2003级高等数学（A、B）（上）期中试卷

一、单项选择题（每小题4分，共12分）

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x_。$ 处可导，且 $f'(x_。)=2$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，dy 是（）

（A）与 Δx 等价的无穷小；（B）与 Δx 同价但非等价的无穷小；

（C）比 Δx 低价的无穷小；（D）比 Δx 高价的无穷小。

2. 方程 $x^5+2x-1=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有（）

（A） 一个实根；（B）二个实根；（C）三个实根；（D）五个实根。

3. 已知函数 f 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，

则 f 在 $x=0$ 处（）

（A） 不可导；（B）可导且 $f'(0)\neq 0$；（C）取得极大值；（D）取得极小值。

二、填空题（每小题4分，共24分）

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 则当 $a=$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ，

其类型是___.

3. 函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x_。=1$ 处的带 $Lagrange$ 余项的三阶 $Taylor$ 公式为

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)-ye^x=1$ 所确定，则 $dy=$.

5. 已知 $f(x)=\ln(1-x)$，则 $f^{(n)}(0)=$.

6. 设 $y=f(\cos^2 x)+\tan x^2$，其中 f 可导，则 $\dfrac{dy}{dx}=$

三、（每小题7分，共28分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[\tan(x+\dfrac{\pi}{4})]^{\cot 2x}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

3. 已知 $y=\ln\sqrt{\sqrt{1-e^{-x}}x\sin x}$，求 $y'(\frac{\pi}{2})$.　4. 设 $\begin{cases} x=2\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

四、（**8 分**）求证当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^3}{6}<\sin x$.

五、（**6 分**）落在平静水面上的石头产生同心圆形波纹。若最外一圈半径的增大率总是 $6m/s$，问 2 秒末受到扰动的水面面积的增大率为多少？

六、（**8 分**）试就 a 的不同取值，讨论方程 $(x-a)^{\frac{2}{3}}=2+a$ 的实根的个数。

七、（**6 分**）设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $3f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

八、（**8 分**）在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上求一点 $P(x,\ y)$，使得它与另外两点 $A(2a,\ 0)$，$B(0,\ 2b)$ 构成的三角形 ΔAPB 的面积最小。