

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

一、填空题（本题共5小题，每小题4分，共20分）

1. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $ze^{xz} + \cos(yz) = 2$ 所确定的隐函数，则 $dz =$ _____；

2. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{x^3 e^y - 2y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f_x(0, 0) =$ _____；

3. $\oint_{x^2+y^2=2} (x^2 + y^2 + 2x) ds =$ _____；

4. 交换二次积分次序 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1-\frac{x^2}{4}} f(x, y) dy =$ _____；

5. 复方程 $e^z = i$ 的所有解 $z =$ _____.

二、单项选择题（本题共4 小题，每小题4分，满分16 分）

1. 已知曲面 $z = 1 + x^2 + 2y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $4x + 4y - z + 5 = 0$, 则点 P 的坐标为 []

(A) (1, 2, 10) (B) (-1, 2, 10) (C) (2, -1, 7) (D) (2, 1, 7)

2. 函数 $u = \ln(z + \sqrt{x^2 + y^2})$ 在点 (3, 4, 1) 处的方向导数的最大值是 []

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (B) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $-\sqrt{2}$

3. 函数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在点 (0, 0) 处 []

(A) 不连续 (B) 连续但偏导数不存在 (C) 偏导数存在但不可微 (D) 可微

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

4. 下列哪个复函数在 $z = 0$ 处解析 []

- (A) $x^2 + y^2 + iy^3$ (B) $\overline{\sin z} + iz^3$ (C) $|z|^3 e^{i3 \arg z}$ (D) $\operatorname{Ln} z$

三、 本题共4小题，每小题8分，满分32分）

1. 设 $z = f(x + 2y, x^3y)$ ，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 求曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$ 过点 $P_0(1, 1, 3)$ 处的切线方程和法平面方程.

3. 计算二重积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x + 3y)^2 d\sigma$.

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

4. 计算第一型曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds$,

其中 L 为曲线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

四、(本题满分8分) 求函数 $f(x, y) = 4 + xy - x^2 - y^2$ 在有界闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

五、(本题满分8分) 已知复解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部 $u(x, y) = \cos x \cosh y$, 求 $f(z)$ (用变量 z 表示) 以及 $f'(i)$. (注: $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$)

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

六、(本题满分8分) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$, 密度为常数 μ , 求 Ω 的质心.

七、(本题满分8分) 计算曲面积分 $\iint_S \frac{1}{z} dS$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 夹在两平面 $z = \frac{h}{3}$ 与 $z = h$ ($0 < h < R$) 之间的部分.