04-05-2几代B答案

一 (24%)填空题:

1. 以点 $A(1, 1, 2), B(-2, -1, 1), C(-1, 1, -1)$为顶点的三角形的面积为 $\underline{\sqrt{101}/2}$;
2. 设 3 阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], B = [\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1-2\alpha_3, \alpha_1]$. 若 A 的行列式$|A| = 3$, 则 B 的行列式$|B| = \underline{-6}$.
3. 若向量$\alpha = (1, 0, 1), \beta = (2, 1, -1), \gamma = (-1, 1, k)$共面, 则参数 $k = \underline{-4}$;
4. 若 A 为 n 阶方阵, 则方阵 $B = \begin{bmatrix} I & O \\ A & 2I \end{bmatrix}$的逆矩阵 $B^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} I & O \\ -\frac{1}{2}A & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}}$(其中 I 是 n 阶单位矩阵, O 是 n 阶零矩阵);
5. 已知向量$\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$是矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$的特征向量, 则参数 $a = \underline{1}$, 相应的特征值等于 $\underline{3}$;
6. 假设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则在实矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$中, 与 A 相抵的有 $\underline{B, C, D, F}$; 与 A 相似的有 $\underline{F}$; 与 A 相合的有 $\underline{B, C}$;

二 (8%) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 & 0 \\ x & 1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 3 列展开}} (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ x & 1-x & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

×(−1)

$$= (1-x)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & 1-x & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^2(1-x-x^2).$$

三 (10%) 假设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求矩阵方程 $3X = B + XA$ 的解.

解: 原方程可化为 $X(3I - A) = B$, 其中 I 表示单位矩阵, $3I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 3I-A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ B(3I-A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

于是可得 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}(3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$. (注意 $\boldsymbol{X}$ 未必等于$(3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$!)

四 (14%) 假设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. 已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \theta$的基础解系中含有两个线性无关的解向量，试确定这时参数λ的值，并求这时 $\boldsymbol{Ax} = \theta$的一个基础解系.
2. 若在非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解集中存在两个线性无关的解向量，但不存在更多的线性无关的解向量，试确定这时参数λ及 a 的值，并求这时 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解.

解: 1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{bmatrix}$.

因为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \theta$的基础解系中含有两个线性无关的解向量,

所以秩$(\boldsymbol{A}) = 1$, 因而$\lambda = 1$. 此时$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

由此可得 $\boldsymbol{Ax} = \theta$的一个基础解系:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. 若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解集中有两个线性无关的解向量，但不存在更多的线性无关的解向量，则 $\boldsymbol{Ax} = \theta$的基础解系中只有一个线性无关的解向量.
所以秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) =$ 秩$(\boldsymbol{A}) = 2$. 此时$\lambda = -1$.

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}.$$

可见 $a = -2$, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 化为$\begin{cases} x_1 - x_3 = 3/2 \\ x_2 \quad\; = -1/2 \end{cases}$, 于是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \ (c \text{ 为任意数}).$$

五 (10%) 已知直线 l 过点 $P(1, 1, 3)$, 与平面$\pi: x + y - z = 1$ 平行, 且与直线λ: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ 相交. 求直线 l 的方向向量, 并写出直线 l 的方程.

解: 过点 $P(1, 1, 3)$且与平面$\pi: x + y - z = 1$ 平行的平面方程为: $(x-1) + (y-1) - (z-3) = 0$,
即: $x + y - z = -1$.
把直线λ的参数方程: $x = t, y = 2t, z = t+1$ 代入 $x + y - z = -1$ 得 $t = 0$.
故直线λ与平面 $x + y - z = -1$ 的交点为 $Q(0, 0, 1)$, 且点直线 PQ 平行于平面π.
因此直线 l 的方向向量可取为$\{1-0, 1-0, 3-1\} = \{1, 1, 2\}$.

直线 l 的方程为 $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$.

六 (10%) 假设二次曲面π_1的方程为: $x^2 + 4y^2 = 2z$; 平面π_2的方程为: $x = z - 1$.

1. π_1与π_2的交线向 xOy 平面作投影所得的投影曲线 l 的方程为. $\underline{\begin{cases} (x-1)^2 + 4y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}}$.

