10-11-3 高数 A 期中试卷参考答案及评分标准 2011.4.22

一. 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 1；**2.** $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{8}\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$；**3.** $\frac{1}{2}$；**4.** $\frac{7}{4}\pi$；**5.** $\frac{4}{3}\pi a^3$．

二. 单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6. B；**7.** C；**8.** C；**9.** A．

三. 计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10. 解： $\frac{\partial z}{\partial x}=(1+\varphi')f_1$ **（3 分）** $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(1+\varphi')(-\varphi' f_{11}+f_{12})-\varphi'' f_1$ **（5 分）**．

11. 解： $f(tx,ty)=tf(x,y)$ 的等号两边对 t 求导，令 $t=1$，得 $xf_x+yf_y=f$，**（4 分）** 由

$f_y(1,-2)=4$，$f(1,-2)=2$ 得 $f_x(1,-2)=10$，**（2 分）** 所求切平面方程为

$10(x-1)+4(y+2)-(z-2)=0$，即 $10x+4y-z=0$．**（2 分）**

12. 解： $\iint\limits_D\sqrt{x}\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{\cos\varphi}\rho^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\rho=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{15}$．**（4+2+2 分）**

13. 解： $\iiint\limits_\Omega\left(xy+yz+ze^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_\Omega ze^{x^2+y^2}\mathrm{d}V=\int_0^h z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^z e^{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$ **（2+3 分）**

$=\pi\int_0^h z(e^{z^2}-1)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\left(e^{h^2}-1-h^2\right)$．**（1+2 分）**

14. 解： 双纽线极坐标方程为 $\rho^2=\cos 2\theta$，**（2 分）** $\rho\rho'=-\sin 2\theta$，

$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\theta$，**（2 分）** $\int\limits_C|y|\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho\sin\theta\cdot\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\theta=2(2-\sqrt{2})$ **（3+1 分）**

四（15）（本题满分 8 分）解： $\frac{\partial u}{\partial x}=-2y=\frac{\partial v}{\partial y}$，$v=-y^2+\varphi(x)$，**（2 分）**

$\frac{\partial v}{\partial x}=\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=2x+2$，$\varphi(x)=x^2+2x+C$，**（2 分）**

$f(z)=-2xy-2y+\mathrm{i}(x^2+2x-y^2+C)=\mathrm{i}(z^2+2z+C)$ **（2 分）** $f'(\mathrm{i})=-2+2\mathrm{i}$ **（2 分）**

五（16）（本题满分 8 分）解：设 $L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x + y + z - 33)$，**（3 分）**

令 $L_x = 2x + \lambda = 0$，$L_y = 4y + \lambda = 0$，$L_z = 6z + \lambda = 0$，得 $x = 2y = 3z$，**（2 分）**

代入 $x + y + z = 33$，求得唯一的驻点 $x = 18, y = 9, z = 6$，**（2 分）**

再由函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在约束条件 $x + y + z = 33$ 的限制下必存在最小值，故

$u_{\min} = u(18,9,6)$．**（1 分）**

六（17）（本题满分 8 分）解：曲面 $z = 13 - x^2 - y^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 的交线是两个圆

$C_1 : \begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$，$C_2 : \begin{cases} z = -3 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$，**（1 分）**

上球冠部分的面积 $A_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}\sigma = 5 \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \frac{1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}\sigma$

$$= 10\pi \int_0^3 \frac{\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}}\, \mathrm{d}\rho = 10\pi \text{（3 分）}$$

下球冠部分的面积 $A_3 = 5 \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \frac{1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}\sigma = 20\pi$ **（2 分）**

介于上下球冠之间部分的面积 $A_2 = 100\pi - 10\pi - 20\pi = 70\pi$，**（1 分）**

三部分的曲面面积之比为1∶7∶2．**（1 分）**

止于至善