08-09-2高数AB期末试卷答案

一. 1. $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　2. 3　3. (2,-5)　4. $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3}$　5. Axe^{2x}　6. $\dfrac{2}{e}$　7. $\dfrac{3\pi}{4}$

8. $\dfrac{2}{1-\pi}$　**9.** $-\dfrac{1}{2}\sin 1$　**10.** $=\dfrac{2}{3}$　**11.** $=\pi$　**12.** $=x\cos x\ln x+(1+\sin x)(1-\ln x)$

13. $a=\dfrac{3}{2},b=0,c=2$　**14.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

二. 法1：令$t=\sin 2x$；　**法 2：利用**$1=\sin x^2+\cos x^2$

三.（略）

四.

$$记y_0=f(0),y=f(x),则有\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\sqrt{f(0)f(x)},$$

$$\Rightarrow y'+\frac{2}{x}y=\frac{2}{x\sqrt{y_0}}y^{\frac{3}{2}}\qquad \Rightarrow y=\left(\frac{1}{\sqrt{y_0}}+cx\right)^{-2}$$

五.

$$S_k=\frac{1}{2}(1-\frac{k}{n})\cdot\frac{4k^2}{n^2},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=2\int_0^1(1-x)x^2dx$$

六.

$$令f(x)=x-1-\ln(1+x),在[0,+\infty)单增,$$
$$故f(\sqrt{2})<f(2)=1-\ln 3<0,即\sqrt{2}-1<\ln(1+\sqrt{2}).$$

七.

$$法一：设M=\max_{0\le x\le 2}|f'(x)|,即要证\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le M$$

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}(x-1)\right|=\left|(x-1)f(x)\Big|_0^2-\int_0^2(x-1)f'(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\le\int_0^2|x-1||f'(x)|\mathrm{d}x\le M\left|\int_0^2|x-1|\mathrm{d}x\right|=M$$

另解：用*Lagrange*中值定理.

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)-f(0)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)-f(2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(\xi_1)x\mathrm{d}x+\int_1^2 f(\xi_2)(x-2)\mathrm{d}x,$$　以下略