# 2001-2002 学年第 3 学期《线性代数》期终考试试卷

一、填空题(33 分，其中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵, $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵).

1. 设 $\alpha = (1, 2)$, $\beta = (1, -1)$, 则 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ = __________; $(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^{999}$ = __________.

解: $\alpha\beta^{\mathrm{T}} = (1, 2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 1\times1+2\times(-1) = 1-2 = -1$;  $\beta\alpha^{\mathrm{T}} = (1, -1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\times1+(-1)\times2 = 1-2 = -1$;

$$\alpha^{\mathrm{T}}\beta = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(1, -1) = \begin{pmatrix}1\times1 & 1\times(-1)\\ 2\times1 & 2\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix};$$

$$(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^{999} = \underbrace{(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)\dots(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)}_{999\text{ 个}(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)} = \alpha^{\mathrm{T}}\underbrace{(\beta\alpha^{\mathrm{T}})(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\dots(\beta\alpha^{\mathrm{T}})}_{998\text{ 个}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})}\beta = \alpha^{\mathrm{T}}(-1)^{998}\beta = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$, 则行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|$ = __________.

解: $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix} = 1\times3\times0+2\times1\times1+0\times0\times3-0\times3\times1-2\times0\times0-1\times1\times3 = 2-3 = -1$;

$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 7\end{vmatrix} = 2\times5\times7 = 70$; (注: 上三角行列式的值等于其主对角线元素之积)

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{-1}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1} = (-1)\times\frac{1}{70} = -\frac{1}{70}.$$

3. 若向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}$, 则当数 $k$ _____时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

解: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & k\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0$,

而 $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & k\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix} = 1\times2\times(-1)+3\times k\times3+1\times2\times1-1\times2\times3-2\times3\times(-1)-1\times k\times1 = -2+9k+2-6+6-k = 8k$.

故当 $k = 0$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

4. 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ = _____.

解: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的四个元素的代数余子式分别为:

$A_{11} = (-1)^{1+1}d = d$;  $A_{21} = (-1)^{2+1}b = -b$;  $A_{12} = (-1)^{1+2}c = c$;  $A_{22} = (-1)^{2+2}a = a$;

故 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均可逆, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$, 则 $\boldsymbol{G}^{-1}$ = ________ .

解: $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = [(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$;

$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}]^{-1} = [(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}]^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$.

6. 分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为________ .

解: (法一) 设$\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$,

即$\begin{pmatrix} AX+U & AY+V \\ X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$, 由此可得: $X = O$; $Y = E$; $U = E$; $V = -A$;

所以$\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & E \\ E & -A \end{pmatrix}$.

(法二) $\begin{pmatrix} A & E & E & O \\ E & O & O & E \end{pmatrix} \xrightarrow{(-A)\times} \begin{pmatrix} O & E & E & -A \\ E & O & O & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & O & O & E \\ O & E & E & -A \end{pmatrix}$,

由此可见$\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & E \\ E & -A \end{pmatrix}$.

7. 设 $A$ 是 6×5 矩阵, 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间是 2 维的, 则齐次线性方程组 $A^Tx = 0$ 的解空间是________维的.

解: 因为 $A$ 是 6×5 矩阵, 故 $A^T$ 是 5×6 矩阵, 因而齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $A^Tx = 0$ 中的未知数的个数分别为 $A$ 的列数和 $A^T$ 的列数, 即分别为 5 和 6.

又因为 $Ax = 0$ 的解空间的维数应该等于 5–秩($A$),

$A^Tx = 0$ 的解空间的维数应为 6–秩($A^T$), 其中秩($A^T$) = 秩($A$).

根据题目条件可知 5–秩($A$) = 2. 即秩($A$) = 3.

从而 $A^Tx = 0$ 的解空间的维数为 6–秩($A^T$) = 6–秩($A$) = 6–3 = 3.

8. 与向量$\alpha = (1, 0, 1)^T$ , $\beta =(1, 1, 1)^T$ 均正交的一个单位向量为_________.

解: 设$\gamma = (a, b, c)^T$ 与$\alpha$, $\beta$均正交, 则$\begin{cases} a + \quad c = 0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$, 这是一个齐次线性方程组, $(1, 0, -1)^T$ 构成它的一个基础解系. 把$(1, 0, -1)^T$ 单位化可得$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

可见与$\alpha$, $\beta$均正交的一个单位向量为$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})^T$ 或$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

9. 已知矩阵 $M = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 3 & k \end{pmatrix}$, $A = MM^T$, 则当数 $k$ 满足条件_______时, $A$ 是正定的.

解: $A = MM^T$ 正定$\Leftrightarrow$ $M$ 可逆$\Leftrightarrow$ $|M| \neq 0$, 即 $12k-3\times4 \neq 0$. 故当数 $k \neq 1$ 时, $A$ 是正定的.

10. 若 $n$ 阶实对称矩阵 $A$ 满足 $A^2-3A+2E = O$, 且有两个不同的特征值, 则当参数 $k$ 满足条件_____时, 矩阵 $E+kA$ 是正定的.

解: $A^2-3A+2E = O \Rightarrow A$ 的特征值$\lambda$一定满足$\lambda^2-3\lambda+2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ 或 2.

又因为 $A$ 有两个不同的特征值, 故 1 和 2 都是 $A$ 的特征值,

由于 $A$ 是实对称矩阵, 故存在可逆矩阵 $P$ 使 $PAP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} \overset{记为}{=\!=} \Lambda$.

于是 $P^{-1}(E+kA) P = P^{-1}EP+kP^{-1}AP = E+k\Lambda = \begin{pmatrix} 1+k & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1+k & & & \\ & & & 1+2k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1+2k \end{pmatrix}$

这表明 $E+kA$ 的特征值为 $1+k, \dots, 1+k, 1+2k, \dots 1+2k$,

而 $E+kA$ 正定$\Leftrightarrow$ $E+kA$ 的特征值全大于 0, 故 $1+k >0$, $1+2k >0$, 因而 $k > -\frac{1}{2}$,

二、(12 分)求矩阵方程 $XA = 2X + B$ 的解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

解: $XA = 2X+B \Rightarrow XA-X\cdot 2E = B \Rightarrow X(A-2E) = B \Rightarrow X = B(A-2E)^{-1}$,

而 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times1\\ \times(-1)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&-1\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix},$$

可见$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 于是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&1&-4\end{pmatrix}$.

三、(12 分)设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1(二重)和$-1$, $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$是其相应于特征值 1 的特征向量,

$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$是其相应于特征值$-1$ 的特征向量.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{9999}$.
2. 若 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 特征值也是 1(二重)和$-1$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必定相似.

解 1: 令 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,

由$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{pmatrix}$可得

$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}^{9999}=\underbrace{(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})\ldots(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})}_{9999\text{ 个}(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})}=\boldsymbol{P\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\ldots\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{P\Lambda E\Lambda E}\ldots\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^{9999}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1^{9999}&0&0\\0&1^{9999}&0\\0&0&(-1)^{9999}\end{pmatrix}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

证明 2: 若 3 阶实对称矩阵的特征值 $\boldsymbol{B}$ 也是 1(二重)和$-1$,
则 $\boldsymbol{B}$ 也与$\boldsymbol{\Lambda}$相似, 同时由上一小题可知 $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{\Lambda}$相似, 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

四、(12 分)设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+3x_2+5x_3+5x_4=2\\\quad -x_2+px_3-2x_4=q\\3x_1+2x_2+x_3+(p+3)x_4=-1\end{cases}$

1. 问参数 $p, q$ 满足什么条件时, 该方程组无解; 有唯一解, 有无穷多解?
2. 当方程组有无穷多解时, 求出其通解(写成向量形式).

解: 记该方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 增广矩阵为$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&3&5&5&2\\0&-1&p&-2&q\\3&2&1&p+3&-1\end{pmatrix}\times(-1)\ \times(-3)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&2&4&4&2\\0&-1&p&-2&q\\0&-1&-2&p&-1\end{pmatrix}\times\tfrac{1}{2}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&p&-2&q\\0&-1&-2&p&-1\end{pmatrix}\times 1 \to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&p+2&0&q+1\\0&0&0&p+2&0\end{pmatrix}\stackrel{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{B}.$$

1. 由上可见: 当 $p+2=0$ 且 $q+1\neq 0$ 即 $p=-2$ 且 $q\neq -1$ 时, 秩($\boldsymbol{A}$)<秩($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$), 此时, 原方程组无解;
当 $p+2\neq 0$ 即 $p\neq -2$ 时, 秩($\boldsymbol{A}$) = 秩($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$) = 4, 此时, 原方程组有唯一解;
当 $p+2=0$ 且 $q+1=0$ 即 $p=-2$ 且 $q=-1$ 时, 秩($\boldsymbol{A}$) = 秩($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$) = 2 < 4,
此时, 原方程组有无穷多解.

2. 当 $p=-2, q=-1$时, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}-1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\stackrel{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{C}.$

$\boldsymbol{C}$ 对应的方程组为 $\begin{cases}x_1 \quad -x_3-x_4=-1\\ x_2+2x_3-2x_4=1\end{cases}$, 由此可得 $\begin{cases}x_1=x_3+x_4-1\\ x_2=-2x_3-2x_4+1\end{cases}$,

所以此时原方程组的通解为: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, 其 $c_1, c_2$ 中为任意实数.

五、(12 分)矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&-1&2&0\\1&-3&0&-2\end{pmatrix}$.

1. 求一 4×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 且秩($\boldsymbol{B}$) = 2;
2. 问:是否存在秩大于 2 的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$? 为什么?

解: 1. $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&-1&2&0\\1&-3&0&-2\end{pmatrix}\times(-3)\ \times(-1)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-4&-1&-3\\0&-4&-1&-3\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-4&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-\tfrac{1}{4})$

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. 由此可得齐次线性方程组的一个基础解系:

$\xi_1=(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2=(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{B}=(\xi_1, \xi_2)=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 为一个 4×2 矩阵, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且秩($\boldsymbol{B}$) = 2.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,
因而 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组能由$\xi_1, \xi_2$线性表示, 可见 $\boldsymbol{C}$ 的秩≤2.
这就是说, 不存在秩大于 2 的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$.

六、(12 分)设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&&\\&2&\\&&4\end{pmatrix}$ 相似,

1. 求参数 $k$ 的值; 2.求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

解: 1. 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, 而$|\boldsymbol{A}|=(3k-1)4$, $|\boldsymbol{B}|=32$, 故 $k=3$.
(另解: 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以它们的迹相等, 即 $k+3+4=4+2+4$, 故 $k=3$)

2. 先求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$.

$|\lambda E - A_1| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2)$, 故 $A_1$ 的特征值为 4 和 2.

由 $4E-A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可得$(4E-A_1)x = \mathbf{0}$ 的基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位化得 $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,

由 $2E-A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可得$(2E-A_1)x = \mathbf{0}$ 的基础解系

$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

于是令 $P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 $P^TP = E$, 且 $P^TA_1P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

再令 $Q = \begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $Q^TQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 即 $Q$ 为正交矩阵,

且 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B$.

七、(7 分)证明题.

1. 设$\lambda_1, \lambda_2$是矩阵 $A$ 的两个互异的特征值, $\eta_1, \eta_2$ 是 $A$ 的属于$\lambda_1$的线性无关的特征向量, $\eta_3$ 是 $A$ 的属于$\lambda_2$的特征向量. 证明: $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 线性无关.

证明: 假若$\eta_1, \eta_2, \eta_3$线性相关, 则由$\eta_1, \eta_2$线性无关可知$\eta_3$能由$\eta_1, \eta_2$线性表示,

设$\eta_3 = k_1\eta_1+k_2\eta_2$, 则有:

$\lambda_2\eta_3 = A\eta_3 = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 = k_1\lambda_1\eta_1 + k_2\lambda_1\eta_2 = \lambda_1(k_1\eta_1 + k_2\eta_2) = \lambda_1\eta_3$.

故$(\lambda_2 - \lambda_1)\eta_3 = \lambda_2\eta_3 - \lambda_1\eta_3 = \mathbf{0}$, 而$\lambda_1 \neq \lambda_2$, 即$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$,

可见$\eta_3 = \mathbf{0}$, 但$\eta_3$作为 $A$ 的属于$\lambda_2$的特征向量一定是非零的这一矛盾表明: $\eta_1, \eta_2, \eta_3$线性无关.

2. 已知 $n$ 阶方阵 $A$ 相似于对角阵, 并且矩阵 $A$ 的特征向量均是矩阵 $B$ 的特征向量(注: $A$, $B$ 的特征值未必相同). 证明: $AB = BA$.

证明: 因为 $n$ 阶方阵 $A$ 相似于对角阵, 所以 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量, 记为 $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

又因为 $A$ 的特征向量都是 $B$ 的特征向量, 可见 $B$ 也有 $n$ 线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \ldots, p_n$. 故有

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=} \Lambda$, 其中 $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 $A$ 的特征值.

同时 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=} \Lambda'$ 其中$\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$为 $B$ 的对应于 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的特征值,

由此可得: $A = P\Lambda P^{-1}$, $B = P\Lambda'P^{-1}$,

且$\Lambda\Lambda' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1'\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n'\lambda_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda'\Lambda$.

因而 $AB = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda'P^{-1}) = P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda'P^{-1} = P\Lambda\Lambda'P^{-1} = P\Lambda'\Lambda P^{-1} = P\Lambda'P^{-1}P\Lambda P^{-1} = BA$.

# 2003-2004 学年第 3 学期《线性代数》期终考试试卷

一、填空题(24 分).

1. 假设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^n$ = ________.

