

## 习 题 课

### 一、填空题

1. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = -3$  处条件收敛, 则该级数的收敛半径  $R = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

2. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为 3, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$  的收敛区间为  $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

### 二、选择题

1. 下列反常积分中收敛的是 ( )

(A)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ ; (B)  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$ ; (C)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}$ ; (D)  $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ 。

2. 若级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$  在  $x = -1$  处收敛, 则此级数在  $x = 2$  处 ( )

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛; (C) 发散; (D) 收敛性不一定。

3. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ , 则 ( )

(A)  $\rho = +\infty$ ; (B)  $\rho < 1$ ; (C)  $1 < \rho < +\infty$ ; (D)  $\rho = 1$ 。

### 三、解答题

1. 判别反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx$  的敛散性。

2. 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$  的收敛域。

3. 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (2x+1)^n$  的收敛域。

4. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) x^n$  的收敛域。

5. 求幂级数在收敛域内的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

6. 求数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$  的和。