东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

高等数学(非电)05-06-3期中试卷（A、B）参考答案及评分标准

一．填空题（本题共5小题，每小题4分，满分20分）

1． $\pm\sqrt{7}$；**2．** $\dfrac{2}{3}$；**3．** $x^2+y^2+3z^2=9$；**4．** $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$；**5．** $(0,4)$.

二．选择题（本题共4小题，每小题4分，满分16分）6． A　**7．** B　**8．** D　**9．** B

三．计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

10．解： 所给直线的方向向量为$\mathbf{a}=\{1,-1,1\}\times\{2,0,1\}=\{-1,1,2\}$ **(2分)**

任取该直线上一点$B(2,7,0)$ **（1分）**，$d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}=2\sqrt{5}$ **（4分）**

11．解： 因为$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{q^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{q^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{q}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{q}{\mathrm{e}}$ **（3分）**

则当$0<q<\mathrm{e}$时，原级数收敛；当$\mathrm{e}<q$时，原级数发散；**（2分）**

当$q=\mathrm{e}$时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$，　故$\{a_n\}$严格单增，则$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$，级数发散。**（2分）**

12．解： 易知$R=1$，收敛域为$(-1,1)$。**（1分）** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ **（1分）**

而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)$ **（2分+2分）**

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n=\frac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x)$　　$(|x|<1)$ **（1分）**

13．解： $\displaystyle\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{1}{1+\frac{x}{6}}+\frac{1}{1-x}$ **（2分）** $\displaystyle=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$，**（2分+2分）**

$\displaystyle\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n, |x|<1$ **（1分）**

14．　解： $\displaystyle\frac{\partial z}{\partial y}=f_1\cdot x\cos y-\frac{x}{y^2}f_2$ **（3分）**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1 \cos y + \left(f_{11} \sin y + \frac{1}{y} f_{12} \right) x \cos y - \frac{1}{y^2} f_2 - \frac{x}{y^2} \left(f_{21} \sin y + \frac{1}{y} f_{22} \right)$$

$$= f_1 \cos y - \frac{1}{y^2} f_2 + \frac{1}{2} f_{11} x \sin 2y + \frac{x}{y^2}\left(y \cos y - \sin y \right) f_{12} - \frac{x}{y^3} f_{22}$$ **（4 分）**

四．（15）（本题满分 7 分） $\mathbf{a_1} = \{5, 2, 4\}, \mathbf{a}_2 = \{3, 1, 2\}, A(-3, -1, 2) \in L_1, B(8, 1, 6) \in L_2$

（1 分），$\left[\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \overrightarrow{AB} \right] = 0$ ，$\mathbf{a_1}$不平行于$\mathbf{a_2}$， 两直线相交**（2 分）**

$\mathbf{n}=\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2} = \{0, 2, -1\}$ **（2 分）** 得平面方程为 $2y - z + 4 = 0$ **（2 分）**

五．（16）（本题满分 8 分）方程两边对 x 求偏导：$5z^4 \frac{\partial z}{\partial x} - z^4 - 4xz^3 \frac{\partial z}{\partial x} + 3yz^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0\ (1)$

得 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)} = \frac{1}{5}$ **（2 分）**，方程两边对 y 求偏导：$5z^4 \frac{\partial z}{\partial y} - 4xz^3 \frac{\partial z}{\partial y} + z^3 + 3yz^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

得 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)} = -\frac{1}{5}$ **（2 分）**，⑴ 式两边再对 y 求偏导：$20z^3 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 5z^4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 4z^3 \frac{\partial z}{\partial y}$

$$-12xz^2 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 4xz^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 3yz^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \text{得} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(0,0)} = -\frac{3}{25}$$

（4 分）

六．（17）（本题满分 7 分）$\because \{a_n\}$ 单调递减，$a_n > 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = A > 0$

（2 分），易知$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$ 为正项级数，

$$S_n = \frac{a_1 - a_2}{a_1} + \frac{a_2 - a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_1 - a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_1}{a_n} \le \frac{a_1}{A},\quad \therefore S_n \text{有界}$$ **（4 分）**

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$收敛.**（1 分）**

七．（18）（本题满分 7 分） $f_n(x) = \left(\frac{x^n}{n} + C \right) \mathrm{e}^x \overset{f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}}{\Rightarrow} f_n(x) = \frac{x^n \mathrm{e}^x}{n}$ **（3 分）**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \mathrm{e}^x}{n} = \mathrm{e}^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\mathrm{e}^x \ln(1-x), \quad x \in [-1, 1)$$ **（3 分+1 分）**