解: 令 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} = \Lambda+\boldsymbol{B}$, $\Lambda^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{A}^n = (\Lambda+\boldsymbol{B})^n = \Lambda^n + C_n^1\Lambda^{n-1}\boldsymbol{B} + C_n^2\Lambda^{n-2}\boldsymbol{B}^2 + \cdots + C_n^{n-1}\Lambda\boldsymbol{B}^{n-1} + \boldsymbol{B}^n$

$$= \Lambda^n + n\Lambda^{n-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. 假设向量组 $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 则当参数 $t$ 满足条件________时, 向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1; _______时, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2; ________时, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3.

解: $$(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 1,\ \times t} \begin{pmatrix} -1 & 1 & t \\ 0 & t+1 & t+1 \\ 0 & t+1 & t^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & t \\ 0 & t+1 & t+1 \\ 0 & 0 & (t+1)(t-2) \end{pmatrix},$$

可见, 当 $t = -1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1; 当 $t$ =2 时, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2; 当 $t \neq -1$ 且 $t \neq 2$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3.

3. 若向量 $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征向量, 则$(a, b)$ = _______.

解: 若 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 则存在 $\lambda$ 使 $\boldsymbol{A\eta} = \lambda\boldsymbol{\eta}$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \text{ 亦即 } \begin{pmatrix} 1+a+b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda b \end{pmatrix}, \text{ 由此可得 } \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ \lambda = 1 \end{cases}, \text{ 故}(a, b) = (-3, 3).$$

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$, 则参数 $a, b$ 满足条件________.

解: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$,

而 $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

所以参数 $a, b$ 满足条件: $a = b$.

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与对角阵 $\Lambda$ 相似, 则 $x$ 满足条件____________.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -4 \\ -3 & \lambda+1 & -x \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-4)$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1$(二重)和 $\lambda_2 = 4$.

若 $\Lambda$ 与对角阵相似, 则齐次线性方程组$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 有两个线性无关的特征向量,
因而 3–秩$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 2$, 即秩$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 1$,

而$\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&0&-4\\-3&0&-x\\-1&0&-1\end{pmatrix}$, 可见 $x$ 应该满足条件: $x = 3$.

6. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}$是正交矩阵, 则 $a, b, c$ 满足条件__________.

解: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}$是正交矩阵$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&b\\a&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1+b^2&a+bc\\a+bc&a^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=0, b=0, c=\pm1$.

7. 若对满足条件 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, $a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 都是正定矩阵, 则实数 $a$ 必定满足条件______.

解: 对于满足条件 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 其特征值$\lambda$一定满足$\lambda^2+3\lambda-4=0$,
故 $\boldsymbol{A}$ 的可能的特征值有 1 和$-4$. 于是 $a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的可能的特征值有: $a+1$ 和 $a-4$.
要使 $a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 总是正定的, 则 $a+1$ 和 $a-4$ 均大于 0. 故 $a > 4$.

二、(8 分)求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&x&x\\1&1&1&x\\x&1&1&1\\x&x&1&1\end{pmatrix}$的行列式 det($\boldsymbol{A}$)的值.

解: $\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}1&1&x&x\\1&1&1&x\\x&1&1&1\\x&x&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\ \ \times(-x)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1&1&x&x\\0&0&1-x&0\\0&1-x&1-x^2&1-x^2\\0&0&1-x^2&1-x^2\end{vmatrix}=(1-x^2)(1-x)^2\begin{vmatrix}1&1&x&x\\0&0&1&0\\0&1&1+x&1+x\\0&0&1&1\end{vmatrix}$

$=-(1-x^2)(1-x)^2\begin{vmatrix}1&1&x&x\\0&1&1+x&1+x\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=(x^2-1)(1-x)^2\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=(x^2-1)(1-x^2)$.

三、(15 分)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&p&2\\1&2&p\end{pmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\3\\q\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. 若$\boldsymbol{\eta}$是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 试求 $p, q$ 的值, 并求这时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解,
2. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解, 但$\boldsymbol{\eta}$不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 求 $p, q$ 的值.

解: 1. 若$\boldsymbol{\eta}$是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 即$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&p&2\\1&2&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\q\end{pmatrix}$,

而$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&p&2\\1&2&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\p+1\\3+q\end{pmatrix}$, 故 $p+1=3$, $3+p=q$, 由此可得 $p=2$, $q=5$.

此时$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\-1&2&2&3\\1&2&2&5\end{pmatrix}\begin{matrix}\times1\ \ \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&3&3&6\\0&1&1&2\end{pmatrix}\times\tfrac{1}{3}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

对应的方程组为$\begin{cases}x_1=1\\x_2+x_3=2\end{cases}$, 由此可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解:

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, 其中 $c$ 的任意常数.

2. 由 1 可知, 若$\boldsymbol{\eta}$不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 则 $p\neq2$ 或 $q\neq5$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\-1&p&2&3\\1&2&p&q\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 1 & \times(-1)\\ & \\ & \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&p+1&3&6\\0&1&p-1&q-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&p-1&q-3\\0&p+1&3&6\end{pmatrix}\times(-p-1)\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&p-1&q-3\\0&0&4-p^2&-pq+3p-q+9\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，所以 $4-p^2=-pq+3p-q+9=0$

由此可得 $\begin{cases}p=2\\q=5\end{cases}$(舍去)，$\begin{cases}p=-2\\q=-3\end{cases}$.

四、(15 分)解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

解: $\boldsymbol{XA}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{XA}-\boldsymbol{X}\cdot2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$,

由 $\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-2&0&-1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times2\quad\times1\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&-1&2\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ 可得

$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

五、(15 分)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$.

1. 写出二次型 $f$ 的矩阵;
2. 求一正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 $f$ 化成标准形，并写出相应的标准形.

解: 1. $f$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,

2. $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$，由此可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$(二重).

$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_1=(1,0,-1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=(\frac{\sqrt2}{2},0,-\frac{\sqrt2}{2})^T$;

$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_2=(0,1,0)^T$, $\xi_3=(1,0,1)^T$，它们已经是正交的了,

单位化得: $\boldsymbol{p}_2=(0,1,0)^T$,  $\boldsymbol{p}_3=(\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2})^T$.

于是令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 且 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

对应地，正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将化为: $f(x_1,x_2,x_3)=2y_2^2+2y_3^2$.

(注: 若将 $\boldsymbol{Q}$ 取为 $\boldsymbol{Q}=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\1&0&0\\0&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

对应地，正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 $f$ 化为: $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2$. )

六、(12 分)设 3 阶矩阵的特征值是 1(二重)和 2，且 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(0,1,0)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 1 的特征向量，$\gamma=(1,0,-1)$是的对应于特征值 2 的特征向量，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^n$.

解: 令 $\boldsymbol{P} = (\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac12 & 0 & -\frac12 \end{pmatrix}$,

故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac12 & 0 & -\frac12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac32 & 0 & -\frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac12 & 0 & \frac32 \end{pmatrix}$.

又因为 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{P}^{-1}2\boldsymbol{EP} = \Lambda-2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=} \boldsymbol{B}$.

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{PBP}^{-1}$, $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^n = (\boldsymbol{PBP}^{-1})^n = \underbrace{(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})\ldots(\boldsymbol{PBP}^{-1})}_{n\text{ 个}(\boldsymbol{PBP}^{-1})} = \boldsymbol{PB}^n\boldsymbol{P}^{-1}$

而 $\boldsymbol{B}^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

故$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac12 & 0 & -\frac12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} & 0 & \frac{(-1)^n}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{(-1)^n}{2} & 0 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$.

七、(5 分)已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$, 问:当参数 $x, y$ 满足什么条件时矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解，但 $\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{A}$ 无解?

解: 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$, 则 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}_2$ 都有解.
$\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{A}$ 无解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{a}_2$ 中至少有一个无解.

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & x & 1 & y \end{pmatrix} \times(-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x-4 & -5 & y-2 \end{pmatrix}$.

由此可见，当 $x \neq 4$ 时，秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_1)$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_2) = 2$, 此时 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解;

$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & y & 2 & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & y & 2 & x \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times(-3) \to \begin{pmatrix} 1 & y & 2 & x \\ 0 & 1-3y & -5 & 2-3x \end{pmatrix}$

由此可见，当 $y = \dfrac{1}{3}$ 时，秩$(\boldsymbol{B}) = 1<2 =$ 秩$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{a}_1) = 2$, 此时 $\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{A}$ 无解.

综上所述，当 $x \neq 4$ 且 $y = \dfrac{1}{3}$ 时, $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解，但 $\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{A}$ 无解.

八、(6 分)证明题:

1. 已知向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$可由$\alpha_1, \alpha_2$线性表示，若向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的秩为 2，证明$\alpha_1, \alpha_2$线性无关.

证明: 因为向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$可由$\alpha_1, \alpha_2$线性表示，所以秩$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \leq$秩$(\alpha_1, \alpha_2)$.
若秩$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$, 则 $2 \leq$ 秩$(\alpha_1, \alpha_2) \leq 2$. 由此可得秩$(\alpha_1, \alpha_2) = 2$, 故$\alpha_1, \alpha_2$线性无关.

2. 设 2 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 且 $a+d = 2$, $ad-bc = 1$, 若 $b, c$ 不全为零.

证明: $\boldsymbol{A}$ 不与任何对角阵相似.

证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2$, 则$\lambda_1 +\lambda_2 = a+d = 2$, $\lambda_1\lambda_2 = |\boldsymbol{A}| = ad-bc = 1$. 故$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

假若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 于是可得

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 但这与 $b, c$ 不全为零矛盾! 所以 $\boldsymbol{A}$ 不与任何对角阵相似.

# 2004-2005 学年第 3 学期《线性代数》期终考试试卷

一、(27 分)填空题.

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & a\\ b & 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则 $a, b$ 的值分别为________.

**解**: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}4 & a\\ b & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3a\\ 2b & 15\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & a\\ b & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3a\\ 2b & 15\end{pmatrix}$.

可见 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA} \Leftrightarrow 3a=2a$ 且 $2b=3b \Leftrightarrow a=b=0$.

2. 设对任意列向量 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\ 4a+5b+6c\end{pmatrix}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}=$_________.

**解**: (法一) 直接观察 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

(法二) 既然 $\boldsymbol{X}$ 是一个 3×1 的矩阵且 $\boldsymbol{AX}$ 是一个 2×1 的矩阵,
那么 $\boldsymbol{A}$ 必为一个 2×3 的矩阵, 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3)$, 其中 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量.

在 $\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\ 4a+5b+6c\end{pmatrix}$ 中依次取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 可得

$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0\\ 4+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}$. 故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

3. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{B}=(3\alpha_2-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2)$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|=3$, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式$|\boldsymbol{B}|$ =_________.

**解**: $|\boldsymbol{B}|=|3\alpha_2-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2|=|3\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2|+|-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2|$

$=3|\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2|-|\alpha_3, \alpha_1-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2|=3|\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3, \alpha_1|-|\alpha_3, \alpha_1, \alpha_1-\alpha_2|$

$=3|\alpha_2, -\alpha_3, \alpha_1|-|\alpha_3, \alpha_1, -\alpha_2|=-3|\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1|+|\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2|$

$=3|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2|-|\alpha_1, \alpha_3, -\alpha_2|=2|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2|=-2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|=-2|\boldsymbol{A}|=-6$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆方阵, $2n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$的逆矩阵为___________.

**解**: (法一) 设 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V}\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$, 即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{AU} & \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{AV}\\ \boldsymbol{AU} & \boldsymbol{AV}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$.

由此可得: $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{AV}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{AU}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{AV}=\boldsymbol{E}$,

故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Y}=-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{U}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 于是 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$.

(法二) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{(-\boldsymbol{E})\times}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$.

由此可见$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$.

5. 齐次线性方程组 $3x_1+2x_2+3x_3=0$ 的一个基础解系为____________.

**解**: 以 $x_2, x_3$ 为自由未知量, 依次取$\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$得$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$,

故该方程组的一个基础解系为$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则参数 $t$ 的取范围是__________.

解: $f$ 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}$, 其顺序主子式依次为 $A_1 = 2>0$; $A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1>0$;

$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{t^2}{2}$, 故 $f$ 正定$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 正定$\Leftrightarrow A_1, A_2, A_3$ 全大于 0 $\Leftrightarrow 1 - \frac{t^2}{2} > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

7. 若矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+2 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则参数 $a, b, c$ 的值分别为__________.

解: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+ac+2c \\ ab+ac+2c & b^2+(a+2)^2 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \Leftrightarrow a^2+c^2 = b^2+(a+2)^2 = 1$ 且 $ab+ac+2c = 0 \Leftrightarrow a = -1$ 且 $b = c = 0$.

8. 假设 3 阶矩阵的特征值为 2, 1, –1, 则行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}|$的值为____________.

解: 因为 3 阶矩阵的特征值为 2, 1, –1, 所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=} \boldsymbol{\varLambda}$.

