习 题 课

一．选择题

1. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于S，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$（ ）

2．下列级数中收敛的级数是（ ）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$；（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$；（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{1+n})^n$；（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx$。

3．设a为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}]$（ ）

（A）绝对收敛；（B）条件收敛；（C）发散；（D）敛散性与a的取值 有关。

4．$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{2^n(\ln n)^{\alpha}n!}(\alpha\in R)$（ ）

（A）绝对收敛； （B）条件收敛； （C）发散； （D）不能确定其敛散性。

二．填空题

1．设常数$p>0$，则当p满足条件____时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{n^p}$收敛。

2．设$\sum_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n-1})=S$，且$\lim_{n\to\infty}nu_n=A$，则$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=$____。

三．判别下列级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

2．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}$

3．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\frac{n-1}{n+1}$

四．解答题

1. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n}{\ln n}\,(a>0)$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛，还是条件收敛。

2. 常数 P 取什么范围时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ 是（1）发散;（2）条件收敛;（3）绝对收敛。

五．证明题

1．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

2．设函数 $f(x)$在$|x|\le1$上有定义，在 $x=0$的某邻域内具有二阶连续导数，且

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛。

3．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n-1}|$ 收敛，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n^2$ 收敛。

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n-1}|$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ 收敛于$S\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，

4. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$，（1）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值;（2）试证对任意的常数$\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。