2013 级高等数学(A、B)(上)期中试卷

一、 填空题（本题共7小题，第1小题8分，其余各题每小题4分，共32分）

1. $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}}-1}$的间断点分别是____ 和____，它们分别是_____间断点和_____间断点；

2. 已知$f(x)=\begin{cases}(1+3x)^{\frac{2}{\ln(1+x)}}, & x>0\\ a\cos x, & x\le 0\end{cases}$ 在$x=0$处连续，则$a=$_____；

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}-\sqrt{x}\right)=$______；

4. 设 $y=\arcsin \mathrm{e}^{2x}$，则微分$\mathrm{d}y=$________________________；

5. 当$x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{\sin x}$与$ax^{n}$是等价无穷小，则$n=$_____，$a=$_____；

6. 设$f(x)=x^{2}\ln(1+x)$，则$f^{(5)}(0)=$__________；

7. 设$y=y(x)$是由方程$y=-y\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{y}\sin x-7x+2$所确定的隐函数，则$y'(0)=$_________.

二、 计算下列各题（本题共4小题，每小题8分，满分32分）

1. 求函数 $y=\dfrac{x\sqrt{x^{2}+2}}{(x+1)^{2}}$ 的导数 y'.

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^{2}x+x^{3}\cos\frac{1}{x}}{(1+x\sin x)(1-\cos x)}$.

3. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^{2}+n\sin 1}+\dfrac{n+2}{n^{2}+n\sin 2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^{2}+n\sin n}\right)$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}, & x\ne 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性；若可导，求 $f'(0)$.

三、(本题满分8分) 曲线 L 的参数方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t+t\cos t \end{cases}$，

(1) 求曲线 L 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 所对应的点处的切线方程；(2) 计算 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

四、(本题满分7分) 写出函数 $f(x)=x\sin x$ 带有Lagrange余项的 4 阶Maclaurin公式.

五、(本题满分8分)(1)叙述Cauchy中值定理；(2)证明Cauchy中值定理.

六、(本题满分7分) 设

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}(a_i>0,i=1,\cdots,n),$$

证明数列 $\{x_n\}$收敛.

七、(本题满分6分)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且

$f(a)f(b)<0, f'(c)=0, a<c<b$, 证明：当 $f(c)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，

使得 $f''(\xi)>0$.