

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

11-12-2 几何与代数 B 期末试卷 A

一、填空题 (30%)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $BA = B - 2E$, E 为 2 阶单位阵, 则 $|B| =$ _____;

2. 设矩阵 A, B 分别是 s 和 t 阶可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$ _____;

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 _____;

4. 过点 $P(1, 2, 0)$ 且与直线 $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$ 垂直的平面的方程是 _____;

5. 若向量组 $(1, -1, 2), (1, k, -3), (3, 0, 1)$ 线性相关, 则 $k =$ _____;

6. 设 A 是 4×3 阶矩阵, 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系只含一个解向量, 则方程组 $A^T y = 0$ 的基础解系中有 _____ 个线性无关的解向量;

7. 设 α, β 是非零向量, 若 $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha - \beta\|$, 则向量 α 与 β 的关系是 _____;

8. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $-1, 2, 3$, 则行列式 $|2A^{-1}| =$ _____;

9. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 与对角阵相似, 则参数 a 和 b 满足条件 _____;

10. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & k+1 & k \\ 0 & k & k+1 \end{pmatrix}$ 正定, 则参数 k 满足 _____。

二、(10%) 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a-1 & b+1 & c & d \\ a-2 & b & c+2 & d \\ a-3 & b & c & d+3 \end{vmatrix}$.

三、(12%) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵方程 $AXA^{-1} + A - AX = O$ 的解。

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

四、(14%) 设线性方程组 $\begin{cases} -x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 + x_2 + bx_3 = 0 \\ cx_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 都是相容的, 且是同解

方程组。(1) 求参数 a 的值; (2) 求参数 b, c 的值和方程组的通解。

五、(10%) 在空间直角坐标系中, 曲线 $\Gamma_1: \begin{cases} x^2 = 1 - 2z \\ y = 0 \end{cases}$, $\Gamma_2: \begin{cases} y^2 = 3z \\ x = 0 \end{cases}$ 。曲面 π_1 是以曲线 Γ_1 为准线, 母线与 y 轴平行的柱面, π_2 为 Γ_2 绕 z 轴旋转所产生的旋转面。分别求

曲面 π_1 、 π_2 的方程; 并求 π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程。

六、(14%) 给定二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 。

1. 求正交变换 $x = Qy$, 将二次型化为标准形, 并给出相应的标准型;
2. 作出二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = -1$ 的草图。

七、证明题 (10%)

1. 设 A 是 $s \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 若 $AB = E$, 证明: A 的行向量组线性无关。
2. 假设 a, b, c 是实数, 证明: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ 的三个特征值互不相同。

一、填空题 (30%, 每空 3 分)

1. 2; 2. $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$; 3. 0; 4. $5x - 4y - 3z + 3 = 0$; 5. 2;
6. 2 7. 垂直; 8. $-4/3$; 9. $a = 0, b$ 任意; 10. $k > 0$ 。

二、(10%)

解:
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a-1 & b+1 & c & d \\ a-2 & b & c+2 & d \\ a-3 & b & c & d+3 \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & b+1 & c & d \\ 1 & b & c+2 & d \\ 1 & b & c & d+3 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(a+b+c+d)$$

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

三、(12%) 解：先化简矩阵方程， $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,

故方程组两边同时左乘 A^{-1} ，得 $XA^{-1} + E - X = O$ ，再右乘 A ，

得 $X + A - XA = O$ ，即 $X(A - E) = A$ ，

$\therefore X = A(A - E)^{-1}$ (或进一步 $X = E + (A - E)^{-1}$)。

$$\text{而 } A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, (A - E)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

四、(14%)

$$\text{解：(1) 设 } A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

因为 $A_1x = b_1$ 与 $A_2x = b_2$ 相容，且它们是同解方程组，

则 $r(A_1) = r(A_1, b_1) = r(A_2, b_2) = r(A_2) = 2$ ，由 $|A_1| = 0$ ，得到 $a = 3$ ；

(2) $A_1x = b_1$ 与 $A_2x = b_2$ 同解，所以 $\begin{cases} A_1x = b_1 \\ A_2x = b_2 \end{cases}$ 与 $A_1x = b_1$ 也同解，且增广矩阵秩为 2

$$\begin{aligned} \text{增广矩阵 } \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & b & 0 \\ 0 & c & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & b+1 & 2 \\ 0 & c & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & 2-2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore b=0, c=1 \end{aligned}$$

$$\text{同解方程组 } \begin{cases} x_1 = -2 + x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases}, \text{ 即通解 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

五、(10%)

解：柱面 π_1 的方程： $x^2 + 2z = 1$ ，

旋转面 π_2 的方程： $x^2 + y^2 - 3z = 0$ ；

曲面 π_1 与 π_2 的交线 Γ_3 的方程： $\begin{cases} x^2 + 2z = 1 \\ x^2 + y^2 - 3z = 0 \end{cases}$ ；

交线 Γ_3 在 xOy 平面的投影曲线方程： $\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ ，投影曲线是一个椭圆。

六、(14%)

解：(1) 二次型 $f(x) = x^T A x$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ，

求特征值，得 $\lambda_{1,2} = 7$ ， $\lambda_3 = -2$ ；

求特征向量：

$$\lambda_{1,2} = 7 \text{ 时, } \lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{得到正交的特征向量: } \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2 \text{ 时, } \lambda_3 E - A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 特征向量 } \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{令正交矩阵 } Q = \left(\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}, \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}, \frac{\eta_3}{\|\eta_3\|} \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{pmatrix},$$

则正交变换 $x = Qy$ 将二次型化为标准形： $f(y_1, y_2, y_3) = 7y_1^2 + 7y_2^2 - 2y_3^2$

(2) 变换 $x = Qy$ 将二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = -1$ 的方程化为： $7y_1^2 + 7y_2^2 - 2y_3^2 = -1$ ，

这是一个双叶双曲面，草图如下（略）

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

七、证明题（10%）

1. 证明: $A_{s \times n}, B_{n \times s} \Rightarrow (AB)_{s \times s}, \because AB = E, \therefore r(AB) = r(E) = s;$

而 $s = r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq r(A),$

同时 $r(A) \leq \min\{s, n\} \leq s, \therefore r(A) = s,$ 即 A 的行向量组线性无关。

2. 证明: (反证法) $\because A$ 是实对称矩阵, $\therefore A \sim \Lambda$ (其中 Λ 是对角矩阵)。

下面只需要证明矩阵 A 没有二重特征值即可。

假设矩阵 A 的特征值 λ 是二重特征值, 则它必有 2 个线性无关的特征向量,

则此时矩阵 $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - b & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - c \end{pmatrix}$ 的秩必须为 1, 即 $r(A) = 1;$

但 $\lambda E - A$ 有 2 阶非零子式 $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda - b & -1 \end{vmatrix}$, 则 $r(A) \geq 2$, 与 $r(A) = 1$ 矛盾。

所以矩阵 A 的三个特征值互不相同。