

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

09高数AB期末试卷

一.填空题

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$ 的定义域是 _____, 值域是 _____;
2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{1-x}, & x > 0, x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$, 当 $a =$ _____ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续;
3. 曲线 $y = \frac{x^2}{2(x+1)}$ 的斜渐近线的方程是 _____;
4. $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx =$ _____;
5. 函数 $y = \int_0^{x^2} (t-1)e^{t^2} dt$ 的极大值点是 $x =$ _____;
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$ _____;
7. 设 $y = y(x)$ 是由 $x \int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = 0$ 所确定的函数, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____;
8. 曲线族 $xy = C_1 e^x - C_2$ (C_1, C_2 为任意常数) 所满足的微分方程是 _____;
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \pi =$ _____.

二. 按要求计算下列各题 (本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

10. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$
11. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2(1 - \cos x)}$
13. $\int_0^\pi \frac{dx}{2 + \cos 2x}$
14. 设 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$, $f(0) = 0$, 计算 $\int_0^1 f(x) dx$.

三 (15). (本题满分 8 分) 求微分方程 $y'' - 2y' = x + 2^x$ 满足初始条件 $y(0) = 1$,

$y'(0) = \frac{5}{4}$ 的特解.

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

四 (16). (本题满分 8 分) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导, 在 $(0,1)$ 内恒取正值, 且满足 $xf'(x) = f(x) + 3x^2$, 又由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的图形 S 的面积为 2, 求函数 $f(x)$ 的表达式, 并计算图形 S 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五 (17). (本题满分 6 分) 已知方程 $\frac{x^2}{2} - \ln(1+x^2) = a$ 在区间 $(-1,1)$ 内存在两个互异的实根, 试确定常数 a 的取值范围.

六 (18). (本题满分 6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负、连续, 且满足 $f^2(x) \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$,

证明: 对 $\forall x \in [0,1]$, 有 $f(x) \leq 1+x$.

七 (19). (本题满分 6 分) 设 $f \in C[-l,l]$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) \neq 0$,

(1) 求证: $\forall x \in (0,l), \exists \theta \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-x)]$$

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$.