10-11-3 高等数学 B 期中试卷答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设向量 $\vec{a}=\vec{i},\vec{b}=\vec{j}-\vec{k},\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$, 则与 $\vec{a},\vec{b}$ 共面且垂直于 $\vec{c}$ 的单位向量为 $\underline{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)}$；

2. 点 $(1,2,0)$ 在 $x+y+z=0$ 上的投影点为 $\underline{(0,1,-1)}$；

3. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿着点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 $\underline{\frac{1}{2}}$；

4. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在区间 $[-\pi,\pi)$ 上有 $f(x)=\begin{cases}2-x, & -\pi\le x<0\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=2\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 1 \quad}$；

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}\cdot(x-1)^n$ 的收敛域是 $\underline{[\frac{1}{2},\frac{3}{2})}$.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6. 设直线 $L_1:\begin{cases}x+z-1=0\\x-2y+3=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x=3t\\y=-7+4t\\z=2+t\end{cases}$，则 [C]

（A）平行　（B）重合　（C）异面　（D）相交

7. 下列反常积分中收敛的是 [B]

（A）$\int_1^{+\infty}\frac{x\cdot\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$　（B）$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$　（C）$\int_{-\frac{4}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$　（D）$\int_1^2\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

8. 下列命题正确的是 [B]

（A）设 $a_n>\frac{1}{n}$, 则 $\sum(-1)^{n-1}a_n$ 发散.（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=r>1$，则 $\sum u_n$ 发散

（C）$\sum a_n$ 条件收敛，$\sum b_n$ 绝对收敛，则 $\sum(a_n+b_n)$ 绝对收敛..

（D）α 为常数，$\sum[\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 敛散性不定.

9.设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-z,y-2z)=0$ 所确定的隐函数, 其中 a,b 为常数, 则必有 [A]

（A）$\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=1$ （B）$\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}=1$ （C）$\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial x}=1$ （D）$2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

10. 设 $z=f(x+\varphi(x-y),y)$，其中 f,φ 分别有二阶连续偏导数和导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot(1+\varphi')$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(-\varphi' f_{11}+f_{12})\cdot(1+\varphi')-f_1\cdot\varphi''$

11. 求过直线 $\begin{cases}3x-2y+2=0\\ x-2y-z+6=0\end{cases}$ 且与点 $(1,2,1)$ 的距离为 1 的平面方程..

解：设过定直线的平面束方程为 $3x-2y+2+\lambda(x-2y-z+6)=0$,

$$d=\frac{|(3+\lambda)-(2+2\lambda)\cdot 2-\lambda+2+6\lambda|}{\sqrt{(3+\lambda)^2+(2+2\lambda)^2+\lambda^2}}=1,\ \lambda=-2\text{或}-3，$$

$\therefore$ 所求平面为 $x+2y+2z-10=0$ 或 $4y+3z-16=0$

12. 设可微函数 $f(x,y)$ 对任意实数 $t(t>0)$ 满足条件 $f(tx,ty)=tf(x,y)$，$P_0(1,-2,2)$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点, 且 $f_y(1,-2)=4$, 求该曲面在点 $P_0(1,-2,2)$ 处的切平面.

解：$f(tx,ty)=tf(x,y)$ 两边对 t 求导, 令 t=1，$xf_x+yf_y=f$，$f_x(1,-2)=10$, 则切平面方程为 $10(x-1)+4(y+2)-(z-2)=0$。

13. 直线 $L:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周,求旋转曲面的方程.

解：设直线上点 $M_0(1,y_0,z_0)$ 旋转到曲面上 $M(x,y,z)$,则

$x^2+y^2=1+{y_0}^2$, $y_0=z_0$, $z=z_0$, $\therefore x^2+y^2-z^2=1$ 为旋转曲面方程.

14. 讨论级数将 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{a^n}(a>0,\text{且}a\neq e)$ 的敛散性.

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{a}=\frac{e}{a}\begin{cases}<1,a>e\\>1,a<e\end{cases}$,

当 $a>e$ 时, 级数收敛；当 $a<e$ 时, 级数发散。

四（15）（本题满分 8 分） 将 $f(x)=|x|,x\in[-1,1]$ 展开为周期为 2 的傅立叶级数。

解：$f(x)$ 为偶函数，傅立叶级数为余弦级数。

$b_n = 0$， $a_0 = 2\int_0^1 x dx = 1$，

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} \dfrac{-4}{n^2\pi^2}, n\text{为奇数}, \\ 0\ \ , n\text{为偶数}. \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = |x| = 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x,\ (-1 \le x \le 1)\ 。$$

五（16）（本题满分 8 分）将 $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ 展开成 x 幂级数，并求 $f^{(100)}(0)$ 的值.

解：$\dfrac{1}{1-x} = \sum_1^{\infty} x^n$， $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_1^{\infty} nx^{n-1}$， $\dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum_2^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_2^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_2^{\infty} n(n-1)x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}(n+2)(n+1)x^n + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}(n+1)nx^n = \sum_0^{\infty}(n+1)^2x^n = \sum_0^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad x \in (-1,1)$$

$(n+1)^2 = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$， $f^{(100)}(0) = (101)^2 100!$

六（17）（本题满分 8 分）求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ 的和.

解：设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1}, x \in [-1,1]$，则 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}S(\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ 为所求.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}, S(x) - S(0) = \arctan x, S(0) = 0\ ，$$

$$\therefore S(x) = \arctan x, x \in [-1,1]\ ，\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{3}}S(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\ 。$$