

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

10-11-3 高等数学 B 期中试卷

一. 填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

1. 设向量 $\vec{a} = \vec{i}, \vec{b} = \vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, 则与 \vec{a}, \vec{b} 共面且垂直于 \vec{c} 的单位向量为_____;
2. 点 $(1, 2, 0)$ 在 $x + y + z = 0$ 上的投影点为_____;
3. 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿着点 A 指向点 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为_____;
4. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 在区间 $[-\pi, \pi)$ 上有 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x = 2\pi$ 处收敛于_____;
5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \cdot (x-1)^n$ 的收敛域是_____.

二. 单项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

6. 设直线 $L_1: \begin{cases} x+z-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ 与 $L_2: \begin{cases} x=3t \\ y=-7+4t \\ z=2+t \end{cases}$, 则 []
(A) 平行 (B) 重合 (C) 异面 (D) 相交
7. 下列反常积分中收敛的是 []
(A) $\int_1^{+\infty} \frac{x \cdot \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$ (B) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (C) $\int_{-\frac{4}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ (D) $\int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$
8. 下列命题正确的是 []
(A) 设 $a_n > \frac{1}{n}$, 则 $\sum (-1)^{n-1} a_n$ 发散. (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = r > 1$, 则 $\sum u_n$ 发散
(C) $\sum a_n$ 条件收敛, $\sum b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum (a_n + b_n)$ 绝对收敛..
(D) α 为常数, $\sum \left[\frac{\sin(n\alpha)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ 敛散性不定.
9. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x - z, y - 2z) = 0$ 所确定的隐函数, 其中 a, b 为常数, 则必有 []

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

(A) $\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ (B) $\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ (C) $\frac{\partial z}{\partial y} - 2\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ (D) $2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

三. 计算下列各题(本题共 5 小题, 每小题 8 分, 满分 40 分)

10. 设 $z = f(x + \varphi(x-y), y)$, 其中 f, φ 分别有二阶连续偏导数和导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 。

11. 求过直线 $\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ x - 2y - z + 6 = 0 \end{cases}$ 且与点 $(1, 2, 1)$ 的距离为 1 的平面方程..

12. 设可微函数 $f(x, y)$ 对任意实数 $t (t > 0)$ 满足条件 $f(tx, ty) = tf(x, y)$, $P_0(1, -2, 2)$ 是曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点, 且 $f_y(1, -2) = 4$, 求该曲面在点 $P_0(1, -2, 2)$ 处的切平面.

13. 直线 $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周, 求旋转曲面的方程.

14. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{a^n}$ ($a > 0$, 且 $a \neq e$) 的敛散性.

四 (15) (本题满分 8 分) 将 $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ 展开为周期为 2 的傅立叶级数。

五 (16) (本题满分 8 分) 将 $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ 展开成 x 幂级数, 并求 $f^{(100)}(0)$ 的值.

六 (17) (本题满分 8 分) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 的和.