08高A期中试卷

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．交换积分次序 $\int_{-2}^{0}\mathrm{d}y\int_{0}^{y+2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x=$______________；

2．设 $\mathrm{e}^{z}-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=0$，则 $\mathrm{Re}\,z=$_______，$\mathrm{Im}\,z=$_________________；

3．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $y+z=xf(y^2-z^2)$ 所确定的隐函数，其中 f 可微，则全微分 $\mathrm{d}z=$________________________；

4．设 C 为由 $x+y=\pi$ 与 x 轴, y 轴围成的三角形的边界, $\oint_C \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}s=$_____________。

5．设 $f(x,y)$ 连续，$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le x^2\right\}$，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_________________.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处　　　　[　　]

(A)连续且偏导数存在　　　　(B) 连续但偏导数不存在
(C)不连续但偏导数存在　　　(D) 不连续且偏导数不存在

7 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$, D_1 为 D 在第一象限部分, 则下列各式中**不成立**的是[　]

（A）$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　（B）$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（C）$\iint\limits_D (x+x^3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$　　（D）$\iint\limits_D x^2y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

8 设 $f(t)\in C[0,+\infty)$, $I(R)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$, 则当 $R\to 0^+$ 时, $I(R)$ [　]

（A）是 R 的一阶无穷小　　　（B）是 R 的二阶无穷小
（C）是 R 的三阶无穷小　　　（D）至少是 R 的三阶无穷小

9．设 $f(x,y)$ 在原点的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=a>0$，则　[　]

（A）$f(x,y)$ 在原点处取得极大值　　（B）$f(x,y)$ 在原点处取得极小值

（C）不能断定 $f(x,y)$ 在原点处是否取得极值 （D）原点一定不是 $f(x,y)$ 的极值点

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

10． 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x+y\ge 1\right\}$.

11． 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}A$，其中 Σ 是由 $z=0,z=1$ 与 $z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

12． 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为圆柱体 $y^2+z^2\le R^2$，$|x|\le R\ (R>0)$ 的表面，取外侧.

13． 求由曲面 $x^2+z=1,y^2+z=1$ 和 $z=0$ 所围成的质量均匀分布的立体的质心坐标.

14. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=2xy+\dfrac{x}{x^2+y^2}$，求 $f(z)$ 的表达式（用变量 z 表示）和 $f'(\mathrm{i})$.

四（15）（本题满分 8 分） 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和平面 $x+y=0$ 的交线上的最大值与最小值.

五（16）（本题满分 8 分） 试求过直线 $\begin{cases}x+y-2=0\\x-5y-z-3=0\end{cases}$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程.

六（17）（本题满分 8 分） 设 $ab\ne 0$，$f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，$f(ax,bx)=ax$，$f_x(ax,bx)=bx^2$，求 $f_{xx}(ax,bx)$，$f_{xy}(ax,bx)$，$f_{yy}(ax,bx)$