# 2011 级高等数学（A、B）（上）期中试卷

## 一、 填空题（本题共8小题，每小题4分，共32分）

1. 设当 $x\to 0$ 时， $\sin(2x)-2\sin x$ 与 $x^n$ 是同阶无穷小，则 $n=$______；

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+1}{x^{2n}+1}\ (n\in N_+)$ 的间断点的坐标是 $x=$______，是第____类间断点；

3.

设 $f(x)=\begin{cases} ae^x, & x<0 \\ b+\ln(1+x), & x\geq 0 \end{cases}$，若 $f(x)$在 $x=0$处可导,则常数 $a=$___，常数 $b=$___；

4. 设函数 $f$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2\sin x}=-1$， 则 $f'(1)=$_______；

5. 曲线 $y=\ln(1+e^{\cos x})$在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为__________________；

6. 设 $f(x)=xe^{2x}$，则 $f^{(10)}(0)=$______________；

7. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)},(x>0)$，其中 $f$ 可微，则微分 $dy=$__________________；

8. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-5\tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$_________________.

## 二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos x+\sin^2 x}$.

3. 求函数 $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

4. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $2^x-\csc y+y^3=0$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

5.

设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ ,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=-1}$.

三、（本题满分7分）证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在区间 $[0,1]$ 上不可能有两个零点，为使 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上存在零点，$a$ 应当满足怎样的条件?

四、（本题满分7分）设 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2},(n=1,2,\cdots)$，利用单调有界收敛准则证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

五、（本题满分7分）试证：当 $x\geq 0$ 时，$\ln(1+x)\leq \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

六、（本题满分7分）设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上存在三阶导数，且满足

$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使

得$f(\xi)=f'''(\xi)$.