§2－6 灵敏度分析(Sensitivity Analysis)

灵敏度分析的含义是指对系统或事物因周围条件变化显示出来的敏感程度的分析。

线性规划的灵敏度分析是在建立数学模型和求得最优解之后，针对数据资料变化而作的研究和分析。这种分析可以从两个方面来看：一是希望知道根据一定数据得到的最优结果，在数据变化到一定程度时，对最优解有什么影响。二是希望知道要使最优解保持不变，各个数据可以有多大幅度的变动。

灵敏度分析的具体步骤如下:

1. 将参数的改变计算反映到最终单纯形表上来:

具体计算方法是,按下列公式计算出由参数 a_{ij}, b_i, c_j 的变化而引起的最终单纯形表上有关数字的变化:

$$\Delta b^* = B^{-1}\Delta b \tag{2.17}$$

$$\Delta p_i^* = B^{-1}\Delta p_i \tag{2.18}$$

$$\Delta(c_j - z_j)^* = \Delta(c_j - z_j) - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \tag{2.19}$$

2. 检查原问题是否仍为可行解;

3. 检查对偶问题是否仍为可行解;

4. 按表（表 **2-8**）所列情况得出结论和决定继续计算的

步骤。

表 2-8

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	仍为问题的最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引入人工变量，编制新的单纯形表重新计算

下面分别就各个参数改变后的情形进行讨论。

6-1 分析 c_j 的变化范围

目标函数中系数 c_j 的变化仅仅影响到检验数 $c_j - z_j$ 的变化，所以将 c_j 的变化直接反映到最终单纯形表中，只可能出现如表 **2-8** 中所示的两种情况。

【例 **6**】 已知线性规划问题

$$\max z = (2+\lambda_1)x_1 + (3+\lambda_2)x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

试分析λ_1和λ_2分别在什么范围变化，问题的最优解不变。

【解】 当$\lambda_1=\lambda_2=0$，上述线性规划问题的最终单纯形表见表 2-3，当$\lambda_2=0$时，将λ_1反映到该表中（见表 2-9）

表 2-9

			$2+\lambda_1$	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$2+\lambda_1$	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/5
0	x_4	4	0	0	−2	1	4/5
3	x_2	3	0	1	0	0	1/5
c_j-z_j			0	0	$-1-\frac{1}{2}\lambda_1$	0	$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda_1$

表中解为最优解的条件是：$-1-\frac{1}{2}\lambda_1\le 0$，$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda_1\le 0$由此推导得$-2\le\lambda_1\le 1$时满足上述要求。

当$\lambda_1=0$时，在将λ_2反映到表 2-3 中，得表 2-10.

表 2-10

			2	$3+\lambda_2$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	$1/2$	0	$-1/5$
0	x_4	4	0	0	-2	1	$4/5$
$3+\lambda_2$	x_2	3	0	1	0	0	$1/5$
	c_j-z_j		0	0	1	0	$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda_2$

为使表中解为最优解，应有$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda_2\le 0$，推导得$-1\le\lambda_2\le\infty$.

6-2 分析b_i的变化范围

b_i的变化在实际问题中表明可用资源的数量发生变化.由公式（2.17）—（2.19）看出b_i变化反映到最终单纯形表上只引起基变量列数字变化.因此灵敏度分析的步骤为：

（1） 按公式（2.17）算出Δb^*，将其加到基变量列的数字上；

（2） 由于其对偶问题仍为可行解，故只需检查原问题是否仍为可行解，再按表 2-8 所列结论进行.

【例 7】线性规划问题

$$\max = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t}\quad\begin{cases}2x_1 + 2x_2 \le 12 + \lambda_1\\4x_1 \qquad\quad \le 16 + \lambda_2\\ \qquad 5x_2 \le 15 + \lambda_3\\x_1,\quad x_2 \ge 0\end{cases}$$

分别分析$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$在什么范围内变化，问题的最优基不变.

