学号________ 姓名________

密 封 线

东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 高等数学B　考试日期 2011-08　得分____

适用专业 转系转专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. 当 p 取值范围为 $(-\infty,1)$ 时，广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p(x-1)^{p-1}}$ 收敛。 $\int_1^2 + \int_2^{+\infty}$

$(1<p<2)$

2. 设 $u=\ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，则 $div(gradu)=$ $\dfrac{5}{x^2+y^2+z^2}$. $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

3. 设 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\cdot\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=$ 0.

4. 设 $a_n>0,p>1$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}[n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n]=1$，则当 p 的取值范围为 $(2,+\infty)$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

$t+h=y$　$\dfrac{\int_{a+h}^{x+h}f(y)dy-\int_a^x f(t)dt}{h}$

$=f(x+h)-f(a+h)=f(x)-f(a)$

5. 设 $f(x)=\pi x-x^2,0<x<\pi$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $x\in(\pi,2\pi),S(x)=$ $x^2-3\pi x+2\pi$

6. 设 $t>0$，则 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}\left[1-\cos(x^2+y^2)\right]d\sigma$ 是 t 的 2 6 阶无穷小量（具体数字）。

7. 函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在点 M 处的外法向量 $\vec{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|(1,1,1)=$ $\cancel{\frac{3}{3}\sqrt{3}}$ $\dfrac{1}{3}$

$x^2+y^2-2z=0$　$(2,2,-2)$　$l_0=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$

$u_x\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\vec{u}\cdot l_0$

8. 设 Σ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是其外法向量的方向余弦，则 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS=$ 4π.

9. 设 $f'(0)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1-\cos f(x)}{\sin x})^{\frac{1}{x}}=e$，则 $f'(0)=$ $\pm\sqrt{2}$.

二. 计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分)

10. $\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

设 $\sqrt{x}=t$

$$=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=2\int\arcsin\sqrt{x}\,d\sqrt{x}+2\int\ln x\,d\sqrt{x}$$

~~设 arcsin√x = a~~，$\sqrt{x}=t$

原式 $=2[\arcsin\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt]+2[\ln x\cdot\sqrt{x}-\int\frac{1}{t^2}\cdot t\,dt]$

$$=2[\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}d(1-t^2)]+2[\sqrt{x}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt^2]$$

$$=2[\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-t^2}]+2[\sqrt{x}\ln x-\frac{1}{2}\ln t^2]+C$$

$$=2\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\ln x-\ln x+C$$

11. 求极限 $\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$$

$$=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}$$

$$=e^{\frac{x}{\sin x}}$$

$x\neq k\pi\quad k\in Z$

$$\lim_{x\to k\pi^-}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to k\pi^-}\frac{x}{\sin x}}$$

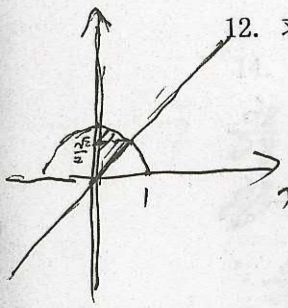
① 当 $k=0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin x}=1\quad\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1$

② 当 $k\neq 0$ 时 $\lim\limits_{x\to k\pi^-}\frac{x}{\sin x}$ 不存在 $\quad\lim\limits_{x\to k\pi^+}\frac{x}{\sin x}$ 不存在

$\therefore$ $x=0$ 是可去间断点

$x=k\pi\ (k\in Z,\ k\neq 0)$ 是第二类间断点

12. 求 $\iint\limits_D \sqrt{1-y^2}\,dxdy$，其中 D 为 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=x$ 及 $x=0$ 所围成的区域。



$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\,dxdy$$

$$\cancel{=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2\sin^2\varphi}\,d\rho}$$

$$\cancel{=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\rho^2\sin^2\varphi}\,d\rho^2}$$

$$\cancel{=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{-\sin^2\varphi}\right)\sqrt{1-\rho^2\sin^2\varphi}\,d(1-\rho^2\sin^2\varphi)}$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-y^2}\,y\,dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (1-y^2)\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-y^2}\,d(1-y^2) + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 1\,dy - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 y^2\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + y\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{3}y^3\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

13. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2\cdot 1}+\frac{5}{2^2\cdot 2!}+\frac{7}{2^3\cdot 3!}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n\cdot n!}\right)$.

