08-3高A期中试卷答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1． $\underline{\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{x-2}^{4-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y}$； **2．** $\mathrm{Re}\, z = \underline{\ln 2}$， $\mathrm{Im}\, z = \underline{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}$；

3． $\underline{\frac{f}{1+2xzf'}\mathrm{d}x + \frac{2xyf'-1}{1+2xzf'}\mathrm{d}y}$； **4．** $\underline{\mathrm{e}^{\pi}(\sqrt{2}\pi + 2) - 2}$ **5．** $\underline{\frac{1}{8}}$．

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6． C **7** B **8** D **9．** B

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

10．解 $\iint\limits_D \frac{2x+3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \frac{5}{2}\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1} (\cos\varphi + \sin\varphi)\mathrm{d}\rho = 5 - \frac{5}{4}\pi$

11．解 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z = 0 \end{cases}$， $\Sigma_2: \begin{cases} x^2+y^2 \le 2 \\ z = 1 \end{cases}$， $\Sigma_3: \begin{cases} x^2+y^2 = 1+z^2 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$， $D: \begin{cases} 1 \le x^2+y^2 \le 2 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\oiint\limits_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}A = \oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}A = \iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}A + \iint\limits_{\Sigma_2} z\mathrm{d}A + \iint\limits_{\Sigma_3} z\mathrm{d}A = 2\pi + \iint\limits_D \sqrt{2(x^2+y^2)-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi + 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2\rho^2 - 1}\rho\mathrm{d}\rho = \left(\sqrt{3} + \frac{5}{3}\right)\pi$$

12．解 $\Sigma_1: \begin{cases} y^2+z^2 \le R^2 \\ x = -R \end{cases}$ 取后侧，$\Sigma_2: \begin{cases} y^2+z^2 \le R^2 \\ x = R \end{cases}$ 取前侧，$\Sigma_3: \begin{cases} y^2+z^2 = R^2 \\ |x| \le R \end{cases}$ 取外侧，

$D_{zx} = \left\{(z,x) \,\middle|\, |z| \le R, |x| \le R\right\}$，

$$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{R^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{R^2+y^2+z^2} + \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{R^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{R^2+y^2+z^2} + \iint\limits_{\Sigma_3} \frac{y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{x^2+R^2}$$

$$= 0 + 2\iint\limits_{D_{zx}} \frac{\sqrt{R^2-z^2}}{x^2+R^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{R}{2}\pi^2$$

13．解 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$， 质量 $m = 8\mu\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x (1-x^2)\mathrm{d}y = 2\mu$，

对 xOy 平面的静力矩 $M_{xy} = 8\mu\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^{1-x^2} z\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\mu$， $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{3}$

另解 $\bar{x}=\bar{y}=0$， 用切片法 $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{m}=\dfrac{\mu\int_0^1 z\left(2\sqrt{1-z}\right)^2\mathrm{d}z}{\mu\int_0^1\left(2\sqrt{1-z}\right)^2\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{3}$

14．解 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y-\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $v=y^2-\dfrac{y}{x^2+y^2}+\varphi(x)$，

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2x+\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $\varphi(x)=-x^2-C$，

$f(z)=\dfrac{1}{z}-\mathrm{i}\left(z^2+C\right)$， $f'(\mathrm{i})=3$

四（15）解 首先根据条件得 $u=x^2+2y^2+3z^2=3-y^2-2x^2=3-3x^2\le 3$， 且在点 $(0,0,\pm1)$ 处，$u_{\max}=3$，继续由条件得 $u=3\left(x^2+z^2\right)=3\left(\dfrac{1-z^2}{2}+z^2\right)=\dfrac{3}{2}\left(1+z^2\right)\ge\dfrac{3}{2}$，

且在点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ 处，$u_{\min}=\dfrac{3}{2}$

五(16)解设过直线 $\begin{cases}x+y-2=0\\x-5y-z-3=0\end{cases}$ 的平面方程为 $(1+\lambda)x+(1-5\lambda)y-\lambda z-2-3\lambda=0$，

设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则 $\begin{cases}(1+\lambda)x_0+(1-5\lambda)y_0-\lambda z_0-2-3\lambda=0 & (1)\\ \dfrac{2x_0}{1+\lambda}=\dfrac{2y_0}{1-5\lambda}=\dfrac{1}{\lambda} & (2)\\ z_0=x_0^2+y_0^2 & (3)\end{cases}$

由（2），（3）解得 $x_0=\dfrac{1+\lambda}{2\lambda},y_0=\dfrac{1-5\lambda}{2\lambda}$， $z_0=\dfrac{(1+\lambda)^2+(1-5\lambda)^2}{4\lambda^2}$，

代入（1）得 $7\lambda^2-8\lambda+1=0$，解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=\dfrac{1}{7}$，从而两切平面方程分别为

$2x-4y-z-5=0$ 和 $8x+2y-z-17=0$。

六（17）解 对 $f(ax,bx)=ax$ 的等号两端关于 x 求导，得 $af_x+bf_y=a$，（1）

对 $f_x(ax,bx)=bx^2$ 的等号两端关于 x 求导，得 $af_{xx}+bf_{xy}=2bx$，（2）

对（1）式的等号两端关于 x 求导，得 $a^2f_{xx}+2abf_{xy}+b^2f_{yy}=0$，（3）

从（2），（3）及条件 $a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 解得

$f_{xy}(ax,bx)=0$， $f_{xx}(ax,bx)=\dfrac{2b}{a}x$， $f_{yy}(ax,bx)=-\dfrac{2a}{b}x$.