

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

06-07-2高数AB期末试卷

一. 填空题 (本题共 9 小题, 每小题 4 分, 满分 36 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x(\cos x - 1)} =$ _____;

2. 曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 对应的点处的切线方程为 _____;

3. 函数 $f(x) = x - \ln(1+x)$ 在区间 _____ 内严格单调递减;

4. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy - \ln y = 1$ 所确定的隐函数, 则 $y'(0) =$ _____;

5. $\int_{-1}^1 \left(\frac{x^5}{1+x^2+x^4} - x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \right) dx =$ _____;

6. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 已知 $f(1) = 1$, 则 $\int_1^2 f(x)dx =$ _____;

7. 已知 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, 已知 $y(0) = \pi$, 则 $y(1) =$ _____;

8. 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 的斜渐近线方程是 _____;

9. 若二阶线性常系数齐次微分方程有两个特解 $y_1 = e^{3x}, y_2 = e^x$, 则该方程为:

二. 计算题 (本题共 4 小题, 每小题 7 分, 满分 28 分)

1. 计算不定积分 $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}} dx$

2. 计算定积分 $\int_0^{2\pi} x |\sin x| dx$

3. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)} dx$

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

4. 设 $G(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$, 求 $\int_0^1 G(x) dx$

三. (本题满分 7 分) 求曲线 $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \frac{1}{2} \sin t \end{cases}$ 自 $t = 0$ 到 $t = \frac{\pi}{4}$ 一段弧的长度。

四. (本题共 2 小题, 第 1 小题 7 分, 第 2 小题 9 分, 满分 16 分)

1. 求微分方程 $yy' = (\sin x - y^2) \cot x$ 的通解。

2. 求微分方程 $y'' + y = x + \sin x$ 的特解, 使得该特解在原点处与直线 $y = \frac{3}{2}x$ 相切。

五. (本题满分 7 分) 设 $|a| \leq 1$, 求积分 $I(a) = \int_{-1}^1 |x-a| e^{2x} dx$ 的最大值。

六. (本题满分 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上存在二阶连续导数, 且 $f(3) = 0$, 证明:

至少存在一点 $\xi \in [2, 4]$, 使得 $f''(\xi) = 3 \int_2^4 f(x) dx$ 。