高等数学（A）06-07-3 期中试卷参考答案及评分标准

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．曲线 $\begin{cases} xyz=1 \\ x=y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{2}=y-1=\dfrac{z-1}{-3}}$；

2．方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分为 $\underline{\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y}$；

3．交换二次积分的积分次序 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x=\underline{\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y}$；

4．设曲线 $C: x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}, 0\le t\le\pi$，则 $\int_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s=\underline{2\pi}$；

5．设曲面 $\sum:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=\underline{\dfrac{4}{3}\sqrt{3}}$.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．设 $f(z)=2xy-\mathrm{i}\,x^2$，那么　　　　[D]

(A) $f(z)$ 在原点解析　　(B) $f(z)$ 在复平面上处处不可导

(C) $f(z)$ 仅在原点可导　　(D) $f(z)$ 仅在实轴上可导

7．二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$ 可以写成　　　　[D]

（A）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　（D）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

8．设 Ω 由 $3x^2+y^2=z, z=1-x^2$ 所围成，则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=$　　　　[C]

（A）$4\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$　　（B）$2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

（C）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$　　（D）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{1-x^2}^{3x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

9. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,\ 0)$ 点处 [C]

（A）连续且偏导数存在　　（B）连续但偏导数不存在

（C）不连续但偏导数存在　　（D）不连续且偏导数不存在

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

10. 设 $f(x,y),g(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，令 $\varphi(x)=f(x,g(x,x^2))$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=f_1+f_2\cdot(g_1+2xg_2)$ **（3 分）**

$\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=f_{11}+2f_{12}\cdot(g_1+2xg_2)+f_{22}\cdot(g_1+2xg_2)^2+f_2\cdot(g_{11}+4xg_{12}+4x^2g_{22}+2g_2)$ **（5 分）**

11. 求函数 $u=z^2\sqrt{x^2+2y^2}$ 在点 $M_0\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$ 处沿曲面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{2}=1$ 在该点的外法线方向上的方向导数.

解 $\nabla u(M_0)=\left\{\dfrac{xz^2}{\sqrt{x^2+2y^2}},\dfrac{2yz^2}{\sqrt{x^2+2y^2}},2z\sqrt{x^2+2y^2}\right\}\Big|_{M_0}=\left\{\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3},\sqrt{6}\right\}$，**（3 分）**

$\mathbf{n}\big|_{M_0}=\left\{\dfrac{x}{4},y,\dfrac{z}{2}\right\}\Big|_{M_0}=\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\},\mathbf{n}^{\circ}\big|_{M_0}=\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$，**（2 分）**

$\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{M_0}=\left\{\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3},\sqrt{6}\right\}\cdot\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right\}=\sqrt{6}$ **（3 分）**

12. 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=2xy+\mathrm{e}^{-y}\sin x$，求实部 $u(x,y)$ 及解析函数 $f(z)$ 和 $f'(\mathrm{i})$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x-\mathrm{e}^{-y}\sin x, u=x^2+\mathrm{e}^{-y}\cos x+\varphi(y)$，**（2 分）**

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^{-y}\cos x+\varphi'(y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y-\mathrm{e}^{-y}\cos x$， $\varphi(y)=-y^2+C$，

$u(x,y)=x^2-y^2+\mathrm{e}^{-y}\cos x+C$，**（3 分）** $f(z)=z^2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+C$，**（2 分）**

$f'(\mathrm{i})=\left(2+\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{i}$ **（1 分）**

13. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, z\le x^2+y^2+z^2\le 2z\right\}$.

解 原式= $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$ **（5 分）** $=\dfrac{15\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{5\pi}{4}$ **（3 分）**

14. 计算 $\int\limits_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$，其中 L 是由极坐标方程 $\rho=2-\sin\varphi$ 所表示的曲线上从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 的一段弧.

解 $P=x^2+y^2$, $Q=2xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，积分与路径无关，**（3 分）**

$\mathrm{d}u=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}x^3+xy^2\right)$，**（2 分）** $\int\limits_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=\left(\dfrac{1}{3}x^3+xy^2\right)\Bigg|_{(2,0)}^{(0,1)}=-\dfrac{8}{3}$ **（3 分）**

四（15）.（本题满分 9 分） 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点，使它与点 $A(1,1,1)$ 及点 $B(2,3,4)$ 的距离平方之和为最小.

解 令 $L=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2+\lambda(3x-2z)$，**（3 分）**

$L_x=2(2x-3)+3\lambda=0, L_y=2(2y-4)=0, L_z=2(2z-5)-2\lambda=0$，**（3 分）** 得唯一驻点的坐标：$x=\dfrac{21}{13}, y=2, z=\dfrac{63}{26}$，由问题的实际意义知道，该问题一定存在最小值，故点 $\left(\dfrac{21}{13},2,\dfrac{63}{26}\right)$ 即为所求. **（3 分）**

五（16）.（本题满分 9 分） 设在 xoy 平面上有薄板 $a^2\le x^2+y^2\le a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数 $a>0$)，其面密度为 $\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求此薄板的质心坐标.

解 设质心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$，由对称性知 $\overline{y}=0$，**（1 分）** 平板区域的极坐标表示为：

$a\le\rho\le a(1+\cos\theta)$，**（2 分）**

$M_y=\iint\limits_{\sigma}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}\rho^2\mathrm{d}\rho=\dfrac{13}{10}a^3$，**（3 分）**

$m=\iint\limits_{\sigma}\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{4}{3}a^2$，**（2 分）**

质心坐标为$\left(\dfrac{39}{40}a,0\right)$. **（1 分）**

六（17）．（本题满分 6 分）设函数$z=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f_y\neq 0$，证明：

对任意常数C, $f(x,y)=C$为一直线的充分必要条件是

$$(f_y)^2 f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}+f_{yy}(f_x)^2=0$$

证 由题设条件知，由方程$f(x,y)=C$唯一确定了二阶可导函数$y=y(x)$，从而得知：

$f(x,y)=C$为一直线的充分必要条件是$y''(x)=0$. **（2 分）**方程$f(x,y)=C$的等号两端对

x求导，得 $y'=-\dfrac{f_x}{f_y}$，**（1 分）**再由$f_y\neq 0$及

$$y''=-\frac{f_y(f_{xx}+f_{xy}y')-f_x(f_{xy}+f_{yy}y')}{f_y^2}=-\frac{f_y^2 f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}+f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}=0,$$

即得所证. **（3 分）**