08-09-3 高数 B 期末试卷（A）参考答案及评分标准 09.6.8

一. 填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1. 曲面 $\cos(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz=4$ 在点 $(0,1,2)$ 处的法线方程是 $\underline{\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=z-2}$；

2. 设 $u=\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$，则梯度 $\mathbf{grad}u\big|_{(1,2,0)}=\underline{\left\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},0\right\}}$；

3. 已知 $\mathbf{A}=\{-2,-1,2\},\mathbf{B}=\{1,-3,2\}$，则 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 方向的投影 $(\mathbf{A})_{\mathbf{B}}=\underline{\frac{5}{\sqrt{14}}}$；

4. 设闭曲线 $C:|x|+|y|=1$，取逆时针方向，则曲线积分 $\oint_C y\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$ 的值是 $\underline{-2}$；

5. 设函数 $F(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ 与路径无关的充分必要条件是 $\underline{xF_x=yF_y}$；

6. 二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(e^{|x|}+\cos y^2\right)xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值是 $\underline{0}$；

7. 设 S 为球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\oiint\limits_S\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S$ 的值是 $\underline{4\pi R^4}$；

8. 设 C 是折线 $y=1-|1-x|\ (0\le x\le 2)$，则曲线积分 $\int_C y\mathrm{d}s$ 的值是 $\underline{\sqrt{2}}$；

9. 取 $a_n=\underline{\frac{1}{n\ln^2 n}}$（注：答案不唯一），可使得级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛，且级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n\ln n$ 发散.

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，满分 30 分)

10.（本小题满分 7 分） 设 $z=f(x\varphi(y),x-y)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，φ 具有连续导数，计算 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi f_1+f_2$，**（3 分）** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi' f_1+x\varphi\varphi' f_{11}+(x\varphi'-\varphi)f_{12}-f_{22}$ **（4 分）**

11.（本小题满分 7 分） 计算 $\iint\limits_D(x^2+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$.

解 $\iint\limits_{D}(x^2+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\frac{\pi}{2}}+\underline{0}+\underline{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho}=\underline{\frac{3}{4}\pi}$ （1+1+3+2 分）

12．（本小题满分 8 分）计算二次积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{1-x}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y$.

解，$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{1-x}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y=\underline{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}x}=\underline{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{y}-1}-1\right)\mathrm{d}y}=\underline{\mathrm{e}-2}$ （3+2+3 分）

13. （本小题满分 8 分）求密度均匀分布的立体

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|z\ge\sqrt{1-x^2-y^2},x^2+y^2+z^2\le 2z,z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

的质心坐标.

解 $\bar{x}=\bar{y}=0$ （1 分）$\bar{z}=\dfrac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r}{\underline{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r}}=\dfrac{\frac{25}{24}\pi}{\underline{\frac{1+\sqrt{2}}{3}\pi}}=\underline{\frac{25}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)}$

（1+1+2+2+1 分）

三（14).（本题满分 7 分）试求过点 $A(3,-1,2)$ 且与 z 轴相交，又与直线 $L_1: x=2y=3z$ 垂直的直线方程.

解 设 $\frac{x-3}{l}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-2}{n}$ 为所求直线 L 的方程,（1 分）由于直线 L 与 z 轴相交，所以三个向量 $\mathbf{s}=\{l,m,n\}$，$\mathbf{OA}$ 及 $\mathbf{k}$ 共面，从而 $\begin{vmatrix}l&m&n\\3&-1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=0$，即 $-l-3m=0$ （1),（2 分）

又由于 L 与 L_1 互相垂直，得 $l+\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n=0$，即 $6l+3m+2n=0$ （2)（2 分）联立（1),（2）解得 $l=-3m$，$n=\frac{15}{2}m$，所求直线 L 的方程为 $\frac{x-3}{6}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-15}$ （2 分）

四（15)。（本题满分 7 分）计算 $\iint\limits_{S}\frac{|x|}{z}\mathrm{d}S$ ，其中 S 是柱面 $x^2+y^2=2ay\,(a>0)$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=2a$ 所截下的部分.

解 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}$ （2 分）

$$\iint\limits_S \frac{|x|}{z}\mathrm{d}S = \underline{2\iint\limits_{D_{yz}} \frac{a}{z\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{2ay-y^2}\,\mathrm{d}\sigma} = \underline{2a\int_0^{2a}\frac{1}{z}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\mathrm{d}y} = \underline{2a^2}$$ **（2+2+1 分）**

五（16）．（本题满分 7 分）计算 $I=\int_C \mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x+\left(5xy-\mathrm{e}^x\sin y\right)\mathrm{d}y$，其中 C 为曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$，方向沿 y 增大的方向.

解 记 $O(0,0), A(0,2), D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\sqrt{2y-y^2}\right\}$，由 Green 公式得

$$I=\underline{5\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma}+\underline{\int_{\overline{AO}}\sin y\mathrm{d}y}=\underline{\frac{5}{2}}\pi\underline{-1+\cos 2}$$ **（2+1+3+1 分）**

六（17）（本题满分 7 分）计算 $I=\iint\limits_S\left(y^2+xz\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(z^2+y\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中 S 为 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=0$ 所截部分，取上侧.

解 补一个面 $\Sigma:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ z=0\end{cases}$，取下侧，由 S 和 Σ 所围成的区域记为 Ω，由 Gauss 公式得

$$I=\underline{\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v-\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}=\underline{\pi\int_0^2(2-z)^2z\mathrm{d}z}+\underline{4\pi}=\frac{4}{3}\pi+4\pi=\underline{\frac{16}{3}\pi}$$ **（3+2+1+1 分）**

七（18）（本题满分 6 分）证明不等式 $yx^y(1-x)<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$0<x<1$，$0<y<+\infty$.

证 设 $f(x,y)=yx^y(1-x)$，$f(x,y)$ 在区域 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 的边界上恒为 0，而在内部恒为正，故 f 的最大值只能在区域内部达到，**（2 分）**令 $f_x=yx^y(y-xy-x)=0$，$f_y=x^y(1-x)(1+y\ln x)=0$，在区域 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 内求驻点，得 $y(1-x)=x$（1）及 $x^y=\mathrm{e}^{-1}$（2），**（2 分）**这表明 $f(x,y)$ 在区域 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 内的最大值点应满足方程（1）（2），然而在（1）（2）所确定的点上 $f(x,y)=yx^y(1-x)=x\mathrm{e}^{-1}<\mathrm{e}^{-1}$，所以 $f(x,y)=yx^y(1-x)<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$0<x<1$，$0<y<+\infty$.**（2 分）**