03-04-2几代答案

一 (24%) 填空题:

1. 若向量 $\vec{\alpha}=\vec{i}+a\vec{j}-\vec{k}$，$\beta=b\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{\gamma}=\vec{k}$ 共面，则参数 a, b 满足 $\underline{ab = 1}$.

2. 过点 $P(1, 2, 1)$且包含 x 轴的平面方程为 $\underline{y - 2z = 0}$.

3. 已知矩阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3I = O$，其中 I 表示单位矩阵，则 A 的逆矩阵 A^{-1} = $\underline{\frac{1}{3}(A+2I)}$.

4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$，则行列式$|A^2B^{-1}|$ = $\underline{1/70}$.

5. 设向量组$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}$，则当参数 $k = \underline{0}$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

6. 向量空间 $\mathbf{R}^2$ 中向量$\eta = (2, 3)$在 $\mathbf{R}^2$ 的基,与$\alpha = (1, 1)$ $\beta = (0, 1)$下的坐标为$\underline{(2, 1)}$.

7. 满足下述三个条件的一个向量组为$\underline{(-2, 1, 0), (1, 0, -1)}$，这三个条件是：①它们是线性无关的；②其中的每个向量均与$\alpha = (1, 2, 1)$正交；③凡与α正交的向量均可由它们线性表示.

8. 已知 2×2 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，若对任意的 2 维列向量$\eta$有$\eta^TA\eta = 0$，则 a, b, c, d 满足条件 $\underline{a = d = 0, b = -c}$.

二 (12%) 假设矩阵 A, B 满足 $A - B = AB$，其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，求 B.

解: (法一) 由 $A - B = AB$ 得 $(A+I)B = A$，其中 I 表示单位矩阵. $A+I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$A+I$ 的行列式$|A+I| = 1$，伴随矩阵$(A+I)^* = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 因而$(A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

于是 $B = (A+I)^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(注意 B 未必等于 $A(A+I)^{-1}$!)

(法二) 由 $A - B = AB$ 得 $(A+I)B = A$，其中 I 表示单位矩阵. $A+I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$[A+I, A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [I, (A+I)^{-1}A]$$

于是 $B = (A+I)^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

三 (15%) 设向量 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, 4)^T$, $\beta = (2, b, c)^T$, 问当参数 a, b, c 满足什么条件时

1. β能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一线性表示?
2. β不能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示?
3. β能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 但表示方法不唯一? 求这时$\beta$用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示的一般表达式.

解: 令 $A = [\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$, (注: 这里把$\alpha_3$放在第一列纯粹是为了方便)

$$[A, \beta] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & a & 2 \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -a & -2 \\ 0 & -3 & 2+2a & b+4 \\ 0 & 0 & 8+2a & c-b+4 \end{bmatrix} = [\tilde{A}, \tilde{\beta}]$$

1. 当参数 $a \neq -4$ 时, 秩$(A) = 3$, 此时β能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一线性表示.
2. 当参数 $a = -4$, 而 $b - c \neq 4$ 时, 秩$(A) =2$, 秩$(A, \beta) = 3$, 此时β不能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.
3. 当参数 $a = -4$, 且 $b - c = 4$ 时, 秩$(A) =$ 秩$(A, \beta) = 2$, 此时β能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 但表示方法不唯一.

这时 $$[\tilde{A}, \tilde{\beta}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & b+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2(b+1)/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

由此可得 $Ax = \beta$的通解 $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2x_3 + 2(b+1)/3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$, 其中 x_3 为自由未知量.

因而β用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示的一般表达式为

$$\beta = t\alpha_1 + [-2t + 2(b+1)/3]\alpha_2 - 2\alpha_3$$

其中 t 为任意数.

四 (8%) 设实二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz$. 问: 实数 a 满足什么条件时, 方程 $f(x, y, z) = 1$ 表示直角坐标系中的椭球面?

解: 实二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$.

A 的顺序主子式 $a_{11} = 1 > 0$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 - a^2$; $|A| = 1 - 2a^2$.

$f(x, y, z) = 1$ 表示直角坐标系中的椭球面当且仅当 A 正定, 当且仅当 A 的顺序主子式全为正数, 即 $a^2 < 1/2$.