于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\varLambda P}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{P\varLambda P}^{-1})^{-1} = (\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}\boldsymbol{\varLambda}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varLambda}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$, 而$\boldsymbol{\varLambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

故$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{P\varLambda P}^{-1}+\boldsymbol{P\varLambda}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}| = |\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\varLambda}+\boldsymbol{\varLambda}^{-1})\boldsymbol{P}^{-1}| = |\boldsymbol{P}| \cdot |\boldsymbol{\varLambda}+\boldsymbol{\varLambda}^{-1}| \cdot |\boldsymbol{P}^{-1}|$

$= |\boldsymbol{P}| \cdot |\boldsymbol{\varLambda}+\boldsymbol{\varLambda}^{-1}| \cdot |\boldsymbol{P}|^{-1} = |\boldsymbol{\varLambda}+\boldsymbol{\varLambda}^{-1}| = \begin{vmatrix} 2+\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-1 \end{vmatrix} = -10.$

9. 若实二次型 $f, g$ 的矩阵分别为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $f, g$ 的正惯性指数相同, 负惯性指数也相同的充分必要条件是参数 $a, b$ 满足_____________.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 0 \\ -1 & & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-a)\lambda(\lambda-2)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $a$, 0, 2, 秩$(\boldsymbol{A}) \le 2$,

而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 2, $b$, 2, 秩$(\boldsymbol{B})$的正惯指数$\ge 2$,

故 $f, g$ 的正, 负惯指数对应相等$\Leftrightarrow$秩$(\boldsymbol{A})$ =秩$(\boldsymbol{B})$且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的正惯指数相同

$\Leftrightarrow$秩$(\boldsymbol{A})$ =秩$(\boldsymbol{B})$ = 2 且 $a>0 \Leftrightarrow a>0$ 且 $b = 0$.

二、(14 分)假设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 证明:

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆, 并分别求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$;
2. 若 $\boldsymbol{A}\ne\boldsymbol{E}$ 则矩阵 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 肯定不可逆.

证明: 1. $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}) - 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}) = 3\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$;

$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) - 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$

$\Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = 4\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

2. $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$.

假若 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1} = \boldsymbol{O}$. 由此可得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 这与 $\boldsymbol{A}\ne\boldsymbol{E}$ 矛盾!

故 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 不可逆.

三、(14 分)假设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解, 试求参数$\lambda$的值, 并求方程组的通解(要求用的一个特解及相应的齐次线性方程组的基础解系表示).

解: $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\ \times(-\lambda)\\ \\ \\\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&-2-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\times1\\ \\\end{matrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&(1-\lambda)(\lambda+2)&-2-\lambda\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{B}$.

因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解, 故秩$(\boldsymbol{A})=$ 秩$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$. 因此$(1-\lambda)(\lambda+2)=-2-\lambda=0$.

可见$\lambda=-2$. 此时 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-\tfrac{1}{3})\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{C}$.

对应的齐次线性方程组化为 $\begin{cases}x_1\quad\ -x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$, 令 $x_3=1$ 得 $x_1=1$, $x_2=1$.

可见齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_1=(1,1,1)^{\mathrm T}$.

$\boldsymbol{C}$ 对应的非齐次线性方程组为 $\begin{cases}x_1\quad\ -x_3=1\\x_2-x_3=0\end{cases}$, 令 $x_3=0$ 得 $x_1=1$, $x_2=0$.

可见 $\boldsymbol{\eta}^*=(1,0,0)^{\mathrm T}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为: $\boldsymbol{\eta}=k(1,1,1)^{\mathrm T}+(1,0,0)^{\mathrm T}$, 其中 $k$ 为任意实数.

四、(15 分)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&-1&0\\1&a&3\end{pmatrix}$ 相似于对角阵.

1. 求参数 $a$ 的值, 并求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及相应的特征向量;
2. 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵, 并写出相应的对角阵;
3. 问: 是否存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角阵? 试说明你的理由.

解: 1. $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-3&-4\\0&\lambda+1&0\\-1&-a&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-4)$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=4$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 有两个线性无关的特征向量与$-1$ 对应.

因而$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个线性无关的解向量构成. 这表明秩$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$.

而$\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-3&-4\\0&0&0\\-1&-a&-4\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}-1&-3&-4\\0&0&0\\0&3-a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-3&-4\\0&3-a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

由此可见 $3-a=0$, 即 $a=3$.

此时, 解得$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系: $\xi_1=(-3,1,0)^{\mathrm T}$, $\xi_2=(-4,0,1)^{\mathrm T}$.

故对应于$\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的全部特征向量为 $k_1(-3,1,0)^{\mathrm T}+k_2(-4,0,1)^{\mathrm T}$, 其中 $k_1$, $k_2$ 不全为零.

$(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_3=(1,0,1)^{\mathrm T}$.

故对应于$\lambda_3=4$ 的全部特征向量为 $k(1,0,1)^{\mathrm T}$, 其中 $k\neq0$.

2. 令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-3&-4&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

3. 假若存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$为对角阵, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm T}=(\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm T})^{\mathrm T}=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}$,
即 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 但题目所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 并不是对称的.
这个矛盾表明不存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角阵.

五、(12 分)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\boldsymbol{DXA}=2\boldsymbol{DX}+\boldsymbol{B}$.

解: $\boldsymbol{DXA}=2\boldsymbol{DX}+\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{DXA}-2\boldsymbol{DX}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{D}(\boldsymbol{XA}-2\boldsymbol{X})=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{DX}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$,

其中 $\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&0\\0&\frac13\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-2&-2&1&1&0&0\\0&-3&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-\frac12)\\\times(-\frac13)\\\times(-1)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-\frac12&-\frac12&0&0\\0&1&0&0&-\frac13&0\\0&0&1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\times(-1)\\\times\frac12\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac12&\frac13&-\frac12\\0&1&0&0&-\frac13&0\\0&0&1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

由此可得$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac12&-\frac13&-\frac12\\0&-\frac13&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\frac12&0\\0&\frac13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac12&\frac13&-\frac12\\0&-\frac13&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac14&\frac13&-\frac34\\-\frac13&\frac19&-\frac13\end{pmatrix}$.

六、(12 分)假设 3 维列向量$\alpha_1=(1,0,a)^T$, $\alpha_2=(0,1,b)^T$; $\beta_1=(1,2,1)^T$, $\beta_2=(-1,1,2)^T$, $\beta_3=(1,1,c)^T$. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2$与向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价.

1. 求$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的秩及其一个极大线性无关组, 并求参数 $a, b, c$ 的值;
2. 令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 求满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解: 1. 因为向量组$\alpha_1,\alpha_2$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价, 故秩$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ = 秩$(\alpha_1,\alpha_2)\le 2$.

注意到$\beta_1,\beta_2$的分量不成比例, 故秩$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$, 且$\beta_1,\beta_2$为$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的一个极大线性无关组.

由$\alpha_1,\alpha_2$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价还可以看出$\beta_1,\beta_2$也是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$的极大无关组,

因此矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$的秩应该是 2, 故由

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\a&b&1&2&c\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-a)\\\times(-b)\\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\0&0&1-a-2b&2+a-b&c-a-b\end{pmatrix}$$

可见 $1-a-2b=2+a-b=c-a-b=0$, 由此可得: $a=-1$, $b=1$, $c=0$.

2. 对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 进行分块, 使 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1=(a,b)$, $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2=(1,2,c)$.

若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$, 故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.

七、(6 分)假设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$.

1. 证明: 关于矩阵的秩有秩$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ + 秩$(\boldsymbol{A})=n$, 并且相似于对角阵;
2. 若秩$(\boldsymbol{A})=r$, 求行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$的值.

证明 1: 设秩$(\boldsymbol{A})=r$, 秩$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=s$, $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{AE}-\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,

可见 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, 因而能由$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性表示.

故 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩 $s\le n-r$, 于是有 $s+r\le n$, 即秩$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ + 秩$(\boldsymbol{A})\le n$.

另一方面, $n$ = 秩$(2\boldsymbol{E})$ = 秩$[(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}]\le$ 秩$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ + 秩$(\boldsymbol{A})$. 所以秩$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ + 秩$(\boldsymbol{A})=n$.

设$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$为 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组, $\beta_1,\ldots,\beta_s$为 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组.

由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 可得 $\boldsymbol{A}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=(2\alpha_1,\ldots,2\alpha_r)$, $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A}(\beta_1,\ldots,\beta_s)=(0\beta_1,\ldots,0\beta_s)$.

可见$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$和$\beta_1,\ldots,\beta_s$分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 2 和 0 的特征向量,

而且$\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s$线性无关. 于是 $\boldsymbol{A}$ 一共有 $n$ 个线性无的特征向量, 所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵.

解 2: 根据上题的证明, 令 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s)$, 则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&2&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}r\text{行}\\\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}s\text{行}\end{matrix}\xlongequal{\text{记为}}\Lambda,\quad|\Lambda+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&3&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{vmatrix}=3^r,$$

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}|^{-1}\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{EP}|=|\Lambda+\boldsymbol{E}|=3^r.$$

# 2005-2006 学年第 3 学期《线性代数》期终考试试卷

一、(30 分)填空题($E$ 表示相应的单位矩阵).

1. 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的行列式$|A| = 3$, 矩阵 $B = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$, 则矩阵 $A - B$ 的行列式$|A - B|$ = ______.

解: (法一) $|A - B| = |\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1| = |\alpha_1, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1| + |-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1|$

$= |\alpha_1, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3| + |-\alpha_2, -\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| + |-\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_1| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| - |\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1|$
$= |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0.$

(法二) $A - B = (\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = AP,$

其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 故$|A - B| = |AP| = |A||P| = 0.$

2. 若矩阵 $A$ 满足 $A^2 = O$, 则 $E+A$ 的逆矩阵$(E+A)^{-1}$ = _______.

解: $A^2 = O \Rightarrow (E+A)(E-A) = E^2 - A^2 = E \Rightarrow (E+A)^{-1} = E-A.$

3. 若向量组$\alpha_1 = (1, t, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, t)$, $\alpha_3 = (t, 1, 1)$的秩为 2, 则参数 $t$ 满足条件___________.

解: 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则秩$(A)$ = 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = |A| = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = -2$ 或 1.

当 $t = -2$ 时, 秩$(A) = 2$; 当 $t = 1$ 时, 秩$(A) = 1$. 故 $t = -2$.

4. 假设 3 阶矩阵 $A$ 的特征值为 1, 2, −1, 矩阵 $B = E - 2A^*$, 其中 $A^*$是 $A$ 的伴随矩阵, 则 $B$ 的行列式$|B|$ = _______.

解: 3 阶矩阵 $A$ 的特征值为 1, 2, −1 ⇒存在 $P$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=} \Lambda$, 而且$|A| = 1\times2\times(-1) = -2$.

故 $P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 由 $A^*A = |A|E$ 可得 $A^* = |A|A^{-1} = -2A^{-1}$, 于是有

$|B| = |P|^{-1}\cdot|B|\cdot|P| = |P^{-1}|\cdot|B|\cdot|P| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}(E - 2A^*)P| = |P^{-1}EP - 2P^{-1}A^*P| = |E - 2P^{-1}A^*P|$

$= |E + 4P^{-1}A^{-1}P| = |E + 4\Lambda^{-1}| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -45.$

5. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 则$(x, y)$ =________.

解: $|A| = 2(1-x)$, $|B| = 0$, $\text{tr}(A) = 1+x$, $\text{tr}(B) = 3+y$. 因为矩阵 $A$ 与 $B$ 相似, 所以$|A| = |B|$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.
由此可得 $x = 1, y = -1$. $(x, y) = (1, -1)$.

6. 设$(1, -1, 0)^T, (1, 0, -1)^T$是 3 阶实对称矩阵 $A$ 的相应于某个非零二重特征值的特征向量. 若 $A$ 不可逆, 则 $A$ 的另一个特征值为______, 相应的一个特征向量为__________.

解: 3 阶矩阵 $A$ 有非零二重特征值而且 $A$ 不可逆 ⇒ $A$ 的另一个特征值为 0.

设$\xi$为对应于 0 的特征向量, 则$\xi$与$(1, -1, 0)^T, (1, 0, -1)^T$正交, 即$\xi$为$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$的非零解向量.

由此可得 $A$ 的一个对应于 0 的特征向量为$\xi = (1, 1, 1)^T$.

7. 已知 3 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 2, 并且$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是 $Ax = b$ 的 3 个解向量, 其中$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (2, 4, 6)^T$, 则 $Ax = b$ 的通解是_______________.

解: 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 2 $\Rightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中有且仅有 1 个解向量.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 3 个解向量 $\Rightarrow \boldsymbol{A}(\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1) = \boldsymbol{A}\alpha_2 + \boldsymbol{A}\alpha_3 - 2\boldsymbol{A}\alpha_1 = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (2, 4, 6)^T \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1 = (0, 2, 4)^T$.

可见 $\xi = (0, 2, 4)^T$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,

因而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解是 $\boldsymbol{x} = k(0, 2, 4)^T + (1, 1, 1)^T$, 其中 $k$ 为任意实数.

8. 若 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的秩都等于 1, 则矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ = ________.

解: 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的秩都等于 1 $\Rightarrow$ 秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le$ 秩$(\boldsymbol{A})$+秩$(\boldsymbol{B}) = 2 < 4 \Rightarrow |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{0}$.

9. 若矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 合同, 则参数 $x$ 满足条件__________.

解: 设 $\lambda_1, \lambda_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\mu_1, \mu_2$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

$\mu_1\mu_2 = |\boldsymbol{B}| = -5 < 0 \Rightarrow \mu_1, \mu_2$ 异号 $\Rightarrow \boldsymbol{B}$ 的秩为 2, 正惯性指数为 1.

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 正惯性指数为 1 $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ 异号 $\Rightarrow 2x - 1 = |\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2 < 0 \Rightarrow x < 1/2$.

二、(10 分)计算下述行列式的值: $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ -x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \end{vmatrix} = x^3 + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & x & x^2 \\ 0 & -x & -x \end{vmatrix} = x^3 + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & x & x^2 \\ 0 & 0 & x^2-x \end{vmatrix} = x^3 + (x^4 - x^3) = x^4.$$

三、(15 分)设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = \mu \end{cases}$. 问: 当参数 $\lambda$, $\mu$ 取何值时, 线性方程组有唯一解? 当参数 $\lambda$, $\mu$ 取何值时, 线性方程组有无穷多组解? 当线性方程组有无穷多组解时, 求出其通解.

