东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

04-05-2几代B

一、 (24%)填空题

- 1. 以 A(1,1,2) , B(-2,-1,1) , C(-1,1,-1) 为顶点的三角形的面积为______
- 2. 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 2\alpha_3, \alpha_1)$ 。若 A 的行列式 |A| = 3,则 B 的行列式 $|B| = ______$;
- 3. 若向量 $\alpha = (1,0,1)$, $\beta = (2,1,-1)$, $\gamma = (-1,1,k)$ 共面,则参数k =______;
- 4. 若A为n阶方阵,则方阵 $B = \begin{pmatrix} I & O \\ A & 2I \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $B^{-1} = \frac{1}{2}$
- 5. 已知向量 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征向量,则参数 $a = \underline{\hspace{1cm}}$,相应的特

征值等于____;

- 6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,则在实矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 中,与 A 相抵的有_____;与 A 相似的有_____;与 A 相合的有_____
- 二、 (8%) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$.
- 三、 (10%) 假设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵方程3X = B + XA的解.

四、(14%)假设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

东南大学学生会 Students' Union of Southeast University

- 2. 若在非齐次线性方程组 Ax = b 的解集中,存在两个线性无关的解向量,但不存在 更多的线性无关的解向量,试确定这时参数 λ 及 a 的值,并求 Ax = b 的通解.
- 五、 (10%)已知直线 l 过点 P(1,1,1) ,与平面 $\pi: x+y-z=1$ 平行,且与直线 λ : $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 相交。求直线 l 的方向向量,并写出直线 l 的方程.

六、 (10%) 假设二次曲面 π_1 的方程为: $x^2 + 4y^2 = 2z$; 平面 π_2 的方程为: x = z - 1.

- 1. π_1 与 π_2 的交线向xy平面作投影所得的投影曲线l的方程为____;
- 2. 该投影曲线绕x轴旋转所得的旋转曲面 π 的方程为
- 3. 在坐标系中画出投影曲线 l 的草图 (请给坐标轴标上名称);
- 4. 在坐标系中画出 π_1 与 π_2 ,所围成的立体的草图(请给坐标轴标上名称).
- 七、 (14%) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 x_3^2 + 2kx_1x_3$
 - 1. 试就参数 k 不同的取值范围, 讨论二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 的类型;
 - 2. 设 k > 0. 若经正交变换 X = QY, $f(x_1, x_2, x_3)$ 可以化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 4y_3^2$,求参数 k 及一个合适的正交矩阵 Q.

八、(10%)证明题

- 1. 假设n维向量 $\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$, $\beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$ 。若 β_1 , β_2 线性无关,证明: α_1 , α_2 线性无关,并且,行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 。
- 2. 假设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵,并且, A 的特征值均大于 a , B 的特征值均大于 b ,证明: A+B 的特征值均大于 a+b 。