07-08-2高数ＡＢ期末试卷答案

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x - x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \underline{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$；

2. $\underline{\mathrm{d}y = x^{\sin\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)\mathrm{d}x}$；

3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{\sin 2h} = \underline{-1}$；

4. $\underline{x + y = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}$；

5. 单调增加区间是$\underline{\left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right)}$，单调减少区间是$\underline{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)}$；

6. 拐点坐标是$\underline{\left(1, \mathrm{e}^{-2}\right)}$，渐进线方程是 $\underline{y = 0}$；

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+3} + \frac{n}{n^2+12} + \cdots + \frac{n}{n^2+3n^2}\right) = \underline{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}}$；

8. $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{1+\cos 2x} + \cos x^2 \sin^3 x\right)\mathrm{d}x = \underline{4\sqrt{2}}$；

9. $y^* = \underline{Ax\cos x + Bx\sin x}$.

二. 计算下列积分（本题共 3 小题，每小题 7 分，满分 21 分）

10. 解 $\int_0^2 x^2\sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x-1+1)^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^2 (x-1)^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^2 (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + 0 + \frac{\pi}{2} \quad （x-1 = t,\ t = \sin\theta,\ \mathrm{d}t = \cos\theta\mathrm{d}\theta）$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

11．解 $\int \arctan\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = x\arctan\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{2+2\sqrt{x}+x}\mathrm{d}x$，

令 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，$\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{2+2\sqrt{x}+x}\mathrm{d}x=\int\frac{t^2}{2+2t+t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{x}-\ln(x+2\sqrt{x}+2)+C_1$，

原式 $= x\arctan\left(1+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}+\ln\left(x+2\sqrt{x}+2\right)+C$

12。解 $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-x}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}-I$

$I=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

三（13）．．解 （1）$F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个原函数，因为 $F(0)=\frac{1}{2}\neq F(0-0)=0$，

$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不连续.

（2）$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C, & x\geq 0\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+C, & x<0\end{cases}$

四（14）．解 令 $xt=u$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x^2-3\sin x^3}{2x^2}=1$

五（15）．解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\cos x=2\sin x\cos x$，

$y=\mathrm{e}^{\int\cos x\mathrm{d}x}\left(C+2\int\sin x\cos x\mathrm{e}^{-\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{\sin x}\left(C-2\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\sin x}\right)$

$=C\mathrm{e}^{\sin x}-2(1+\sin x)$

六（16）解 由已知条件得 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$， $f(x)=\sin x-\cos x+\mathrm{e}^x$，

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{f(\pi)}{1+\pi}=\frac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{1+\pi}$$

七（17）解（1） $S(a)=S_1(a)+S_2(a)=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right)\Big|_a^1=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

令 $S'(a)=a^2-\frac{1}{2}=0$，得 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$， 又 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$，则

$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ 是唯一的极小值即最小值.

（2） $V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}x^2-x^4\right)\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$

$$=\pi\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi.$$

八（18）.

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\Big|_{x^2}^{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{\sqrt{u^3}}\mathrm{d}u\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x^2}{x}-\frac{\cos(x+1)^2}{x+1}\right)-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{\sqrt{u^3}}\mathrm{d}u$$

$$|f(x)|<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{\sqrt{u^3}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x}$$