解: 该方程组的增广矩阵
$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \ \times 1 \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & \lambda+1 & \mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \mu-1 \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda \ne -1$, $\mu$ 为任意实数时, 秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$, 此时线性方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = -1$, $\mu = 1$ 时, 秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2 < 3$, 此时线性方程组有无穷多组解,
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \mu-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times(-\tfrac{1}{7}) \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times(-3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得 $\begin{cases} x_1 + x_3 = -\frac{3}{7} \\ x_2 = \frac{1}{7} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{3}{7} \\ x_2 = \frac{1}{7} \end{cases}$.

故通解为 $\boldsymbol{x} = k(-1, 0, 1)^T + (-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, 0)^T$, 其中 $k$ 为任意实数.

四、(12 分)设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C} + 2\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A}^*$是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: $|\boldsymbol{A}| = -1$, 在 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C} + 2\boldsymbol{X}$ 两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{C} + 2\boldsymbol{AX}$. 故$(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{C}$.
$$(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \times(-1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 4 \ \times(-2) \end{matrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-2\\0&3&0&-3&5\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}\times\tfrac{1}{3}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-2\\0&1&0&-1&\tfrac{5}{3}\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}.\ \text{由此可得 } \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&\tfrac{5}{3}\\0&1\end{pmatrix}.$$

五、(10 分)已知向量组$\eta_1, \eta_2, \eta_3$线性无关，问：参数 $a, b, c$ 满足什么条件时，向量组 $a\eta_1+\eta_2, b\eta_2+\eta_3, c\eta_3+\eta_1$ 线性相关?

**解**: $(a\eta_1+\eta_2, b\eta_2+\eta_3, c\eta_3+\eta_1) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix}a&0&1\\1&b&0\\0&1&c\end{pmatrix}$. 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a&0&1\\1&b&0\\0&1&c\end{pmatrix}$，则$|\boldsymbol{P}| = abc + 1$. 由条件可知:

$a\eta_1+\eta_2, b\eta_2+\eta_3, c\eta_3+\eta_1$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩$(a\eta_1+\eta_2, b\eta_2+\eta_3, c\eta_3+\eta_1) < 3 \Leftrightarrow$ 秩$(\boldsymbol{P}) < 3 \Leftrightarrow |\boldsymbol{P}| = 0 \Leftrightarrow abc = -1$.

六、(15 分)已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$.

1. 写出二次型 $f$ 的矩阵;
2. 求一正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$，将 $f$ 变成其标准形(并写出 $f$ 的相应的标准形);
3. 求当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1$ 时 $f(x_1, x_2, x_3)$的最大值.

**解**: 1. 二次型 $f$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

2. $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\0&\lambda-2&0\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-2)^2\lambda$，可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

解$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得对应于$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的两个正交的特征向量$\xi_1 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$,
解$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得对应于$\lambda_3 = 0$ 的一个特征向量$\xi_3 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{Q} = \left(\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}\right) = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，则正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 将 $f$ 变成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2$.

3. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1 \Leftrightarrow (\boldsymbol{Qy})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Qy}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 1 \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$，此时 $y_1^2 + y_2^2 \le 1$.
故当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1$ 时 $f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2$ 的最大值为 2.

七、(8 分)证明题.

1. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$中，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，证明：$\alpha_1$能由$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表示.

**证明**: 因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关.
又因为$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，所以$\alpha_1$能由$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表示.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶正定矩阵，证明：矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 也是正定矩阵.

**证明**: 设$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶正定矩阵 $\Rightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中$\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{EP} = \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda}^{-1} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix}\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}-1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}-1\end{pmatrix}$，其中

$\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}-1, \ldots, \lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}-1 > 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 也是正定矩阵.

# 2006-2007 学年第 3 学期《线性代数》试卷

一. (18%)填空题($\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵).

1. 假设 $\alpha = (1, 3)$, $\beta = (1, -1)$, 则$(\alpha^T\beta)^{100}$ = ________.

解: $\alpha^T\beta = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}(1,-1) = \begin{pmatrix}1&-1\\3&-3\end{pmatrix}$, $\beta\alpha^T = (1,-1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = -2$,

$$(\alpha^T\beta)^{100} = \underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\ldots(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)}_{100\text{ 个 }\alpha^T\beta} = \alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\ldots(\beta\alpha^T)}_{99\text{ 个 }\beta\alpha^T}\beta = \alpha^T(-2)^{99}\beta = -2^{99}\alpha^T\beta$$

$$= \begin{pmatrix}-2^{99} & 2^{99}\\ -3\times2^{99} & 3\times2^{99}\end{pmatrix}.$$

2. 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ = ________.

解: (法一) $|\boldsymbol{A}| = 1\times4 - 2\times3 = 4 - 6 = -2$. $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$.

(法二) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-3)\\ \phantom{1}\end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\begin{matrix}\phantom{1}\\ \times1\end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\begin{matrix}\phantom{1}\\ \times(\frac{-1}{2})\end{matrix}$

$\to \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&3/2&-1/2\end{array}\right)$. 由此可得 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$.

3. 若 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$的行列式等于 2, 矩阵 $\boldsymbol{B} = (\beta, \gamma, \alpha)$, 则矩阵 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ = ______.

解: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |(\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha)| = |(\underset{\times(-1)}{\alpha}, \beta+\gamma, \gamma+\alpha)| + |(\underset{\times(-1)}{\beta}, \beta+\gamma, \gamma+\alpha)|$

$= |(\alpha, \beta+\gamma, \underset{\times(-1)}{\gamma})| + |(\beta, \underset{\times(-1)}{\gamma}, \gamma+\alpha)| = |(\alpha, \beta, \gamma)| + |(\beta, \gamma, \alpha)| = |\boldsymbol{A}| - |(\beta, \alpha, \gamma)|$

$= |\boldsymbol{A}| + |(\alpha, \beta, \gamma)| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{A}| = 2 + 2 = 4$.

4. 齐次线性方程组 $3x + 2y - 5z = 0$ 的一个基础解系是________________________________.

解: 依次取 $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5/3\\0\\1\end{pmatrix}$, 于是该方程组的一个基础解系为:

$$\xi_1 = (-2/3, 1, 0)^T,\ \xi_2 = (5/3, 0, 1)^T.$$

注: 本题答案不唯一, 比如还可以取$\xi_1 = (-2, 3, 0)^T$, $\xi_2 = (5, 0, 3)^T$.

5. 向量组$\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, -3, -2, -4)^T$, $\alpha_4 = (3, 1, 4, 1)^T$ 的一个极大线性无关组是________________________________________________.

解: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&-1&-3&1\\3&1&-2&4\\4&0&-4&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\ \times(-3)\ \times(-4)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&-5&-5&-5\\0&-5&-5&-5\\0&-8&-8&-11\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(\frac{-1}{5})\\ \\ \\ \end{matrix} \to$

$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&1\\0&-5&-5&-5\\0&-8&-8&-11\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times5\ \times8\\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&1\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

由此可见该向量组的一个极大线性无关组是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

注: 本题答案不唯一, 比如还可以取$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$; 也可以取$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. 但$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关取, 因此$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$不是该向量组的极大线性无关组.

6. 若矩阵$\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$合同, 则参数 $a, b$ 满足条件__________________________.

解: 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$,

又因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$, 故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$, 可见 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 故 $a=2$.

再由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩和正惯性指数, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩和正惯性指数分别为 2 和 1, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的秩和正惯性指数也分别为 2 和 1, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值$\lambda_1$和$\lambda_2$一个是正的一个是负的, 从而 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2<0$.

由于 $a=2$, 所以$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & b\end{vmatrix}=b-4$. 因而 $b<4$.

二. (12%)选择题.

1. 假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是同阶方阵, 数 $k\neq 0$, 则正确的命题是(    ).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$; (B) $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$;

(C) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$; (D) $\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

解: ① 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则$|\boldsymbol{A}|=1$, $|\boldsymbol{B}|=0$, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$, 而$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=1$;

② 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $k=2$, 则$|\boldsymbol{A}|=1$, $|k\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$, 而 $k|\boldsymbol{A}|=2$;

③ 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2$, 而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$;

④ 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式的阶数为 $r$, 取其中的一个 $r$ 阶非零子式记为 $D=\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_ri_r} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r}\end{vmatrix}$, 则 $k\boldsymbol{A}$ 中有一个与之对应的 $r$ 阶子式$\begin{vmatrix}ka_{i_1i_1} & ka_{i_1i_2} & \cdots & ka_{i_1i_r}\\ ka_{i_2i_1} & ka_{i_2i_2} & \cdots & ka_{i_2i_r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i_ri_r} & ka_{i_ri_2} & \cdots & ka_{i_ri_r}\end{vmatrix}=k^rD\neq 0$,

可见 $\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})\geq r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 类似地, 可以证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})$. 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})$.

(换一个角度) $k\neq 0\Rightarrow k\boldsymbol{A}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过各行乘以非零的数 $k$ 得到的$\Rightarrow k\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价$\Rightarrow\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

(再换一个角度) $k\neq 0\Rightarrow k\boldsymbol{E}$ 可逆 $\Rightarrow\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{r}((k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

故选 D.

2. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, 则不与 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵为(    ).

(A) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

解: $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$以及$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$都是 2 阶方阵而且都有两个不同的特征值 1 和 2, 可见它们都与$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$相似, 因此$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$都与 $\boldsymbol{A}$ 相似. 又因为相似的矩阵具有相同的行列式, $|\boldsymbol{A}|=2$, 而$\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-3$, 可见$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$不与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

(换一个角度) 因为相似的矩阵具有相同的迹, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=1+2=3$, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=0+2=2$, 可见$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$不与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

(再换一个角度) 因为相似的矩阵具有相同的特征值, $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值分别为 1 和 2, 而$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$的

两个特征值分别为–1 和 3, 可见$\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$不与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

故选 D.

3. 假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则正确的命题是( ).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关;　　(B) $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关;

(C) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的行向量组都线性相关;　　(D) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组都线性相关.

解: ① 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关;

② 取 $\boldsymbol{A}=(0, 0, 1)$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关;

③ 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $l\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 的行向量依次记为$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 都是非零矩阵, 故可取 $\boldsymbol{A}$ 的一个非零行$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可知

$$a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\ldots+a_{im}\beta_m=\boldsymbol{0},$$

这就是说, 存在一组不全为零的数 $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ 使得 $a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\ldots+a_{im}\beta_m=\boldsymbol{0}$, 可见$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 线性相关.

(换一个角度) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}\Rightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})<m\Rightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组线性相关 $\Rightarrow \boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

故选 B.

三. (16%)设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\-x_1+kx_2-x_3=k^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$

1. 参数 $k$ 取何值时, 线性方程组有唯一解? $k$ 取何值时, 方程组没有解?

2. 当 $k$ 取何值时, 方程组有无穷多组解? 当方程组有无穷多组解时, 求其通解.

解: $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\-1&k&-1&k^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\times1\ \times(-1)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\0&k+1&k-1&k^2+4\\0&-2&2-k&-8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\0&-2&2-k&-8\\0&k+1&k-1&k^2+4\end{array}\right)\times(\tfrac{-1}{2})$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\0&1&\frac{k-2}{2}&4\\0&k+1&k-1&k^2+4\end{array}\right)\times(-1)\ \times(-k-1)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{k+2}{2}&0\\0&1&\frac{k-2}{2}&4\\0&0&\frac{k(3-k)}{2}&k(k-4)\end{array}\right)$$

由此可见, 当 $k\neq0$ 且 $k\neq3$ 时, 该方程组有唯一解; 当 $k=3$ 时, 该方程组无解;

当 $k=0$ 时, 该方程组有无穷多组解, 此时$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{k+2}{2}&0\\0&1&\frac{k-2}{2}&4\\0&0&\frac{k(3-k)}{2}&k(k-4)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$.

故$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=4\end{cases}$即$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3+4\end{cases}$, 由此可得该方程组的通解$\begin{cases}x_1=-c,\\x_2=c+4,\\x_3=c,\end{cases}$其中 $c$ 为任意实数,

写成向量的形式就是$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$.

(换一个角度) 该方程组的系数矩阵的行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&k\\-1&k&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=k(3-k)$.

当 $k\neq 0$ 且 $k\neq 3$ 时, $\boldsymbol{D} = k(3-k)\neq 0$, 此时该方程组有唯一解;

当 $k=3$ 时, 该方程组的增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 1 \quad \times(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 13 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times 2 \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, 可见此时该方程组无解;

当 $k=0$ 时, 该方程组的增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 1 \quad \times(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times 2 \\ \\ \end{matrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

故 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 + 4 \end{cases}$, 由此可得该方程组的通解 $\begin{cases} x_1 = -c, \\ x_2 = c+4, \text{其中 } c \text{ 为任意实数}, \\ x_3 = c, \end{cases}$

写成向量的形式就是 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

四. (16%)设 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 并且 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}\Lambda$, 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{2008}$.

解: $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}\Lambda \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{2008} &= \underbrace{(\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1})\ldots(\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1})}_{2008\text{ 个 }\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}} \\ &= \boldsymbol{P}\Lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\Lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\ldots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\Lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\Lambda\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}\underbrace{\Lambda\Lambda\ldots\Lambda\Lambda}_{2008\text{ 个}\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\Lambda^{2008}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{PEP}^{-1} = \boldsymbol{PP}^{-1} = \boldsymbol{E}. \end{aligned}$$

(另解) $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}\Lambda \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{2008} = \boldsymbol{E}$.

五. (14%)已知向量 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

1. 求参数 $a, b$ 的值, 并求 $\boldsymbol{A}$ 的相应于特征向量 $\eta$ 的特征值;
2. 问: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角阵? 说明你的理由.

