东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

08-09-3 高数 A（期中）试卷参考答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．交换积分次序 $\int_{-2}^{0}\mathrm{d}y\int_{0}^{y+2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x=\underline{\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{x-2}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y}$；

2．设 $\mathrm{e}^z-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=0$，则 $\mathrm{Re}\,z=\underline{\ln 2}$， $\mathrm{Im}\,z=\underline{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$；

3．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $y+z=xf(y^2-z^2)$ 所确定的隐函数，其中 f 可微，则全微分

$\mathrm{d}z=\underline{\dfrac{f}{1+2xzf'}\mathrm{d}x+\dfrac{2xyf'-1}{1+2xzf'}\mathrm{d}y}$；

4．设 C 为由 $x+y=\pi$ 与 x 轴, y 轴围成的三角形的边界, $\oint_C \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}s=\underline{\mathrm{e}^{\pi}(\sqrt{2}\pi+2)-2}$

5．设 $f(x,y)$ 连续，$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le1,0\le y\le x^2\right\}$，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{1}{8}}$．

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 [C]

(A) 连续且偏导数存在　　(B) 连续但偏导数不存在

(C) 不连续但偏导数存在　　(D) 不连续且偏导数不存在

7 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le1\right\}$, D_1 为 D 在第一象限部分, 则下列各式中**不成立**的是 [B]

（A） $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　（B） $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（C） $\iint\limits_D(x+x^3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$　　（D） $\iint\limits_D x^2y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

8 设 $f(t)\in C[0,+\infty)$, $I(R)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$, 则当 $R\to0^+$ 时, $I(R)$ [D]

（A）是 R 的一阶无穷小　　（B）是 R 的二阶无穷小
（C）是 R 的三阶无穷小　　（D）至少是 R 的三阶无穷小

9．设 $f(x,y)$ 在原点的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=a>0$，则　[B]

（A） $f(x,y)$ 在原点处取得极大值　　（B） $f(x,y)$ 在原点处取得极小值

（C）不能断定 $f(x,y)$ 在原点处是否取得极值　（D）原点一定不是 $f(x,y)$ 的极值点

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

10．计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,x+y\ge 1\right\}$.

解 $\iint\limits_D \dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\dfrac{5}{2}\iint\limits_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\dfrac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1}(\cos\varphi+\sin\varphi)\mathrm{d}\rho=5-\dfrac{5}{4}\pi$

11．计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma (z+y)\mathrm{d}A$，其中 Σ 是由 $z=0,z=1$ 与 $z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

解 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$，$\Sigma_2:\begin{cases}x^2+y^2\le 2\\ z=1\end{cases}$，$\Sigma_3:\begin{cases}x^2+y^2=1+z^2\\ 0\le z\le 1\end{cases}$，$D:\begin{cases}1\le x^2+y^2\le 2\\ z=0\end{cases}$

$$\iint\limits_\Sigma (z+y)\mathrm{d}A=\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}A=\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}A+\iint\limits_{\Sigma_2} z\mathrm{d}A+\iint\limits_{\Sigma_3} z\mathrm{d}A=2\pi+\iint\limits_D\sqrt{2(x^2+y^2)-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\pi+2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2\rho^2-1}\rho\mathrm{d}\rho=\left(\sqrt{3}+\frac{5}{3}\right)\pi$$

12．求 $\iint\limits_\Sigma \dfrac{x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为圆柱体 $y^2+z^2\le R^2$，$|x|\le R\ (R>0)$ 的表面，取外侧.

解 $\Sigma_1:\begin{cases}y^2+z^2\le R^2\\ x=-R\end{cases}$ 取后侧，$\Sigma_2:\begin{cases}y^2+z^2\le R^2\\ x=R\end{cases}$ 取前侧，$\Sigma_3:\begin{cases}y^2+z^2=R^2\\ |x|\le R\end{cases}$ 取外侧，

$D_{zx}=\left\{(z,x)\big||z|\le R,|x|\le R\right\}$，

$$\oiint_{\Sigma}\frac{x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_1}\frac{R^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{R^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_2}\frac{R^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{R^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_3}\frac{y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{x^2+R^2}$$

$$=0+2\iint_{D_{zx}}\frac{\sqrt{R^2-z^2}}{x^2+R^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{R}{2}\pi^2$$

13. 求由曲面 $x^2+z=1, y^2+z=1$ 和 $z=0$ 所围成的质量均匀分布的立体的质心坐标.