~~设~~ $\cancel{a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}}$

~~设~~ $\cancel{a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n\cdot n!}x^{2n}}$

$$\cancel{=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n\cdot n!}x^{2n+1}\right)'}$$

$$\cancel{=\frac{}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{n!}}$$

设 $a(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{2^n\cdot n!}x^{n-1}+\frac{1}{2^n\cdot n!}x^n\right)$

$$=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n!}\right)' + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n!}$$

$$=2(e^{\frac{x}{2}}-1)' + e^{\frac{x}{2}}-1$$

$$\cancel{=2e^{x}+e^{x}-1} = 2e^{\frac{x}{2}}-1 \quad (-2<x<2)$$

$$\cancel{=3e^{x}-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2\cdot 1}+\frac{5}{2^2\cdot 2!}+\frac{7}{2^3\cdot 3!}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n\cdot n!}\right)$$

$$=a(1)$$

$$=2e^{\frac{1}{2}}-1$$

14. 设$z = f(xy, e^x \sin y) + g(\frac{y}{x})$，其中$f, g$具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1 x + f_2 e^x \cos y + g' \cdot \frac{1}{x}$$

$\because$ 二阶连续偏导

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (f_{11} y + f_{12} e^x \sin y) x + f_1 + (f_{21} y + f_{22} e^x \sin y) e^x \cos y + f_2 e^x \cos y + g''(-\frac{y}{x^2})\frac{1}{x} + g' \cdot (-\frac{1}{x^2})$$

$$= f_{11} xy + f_1 + f_{12} e^x (x \sin y + y \cos y) + f_{22} e^x \sin y \cos y + f_2 e^x \cos y - \frac{y}{x^3} g'' - \frac{1}{x^2} g'$$

三.（15）（本题满分 7 分） 设$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 其中$g(x)$有连续的二阶导数，且$g(0) = 1, g'(0) = -1$，求$f'(x)$，并讨论$f'(x)$的连续性。

$x \neq 0$时 $f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{g(x+t) - e^{-(x+t)}}{x+t} - \frac{g(x) - e^{-x}}{x}}{t}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{x g(x+t) - x e^{-x-t} - x g(x) + x e^{-x} - t g(x) + t e^{-x}}{t x (x+t)}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{x g t + x e^{-x-t} - g(x) + e^{-x}}{x(x+t) + tx}$

$= \frac{x e^{-x} - g(x)}{x^2}$

$f'(x) = \frac{(g'(x) + e^{-x}) x - g(x) - e^{-x}}{x^2} = \frac{x g'(x) - g(x) + e^{-x}(x-1)}{x^2}$

$x = 0$时 $f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{g(t) - e^{-t}}{t} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - e^{-t}}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{g'(t) + e^{-t}}{2t}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{g''(t) - e^{-t}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2}$

$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{x g'(x) + g(x) + e^{-x}(x-1)}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{g''(0) - 1}{2} & x = 0 \end{cases}$

2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} g'(x) + e^{-x} = 0 = f(0)$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$

$\therefore f(x)$ 连续

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x g'(x) + g(x) + e^{-x}(x-1)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{g'(x) + x g''(x) + g'(x) - e^{-x}(x-1) + e^{-x}}{2x}$ 不存在

$\therefore$ 不连续

四．（16）（本题满分 7 分）

设$Q(x,y)$在Oxy平面有一阶连续偏导数，积分$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关，$\forall t$，恒有$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$，求$Q(x,y)$.

$P=2xy \quad Q=Q(x,y) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=2x$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$