解: 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 的相应于特征向量 $\eta$ 的特征值为 $\lambda$, 即 $\boldsymbol{A}\eta = \lambda\eta$,

则 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2+a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$,

由此可得$\lambda = 0$, $a = -2$, $b = 0$.

2. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+2 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3$. 可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0(三重).

$$0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5 \quad \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可见 $\mathrm{r}(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$, 因而$(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有 1 个线性无关的解向量, 也就是说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 而 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 3, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不与对角矩阵相似.

(换一个角度) 假若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵$\Lambda$相似, 则由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0(三重)可知$\Lambda = \boldsymbol{O}$, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\Lambda) = 0$, 因而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 这与 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}$ 矛盾. 此矛盾表明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不与对角矩阵相似.

六. (14%)已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3)$.

可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$.

$(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1 = (-2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$,

它们已经是正交的了, 再单位化得

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{q}_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}},$$

$(3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得

$$\boldsymbol{q}_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

注: 若$(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系取为$\xi_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 则需要先正交化再单位化, 即:

令 $\boldsymbol{p}_1 = \xi_1$, $\boldsymbol{p}_2 = \xi_2 - \dfrac{[\xi_2, \boldsymbol{p}_1]}{[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1]}\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

再令 $\boldsymbol{q}_1 = \dfrac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})^{\mathrm{T}}$,

最后令 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

七. (10%)假设 $n$ 维实行向量$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$.

1. 证明: $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵当且仅当$\alpha$, $\beta$线性相关;
2. 当$\alpha$, $\beta$线性相关时, 求实数 $k$ 的取值范围, 使得 $k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明: 1. 因为 $\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, ..., b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵$\Leftrightarrow a_ib_j = a_jb_i$ $(\forall i, j = 1, 2, \ldots, n)$ $\Leftrightarrow \alpha, \beta$的分量成比例$\Leftrightarrow \alpha, \beta$线性相关.

(换一个角度) 因为$\alpha\boldsymbol{A} = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\beta = \|\alpha\|^2\beta$, $\alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^{\mathrm{T}} = \alpha\beta^{\mathrm{T}}(\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\alpha\beta^{\mathrm{T}})\alpha$.

若 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 则$\|\alpha\|^2\beta = \alpha\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\alpha\beta^{\mathrm{T}})\alpha$.

当$\alpha = \mathbf{0}$ 时, $1\alpha + 0\beta = \mathbf{0}$; 当$\alpha \neq \mathbf{0}$ 时, $\|\alpha\|^2 \neq 0$ 且$-(\alpha\beta^{\mathrm{T}})\alpha + \|\alpha\|^2\beta = \mathbf{0}$.

因而$\alpha, \beta$线性相关.

反过来, 若$\alpha, \beta$线性相关, 则存在不全为零的数 $k_1, k_2$ 使得 $k_1\alpha + k_2\beta = \mathbf{0}$.

当 $k_1 \neq 0$ 时, $\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$, $\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = (-\frac{k_2}{k_1}\beta)^{\mathrm{T}}\beta = -\frac{k_2}{k_1}\beta^{\mathrm{T}}\beta$,

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (-\frac{k_2}{k_1}\beta^{\mathrm{T}}\beta)^{\mathrm{T}} = -\frac{k_2}{k_1}\beta^{\mathrm{T}}(\beta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = -\frac{k_2}{k_1}\beta^{\mathrm{T}}\beta = \boldsymbol{A}$;

当 $k_2 \neq 0$ 时, $\beta = -\frac{k_1}{k_2}\alpha$, $\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \alpha^{\mathrm{T}}(-\frac{k_1}{k_2}\alpha) = -\frac{k_1}{k_2}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$,

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (-\frac{k_1}{k_2}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)^{\mathrm{T}} = -\frac{k_1}{k_2}\alpha^{\mathrm{T}}(\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = -\frac{k_1}{k_2}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \boldsymbol{A}$.

由此可见 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

2. 若$\alpha, \beta$中有一个为零向量, 则 $\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \boldsymbol{O}$, 于是 $k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow k\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵$\Leftrightarrow k > 0$.

若$\alpha, \beta$都不为零向量, 则由$\alpha, \beta$线性相关可知, 存在(非零的)$t$ 使得$\beta = t\alpha$.

于是 $\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = t\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$.

一方面, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \le \mathrm{r}(\beta) = 1$, 另一方面由$\alpha$不为零可知存在某个 $a_i \neq 0$, 于是 $\boldsymbol{A} = t\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$中有一个元素 $ta_i^2 \neq 0$, 可见 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \ge 1$.

综合上述两个方面可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 且由 $\boldsymbol{A}\alpha^{\mathrm{T}} = t\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = (t\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha^{\mathrm{T}}$ 可见

$$\lambda = t\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = t(a_1^2 + ... + a_n^2)$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的唯一的非零的特征值, 于是存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} t(a_1^2+\cdots+a_n^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})\boldsymbol{Q} = k\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} k+t(a_1^2+\cdots+a_n^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

因此 $k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow k + t(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) > 0$ 且 $k > 0$.

当 $t > 0$ 时, $k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow k > 0$;

当 $t < 0$ 时, $k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow k > -t(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)$.

# 《线性代数》试题

**解答仅供参考**

张小向



**一. (18%)填空题($E$表示单位矩阵)**

1. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

若$AB$是对称矩阵, 则$x$ = ________.

解: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$.

$AB$是对称矩阵 $\Leftrightarrow 3 = 2x$

$\Leftrightarrow x = 3/2$.



2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵$A^{-1}$ = _______.

解: $|A| = 4\times5 - 3\times7 = 20 - 21 = -1$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$



3. 若3×3矩阵$A$的特征值是1, 2, –1, 则$A$的伴随矩阵$A^*$的行列式$|A^*|$ = __________.

解: $AA^* = |A|E \Rightarrow A^* = |A|A^{-1}$.

3×3矩阵$A$的特征值是1, 2, –1

$\Rightarrow |A| = -2$且$A^{-1}$的特征值是1, 1/2, –1

$\Rightarrow |A^{-1}| = -1/2$

$\Rightarrow |A^*| = |A|^3|A^{-1}| = (-8)\times(-1/2) = 4$.

---

注: $A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \xi = A^{-1}A\xi = A^{-1}\lambda\xi = \lambda A^{-1}\xi$

$\Rightarrow A^{-1}\xi = \lambda^{-1}\xi$.

$|kA| = k^n|A|$, 其中$n$为$A$的阶数.



4. 齐次线性方程组$x + 2y - 5z = 0$的一个基础解系是______________________________.

解: $x + 2y - 5z = 0 \Rightarrow x = -2y + 5z$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + 5z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + 5z \\ 1y + 0z \\ 0y + 1z \end{pmatrix}$$

$$= y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 该方程组的一个基础解系是$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



5. 若二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + tx_1x_3$$

是正定的, 则参数 $t$ 满足条件__________.

解: $f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ t/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A$的顺序主子式 $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = 2 > 0$,

$D_3 = |A| = 2(1 - t^2/4)$.

$f(x_1, x_2, x_3)$正定 $\Leftrightarrow A$的顺序主子式全 > 0

$\Leftrightarrow 2(1 - t^2/4) > 0$

$\Leftrightarrow -2 < t < 2$.

**5.** 若二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + tx_1x_3$$

是正定的, 则参数 $t$ 满足条件____________.

**解:** $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \frac{t}{2}x_3)^2 + 2x_2^2 + (1 - \frac{t^2}{4})x_3^2$.

可逆变换 $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{t}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$化

为标准形: $y_1^2 + 2y_2^2 + (1 - t^2/4)y_3^2$.

$f(x_1, x_2, x_3)$正定 $\Leftrightarrow (1 - t^2/4) > 0$

$\Leftrightarrow -2 < t < 2$.

07-08-3《线性代数》试题 解答仅供参考 272365083@qq.com

**6.** 若矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$不与对角阵相似, 则$a$ = ____.

**解:** 矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$不与对角阵相似

$\Leftrightarrow$ $A$有2个相同的特征值$\lambda_1 = \lambda_2$

且只有1个线性无关的特征向量.

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3/2$

$\Rightarrow \lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 3/2-1 & -a \\ -2 & 3/2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -a \\ -2 & -1/2 \end{pmatrix}$

秩$(\lambda_1 E - A) = 1 \Rightarrow a = -1/8$.

07-08-3《线性代数》试题 解答仅供参考 272365083@qq.com

## 二. (12%)选择题

**1.** 假设$A, B$都是可逆矩阵, 则矩阵方程

$$AXB = C$$

的解为[ C ].

(A) $X = A^{-1}B^{-1}C$. (B) $X = CA^{-1}B^{-1}$.
(C) $X = A^{-1}CB^{-1}$. (D) $X = B^{-1}CA^{-1}$.

**解:** $AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}(AXB) = A^{-1}C$

$\Leftrightarrow XB = A^{-1}C$

$\Leftrightarrow (XB)B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$.

07-08-3《线性代数》试题 解答仅供参考 272365083@qq.com

**2.** 下列矩阵中, 与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$合同的矩阵是[ B ].

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

**解:** $A$是二阶实对称矩阵, 正负惯性指数都是1.

$M$与$A$合同 $\Leftrightarrow$

$M$是二阶实对称矩阵, 正负惯性指数都是1.

07-08-3《线性代数》试题 解答仅供参考 272365083@qq.com

**3.** 假设$A, B$分别是$s\times s$和$n\times n$矩阵, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的行列式是[ D ].

(A) $|A||B|$. (B) $-|A||B|$.
(C) $(-1)^{s+n}|A||B|$. (D) $(-1)^{sn}|A||B|$.

**解:** 首先将该分块矩阵的第$n$+1列与前面各列逐一对调(共对调$n$次),

再将该分块矩阵的第$n$+2列与前面 $n$ 列逐一对调(共对调$n$次), …

依此类推, 一共经过$sn$次对调后得$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$.

07-08-3《线性代数》试题 解答仅供参考 272365083@qq.com

☹☹☺☺☺
☹☺☹☺☺ 1
☺☹☹☺☺ 2
☺☹☺☹☺ 3
☺☺☹☹☺ 4
☺☺☹☺☹ 5
☺☺☺☹☹ 6

**三. (8%)计算行列式**

$$D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{vmatrix}$$

的值.



$$\text{解: } D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&1&1\\0&1-x&1&1\\0&1&1+x&1\\0&1&1&1-x\end{vmatrix}$$

$\times(-1)$



$$\text{解: } D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&-x&0&0\\1&0&x&0\\1&0&0&-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&1&1\\0&1-x&1&1\\0&1&1+x&1\\0&1&1&1-x\end{vmatrix}$$



$$\text{解: } D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{vmatrix}$$

$$=x^3+\begin{vmatrix}x&1&1&1\\0&1-x&1&1\\0&1&1+x&1\\0&1&1&1-x\end{vmatrix}$$



$$\text{解: } D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{vmatrix}$$

$$=x^3+x\begin{vmatrix}1-x&1&1\\1&1+x&1\\1&1&1-x\end{vmatrix}$$

$$=x^3+x\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+x&1\\1&1&1-x\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}-x&1&1\\0&1+x&1\\0&1&1-x\end{vmatrix}$$



$$\text{解: } D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{vmatrix}$$

$$=x^3+x\begin{vmatrix}1-x&1&1\\1&1+x&1\\1&1&1-x\end{vmatrix}$$

$$=x^3+x\begin{vmatrix}1&0&0\\1&x&0\\1&0&-x\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}-x&1&1\\0&1+x&1\\0&1&1-x\end{vmatrix}$$

$$=x^3-x^3-x^2[(1+x)(1-x)-1]\quad=x^4.$$

**四. (6%)假设多项式 $f(x) = x^8 - 255$, 矩阵**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $f(A)$.



**解:** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E,$

$f(A) = A^8 - 255E = (4E)^4 - 255E$

$= 256E - 255E = E.$



**五. (16%)已知2是对称矩阵**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

的二重特征值.

1. 求参数$x$的值, 并求$A$的另一个特征值.
2. 求$A$的所有特征向量.
3. 求一个正交矩阵$Q$及对角阵$\Lambda$使得

$$Q^TAQ = \Lambda.$$



**解:** 1. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-x \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)[\lambda^2 - (x+3)\lambda + 3x - 1].$

因为2是$A$的二重特征值,

所以2是$\lambda^2 - (x+3)\lambda + 3x - 1$的根, 即

$4 - 2(x+3) + 3x - 1 = 0,$

由此可得 $x = 3$.

于是$|\lambda E - A| = (\lambda-2)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$

$= (\lambda-2)^2(\lambda-4).$

可见$A$的另一个特征值为4.



**解:** 2. $(2E-A)x = 0$的基础解系:

$p_1 = (1, 0, 0)^T,\ p_2 = (0, -1, 1)^T.$

对应于$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$的特征向量为

$k_1p_1 + k_2p_2$ ($k_1, k_2$不同时为零).

$(4E-A)x = 0$的基础解系:

$p_3 = (0, 1, 1)^T.$

对应于$\lambda_3 = 4$的特征向量为

$kp_3\ (0 \neq k \in \mathbb{R}).$



**解:** 3. $A$的特征向量

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

两两正交, 单位化后得

$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$

令$Q = (q_1, q_2, q_3)$, 则$Q$为正交矩阵, 且

$$Q^TAQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

**六. (14%)**假设$a, b$是实数，二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3$$

1. 求二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵$A$.
2. 求一可逆线性变换

$$x = Cy$$

将$f(x_1, x_2, x_3)$化成标准形.

3. 若 $f$ 的秩等于2, 求参数$a, b$的值.



