2011级高等数学（A）（上）期中试卷

一、 填空题（本题共8小题，每小题4分，共32分）

1. $\underline{\ 3\ }$； 2. $x=$ $\underline{x=1}$ 第 I 类间断点 3. a= $\underline{\ 1\ }$ $b=\underline{\ 1\ }$；

4. $\underline{\ -2\ }$ 5. $\underline{y=\ln 2-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ 6. $f^{(10)}(0)=$ $\underline{5\cdot 2^{10}=5120}$

7. $dy=\underline{\left(\dfrac{f'(\ln x)}{x}+f(\ln x)f'(x)\right)e^{f(x)}dx}$ 8. $\underline{\ e^{-5}\ }$

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. **解** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(e^{\frac{\ln n}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$

2. **解** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos x+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{1-\cos x+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}}=-\dfrac{2}{3}$

3. **解** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

4. **解** 两边对x求导数 $2^x\ln 2+y'\cot y\csc y+3y^2y'=0$;

 解出 $y'=-\dfrac{2^x\ln 2}{\cot y\csc y+3y^2}$.

5. **解** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{(1-t)^2}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2(1+t^2)}{(1-t)^5}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=-1}=\dfrac{1}{8}$.

三、 （本题满分7分）

解 因为 $f'(x)=3(x^2-1)<0$, $x\in(0,1)$，所以$f(x)$在 $[0,1]$ 上严格单调递减，故$f(x)$在$[0,1]$上不可能有两个零点；

又因为$f(0)=a$, $f(1)=a-2$，为使$f(x)$在$[0,1]$上有一个零点，必须有$a(a-2)\le 0$，即$0\le a\le 2$.

四、 （本题满分7分）

解 已知$x_1=\dfrac{1}{2}<1$，设$x_k<1$，则$x_{k+1}=\dfrac{1+x_k^2}{2}<1$，由归纳法知 $x_n<1$, $n=1,2,\cdots$，且显然$x_n>0$，于是$x_{n+1}=\dfrac{1+x_k^2}{2}\ge\sqrt{x_n^2}=x_n$，故$\{x_n\}$单调递增有上界，是收敛数列。记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则由数列通项的递推公式，得到$l=\dfrac{1+l^2}{2}$，解得$l=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

五、 （本题满分7分）

证 设$f(x)=\sqrt{1+x}\ln(1+x)-x$，则$f\in C[0,+\infty)$，且

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\ln(1+x)+\frac{\sqrt{1+x}}{1+x}-1=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\left(\ln(1+x)+2-2\sqrt{1+x}\right)$$

设$g(x)=\ln(1+x)+2-2\sqrt{1+x}$，则$g\in C[0,+\infty)$，且 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\le 0, x\ge 0$,

故$g(x)$单减，而$g(0)=0$，故当$x>0$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，从而$f(x)$ 单减，故当$x\ge 0$时，$f(x)\le f(0)=0$，即$\ln(1+x)\le\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

六、 （本题满分7分）

证 设$g(x)=e^x(f(x)+f'(x)+f''(x))$，则$g(x)$在$[a,b]$上连续可导，由Rolle定理知存在$\xi\in(a,b)$，使得$g'(\xi)=0$，即$e^\xi(f'''(\xi)-f(\xi))=0$，所以$f(\xi)=f'''(\xi)$.