五 (12%) 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, 矩阵 $B = aA^3 - 4aA + I$.

1. 求参数 a 的值, 使得矩阵 B 不可逆.
2. 问矩阵 B 是否相似于对角阵? 请说明你的理由.

解: 1. 因为 3 阶方阵 A 有 3 个不同的特征值 $2, -2, 1$, 所以存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是 $P^{-1}BP = P^{-1}(aA^3 - 4aA + I)P = a(P^{-1}AP)^3 - 4a(P^{-1}AP) + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{bmatrix}$.

因而矩阵 B 不可逆当且仅当 $|B| = 0$，而 $|B| = |P^{-1}BP| = 1 - 3a$.

所以当 $a = 1/3$ 时，矩阵 B 不可逆.

2. 由 1 可知矩阵 B 相似于对角阵.

六 (12%) 已知二次曲面 S_1 的方程为 $z = 3x^2 + y^2$, S_2 的方程为 $z = 1 - x^2$.

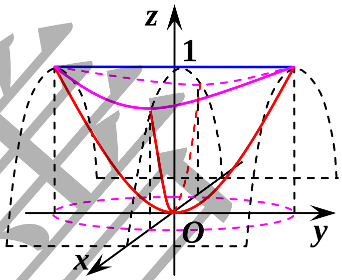
1. 问: S_1 与 S_2 分别属于哪一类二次曲面?
2. 求 S_1 与 S_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程;
3. 画出由 S_1 与 S_2 所围成的立体的草图.

解: 1. S_1 与 S_2 分别属于椭圆抛物面和抛物柱面.

2. 由 $z = 3x^2 + y^2$ 和 $z = 1 - x^2$ 消去 z 得 S_1 与 S_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. 由 S_1 与 S_2 所围成的立体的草图如右图所示:



七 (10%) 设 3×3 实对称矩阵 A 的秩为 2，并且 $AB = C$，其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

求 A 的所有特征值及相应的特征向量；并求矩阵 A 及 A^{9999}.

解: 因为 A 是 3 阶矩阵，且秩为 2，所以 $|A| = 0$，因而有一个特征值为 0.

又因为 $AB = C$，其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，令 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

则 $Ap_1 = -p_1$, $Ap_2 = p_2$，可见 p_1, p_2 分别是 A 的对应于 $\lambda = -1$ 和 $\lambda = 1$ 的特征向量.

由于 A 是 3×3 的实对称矩阵，所以对应于特征值 0 的特征向量与 p_1, p_2 正交,

由此可得对应于特征值 0 的一个特征向量 $p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

令 $P = [p_1, p_2, p_3]$，则 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

故 $A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$A^{9999} = (P\Lambda P^{-1})^{9999} = P\Lambda^{9999}P^{-1} = P\Lambda P^{-1} = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

八 (7%) 证明题:

1. 设 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的线性无关的解向量, β 不是其解向量.
证明: $\beta, \beta+\eta_1, \beta+\eta_2, \ldots, \beta+\eta_t$ 也线性无关.

证明: 因为 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的线性无关的解向量, β 不是其解向量.
所以 $\beta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 线性无关，否则 β 能由 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 线性表示，从而是线性方程组 $Ax = \theta$ 的解，矛盾!

假若 $k_1\beta + k_2(\beta+\eta_1) + k_3(\beta+\eta_2) + \ldots + k_{t+1}(\beta+\eta_t) = \theta$,

则$(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{t+1})\beta + k_2\eta_1 + k_3\eta_2 + \ldots + k_{t+1}\eta_t = \theta$.
于是$(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{t+1}) = k_2 = k_3 = \ldots = k_{t+1} = 0$,
即 $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_{t+1} = 0$.
所以$\beta, \beta+\eta_1, \beta+\eta_2, \ldots, \beta+\eta_t$线性无关.

2. 设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明: $|I+A| > 1$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵.

证明: 因为 A 是 n 阶正定矩阵, 所以 A 的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$都是正数.

于是存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

因而$|I+A| = |P^{-1}||I+A||P| = |P^{-1}(I+A)P| = |I+ P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix}$

$= (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n) > 1$.

止于至善