**解:** 1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3$

的矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.

2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3$

$= (x_1 + ax_3)^2 + x_2^2 + 2bx_2x_3 - a^2x_3^2$

$= (x_1 + ax_3)^2 + (x_2 + bx_3)^2 - (a^2+b^2)x_3^2$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + ax_3 \\ y_2 = x_2 + bx_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 则$\begin{cases} x_1 = y_1 - ay_3 \\ x_2 = y_2 - by_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$



**解:** 2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3$

$= (x_1 + ax_3)^2 + (x_2 + bx_3)^2 - (a^2+b^2)x_3^2$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + ax_3 \\ y_2 = x_2 + bx_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 则$\begin{cases} x_1 = y_1 - ay_3 \\ x_2 = y_2 - by_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

即$x = Cy$, 其中$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可逆,

而且可逆线性变换 $x = Cy$ 将$f(x_1, x_2, x_3)$化成标准形 $y_1^2 + y_2^2 - (a^2+b^2)y_3^2$.

3. 秩$(f) = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.



**七. (16%)**设向量组

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix},$$

与

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix},$$

等价.

- 求向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的秩.
- 求参数$a, b, c$的值.
- 记$A = (\alpha_1, \alpha_2), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 求矩阵$X$使得$AX = B$.



**解:** 1. 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$的秩为2,

而向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$与$\alpha_1, \alpha_2$等价,

所以 秩$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ = 秩$(\alpha_1, \alpha_2) = 2$.

2. $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & c & 1 & 2 & a \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \times(-b) \\ \times(-c) \\ \ \end{array}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-b-c & 2+b-c & a-b-c \end{pmatrix}$

由1知: $1-b-c = 2+b-c = a-b-c = 0$,



**解:** 2. $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & c & 1 & 2 & a \end{pmatrix}\begin{array}{l} \times(-b) \\ \times(-c) \\ \ \end{array}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-b-c & 2+b-c & a-b-c \end{pmatrix}$

由1知: $1-b-c = 2+b-c = a-b-c = 0$,

由此可得$a = 1, b = -1/2, c = 3/2$.

**解: 3.** 因为$A = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A_1 \end{pmatrix}$,

其中$E$为2阶单位矩阵,

若矩阵$X$ 满足$AX = B$, 则$X$为2×3矩阵,

且$AX = \begin{pmatrix} E \\ A_1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} EX \\ A_1X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ A_1X \end{pmatrix}$,

可见$X$为$B$的前两行元素构成子矩阵,

即 $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.



**八. (10%)证明题**(本题所涉及的数均是实数, 所有矩阵均是实矩阵)

**1.** 假设$A$是$n\times n$矩阵, $x$是$A$的属于特征值$a$的特征向量, $y$是$A^T$的属于特征值$b$的特征向量. 若$a \ne b$, 证明$x$与$y$正交.

**证明:** $\left.\begin{matrix} Ax = ax \\ A^Ty = by \end{matrix}\right\} \Rightarrow ay^Tx = y^T(ax) = y^TAx$

$= (A^Ty)^Tx = (by)^Tx = by^Tx$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow (a-b)y^Tx = 0 \\ a \ne b \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^Tx = 0$

$\Rightarrow$ $x$与$y$正交.



**2.** 假设$A$, $B$都是$s\times n$矩阵, 若$A+B$的秩$r(A+B) = n$, 证明: 矩阵$M = A^TA + B^TB$的特征值均大于零.

**证明:** (1) $M$为$n$阶方阵, 且$M^T = (A^TA + B^TB)^T$

$= A^T(A^T)^T + B^T(B^T)^T = A^TA + B^TB = M$.

(2) 假若存在非零向量$x$使得$x^TMx \le 0$, 则

$0 \le ||Ax||^2 + ||Bx||^2$

$= (Ax)^T(Ax) + (Bx)^T(Bx)$

$= x^TA^TAx + x^TB^TBx$

$= x^T(A^TA + B^TB)x = x^TMx \le 0$,

故$||Ax||^2 = ||Bx||^2 = 0$, 即$Ax = Bx = 0$,

因而$(A+B)x = Ax + Bx = 0$,

这与$r(A+B) = n$矛盾!



(2) 假若存在非零向量$x$使得$x^TMx \le 0$, 则

$0 \le ||Ax||^2 + ||Bx||^2$

$= (Ax)^T(Ax) + (Bx)^T(Bx)$

$= x^TA^TAx + x^TB^TBx$

$= x^T(A^TA + B^TB)x = x^TMx \le 0$,

故$||Ax||^2 = ||Bx||^2 = 0$, 即$Ax = Bx = 0$,

因而$(A+B)x = Ax + Bx = 0$,

这与$r(A+B) = n$矛盾!

此矛盾表明:

对于任意的$n$维非零向量$x$, 有$x^TMx > 0$,

可见$M$是正定的,

因而$M$的特征值均大于零.

# 2008-2009 学年第 3 学期《线性代数》试卷

一. (30%)填空题($\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵).

1. 假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{pmatrix}$, 如果 $\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{O}$, 则参数 $a, b$ 满足条件__________________________.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 \\ -3 & \lambda-b \end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-b)$, 可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a, \lambda_2=b$, 从而 $a^{10}$ 和 $b^{10}$ 是 $\boldsymbol{A}^{10}$ 的特征值.

又因为 $\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{O}$, 所以 $a^{10}=b^{10}=0$. 由此可得 $a=b=0$. 此时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 的确满足 $\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{O}$.

综上所述参数 $a, b$ 满足的条件是“$a=b=0$”.

2. 设 $k>0$, 向量 $\alpha=(k, 0, k)^{\mathrm{T}}$, 如果矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的逆矩阵, 则参数 $k=$_________.

解: $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=(k, 0, k)\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}=2k^2$, $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}(k, 0, k)=\begin{pmatrix} k^2 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ k^2 & 0 & k^2 \end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$,

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{E}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\frac{1}{k}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})$$

$$=\boldsymbol{E}+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\frac{1}{k}\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\frac{1}{k}\alpha(2k^2)\alpha^{\mathrm{T}}$$

$$=\boldsymbol{E}+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-2k\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+(\frac{1}{k}-1-2k)\alpha\alpha^{\mathrm{T}}.$$

可见

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的逆矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow(\frac{1}{k}-1-2k)\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\frac{1}{k}-1-2k=0$

$\Leftrightarrow 1-k-2k^2=0\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$ (注意条件 $k>0$).

3. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶可逆矩阵, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为_____________________.

解一: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{AX} & \boldsymbol{AY} \\ \boldsymbol{BU}+\boldsymbol{X} & \boldsymbol{BV}+\boldsymbol{Y} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}, \boldsymbol{AY}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{BU}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{BV}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{U}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}^{-1}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

解二: $\left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{array}\right)\xrightarrow{\text{对换第一行和第二行}}\left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{array}\right)\xrightarrow{\text{第一行左乘以}\boldsymbol{B}^{-1}}\left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{第二行左乘以}\boldsymbol{A}^{-1}}\left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{array}\right)\xrightarrow[\text{加到第一行}]{\text{第二行左乘以}(-\boldsymbol{B}^{-1})}\left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{array}\right)$,

由此可得 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

4. 若向量组 $(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}, (1, x, 3)^{\mathrm{T}}, (1, 2, y)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则参数 $x, y$ 满足条件______________.

解: $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&x&2\\3&3&y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\0&x-2&0\\0&0&y-3\end{vmatrix} = (x-2)(y-2)$.

$(1, 2, 3)^T, (1, x, 3)^T, (1, 2, y)^T$ 线性相关 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\2&x&2\\3&3&y\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 或 $y = 2$.

5. $\mathbf{R}^3$ 的子空间 $V = \{(x, y, z)^T \mid x-y-z = 0\}$的维数是____________________________.

解: $x-y-z = 0 \Leftrightarrow x = y+z \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

可见$(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T$ 是 $V$ 的一组基, 因而 $\dim V = 2$.

事实上, 令 $\boldsymbol{A} = (1, -1, -1)$, 则 $\boldsymbol{V}$ 就是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间, 而秩$(\boldsymbol{A}) = 1$,

故 $\dim V = 3-1 = 2$.

6. 假设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩是2, $\eta_1, \eta_2, \eta_3$是线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的解, 若$\eta_1 + \eta_2 = (2, 2, 4)^T$, $\eta_1 - \eta_3 = (1, 0, 1)^T$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解是________________________.

解: 由已知条件可得 $\boldsymbol{A}(\eta_1+\eta_2) = \boldsymbol{A}\eta_1 + \boldsymbol{A}\eta_2 = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}(\eta_1-\eta_3) = \boldsymbol{A}\eta_1 - \boldsymbol{A}\eta_3 = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$,

$\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2) = (1, 1, 2)^T$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解, $\eta_1 - \eta_3 = (1, 0, 1)^T$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,

因而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解是 $\boldsymbol{x} = k(1, 0, 1)^T + (1, 1, 2)^T$, 其中 $k$ 为任意实数.

7. 如果 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2 和 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$的特征值是________________.

解: 因为 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2 和 3, 所以$|\boldsymbol{A}| = 2\times3 = 6$.

设$\xi$和$\eta$分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 2 和 3 特征向量, 即 $\boldsymbol{A}\xi = 2\xi$, $\boldsymbol{A}\eta = 3\eta$,

于是 $6\xi = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\xi = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\xi = 2\boldsymbol{A}^*\xi$, $6\eta = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\eta = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\eta = 3\boldsymbol{A}^*\eta$,

由此可得 $\boldsymbol{A}^*\xi = 3\xi$, $\boldsymbol{A}^*\eta = 2\eta$, 可见 $\boldsymbol{A}^*$的特征值是 3 和 2.

8. 若 2 是 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$的二重特征值, 且 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵, 则$(x, y) =$ __________.

解: 因为 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 且 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵, 所以秩$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 3-2 = 1$,

而 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$,

可见 $x-2 = -x-y = 0$, 即 $x = 2, y = -2$.

经验证, $x = 2, y = -2$ 时, 2 的确是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 且 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵.

故$(x, y) = (2, -2)$.

9. 如果二次型 $x_1^2 + tx_2^2 + 4tx_1x_2$是正定的, 则参数$t$满足条件____________________________.

解一: 该二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1&2t\\2t&t\end{pmatrix}$. $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式$\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix}1&2t\\2t&t\end{vmatrix} = t-4t^2$.

该二次型正定$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零 $\Leftrightarrow t-4t^2 > 0 \Leftrightarrow t < 0$ 或 $t > \frac{1}{4}$.

解二: $x_1^2 + tx_2^2 + 4tx_1x_2 = x_1^2 + 4tx_1x_2 + 4t^2x_2^2 - 4t^2x_2^2 + tx_2^2 = (x_1+2tx_2)^2 + (t-4t^2)x_2^2$.

令 $\begin{cases}y_1 = x_1 + 2tx_2,\\ y_2 = x_2,\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$,

则原二次型经过可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为标准形 $y_1^2 + (t-4t^2)y_2^2$.

因此原二次型正定$\Leftrightarrow t-4t^2 > 0 \Leftrightarrow t < 0$ 或 $t > \frac{1}{4}$.

10. 如果线性方程组$\begin{cases}x+3y-z=1\\ 2x+ay-2z=2\\ 3x+9y+bz=3\end{cases}$有 3 个线性无关的解向量，则$(a, b)$ = ________.

**解**: 该线性方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 2 & a & -2 & 2\\ 3 & 9 & b & 3\end{pmatrix}$, 秩$(\boldsymbol{A}) \geq 1$. 由于 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解，故秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

当秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解，这与已知条件不符.

当秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解形如

$$\boldsymbol{x} = \xi + \eta^*,$$

其中$\xi$为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, $\eta^*$为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的特解.

此时，若$\xi_1, \xi_2, \xi_3$为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，则$\xi_1, \xi_2, \xi_3$能由$\xi, \eta^*$线性表示,

因而$\xi_1, \xi_2, \xi_3$线性相关，可见 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 不会有 3 个线性无关的解向量，这与已知条件不符.

当秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 1$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解形如

$$\boldsymbol{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta^*,$$

其中$\xi_1, \xi_2$为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, $\eta^*$为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的特解.

此时, $\eta^*, \xi_1 + \eta^*, \xi_2 + \eta^*$线为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 3 个线性无关的解向量，这与已知条件相符.

可见秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 1$.

而$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 2 & a & -2 & 2\\ 3 & 9 & b & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\ \times(-3)\\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & a-6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b+3 & 0\end{pmatrix}$,

故 $a - 6 = b + 3 = 0$, 即 $a = 6, b = -3$.

二. (14%) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, 求矩阵方程$(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 的解.

**解**: $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

$$(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix}6 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times\frac{1}{6}\\ \times\frac{1}{4}\end{matrix} \to \begin{pmatrix}6 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 6 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-6)\\ \times(-2)\\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{2}{3} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(-2)\end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & \frac{4}{3} & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times\frac{1}{4}\end{matrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & \frac{4}{3} & -3\end{pmatrix}.$$

由此可得 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2)^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 4 & \frac{4}{3} & -3\end{pmatrix}$.

注: 本题也可以先计算出$(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2)^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ -2 & \frac{2}{3} & 3\end{pmatrix}$, 再计算 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2)^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 4 & \frac{4}{3} & -3\end{pmatrix}$.

三. (10%) 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$与向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\m\\0\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\n\end{pmatrix}$的秩相同，并且$\beta_3$可以由$\alpha_1, \alpha_2$线性表示. 求参数 $m, n$ 的值.

