东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 高等数学B期末 考试学期 09-10-3 得分

适用专业 选修高数B的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名

学号

一. 填空题(本题共9小题，每小题4分，满分36分)

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域为 $\underline{[-1,3)}$；

线 求面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为 $x-2y-2z+3=0$；

3. 已知两条直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{m}$ 与 $x=y=3z$ 相交，$m=$ __$\frac{1}{9}$__；

4. 交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=$ __$\underline{\int_{-1}^{0}dy\int_0^{y+1} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx}$；

封

5. 将 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$（其中 $f(t)$ 为连续函数）写成球面坐标系下的三次积分 $\underline{\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^2 f(r^2)r^2dr}$；

密 :L 为由点 $A(2,1,2)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的直线段, 则曲线积分 $\int_L (x+y+z)^2\mathrm{d}s$ 之值为 $\underline{25}$

7. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 a=$\underline{2}$, b=$\underline{-2}$

8. 设 $\mathbf{r}=\{x,y,z\}, r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则散度 $\mathrm{div}(\mathrm{e}^r\mathbf{r})=\underline{e^r(3+r)}$；

9. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 下侧，则

$\iint_{\Sigma} 3x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\underline{2\pi}$.

二. 计算下列各题(本题共4小题，每小题7分，满分28分)

10. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z\mathrm{e}^z=x\mathrm{e}^y+y\mathrm{e}^x$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1+z)e^{z}=e^{y}+ye^{x},\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{y-z}+ye^{x-z}}{1+z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{x-z}+xe^{y-z}}{1+z}$$

11．计算二重积分 $\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\geq 2, x^2+y^2\leq 2y\right\}$.

$$\iint\limits_{D} ydxdy=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\sin\theta}\rho^2 d\rho=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\sin^3\theta-2\sqrt{2})\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{2}$$

12．计算 $\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^{y}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leq 4, 0\leq x\leq y\right\}$,

原式 $=\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{8}(1-e^{-4})$

13. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $x^2 - y^2 + z^2 = 1, y = 0, y = 2$ 所围成.

$\sum_y : x^2 + z^2 \le 1 + y^2, 0 \le y \le 2,$

$$\iiint\limits_{\Omega} e^y dxdydz = \int_0^2 e^y dy \iint\limits_{\Sigma_y} dxdz = \pi \int_0^2 (1 + y^2) e^y dy = 3\pi(e^2 - 1)$$

三（14）.（本题满分 7 分）求由抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 与平面 $z = 1, z = 2$ 所围成的密度均匀（密度 $\mu = 1$）的立体对 z 轴的转动惯量.

题中的立体记为Ω，则

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \int_1^2 dz \iint\limits_{x^2+y^2 \le 2z} (x^2 + y^2) d\sigma = 2\pi \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 d\rho = \frac{14}{3}\pi$$

四（15）。（本题满分 7 分）计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{S} x^2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第二卦限部分的外侧.

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(x,y,z)$,

$$\iint_s x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy=\iint_s(x^3+y^3+z^3)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1-x^2-y^2\right)d\sigma=\frac{\pi}{8}$$

五（16）（本题满分 7 分）计算$\oint_C\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$C$为$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$，方向为逆时针.

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$,取正数$\varepsilon$很小，使$C_\varepsilon:x^2+y^2=\varepsilon^2$含于$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$,

$$\oint_C\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=2\varepsilon^{-2}\iint_{D_\varepsilon}dxdy=2\pi$$

六（17）（本题满分 7 分）将函数$f(x)=\frac{3x}{x^2+x-2}$展开为$x-2$的幂级数，并指明收敛域.

$$f(x)=\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{1+x-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{2n+1}}\right)(x-2)^n,\ x\in(1,3)$$

七（18）（本题满分 8 分）计算由柱面 $x^2+y^2=2x$、锥面 $2z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 xOy 平面所围立体的表面积.

记S_1为锥面$2z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2x$所截部分，其面积为A_1，记S_2为柱面$x^2+y^2=2x$被锥面$2z=\sqrt{x^2+y^2}$和xOy平面所截部分，其面积为A_2，记为底面S_3，其面积为A_3，

表面积$A=A_1+A_2+A_3$

$$A=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{x^2+y^2=2x}\sqrt{x^2+y^2}ds+\pi=\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\pi+2\int_o^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\pi+4$$