解 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$， 质量 $m=8\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(1-x^2)\mathrm{d}y=2\mu$，

对 xOy 平面的静力矩 $M_{xy}=8\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2}z\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\mu$， $\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{1}{3}$

另解 $\bar{x}=\bar{y}=0$， 用切片法 $\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{\mu\int_0^1 z\left(2\sqrt{1-z}\right)^2\mathrm{d}z}{\mu\int_0^1\left(2\sqrt{1-z}\right)^2\mathrm{d}z}=\frac{1}{3}$

14. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=2xy+\frac{x}{x^2+y^2}$，求 $f(z)$ 的表达式（用变量 z 表示）和 $f'(\mathrm{i})$.

解 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2y-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $v=y^2-\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi(x)$，

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $\varphi(x)=-x^2-C$，

$f(z)=\frac{1}{z}-\mathrm{i}\left(z^2+C\right)$， $f'(\mathrm{i})=3$

另解： 因为解析，所以 $f'(z)=u_x-iu_y=(2y+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2})-i(2x-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2})$

从而 $f'(z)=-\frac{1}{z^2}-i2z\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}-iz^2+C$

四（15）（本题满分 8 分） 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和平面 $x+y=0$ 的交线上的最大值与最小值.

解 首先根据条件得$u=x^2+2y^2+3z^2=3-y^2-2x^2=3-3x^2\le 3$，且在点$(0,0,\pm 1)$处，$u_{\max}=3$，继续由条件得$u=3\left(x^2+z^2\right)=3\left(\frac{1-z^2}{2}+z^2\right)=\frac{3}{2}\left(1+z^2\right)\ge\frac{3}{2}$，且在点$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$处，$u_{\min}=\frac{3}{2}$

五（16）（本题满分 8 分）试求过直线$\begin{cases}x+y-2=0\\x-5y-z-3=0\end{cases}$，且与曲面$z=x^2+y^2$相切的平面方程.

解 设过直线$\begin{cases}x+y-2=0\\x-5y-z-3=0\end{cases}$的平面方程为$(1+\lambda)x+(1-5\lambda)y-\lambda z-2-3\lambda=0$，

设切点为(x_0,y_0,z_0)，则$\begin{cases}(1+\lambda)x_0+(1-5\lambda)y_0-\lambda z_0-2-3\lambda=0 & (1)\\ \frac{2x_0}{1+\lambda}=\frac{2y_0}{1-5\lambda}=\frac{1}{\lambda} & (2)\\ z_0=x_0^2+y_0^2 & (3)\end{cases}$

由（2），（3）解得$x_0=\frac{1+\lambda}{2\lambda},y_0=\frac{1-5\lambda}{2\lambda}$，$z_0=\frac{(1+\lambda)^2+(1-5\lambda)^2}{4\lambda^2}$，

代入（1）得$7\lambda^2-8\lambda+1=0$，解得$\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{1}{7}$，从而两切平面方程分别为

$2x-4y-z-5=0$和$8x+2y-z-17=0$。

六（17）（本题满分 8 分）设$ab\ne 0$，$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，$f(ax,bx)=ax$，$f_x(ax,bx)=bx^2$，求$f_{xx}(ax,bx)$，$f_{xy}(ax,bx)$，$f_{yy}(ax,bx)$.

解 对$f(ax,bx)=ax$的等号两端关于x求导，得$af_x+bf_y=a$，（1）

对$f_x(ax,bx)=bx^2$的等号两端关于x求导，得$af_{xx}+bf_{xy}=2bx$，（2）

对（1）式的等号两端关于x求导，得$a^2 f_{xx}+2abf_{xy}+b^2 f_{yy}=0$，（3）

从（2），（3）及条件$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$解得

$$f_{xy}(ax,bx)=0，\quad f_{xx}(ax,bx)=\frac{2b}{a}x，\quad f_{yy}(ax,bx)=-\frac{2a}{b}x$$