解: 秩$(\alpha_1, \alpha_2) = 2$, 故秩$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&1\\1&3&n\end{pmatrix}\begin{matrix}\times1\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&1\\0&4&n+1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-2)\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&1\\0&0&n-1\end{pmatrix},$$

$\beta_3$可以由$\alpha_1, \alpha_2$线性表示 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2)x = \beta_3$ 有解 $\Leftrightarrow n-1=0 \Leftrightarrow n=1$.

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&m&1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&m&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&m&1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \times\frac{m}{2}\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&0&1-\frac{m}{2}\end{pmatrix},$$

秩$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2 \Leftrightarrow 1-\frac{m}{2}=0 \Leftrightarrow m=2$.

四. (14%) 假设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}$.

1. 当参数 $a$ 满足什么条件时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解?
2. 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解时，求其基础解系.

解: $$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}\underset{i=2,3,4}{\overset{c_1+c_i}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}10+a&2&3&4\\10+a&2+a&3&4\\10+a&2&3+a&4\\10+a&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,3,4}{\overset{c_i+(-i)c_1}{=\!=\!=\!=}}(10+a)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&a&0&0\\1&0&a&0\\1&0&0&a\end{vmatrix}=(10+a)a^3.$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0 \Leftrightarrow a=-10$ 或 0.

当 $a=-10$ 时,
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\-9&2&3&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\ \times9\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\0&-10&0&10\\0&0&-10&10\\0&20&30&-50\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \times2\\ \times3\\ \\ \end{matrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\0&-10&0&10\\0&0&-10&10\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-\frac{1}{10})\\ \times(-\frac{1}{10})\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-2)\\ \times(-3)\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可见 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_4=0\\x_2-x_4=0\\x_3-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k$ 为任意实数.

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为$\xi=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $a=0$ 时,
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$ 由此可见

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\Leftrightarrow x_1=-2x_2-3x_3-4x_4\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+3x_3\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+4x_4\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi_1=(-2,1,0,0)^T$, $\xi_2=(-3,0,1,0)^T$, $\xi_3=(-4,0,0,1)^T$.

五. (10%) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3+kx_3^2$, $g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$.

1. 求一可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 将 $f$ 化成标准形.

2. 问: 当参数 $k$ 满足什么条件时, 存在可逆线性变换将 $f$ 变成 $g$?

解: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3+kx_3^2=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2-x_2^2+4x_2x_3+kx_3^2$

$=(x_1-2x_2)^2-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2+4x_3^2+kx_3^2=(x_1-2x_2)^2-(x_2-2x_3)^2+(4+k)x_3^2$.

令 $\begin{cases}y_1=x_1-2x_2,\\y_2=x_2-2x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$,

则原二次型经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+(4+k)y_3^2$.

$g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&\frac12\\0&0&0\\\frac12&0&0\end{pmatrix}$, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\frac12\\0&\lambda&0\\-\frac12&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\dfrac12)(\lambda-\dfrac12)$.

可见 $g(z_1,z_2,z_3)$的正负惯性指数均为 1. 因此

存在可逆线性变换将 $f$ 变成 $g\Leftrightarrow f$ 的正负惯性指数均为 $1\Leftrightarrow 4+k=0\Leftrightarrow k=-4$.

六. (14%) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&x&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}y&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 求参数 $x, y$ 的值, 并求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\Lambda$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&x&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}y&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 所以 $3x=|\boldsymbol{A}|=|\Lambda|=y$, $4+x=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\Lambda)=2+y$.

由此可得 $x=1, y=3$.

由$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\xi_1=(1,0,1)^T$.

由$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\xi_2=(0,1,0)^T$, $\xi_3=(-1,0,1)^T$.

$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 已经是两两正交的了, 将它们单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T,\ \boldsymbol{q}_2=(0,1,0)^T,\ \boldsymbol{q}_3=(-\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T.$$

于是令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\Lambda$.

七. (8%)证明题.

1. 假设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r$. 证明: 存在秩为 $n-r$ 的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

证一: 因为 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r$, 所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 $n-r$ 个线性无关的解向量

$$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r},$$

于是存在秩为 $n-r$ 的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r},0,\ldots,0)$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

证二: 因为 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r$, 所以存在 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 $r$ 阶单位阵.

于是存在秩为 $n-r$ 的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}.$$

2. 假设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 实对称矩阵, $\lambda_i$ $(1 \le i \le n)$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 证明: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$ .

证明: 因为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 实对称矩阵, $\lambda_i$ $(1 \le i \le n)$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,
所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix},$$

可见 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为$\lambda_i^2$ $(1 \le i \le n)$.

因而 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$ .

# 2009 年《线性代数》重修考试试卷

一、填空题(30 分，其中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵).

1. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $a, b$ 满足条件______________.

解: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & ab\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3a\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA} \Leftrightarrow ab=3a \Leftrightarrow a(b-3)=0$.

2. 若矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆，则分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ 2\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$的逆矩阵是__________________.

解: $\boldsymbol{A}^{-1}\times\left(\begin{array}{cc|cc}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ 2\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{array}\right)\to(-2\boldsymbol{E})\times\left(\begin{array}{cc|cc}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ 2\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{array}\right)\to\boldsymbol{B}^{-1}\times\left(\begin{array}{cc|cc}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -2\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{cc|cc}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & -2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{array}\right)$. 可见$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ 2\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.

3. 如果向量组$(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)$的秩为 2，则参数 $a=$________________.

解: 向量组$(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)$的秩为 2 $\Rightarrow\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=0\Rightarrow(a+2)(a-1)^2=0\Rightarrow a=-2$ 或 1.

当 $a=-2$ 时，原向量组的秩为 2，当 $a=1$ 时，原向量组的秩为 1. 故 $a=-2$.

4. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a-2c & c\\ b-2d & d\end{pmatrix}$，则满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BP}$ 的二阶矩阵 $\boldsymbol{P}=$__________.

解: 将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列的 2 倍加到第 1 列就可以得到 $\boldsymbol{A}$.
又因为进行一次初等列变换相当于右乘一个相应的初等矩阵,
所以 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

5. 若$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}b\\ 1\end{pmatrix}$是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & a\end{pmatrix}$的相应于特征值 2 的特征向量，则$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\quad\\ \quad\end{pmatrix}$.

解: $\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}b\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}b+1\\ 2b+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

6. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ \frac12 & c\end{pmatrix}$是正交矩阵，且 $a, b>0$，则 $\boldsymbol{A}=$ ________________________.

解: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ \frac12 & c\end{pmatrix}$是正交矩阵$\Rightarrow\boldsymbol{AA}^{\mathrm T}=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ \frac12 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \frac12\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & \frac12\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ \frac12 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}a^2+b^2 & \frac12a+bc\\ \frac12a+bc & \frac14+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+\frac14 & ab+\frac12c\\ ab+\frac12c & b^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

又因为 $a, b>0$，所以 $a=\dfrac{\sqrt3}{2}, b=\dfrac12, c=-\dfrac{\sqrt3}{2}$. 因而 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ \frac12 & -\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$.

7. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+kx_3^2+2kx_1x_2$ 是正定的，则参数 $k$ 满足条件____.

解: (方法一) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+kx_3^2+2kx_1x_2=(x_1+kx_2)^2+(1-k^2)x_2^2+kx_3^2$.

令$\begin{cases}y_1=x_1+kx_2\\ y_2=x_2\\ y_3=x_3\end{cases}$，则 $f(x_1, x_2, x_3)=y_1^2+(1-k^2)y_2^2+ky_3^2$.

故 $f(x_1, x_2, x_3)$正定$\Leftrightarrow 1-k^2>0$ 且 $k>0\Leftrightarrow 0<k<1$.

(方法二) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 2kx_1x_2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ 的顺序主子式为

$\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1-k^2$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = (1-k^2)k$.

故 $f(x_1, x_2, x_3)$正定$\Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 全大于 0 $\Leftrightarrow 1-k^2 > 0$ 且 $k > 0 \Leftrightarrow 0 < k < 1$.

(方法三) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 2kx_1x_2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$,

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -k & 0 \\ -k & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-k \end{vmatrix} = (\lambda-1+k)(\lambda-1-k)(\lambda-k)$.

可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = 1-k$, $\lambda_2 = 1+k$, $\lambda_3 = k$.

故 $f(x_1, x_2, x_3)$正定$\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全大于 0 $\Leftrightarrow 0 < k < 1$.

8. 若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta} = (1, k, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量, 则 $k$ 的可能的值为________.

解: 设 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\eta} = \lambda\boldsymbol{\eta}$, 则$\boldsymbol{\eta} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}$, 即 $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3+k \\ 2+2k \\ 3+k \end{pmatrix}$. 由此可得 $k = 1$ 或$-2$.

9. 假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 3×4 矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|$ = ____________________.

解: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 3×4 矩阵$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 为 4×4 矩阵且 秩$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}) \le$ 秩$(\boldsymbol{B}) \le 3 < 4 \Rightarrow |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}| = 0$.

10. 设$\alpha$是 $n$ 维单位列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|$ = __________________.

解: 设$\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ 为$\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系, 则$\alpha, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ 线性无关(否则, $\alpha$能由$\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ 线性表示, 因而$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = 0$, 这与"$\alpha$是单位向量"矛盾!). 于是有

$$\boldsymbol{A}\alpha = (\boldsymbol{E} + \alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha = \boldsymbol{E}\alpha + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \alpha + \alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha) = 2\alpha;$$
$$\boldsymbol{A}\xi_i = (\boldsymbol{E} + \alpha\alpha^{\mathrm{T}})\xi_i = \boldsymbol{E}\xi_i + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\xi_i = \xi_i + \alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\xi_i) = \xi_i \ (i = 1, \ldots, n-1).$$

可见 2 和 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\alpha$是对应于 2 的特征向量, $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ 是对应于 1 的特征向量.

因而$|\boldsymbol{A}| = 2\times1^{(n-1)} = 2$.

二、(10 分)求行列式$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

解: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \times(-2) \ \times(-1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \times1 \ \times3 = -\begin{vmatrix} 0 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 60$.

三、(14%)已知向量组$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix}$与$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ n \end{pmatrix}$等价. 求参数 $m, n$ 的值. 并将$\alpha_2$ 表示成$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性组合.

解: 因为$\alpha_1, \alpha_2$ 与$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价, 所以秩$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ = 秩$(\alpha_1, \alpha_2) \le 2$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 & m \\ 4 & -5 & n & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & n & 1 & 3 \end{pmatrix} \times4 \ \times5$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}3&0&9&-3&m+4\\0&1&1&-1&1\\4&0&n+5&-4&8\end{pmatrix}\times\tfrac{1}{3}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&-1&\frac{m+4}{3}\\0&1&1&-1&1\\4&0&n+5&-4&8\end{pmatrix}\times(-4)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&-1&\frac{m+4}{3}\\0&1&1&-1&1\\0&0&n-7&0&\frac{8-4m}{3}\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{C}.$$

可见 $n-7=0$, $\frac{8-4m}{3}=0$. 故 $m=2, n=7$. 此时 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&3&-1&2\\0&1&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_2=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3$, 则由 $\boldsymbol{C}$ 可见 $\begin{cases}x_1+3x_3=2\\x_2+x_3=1\end{cases}$. 令 $x_3=k$, 则 $x_1=-3k+2$, $x_2=-k+1$.

因而 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-3k+2)\boldsymbol{\beta}_1+(-k+1)\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3$, 其中 $k$ 为任意实数.

四、(12 分)假设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$. 求矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$ 的解.

解: $\boldsymbol{XA}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\Leftrightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-1&0&3&1&0&0\\0&0&2&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\\times\frac12\\\ \end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-3&-1&0&0\\0&0&1&0&\frac12&0\\0&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\times1\ \ \times3\\\ \end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&\frac32&0\\0&0&1&0&\frac12&0\\0&1&0&0&\frac12&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&\frac32&0\\0&1&0&0&\frac12&1\\0&0&1&0&\frac12&0\end{pmatrix}.$$ 由此可得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&\frac32&0\\0&\frac12&1\\0&\frac12&0\end{pmatrix}$. 故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&0&0\\0&\frac32&2\end{pmatrix}$.

五、(12 分)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$.

1. 给出二次型的矩阵.

解: $f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$.

2. 用配方法求一个可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 将 $f$ 化成其标准型.

解: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_3+2ax_2x_3=(x_1+ax_3)^2-a^2x_3^2+(x_2+ax_3)^2-a^2x_3^2+x_3^2$
$=(x_1+ax_3)^2+(x_2+ax_3)^2+(1-2a^2)x_3^2$.

令 $\begin{cases}y_1=x_1+ax_3\\y_2=x_2+ax_3\\y_3=x_3\end{cases}$, 即 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&0&-a\\0&1&-a\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$, 且 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_3^2+(1-2a^2)y_3^2$.

3. 根据 $a$ 的不同的值, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 的正、负特征值的个数.

解: 因为 $\boldsymbol{A}$ 的正、负特征值的个数分别等于 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数的个数,
所以由上题可知

(1) 当 $a<-\dfrac{\sqrt2}{2}$ 或 $a>\dfrac{\sqrt2}{2}$ 时, $\boldsymbol{A}$ 有 2 个正特征值, 1 个负特征值.

(2) 当 $a=\pm\dfrac{\sqrt2}{2}$ 时, $\boldsymbol{A}$ 有 2 个正特征值, 0 个负特征值.

(3) 当$-\dfrac{\sqrt2}{2}<a<\dfrac{\sqrt2}{2}$ 时, $\boldsymbol{A}$ 有 3 个正特征值, 0 个负特征值.

六、(12 分)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&c\\4&0&a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似.

1. 分别求参数 $a, b$ 及 $c$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}|=-6-a$, $|\boldsymbol{B}|=b$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=b+2$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

故 $a = -3, b = -5$. 可见 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 因而秩$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 1$.

