10-11-2高数A B期末试卷答案

1. e^{a+b}

2. $y = x + 1$

3. $y = 2x$

4. $b =$ 3

5. $-2^n(n-1)!$

6. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -1$

7. -4π

8. $-\dfrac{2}{3}$

9. $y = \dfrac{1}{x}$

10. $= \dfrac{1}{3}$

11. $= \dfrac{1}{2}\ln 2$

12. $= \dfrac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \dfrac{1}{2}$

13. $= \dfrac{1}{2}\left(\sec x + \ln\left|\csc x - \cot x\right|\right) + C$

三.

关键步骤: $\int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-u)g(u)du$

$$= \int_0^x (x-u)g(u)du = x\int_0^x g(u)du - \int_0^x ug(u)du$$

$$= \begin{cases} x - \sin x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x - 1, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

四.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)dx = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx = \frac{\pi^4}{48} - \frac{\pi^2}{8}$$

五.

通解为 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$

特解为 $y=-2e^x+2e^{2x}-x(x+2)e^x$

六.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+t)\varphi''-\varphi'}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)} \quad \Rightarrow \quad \text{方程} \ \varphi''-\frac{1}{1+t}\varphi'=3(1+t)$$

降阶法：$\varphi'=(1+t)(3t+C_1)\overset{C_1=0}{=}3t+3t^2$

$$\Rightarrow \varphi=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_2\overset{C_2=0}{=}\frac{3}{2}t^2+t^3$$

七.

提示：由估值定理知 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

令$F(x)=\int_a^b f(x)dx-M(x-a)-m(b-x)\in C_{[a,b]}$

$F(a)=\int_a^b f(x)dx-m(b-a)\ge 0$

$F(b)=\int_a^b f(x)dx-M(b-a)\le 0$

对$F(x)$在$[a,b]$上使用零点定理得：

$\exists\xi\in[a,b],\ \ni F(\xi)=0,$ 即 结论成立。

另解： 令 $g(x)=M(x-a)+m(b-x),\quad g'(x)=M-m\ge 0,$

故$g(x)$在$[a,b]$单增，$\Rightarrow g(a)\le g(x)\le g(b)$

而 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

即 $g(a)\le\int_a^b f(x)dx\le g(b)$

由介值定理得

$\exists\xi\in[a,b],\ \ni\int_a^b f(x)dx=g(\xi),$ 即 结论成立。