2011 年高等数学(B)转系转专业试卷参考答案

一．填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $1<p<2$; 2. $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$; 3. $f(x)-f(a)$; 4. $p>2$; 5. $x^2-3\pi x+2\pi^2$; 6. 6;

7. $\dfrac{1}{3}$; 8. 4π; 9. $\sqrt{2}$.

二．计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

10. 解：设 $\sqrt{x}=t$, 则原积分 $=\int\dfrac{\arcsin t+\ln t^2}{t}2tdt=2\int(\arcsin t+\ln t^2)dt$

$=2[t\arcsin t-\int td\arcsin t+t\ln t^2-\int td\ln t^2]=2[t\arcsin t-\int\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+t\ln t^2-\int 2dt]$

$=2[t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+t\ln t^2-2t+C_1]$

$=2(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\ln x-2\sqrt{x})+C.$

11. 解： $f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}$,

$\lim\limits_{t\to x}\dfrac{x}{\sin t-\sin x}\ln\dfrac{\sin t}{\sin x}=\lim\limits_{t\to x}x\dfrac{\ln\sin t-\ln\sin x}{\sin t-\sin x}=\lim\limits_{t\to x}x\dfrac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\cos t}=\dfrac{x}{\sin x}$，所以 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$.

$\because\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e,\ \therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点； $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

12. 解：先对 x 积分，将 D 分块：$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\le x\le y\right\}$,

$D_2=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le y\le 1,0\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}$.

原积分 $=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dy\int_0^y\sqrt{1-y^2}dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-y^2}ydy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(1-y^2)dy$

$=-\dfrac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+(y-\dfrac{1}{3}y^3)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

13. 解：设 $S=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3}{2\cdot1}+\dfrac{5}{2^2\cdot2!}+\dfrac{7}{2^3\cdot3!}+\cdots+\dfrac{2n+1}{2^n\cdot n!})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^n\cdot n!}.$

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$，则$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n+1}}{n!})'=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!})'=[x(e^{x^2}-1)]'$

$=2x^2e^{x^2}+e^{x^2}-1,\ -\infty<x<+\infty.$

则$S=\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{2\cdot 1}+\frac{5}{2^2\cdot 2!}+\frac{7}{2^3\cdot 3!}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n\cdot n!})=S(\frac{1}{\sqrt{2}})=2\sqrt{e}-1.$

14. 解：$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1x+f_2e^x\cos y+g'(\frac{y}{x})\frac{1}{x}.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1+\left(f_{11}xy+f_{12}e^xy\cos y\right)+f_2e^x\cos y+\left(f_{21}xe^x\sin y+f_{22}e^{2x}\sin y\cos y\right)$$

$$+g''(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^3})+g'(\frac{y}{x})(-\frac{1}{x^2}).$$

三.（15）（本题满分 7 分）

解：当$x\neq 0$时，$f'(x)=(\frac{g(x)-e^{-x}}{x})'=\frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}$；

当$x=0$时，$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}[g''(0)-1].$$

$\because \lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x[g''(x)-e^{-x}]}{2x}=\frac{1}{2}[g''(0)-1]=f'(0),$

$\therefore f'(x)$在点$x=0$连续。

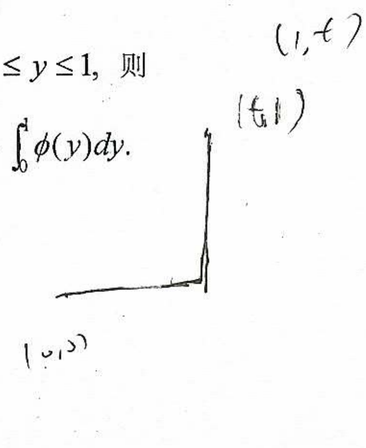
又因为当$x\neq 0$时，$f'(x)$为初等函数，因此$f'(x)$处处连续。

四.（16）（本题满分 7 分）

解：曲线积分与路径无关，所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$，$Q(x,y)=x^2+\phi(y).$

曲线积分与路径无关，取路径$\overrightarrow{OA}:y=0,0\le x\le t$，$\overrightarrow{AB}:x=t,0\le y\le 1$，则

$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+(x^2+\phi(y))dy=\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}\ =0+\int_0^1(t^2+\phi(y))dy=t^2+\int_0^1\phi(y)dy.$



取路径$\overrightarrow{OC}:y=0,0\le x\le 1$，$\overrightarrow{CD}:x=1,0\le y\le t$，则

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+(x^2+\phi(y))dy = \int_{\overline{OC}}+\int_{\overline{CD}} = 0+\int_0^t (1+\phi(y))dy = t+\int_0^t \phi(y)dy.$$

上述两式相等，所以 $t^2+\int_0^1 \phi(y)dy = t+\int_0^t \phi(y)dy$. 两边关于 t 求导，$\phi(y)=2y-1$.

$\therefore Q(x,y)=x^2+2y-1$.

五.（17）（本题满分 7 分）

解： 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上任一点，则 $z_0={x_0}^2+{y_0}^2+1$. Σ 在点 M_0 的法向量 $\vec{n}=(2x_0,2y_0,-1)$，切平面方程为 $z=z_0+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)$，即

$$z=1-{x_0}^2-{y_0}^2+2x_0x+2y_0y.$$

切平面与 S 的交线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=1-{x_0}^2-{y_0}^2+2x_0x+2y_0y, \end{cases}$ 在 Oxy 平面的投影是

$x^2+y^2=1-{x_0}^2-{y_0}^2+2xx_0+2y_0y$，即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1$.

设它围成的区域为 D，即 Ω 在平面 Oxy 的投影区域，则

$$V=\iint_D [(1-{x_0}^2-{y_0}^2+2xx_0+2y_0y)-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\iint_D [1-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2]dxdy=\pi-\iint_{u^2+v^2\le 1}(u^2+v^2)dudv$$

$$=\pi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho^2\rho d\rho=\frac{\pi}{2}.$$

六.（18）（本题满分 8 分）

解：（1）$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^2(2y-y^2)dy+\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)dy=\frac{9}{4}\pi$. 即该容器的容积为 $\frac{9}{4}\pi$ 立方米。

（2）$W=\rho g\pi\int_{\frac{1}{2}}^2(2-y){x_1}^2dy+\rho g\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y){x_2}^2dy$

$$=\rho g\pi\int_{\frac{1}{2}}^2(2-y)(2y-y^2)dy+\rho g\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y)(1-y^2)dy=\frac{27\times10^3}{8}\pi g.$$

即所求的功为 $\frac{27\times10^3}{8}\pi g$ 焦耳。