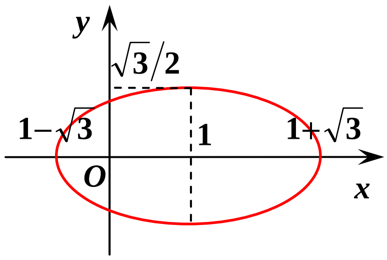
该投影曲线绕 x 轴旋转所得的旋转曲面π的方程为$\underline{(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 3}$.

2. 在坐标系(1)中画出投影曲线 l 的草图(请给坐标轴标上名称).

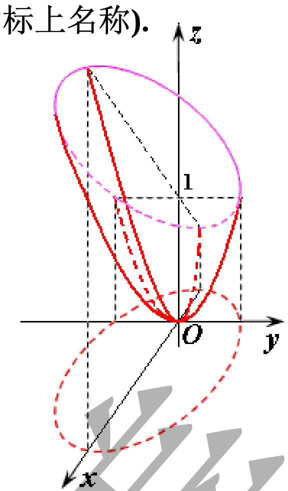
解: 投影曲线 l 的草图如(1)所示.

3. 在坐标系(2)中画出π_1与π_2所围成的立体的草图(请给坐标轴标上名称).

解: π_1与π_2所围成的立体的草图如(2)所示.



(1) 投影曲线 l 的草图



(2) π_1与π_2所围成的立体的草图

七 (14%)设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2kx_1x_3$.

1. 试就参数 k 不同的取值范围, 讨论二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型.
2. 假设 $k > 0$. 若经正交变换 $x = Qy$, $f(x_1, x_2, x_3)$可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$, 求参数 k 及一个合适的正交矩阵 Q.

解: 1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2kx_1x_3$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

A 的特征多项式$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -k \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -k & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1-k)(\lambda+1+k)$.

A 的特征值$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = k-1$, $\lambda_3 = -1-k$.

k 的取值	$k < -1$	$k = -1$	$-1 < k < 1$	$k = 1$	$k > 1$
$\lambda_2 = k-1$	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0
$\lambda_3 = -1-k$	> 0	$= 0$	< 0	< 0	< 0
$f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型	单叶双曲面	双曲柱面	双叶双曲面	双曲柱面	单叶双曲面

2. 若经正交变换 $X = QY$, $f(x_1, x_2, x_3)$ 可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.
则 A 的特征值$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = k-1 = 2$, $\lambda_3 = -1-k = -4$. 即 $k = 3$.
此时由$(\lambda_i I - A)x = \theta$求得 A 的分别对应于$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 和$\lambda_3 = -4$ 的特征值向量

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{和 } \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

它们已经两两正交, 单位化得 $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

令 $Q = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$, $x = Qy$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

四 (10%)证明题.

1. 假设 n 维向量$\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$, $\beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$. 若$\beta_1$, β_2线性无关. 证明: α_1, α_2线性无关, 且行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

证明: 令 $A = [\alpha_1, \alpha_2]$, $B = [\beta_1, \beta_2]$, $C = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$

所以秩$(B) \leq$ 秩$(A)\} \leq 2$, 秩$(B) \leq$ 秩$(C)\} \leq 2$.

若β_1, β_2线性无关, 则秩$(B) = 2$. 因而秩(A) =秩$(C) = 2$.

所以α_1, α_2线性无关, 且行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

2. 假设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 并且, A 的特征值均大于 a, B 的特征值均大于 b, 证明: $A+B$ 的特征值均大于 $a+b$.

证明: 由假设条件可知, 存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > a$. 于是

$$P^{-1}(A-aI)P = \begin{bmatrix} \lambda_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - a \end{bmatrix},$$

其中, I 是 n 阶单位矩阵, $\lambda_1-a, \lambda_2-a, \ldots, \lambda_n-a > 0$.

所以 $A-aI$ 是正定矩阵. 类似的, $B-bI$ 也是正定矩阵.

因而对于任意的 n 维向量 x,

$$x^T(A+B-(a+b)I)x = x^T(A-aI)x + x^T(B-bI)x > 0.$$

这就是说, $A+B-(a+b)I$ 也是正定矩阵. 因此其特征值都大于 0.

下面设λ是 $A+B$ 的任意一个特征值, 则$\lambda-(a+b)$是 $A+B-(a+b)I$ 的特征值,

故$\lambda-(a+b) > 0$, 即$\lambda > a+b$.