【解】先分析λ_1的变化. 由公式（2.17）有

$$\Delta b^* = B^{-1}\Delta b = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/5\\-2 & 1 & 4/5\\0 & 0 & 1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\lambda_1\\-2\lambda_1\\0\end{bmatrix}$$

使问题最优基不变的条件是

$$b^* + \Delta b^* = \begin{bmatrix}3+\frac{1}{2}\lambda_1\\4-2\lambda_1\\3\end{bmatrix} \ge 0$$

由此推得$-6 \le \lambda_1 \le 2$

同理有 $\begin{bmatrix}3\\4+\lambda_2\\3\end{bmatrix} \ge 0$

推得 $-4 \le \lambda_2 < \infty$.

$$\begin{bmatrix} 3-\frac{1}{5}\lambda_3 \\ 4+\frac{4}{5}\lambda_3 \\ 3+\frac{1}{5}\lambda_3 \end{bmatrix} \ge 0$$

推得 $-5 \le \lambda_3 \le 15$

6-3 增加一个变量的分析

增加一个变量在实际问题中反映为增加一种新的产品，分析步骤是：

（1） 计算 $\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$；

（2） 计算 $P_j' = B^{-1} P_j$；

（3） 若 $\sigma_j \le 0$，只需将 P_j' 和 σ_j 的值直接反映到最终单纯表中，原最优解不变；若 $\sigma_j > 0$，则按单纯形法继续迭代计算.

【例 8】第一章例 2 中，若增加一个变量 x_6，有 $c_6 = 4, P_6 = (2,4,5)^{\mathrm{T}}$，试分析问题最优解的变化.

【解】 $\sigma_6 = 4 - (1,0,1/5)\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1$

$$P_6' = B^{-1}P_6 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/5 \\ -2 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将其代人表 2-3 的表 2-11.

表 2-11

			2	3	0	0	0	4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/5	0
0	x_4	4	0	0	−2	1	4/5	[4]
3	x_2	3	0	1	0	0	1/5	1
	$c_j - z_j$		0	0	−1	0	−1/5	1

由于$\sigma_6 > 0$，继续用单纯形法迭代得表 2-12.

表 2-12

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/5	0
4	x_6	1	0	0	−1/2	1/4	1/5	1
3	x_2	2	0	1	1/2	−1/4	0	0
	$c_j - z_j$		0	0	−1/2	−1/4	−2/5	0

故新的解为 $x_1 = 3, x_2 = 2, x_6 = 1, z^* = 16$.

6-4 增加一个约束条件的分析

增加一个约束条件，在实际问题中相当于增添一道工序.分析的方法是将原来的最优解变量取值代入这个新增的约束条件中，如满足，说明新增约束条件未起到限制作用，最优解不变.否则，将新增约束条件直接反映到最终表中，在进行分析.

【例 **9**】 在第一章例 **2** 中，增加一个约束条件，要求分析最优解的变化.

[解] 因有$3\times3+2\times3=15>14$，所以将上述约束条件加上松弛变量后的方程$3x_1+2x_2+x_6=14$直接反映到最终单纯形

表 **2-13.**

表 **2-13**

			2	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	**3**	**1**	**0**	**1/2**	**0**	**-1/5**	**0**	（**1**）
0	x_4	**4**	**0**	**0**	**-2**	**1**	**4/5**	**0**	（**2**）
3	x_2	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1/5**	**0**	（**3**）
0	x_6	**14**	**3**	**2**	**0**	**0**	**0**	**1**	（**4**）
$c_j - z_j$			**0**	**0**	**-1**	**0**	**-1/5**	**0**	

为使由P_1,P_4,P_2,P_6列组成单位矩阵，对表 **2-13** 中由各变量列组成的系数矩阵进行行的初等变换。表 **2-14** 中各行数字同表 **2-14** 中各行数字的对应关系为：

$$(1)' = (1),(2)' = (2),(3)' = (3),(4)' = (4) - 3(1) - 2(3)$$

对表 **2-14** 用单纯形法继续迭代计算得表 **2-15**

表 2-14

			2	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	**3**	**1**	**0**	**1/2**	**0**	**-1/5**	**0**	$(1)'$
0	x_4	**4**	**0**	**0**	**-2**	**1**	**4/5**	**0**	$(2)'$
3	x_2	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1/5**	**0**	$(3)'$
0	x_6	**-1**	**0**	**0**	**[-3/2]**	**0**	**0**	**1**	$(5)'$
$c_j - z_j$			**0**	**0**	**-1**	**0**	**-1/5**	**0**	

表 2-15

			2	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	**8/3**	**1**	**0**	**1/2**	**0**	**-2/15**	**1/3**
0	x_4	**16/3**	**0**	**0**	**-2**	**1**	**8/15**	**-4/3**
3	x_2	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1/5**	**0**
0	x_6	**2/3**	**0**	**0**	**1**	**0**	**-2/15**	**-2/3**
$c_j - z_j$			**0**	**0**	**-1**	**0**	**-1/5**	**0**

因此增加约束条件后，问题的新的解为

$$x_1 = 8/3, x_2 = 3, z^* = 43/3$$