04-3高A期中试卷答案

一. 填空(每题 4 分, 共 24 分)

1. $\ln 2+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$ ； 2. $\int_0^1 dy\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)dy$ ； 3. $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$ ； 4. $dx-\sqrt{2}dy$ ； 5. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ ； 6. 3

二. 选择题(每题 4 分, 共 16 分) 1. B； 2. C； 3. A； 4. A

三. (每题 7 分, 共 21 分)

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=f+xyf_1+xye^{xy}f_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1+(2x+x^2y)e^{xy}f_2+x^2yf_{11}+2x^2ye^{xy}f_{12}+x^2ye^{2xy}f_{22}$$

2. $\frac{\partial v}{\partial y}=2x-1=\frac{\partial u}{\partial x},u=x^2-x+\varphi(y)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\varphi'(y),\quad \varphi(y)=-y^2+C,\quad u=x^2-y^2-x+C$$

$f(z)=x^2-y^2-x+C+i(2xy-y)$ 令 $y=0$, 得 $f(x)=x^2-x+C$ 于是
$f(z)=z^2-z+C$ $f(0)=0$ 得 $C=0$ $f(z)=z^2-z$

3. $L=x^2+y^2+z^2+\lambda((x-y)^2-z^2-1)$

$$L_x=2x+2\lambda(x-y)=0, L_y=2y-2\lambda(x-y)=0, L_z=2z-2\lambda z=0, (x-y)^2-z^2=1$$

求得 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

由问题的实际意义知原点到曲面存在最短距离, 故 $d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

四(第一题 7 分, 其余每题 8 分, 共 39 分)

1. $\iint\limits_{\sigma}\frac{x+y}{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1}(\sin\varphi+\cos\varphi)d\rho=2-\frac{\pi}{2}$

2 原式= $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iint\limits_{2x^2+5y^2\le 1}d\sigma\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-4y^2}}zdz=\frac{1}{2}\iint\limits_{2x^2+5y^2\le 1}(1-2x^2-5y^2)d\sigma$ =

$\frac{\pi}{2\sqrt{10}}-\frac{1}{2\sqrt{10}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{4\sqrt{10}}$ 3

3. $P=\frac{x-y}{x^2+y^2}$， $Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$， $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

原式= $\int_{-\pi}^{-2}\frac{1}{x}dx\quad+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\quad=-\frac{\pi}{2}+\ln\frac{2}{\pi}$

4. 原式= $\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}yzdz\wedge dx\quad=\frac{1}{3}(\iiint\limits_{\Omega}zdv-\iint\limits_{\Sigma'}0dz\wedge dx)$

= $\frac{\pi}{3}\int_0^3 z(9-z^2)dz\quad=\frac{27}{4}\pi$

5. $x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=2-\cos t+\sin t\qquad 0\le t\le 2\pi$

原式= $\int_0^{2\pi}\left[(2-\cos t)\sin t+(2-2\cos t+\sin t)\cos t+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)\right]dt$

= $-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi.$