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -c \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times 4 \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ 由此可见 $c = 0$.

2. 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解: $(-5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\xi_1 = (-\dfrac{1}{2}, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\xi_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

七、(10 分)假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 矩阵.

1. 若$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$, 证明: 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明: 因为$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$, 所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 不可逆

(否则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1} = \boldsymbol{O}$, 从而得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, 矛盾!).

因此$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}| = 0$. 可见 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

2. 若关于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的秩有不等式 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) < n$, 证明: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有公共特征向量.

证明: 因为 $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) < n$, 所以齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解,

即存在非零向量$\xi$使得 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\xi = \boldsymbol{0}$. 于是有 $\boldsymbol{A}\xi = \boldsymbol{0} = 0\xi$, $\boldsymbol{B}\xi = \boldsymbol{0} = 0\xi$.

可见 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有公共特征向量$\xi$.

# 测试题一

## 一. 填空题及单选题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\\0&1\end{pmatrix}=$ ________.

2. $\begin{pmatrix}-3&1\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}=$ ________.

3. 当且仅当 $k=$ ________时, $\alpha_1=[2,1,0,2]^{\mathrm T}$, $\alpha_2=[1,0,-1,2]^{\mathrm T}$, $\alpha_3=[1,2,3,k]^{\mathrm T}$ 线性相关.

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶正交矩阵, 且$|\boldsymbol{A}|<0$, 则$|\boldsymbol{A}|=$ ________.

5. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 的矩阵, 秩$(\boldsymbol{A})=2$, $\eta_1=[1,1,-1]^{\mathrm T}$, $\eta_2=[3,1,1]^{\mathrm T}$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 则此方程组的通解是________________.

6. 若 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$的秩为________.

7. 当且仅当 $t$ 满足条件________时, 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+tx_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定的.

8. 与向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$等价的一个标准正交向量组是________.

9. 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$, 则(　　).

   (A) $\boldsymbol{M}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$, (B) $\boldsymbol{M}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}&\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\\\boldsymbol{C}^{\mathrm T}&\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\end{pmatrix}$, (C) $\boldsymbol{M}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}&\boldsymbol{C}^{\mathrm T}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm T}&\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\end{pmatrix}$, (D) $|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{AD}|-|\boldsymbol{BC}|$.

10. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 则向量组(　　)也线性无关.

    (A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3$,　　(B) $3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$,

    (C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$,　　(D) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

## 二. 计算题(每小题 10 分, 共 30 分)

1. $\begin{vmatrix}1-a&1&1&1\\1&1+a&1&1\\1&1&1-b&1\\1&1&1&1+b\end{vmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&3\\2&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\-4&7&3\end{pmatrix}$, 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{X}$.

3. 设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&c\\1&1&1\\b&-2&2\end{pmatrix}$的对应于$\lambda=2$ 的特征向量. 求 $a,b,c$.

## 三. 计算解答题(每小题 10 分, 共 30 分)

1. 已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-4\\1&5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}7&0\\0&-2\end{pmatrix}$.

   (1) 写出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

   (2) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^n$.

   (3) 设数列 $x_n, y_n$ 满足

   $$x_n=3x_{n-1}+4y_{n-1},\ y_n=5x_{n-1}+2y_{n-1},\quad x_0=1,\ y_0=2.$$

   令$\alpha_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$, 用矩阵乘法表示$\alpha_n$与$\alpha_{n-1}$的关系, 并递推出$\alpha_n$与$\alpha_0$的关系

   (4) 求出$\alpha_n$, 即求出两数列的通项.

2. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\\lambda\end{pmatrix}$.

(1) 求$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的秩及一个极大无关组.

(2) $\lambda$为何值时$\beta$能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示? 并求出这种表示.

3. 用正交变换化简实二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2$. 要求写出标准形及所用的正交变换.

**四. 证明题(每小题 5 分, 共 10 分)**

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵, $\xi$是 $n$ 维列向量, $\boldsymbol{A}\xi\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}^2\xi=\boldsymbol{0}$. 证明向量组$\xi$, $\boldsymbol{A}\xi$线性无关.

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶正定矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

## 参考答案

一. 1. $\begin{pmatrix}2&2\\2&-2\\0&3\end{pmatrix}$.　2. $\begin{pmatrix}-1&1\\-2&3\end{pmatrix}$.　3. $-2$.　4. $-1$.　5. $k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$(注: 本题答案不唯一).

6. 0.　7. $t>\dfrac{5}{4}$.　8. $\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$(注: 本题答案不唯一).　9. C.　10. D.

二. 1. $a^2b^2$.　2. $\begin{pmatrix}5&-7&-2\\-2&3&1\end{pmatrix}$.　3. $a=2, b=4, c=1$.

三. 1(1) 特征值$\lambda_1=7$, $\lambda_2=-2$, 对应的特征向量依次为 $k_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $k_2\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$, 其中 $k_1, k_2$ 为任意非零实数.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^n=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}5\cdot7^n+4\cdot(-2)^n & 4\cdot7^n-4\cdot(-2)^n\\5\cdot7^n-5\cdot(-2)^n & 4\cdot7^n+5\cdot(-2)^n\end{pmatrix}$.

(3) $\alpha_n=\boldsymbol{A}\alpha_{n-1}=\ldots=\boldsymbol{A}^n\alpha_0$.

(4) $\alpha_n=\boldsymbol{A}^n\alpha_0=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}13\cdot7^n-4\cdot(-2)^n\\13\cdot7^n+5\cdot(-2)^n\end{pmatrix}$, $x_n=\dfrac{1}{9}[13\cdot7^n-4\cdot(-2)^n]$, $y_n=\dfrac{1}{9}[13\cdot7^n+5\cdot(-2)^n]$.

2(1) 一个极大无关组为$\alpha_1, \alpha_2$, 秩为 2. (注: 极大无关组不唯一)

(2) $\lambda=2$, $\beta=(k-3)\alpha_1+(-k+2)\alpha_2+k\alpha_3$, 其中 $k$ 为任意非零实数.

3. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$, $f=y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$.

四. 1. 若 $k_1\xi+k_2\boldsymbol{A}\xi=\boldsymbol{0}$, 则由 $\boldsymbol{A}^2\xi=\boldsymbol{0}$ 得 $k_1\boldsymbol{A}\xi=k_1\boldsymbol{A}\xi+k_2\boldsymbol{A}^2\xi=\boldsymbol{A}(k_1\xi+k_2\boldsymbol{A}\xi)=\boldsymbol{0}$.
又因为 $\boldsymbol{A}\xi\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $k_1=0$, 从而 $k_2\boldsymbol{A}\xi=\boldsymbol{0}$, 再由 $\boldsymbol{A}\xi\neq\boldsymbol{0}$ 得 $k_2=0$.
可见$\xi$, $\boldsymbol{A}\xi$线性无关.

2. 首先容易验证 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵.
其次, 对于任意的 $n$ 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$, 由 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 正定可得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0.$$

故 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

# 测试题二

## 一. 填空或单选题(每小题 3 分, 共 33 分)

1. 设$\alpha = [3, 0, 1]^T$, $\beta = [\frac{1}{3}, 2, 1]^T$, 则$(\alpha\beta^T)^{10}$ =________________.

2. 设 3 阶方阵 $A$ 的行列式$|A| = 2$, 则 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$的行列式$|A^*|$ = ____________.

3. 设 $A = [A_1, A_2, A_3]$, $B = [A_2, 3A_1 - A_2, A_3]$, $A_1, A_2, A_3$ 是 3 维列向量, 且$|A| = 2$, 则$|A + B|$ = ______.

4. 齐次线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的一个基础解系是____________________.

5. 设 $A$ 是 3 阶方阵, $A$ 的特征多项式为$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, 则 $A^{-1}$ 的特征多项式为__________.

6. 若 $A$ 是 3 阶级方阵, 而 $A + E$, $A - E$, $2E - A$ 都不满秩, 则行列式$|A|$ = ______________.

7. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$ 的规范形是______________________.

8. 若$\alpha = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & -2 & b \end{pmatrix}$的对应于$\lambda = 2$ 的特征向量, 则$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ = ______.

9. 设 $A$ 是 3×4 矩阵, $b$ 是 3 维列向量, $b \neq 0$, $r(A, b) = r(A) = 3$, $\eta_1$, $\eta_2$ 都是 $Ax = b$ 的解, 且$\eta_1 \neq \eta_2$, 则 $Ax = b$ 的通解是(　　). (下面的 $k_1, k_2, k$ 都是任意实数)
   (A) $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$,　(B) $x = \eta_1 + k\eta_2$,　(C) $x = k(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2$,　(D) $x = k\eta_1 + \eta_2$.

10. 设有实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 则(　　).
    (A) $A$ 与 $B$ 相似,　(B) $B$ 与 $D$ 相合(合同),　(C) $A$ 与 $C$ 相抵(等价),　(D) $B$ 与 $D$ 正交相似.

11. 设3×2矩阵 $A = [A_1, A_2]$, $B = [B_1, B_2]$, 其中 $A_1, A_2, B_1, B_2$ 是3维列向量. 若 $A_1, A_2$ 线性无关, 则 $B_1, B_2$ 线性无关的充要条件是(　　).
    (A) $A_1, A_2$ 能由 $B_1, B_2$ 线性表示,　(B) $B_1, B_2$ 能由 $A_1, A_2$ 线性表示,
    (C) 矩阵 $A$ 与 $B$ 等价,　(D) 向量组 $A_1, A_2$ 与 $B_1, B_2$ 等价.

## 二. 计算题(每小题 9 分, 共 27 分)

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $XA = B - X$, 求 $X$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (1) 若 $A$ 与对角阵相似, 则 $a, b$ 应满足什么条件?
   (2) 若 $A$ 与对角阵正交相似, 则 $a, b$ 应满足什么条件?

## 三. 计算解答题(每小题 10 分, 共 30 分)

1. 设$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -5 \\ -19 \end{pmatrix}$,
   (1) $k$ 为何值时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关?
   (2) 令 $k = 2$, 证明$\xi \in L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 并求在$\xi$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

2. 用正交变换化简实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$. 要求写出正交变换及标准形.

3. 求 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & \cdots & a\\ a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 的秩，其中 $a$ 是参数，$n>1$，要讨论.

**四．证明题**(每小题 5 分，共 10 分)

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵，证明：对于任意的正实数$\lambda$, $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，$\xi$是 $n$ 维列向量，$\boldsymbol{A}^2\xi\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}^3\xi=\boldsymbol{0}$. 证明向量组$\xi$, $\boldsymbol{A}\xi$, $\boldsymbol{A}^2\xi$线性无关.

## 参考答案

一. 1. $2^9\begin{pmatrix}1 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 2 & 1\end{pmatrix}$.　　2. 4.　　3. –12.　　4. $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.　　5. $(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-\frac{1}{3})$.

6. –2.　　7. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　　8. $=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.　　9. C.　　10. B.　　11. C.

二. 1. 160.　　2. $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

3. (1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

$\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1\Leftrightarrow a+b=0$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 与对角阵正交相似 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵 $\Leftrightarrow$ $a=b=0$.

三. 1. $$\boldsymbol{A}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\xi]=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & k & -1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & -5\\ 2 & 1 & -5 & -19\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & k & -1 & 4\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -8\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & k-1 & 3k+4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4].$$

(1) $k\neq1$ 时，$\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3)=3$，此时$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

(2) $k=2$ 时，$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -8\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{C}.$$

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=3=\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，故$\xi\in L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，且$\xi=12\beta_1+7\beta_2+10\beta_3$，所求的坐标为[12, 7, 10].

2. 正交变换 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，标准形 $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

3. $$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\ a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{B},\ \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

(1) $a\neq1$ 且 $a\neq\dfrac{1}{1-n}$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$.

(2) $a=1$ 时，$1+(n-1)a=n\neq0$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$.

(3) $a=\dfrac{1}{1-n}$ 时，$1-a\neq0$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n-1$.

**四**. 1. 首先容易验证 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

其次, 对于任意的 $n$ 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$, 由$\lambda$为正实数可得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \lambda||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||^2 > 0.$$

故 $\boldsymbol{B} = \lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

2. 若 $k_1\xi + k_2\boldsymbol{A}\xi + k_3\boldsymbol{A}^2\xi = \boldsymbol{0}$, 则由 $\boldsymbol{A}^3\xi = \boldsymbol{0}$ 得

$$k_1\boldsymbol{A}^2\xi = k_1\boldsymbol{A}^2\xi + k_2\boldsymbol{A}^3\xi + k_3\boldsymbol{A}^4\xi = \boldsymbol{A}^2(k_1\xi + k_2\boldsymbol{A}\xi + k_3\boldsymbol{A}^2\xi) = \boldsymbol{0}.$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2\xi \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $k_1 = 0$, 从而 $k_2\boldsymbol{A}\xi + k_3\boldsymbol{A}^2\xi = \boldsymbol{0}$, 再由 $\boldsymbol{A}^3\xi \neq \boldsymbol{0}$ 得

$$k_2\boldsymbol{A}^2\xi = k_2\boldsymbol{A}^2\xi + k_3\boldsymbol{A}^3\xi = \boldsymbol{A}(k_1\xi + k_2\boldsymbol{A}\xi + k_3\boldsymbol{A}^2\xi) = \boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{A}^2\xi \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $k_2 = 0$, 从而 $k_3\boldsymbol{A}^2\xi = \boldsymbol{0}$, 但 $\boldsymbol{A}^2\xi \neq \boldsymbol{0}$, 故 $k_3 = 0$.

可见$\xi, \boldsymbol{A}\xi, \boldsymbol{A}^2\xi$线性无关.