10-11-2 高数 A、B 期中参考答案

一. 填空题（每个空格 4 分，本题满分 24 分）

1．1；**2**．e^6；**3**．$\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；**4**．$2010!$；**5**．$-\mathrm{e}^2$；**6**．$x+y=8$．

二. 单项选择题（每小题 4 分，本题满分 12 分）

7．A； **8**．D；**9**．D

三. 计算题（每小题 8 分，本题满分 32 分）

10．解 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^x=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)^x=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}$

11．解 $\dfrac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\le\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\le\dfrac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{3}{2}$，由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)=\dfrac{3}{2}$

12．解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+t^2$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{2t}{1-\frac{2}{1+t^2}}=\dfrac{2t(1+t^2)}{t^2-1}$

13．解 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，$f''(1)=1$，$f'''(1)=-1$，$f^{(4)}(x)=\dfrac{2}{x^3}$，

$x\ln x=x-1+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{1}{6}(x-1)^3+\dfrac{1}{12(1+\theta(x-1))^3}(x-1)^4$，$0<\theta<1$

四(14)（13 分）. 解（1）当 $a\le0$ 时，$f(x)$ 不是连续函数，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 不存在。

（2）当 $0<a\le1$ 时，$f(x)$ 连续，不可导，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0$，

所以 $f(x)$ 连续，而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{a-1}\sin(x^b)$，右端极限不存在，故 $f(x)$ 不可导

（3）当 $1<a<1-b$ 时，$f(x)$ 可导，但 $f'(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上无界。

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{a-1}\sin(x^b)=0=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，

$f'(x)=\begin{cases}ax^{a-1}\sin(x^b)+bx^{a+b-1}\cos(x^b), & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$，故 $f(x)$ 可导，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$

$=\lim\limits_{x\to0^+}(ax^{a-1}\sin(x^b)+bx^{a+b-1}\cos(x^b))=b\lim\limits_{x\to0^+}x^{a+b-1}\cos(x^b)$，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{a+b-1}=+\infty$，

故 $f'(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上无界。

（4）当 $a=1-b$ 时，$f'(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有界，但 $f'(x)$ 不连续。由（3）可得 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=b\lim\limits_{x\to0^+}\cos(x^b)$，$b<0$，此时可见等式右端的极限不存在，因而 $f'(x)$ 不连续，由（3）得 $|f'(x)|\le|a|+|b|$，$x\in[-1,1]$，因 $a+b-1=0$。

（5）当 $a>1-b$ 时，$f'(x)$ 连续。由（3）得 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$，故 $f'(x)$ 连续。

五(15).（8 分）解 设 $f(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}$，当 $a\ge0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 严格单增，当 $a=0$ 时，$f(1)=0$，$f(x)$ 有唯一零点，即方程 $x\ln x=0$ 有唯一实根；当 $a>0$ 时，$f(\mathrm{e}^{-1})=-1-a\mathrm{e}<0$，$f(\mathrm{e}^a)=a(1-\mathrm{e}^{-a})>0$，$f(x)$ 有唯一零点，即方程 $x\ln x=a$ 有唯一实根；当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=\dfrac{x+a}{x^2}=0$，得 $f(x)$ 的唯一的极小值点（最小值点）$x=-a$，若 $f_{\min}=f(-a)=\ln(-a)+1>0$，即当 $a<-\mathrm{e}^{-1}$ 时，方程 $x\ln x=a$ 无实根；当 $a=-\mathrm{e}^{-1}$ 时，$f_{\min}=f(\mathrm{e}^{-1})=0$，$f(x)$ 有唯一零点，即方程 $x\ln x=-\mathrm{e}^{-1}$ 有唯一实根；当 $-\mathrm{e}^{-1}<a<0$ 时，$f_{\min}<0$，$f(\mathrm{e}^a)=a(1-\mathrm{e}^{-a})>0$，$f(\mathrm{e}^{-a})=-a(1+\mathrm{e}^a)>0$，当 $0<x<-a$ 时，$f(x)$ 严格单减，当 $-a<x<+\infty$ 时，$f(x)$ 严格单增，因此 $f(x)$ 有且仅有两个零点，即方程 $x\ln x=a$ 有且仅有两个实根.

六(16)(6 分)证由于 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，由 Lagrange 中值定理，存在 ξ 介于 x 与 x_0 之间，使得 $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0)$，

又由于 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加，故 $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\ge0$，即 $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

七(17)(5 分) 设 $f\in C[a,b]$，且 f 在 (a,b) 内有二阶导数，试证存在 $c\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c).$$

证 左端 $=\left[f\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}\right)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right]-\left[f\left(a+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(a)\right]$，

作辅助函数 $\varphi(x)=f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(x)$，

$$\text{则上式}=\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)\frac{b-a}{2}\qquad \xi\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\left[f'\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\xi)\right]\frac{b-a}{2}=f''\left(\xi+\theta\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\qquad \theta\in(0,1)$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)\qquad c=\xi+\theta\frac{b-a}{2}\in(a,b)$$