09-10-2高数AB期末试卷和答案

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$ 的定义域是____ $R\setminus Z$ ____，值域是___ $(1,+\infty)$ ____。

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{1-x}, & x>0, x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$，当 $a=$ __ -1 __ 时，$f(x)$在$x=1$连续。

3．曲线 $y=\dfrac{x^2}{2(x+1)}$ 的斜渐近线的方程是_______ $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ ____。

4．$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x=$ _____ 2 _________；

5．函数 $y=\int_0^{x^2}(t-1)e^{t^2}dt$ 的极大值点是 $x=$ __ 0 ____；

6．$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=$ __ $2\arcsin\sqrt{x}+C$ 或 $\arcsin(2x-1)+C$ ______；

7．设 $y=y(x)$是由$x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$所确定的函数，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ____ $e-1$ ____；

8．曲线族 $xy=C_1e^x+C_2e^{-x}$ $(C_1,C_2$是常数$)$ 所确定的微分方程是__ $xy''+2y'-xy=0$ __；

9．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n}\pi=$ __ $\dfrac{2}{\pi}$ ____。

二. 按要求计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

10．$\int\dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx$ $=-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+C$ （分部法）

11．$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$ $=\dfrac{\pi}{3}$ （根式代换）

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sin x-\cos x}{x^2(1-\cos x)}$ $=\dfrac{1}{3}$

法一：原式$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}=$再用罗必达法则(较繁)

法二：原式$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{\sin x+x}{2}\sin\dfrac{x-\sin x}{2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x+x)(x-\sin x)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

13. $\int_0^{\pi}\dfrac{dx}{2+\cos 2x}$ $=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

原式$=\int_0^{\pi}\dfrac{dx}{1+2\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{1+2\cos^2 x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{dx}{1+2\cos^2 x}$ (关键)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 xdx}{\sec^2 x+2}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sec^2 xdx}{\sec^2 x+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{\tan^2 x+3}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\tan x}{\tan^2 x+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

14。设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2, f(0)=0$，计算 $\int_0^1 f(x)dx$

解:$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-1)=(x-1)\ f(x)\big|_0^1-\int_0^1(x-1)\ f'(x)dx$

$$=-\int_0^1(x-1)\arcsin(x-1)^2 dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin(x-1)^2 d(x-1)^2$$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2\arcsin(x-1)^2\Big|_0^1+\int_0^1(x-1)^2\frac{(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^4}}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\square 2\sqrt{1-(x-1)^4}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

三（15）.（本题满分 8 分）求微分方程 $y''-2y'=x+e^{2x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，

$y'|_{x=0}=\dfrac{5}{4}$ 的特解.

$$y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}(x^2+x)+\frac{1}{2}xe^{2x}$$

$$特解 y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}(x^2+x)+\frac{1}{2}xe^{2x}$$

四（16）.（本题满分 7 分）设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，在 $(0,1)$ 内恒取正值，且满足 $xf'(x)=f(x)+3x^2$，又由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形 S 的面积为 2，求 $f(x)$ 的表达式，并计算图形 S 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

$$f(x)=2x+3x^2 \qquad V=\frac{17}{6}\pi$$

五（17）.（本题满分 7 分）已知方程 $\dfrac{x^2}{2}-\ln(1-x^2)=a$ 在区间 $(-1,1)$ 内存在两个互异的实根，试确定常数 a 的取值范围。

解：$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln(1+x^2)-a, x\in(-1,1)$，$f'(x)=x-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{x^3-x}{1+x^2}=0\Rightarrow x=0,-1,1$

x:	-1		0		1
$f'(x)$:	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$:		□		□	

$\because f(-1)=f(1)=\dfrac{1}{2}-\ln 2-a,\quad f(0)=-a,\qquad \therefore 当 f(-1)=f(1)<0, 且 f(0)>0,$

即 $\dfrac{1}{2}-\ln 2<a<0$ 时，有两个互异实根。

六（18）.（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负、连续，且满足 $f^2(x)\le 1+2\int_0^x f(t)dt$，

证明：对 $\forall x\in[0,1]$, 有 $f(x)\le 1+x$。

法一：令$F(x)=\int_0^x f(t)dt,\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow F'^2(x)\le 1+2F$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx}\le\sqrt{1+2F}\Rightarrow \int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+2F}}dF\le\int_0^x dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2F}-\sqrt{1+2F(0)}\le x\Rightarrow\sqrt{1+2F}\le 1+x$$

$\Rightarrow f^2(x)\le 1+2F\le(1+x)^2\Rightarrow$ 结论成立.

法二： 令$F(x)=\sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}-1-x,$

则$F'(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}}{\sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}}\le 0,\Rightarrow F(x)$□

$$\therefore F(x)\le F(0)=0,\therefore\sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}\le 1+x$$

$$\Rightarrow f(x)\le\sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}\le 1+x.$$

七（19）.（本题满分 6 分）设 $f\in C[-l,l]$， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\ne 0$，

（1）求证： $\forall x\in(0,l),\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$。

(1) 证明: 令$F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt$

对$F(x)$在$[0,x]$上使用$Lagrange$中值定理得:

$F(x)-F(0)=F'(\theta x)x,$

即: $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$

另解: $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=\int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(-t)dt$

$=\int_0^x\left[f(t)-f(-t)\right]dt \underline{\underline{\text{积分中值定理}}} x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$

(2) 由 (1) $\Rightarrow \dfrac{\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt}{x^2}=\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}$

两边取极限，并由导数的定义得:

$$f'(0)=2f'(0)\lim_{x\to 0^+}\theta$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\theta=\frac{1}{2}$$