$Q=\int_0^x 2t\,dt=x^2+g(y)$

$\int 2xy\,dx+(x^2+g(y)+c)dy$

$=d(x^2y)+d[(x^2+c)y+F(y)]$

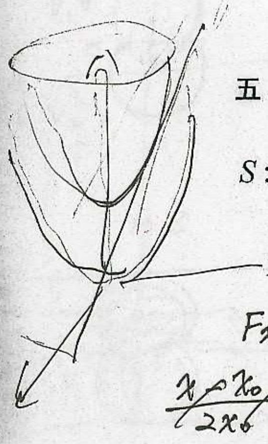
$=d[x^2y+cy+F(y)]$

$t^2\times1+c\times1+F(1)=1\times t+ct+F(t)$

$F(t)-F(1)=t^2-ct+c(t-c)$

$F(x)=x^2-x$

$\therefore Q(x,y)=x^2+y^2$



五．（17）（本题满分 7 分）求曲面$\Sigma: z=x^2+y^2+1$上任一点的切平面与曲面$S: z=x^2+y^2$所围立体Ω的体积。

设 $P(x_0,y_0,z_0)$

$F=x^2+y^2-z+1$

$F_x=2x=2x_0 \quad F_y=2y_0 \quad F_z=-1$

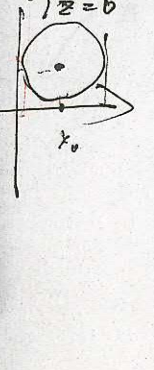
$\frac{x-x_0}{2x_0}=\frac{y-y_0}{2y_0}=\frac{z-z_0}{-1}=$

$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$

切平面 $z=2x_0x+2y_0y-2x_0^2-2y_0^2+z_0=2x_0x+2y_0y+2-z_0$

$x^2+y^2=2x_0x+2y_0y-2x_0^2-2y_0^2+z_0$

投影$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=z_0-x_0^2-y_0^2=1$，$z=0$



$\iiint_D 1\,dV$

$=\int_{x_0-1}^{x_0+1}dx\int_{-\sqrt{1-(x-x_0)^2}-y_0}^{\sqrt{1-(x-x_0)^2}+y_0}dy\int_{x^2+y^2}^{2x_0x+2y_0y+2-z_0}1\,dz$

$=\int_{x_0-1}^{x_0+1}dx\int_{y_0-1}^{y_0+1}dy\,(2x_0x+2y_0y+2-z_0-x^2-y^2)$

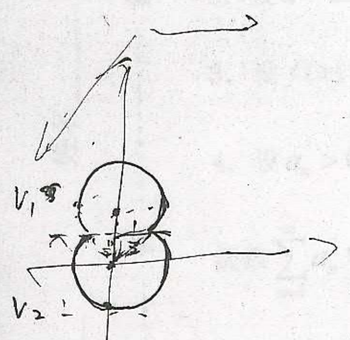
$=\int_{x_0-1}^{x_0+1}dx\,(2x_0x+2-z_0-x^2)y+y_0y^2-\frac{y^3}{3}\Big|_{y_0-1}^{y_0+1}$

$=\int_{x_0-1}^{x_0+1}(4x_0x+4y_0^2-2z_0-2x^2+\frac{10}{3})dx$

$=-\frac{2}{3}x^3+2x_0x^2+(4y_0^2-2z_0+\frac{10}{3})x\Big|_{x_0-1}^{x_0+1}$

六.（18）（本题满分 8 分）

设平面上的曲线由 $x^2+y^2=2y(y\geq\frac{1}{2})$, $x^2+y^2=1(y\leq\frac{1}{2})$ 连接而成，一容器的内侧是由该曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面。（1）求该容器的容积；（2）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？



$$V_2=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^1\rho^2 d\rho+\cancel{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta}\ \frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

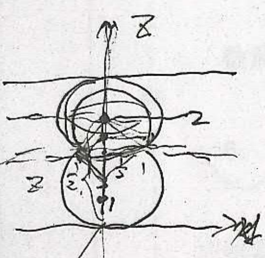
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\theta\, d\theta\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\times2\pi+\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{9}{8}\pi$$

$$\therefore V=2V_2=\frac{9}{4}\pi$$

2) $W_1=\int_0^{\frac{3}{2}}\cancel{z\,dz}\ z\,dz$



切片 $\cancel{S=dV}$

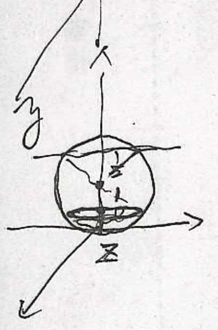
$$dw=\pi(1-(1-z)^2)z\,dz$$

$$W_1=\pi\int_0^{\frac{3}{2}}z(1-(1-z)^2)\,dz$$

$$=\pi\int_0^{\frac{3}{2}}(2z^2-z^3)\,dz$$

$$=\pi\left(\frac{2z^3}{3}-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{63}{64}\pi$$



$$W_2=\pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}z(1-(2-z)^2)\,dz$$

$$=\pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}(-3z+4z^2-4z^3)\,dz$$

$$=\pi\left(-\frac{3}{2}z^2+\frac{4}{3}z^3-z^4\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3}$$

$\frac{63}{16}\pi$