

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

09-10-2几代A

一. (30%) 填空题

1. 若 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $(AB)^2 = A^2B^2$, 则 a, b 满足条件_____;
2. 设 2 阶方阵 $A = (\alpha, \beta), B = (2\alpha - \beta, \alpha + 3\beta)$, 若 $B = AC$, 则矩阵 $C =$ _____;
3. 直线 $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$ 的一个方向向量为_____;
4. 点 $P(1, 1, 1)$ 到平面 $x - 2y + 2z = 3$ 的距离是_____;
5. 如果向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性相关, 则参数 a 满足条件_____;
6. 向量 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 在 R^2 的基 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 下的坐标是_____;
7. 如果 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的属于特征值 b 的特征向量, 则 $(a, b) =$ _____;
8. 假设 A 是 2×2 矩阵, 若可逆矩阵 $P = (\alpha, \beta)$ 满足 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Q = (\beta, \alpha)$,
则 $Q^{-1}AQ =$ _____;
9. 若 $n \times n$ 矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 且 A 的秩为 r , 则行列式 $|A + 2E| =$ _____;
10. 若 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是 $n \times n$ 正交矩阵, 则 $B = \alpha_1\alpha_1^T + \alpha_2\alpha_2^T + \dots + \alpha_r\alpha_r^T$
($1 \leq r \leq n$) 的特征多项式是_____。

二. (10%) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。已知 $XA = B + X$, 求 X 。

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

三. (14%) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 4x_4 = b \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+6)x_4 = 5 \end{cases}.$$

1. 当参数 a, b 满足什么条件时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解?
2. 有无穷多解时, 求方程组的通解。

四. (14%) 假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 。

1. 求 A 的 Jordan 标准形;
2. 若 A 与 B 相似, 问: 参数 a, b 应满足什么条件?
3. 求矩阵 $(E - A)^{100}$ 的秩。

五. (10%) 设 π_1 是抛物线 $\begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得曲面, π_2 是平面 $x - 2y + z = 4$ 。

- (1) 求 π_1 的方程;
- (2) 求 π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程;
- (3) 画出由 π_1 、 π_2 所围成的空间有界区域的草图。

六. (12%) 假设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ 。

1. 求一可逆线性变换 $x = Cy$ 将 f 化成其标准形;
2. 求 f 的矩阵 A , 问: 当参数 a 取什么值时, A 的特征值都大于零?
3. 如果二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 表示单叶双曲面, 问: 参数 a 应满足什么条件?

七. (10%) 证明题

1. 假设 A 是 $n \times n$ 正定矩阵, B 是 $s \times n$ 实矩阵, 证明: BAB^T 是正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = s$ 。
2. 假设 A, B 都是 $n \times n$ 矩阵, 若存在不为零的数 x, y 使得 $AB = xA + yI$, 证明: $AB = BA$ 。