

# 东南大学学生会

## Students' Union of Southeast University

### 一. 填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

1. 交换积分次序  $\int_{-2}^0 dy \int_0^{y+2} f(x, y) dx + \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx =$  \_\_\_\_\_;

2. 设  $e^z - 1 + \sqrt{3}i = 0$ , 则  $\operatorname{Re} z =$  \_\_\_\_\_,  $\operatorname{Im} z =$  \_\_\_\_\_;

3. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $y + z = xf(y^2 - z^2)$  所确定的隐函数, 其中  $f$  可微, 则全微分  $dz =$  \_\_\_\_\_;

4. 设曲线  $C$  为由  $x + y = \pi$  与  $x$  轴,  $y$  轴围成的三角形的边界, 则  $\oint_C e^{x+y} ds =$  \_\_\_\_\_;

5. 设  $f(x, y)$  连续,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ , 且  $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy$  则  $\iint_D f(x, y) dx dy =$  \_\_\_\_\_.

### 二. 单项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

6. 函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  处 [ ]

- (A) 连续且偏导数存在 (B) 连续但偏导数不存在  
(C) 不连续但偏导数存在 (D) 不连续且偏导数不存在

7 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $D_1$  为  $D$  在第一象限部分, 则下列各式中 **不成立** 的是 [ ]

- (A)  $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = 4 \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$  (B)  $\iint_D xy dx dy = 4 \iint_{D_1} xy dx dy$   
(C)  $\iint_D (x + x^3 y^2) dx dy = 0$  (D)  $\iint_D x^2 y^3 dx dy = \iint_D x^3 y^2 dx dy$

8 设  $f(t) \in C[0, +\infty)$ ,  $I(R) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x^2+y^2+z^2) dv$ , 则当  $R \rightarrow 0^+$  时,  $I(R)$  [ ]

- (A) 是  $R$  的一阶无穷小 (B) 是  $R$  的二阶无穷小  
(C) 是  $R$  的三阶无穷小 (D) 至少是  $R$  的三阶无穷小

9. 设  $f(x, y)$  在原点的某邻域内连续, 且  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + 1 - x \sin y - \cos^2 y} = a > 0$ , 则 [ ]

# 东南大学学生会

## Students' Union of Southeast University

- (A)  $f(x, y)$  在 原点处取得极大值 (B)  $f(x, y)$  在 原点处取得极小值  
(C) 不能断定  $f(x, y)$  在 原点处是否取得极值 (D) 原点一定不是  $f(x, y)$  的极值点

### 三. 计算下列各题(本题共 5 小题, 每小题 8 分, 满分 40 分)

10. 计算二重积分  $\iint_D \frac{2x+3y}{x^2+y^2} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$ .
11. 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (z+y) dA$ , 其中  $\Sigma$  是由  $z=0, z=1$  与  $z^2+1=x^2+y^2$  所围成的立体的表面.
12. 求  $\iiint_{\Sigma} \frac{x^2 dy \wedge dz + y dz \wedge dx}{x^2 + y^2 + z^2}$ , 其中  $\Sigma$  为圆柱体  $y^2 + z^2 \leq R^2, |x| \leq R (R > 0)$  的表面, 取外侧.
13. 求由曲面  $x^2 + z = 1, y^2 + z = 1$  和  $z = 0$  所围成的质量均匀分布的立体的质心坐标.
14. 已知解析函数  $f(z)$  的实部  $u(x, y) = 2xy + \frac{x}{x^2 + y^2}$ , 求  $f(z)$  的表达式 (用变量  $z$  表示) 和  $f'(i)$ .

四 (15) (本题满分 8 分) 求函数  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  和平面  $x + y = 0$  的交线上的最大值与最小值.

五 (16) (本题满分 8 分) 试求过直线  $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 5y - z - 3 = 0 \end{cases}$ , 且与曲面  $z = x^2 + y^2$  相切的平面方程.

六 (17) (本题满分 8 分) 设  $ab \neq 0$ ,  $f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且  $a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ,  $f(ax, bx) = ax$ ,  $f_x(ax, bx) = bx^2$ , 求  $f_{xx}(ax, bx)$ ,  $f_{xy}(ax, bx)$ ,  $f_{yy}(ax, bx)$