习 题 课

一、填空题

1．已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ($|x|<1$)，则其和函数 $S(x)=$__，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)4^n}$ 的和为__。

2．已知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ ($-\infty<x<+\infty$)，则其和函数 $S(x)=$__，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!2^n}$ 的和为__。

3．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$ 的和为__。

4．设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1. \end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx (n=0,1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{5}{2})=$__。

二、选择题

1．设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 收敛，则实数 a 的取值范围是（　）

（A）$1<a\le3$；　（B）$1\le a<3$；　（C）$1<a<3$；　（D）$1\le a\le3$。

2．将 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展成 $(x-3)$ 的幂级数，其收敛域为（ ）

（A）$(-1,\ 1)$；　（B）$(-6,\ 0)$；　（C）$(-3,\ 3)$；　（D）$(0,\ 6)$。

三、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot2^n}$ 的收敛域与和函数。

四、将下列函数展开成 x 的幂级数

1．$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x;$

2．$f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2};$

3．$f(x)=\ln(6-x-x^2).$

五、将函数 $f(x)=\dfrac{x+4}{2x^2-5x-3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数。

六、将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

七、将 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}$ 的和。

八、解答题

1. 将 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0,\\ 1 \qquad\quad ,x=0.\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。

3．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$。

4．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ 在区间 $(-1,\ 1)$ 内的和函数 $S(x)$。

5． 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}\ (0\le x\le 1)$, 求证当 $0<x<1$ 时有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C(C\text{为常数}),\text{并求}C.\ (\text{注}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6})$$