05-06-3 高等数学 A 期中试卷

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\cos y+y\cos z+z\cos x=2$ 所确定，则 $\mathrm{d}z=$____________；

2．设 $z=i^{1-i}$，则 $\operatorname{Im} z=$____________________；

3．设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$________；

4．$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} y\left(x^2+\cos y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$___________；

5．设 S 为平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限部分的下侧，则 $\iint\limits_S \left(2x+\dfrac{4}{3}y+z\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$___。

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．设 $I_1=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left[xy^2+f\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}y$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$，其中 $f(t)$ 是连续函数，则有 [ ]

(A) $I_1<I_2$ (B) $I_1>I_2$ (C) $I_1=2I_2$ (D) $I_1=I_2$

7．曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线必定平行于平面 [ ]

(A) $y=0$ (B) $x=0$ (C) $z=0$ (D) $x+y-z=0$

8．设 L 是摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t-\pi\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的弧段，则曲线积分

$\int_L \dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=$ [ ]

(A) π (B) $-\pi$ (C) 0 (D) 2π

9． 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $\left(x,y\right)$ 处可微，下列结论不正确的是 [ ]

（A） $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续；　　（B） $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有界；

（C） $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处两个偏导数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 都存在；

（D） $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处两个偏导数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 都连续.

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

10. 设 $z = f\left(x\sin y, \dfrac{x}{y}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

11. 设调和函数 $u(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + x$，求 $u(x,y)$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$，并求解析函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$。（自变量单独用 z 表示）

12. 计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中区域 $D = \left\{(x,y) \middle| y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\right\}$。

13. 计算 $\iiint\limits_\Omega \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + x^2 y\right)\mathrm{d}V$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leq 2z$。

14. 计算 $\int_L x^2\,\mathrm{d}s$，其中 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $z=\sqrt{5}$ 的交线。

四（15）.（本题满分 7 分） 求由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的表面积。

五（16）.（本题满分 9 分） 在曲面 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1\,(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 上求 **（第 4 页）** 一点 P，使过点 P 的切平面与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小，并求最小体积。

六（17）.（本题满分 7 分） 试求连续可微函数 $\varphi(x)$，使在右半平面内曲线积分

$\int_A^B (\cos x - \varphi(x))\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x + \varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$；且当 $A=(1,0), B=(\pi,\pi)$ 时，求该曲线积分的值

七（18）.（本题满分 6 分） 计算 $\iint\limits_\Sigma \dfrac{ax\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z+a)^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 a 为大于 0 的常数，Σ 为 $z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。