x-3)^2,$$

$\frac{m}{3}\le\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=f'(3)\int_2^4(x-3)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_2^4 f''(\eta)(x-3)^2\mathrm{d}x\le\frac{M}{3}$，

即　$m\le 3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x\le M$，由介值定理知至少存在一点 $\xi\in[2,4]$，使得

$$f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$$