$L_x = 4x - 8 + 4\lambda x = 0$，$L_y = 2y - 2 + 2\lambda y = 0$，$L_\lambda = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$，得可能极值点

$M_2\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，$M_3\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，（**4 分**）比较 $f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=4$，$f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=16$，从而得知

$f_{\min}=4$，$f_{\max}=16$（**2 分**）　　**或** $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\sin\theta\right)=10-4\sqrt{2}\cos\theta-2\sin\theta$

$=10-2(2\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta)=10-6\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\theta+\frac{1}{3}\sin\theta\right)=10-6\sin(\theta+\alpha)$，（**3 分**）

其中 $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$，于是 $f_{\max}=16$，$f_{\min}=4$（**2 分**）

五（16）（本题满分 8 分）解 表面由三张曲面组成：（1）平面 S_1，面积 $A_1=\pi$，（**2 分**）

（2）柱面 S_2，面积 $A_2=\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=\int_\pi^{2\pi}\rho\sqrt{\rho^2+(\rho'(t))^2}\,\mathrm{d}t=-4\int_\pi^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=8$

（其中 $C:\begin{cases}x^2+y^2+2y=0\\ z=0\end{cases}$，或 $\rho=-2\sin t, \pi\le t\le 2\pi$）（**3 分**）

（3）锥面 S_3，面积 $A_3=\sqrt{2}\pi$（**2 分**），封闭曲面的表面积 $A=\left(1+\sqrt{2}\right)\pi+8$．（**1 分**）

六（17）（本题满分 7 分）解 设切点坐标 $M(x_0,y_0,z_0)$，椭球面在点 M 处法向量

$\mathbf{n}=\{x_0,2y_0,3z_0\}$，已知直线过点 $P\left(6,3,\frac{1}{2}\right)$，其方向向量 $\mathbf{l}=\{2,1,-1\}$，且 $\mathbf{n}\perp\mathbf{l}$，又

$\mathbf{n}\perp\overrightarrow{PM}$，即 $\begin{cases}x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21\\ 2x_0+2y_0-3z_0=0\\ 4x_0+4y_0+z_0=14\end{cases}$（**4 分**）解得 $z_0=2$，$x_0=1,3$，$y_0=2,0$，切点的坐

或，$6x_0+6y_0+\frac{3}{2}z_0=21$

标为 $M_1(1,2,2)$ 或 $M_2(3,0,2)$，这两点处的法向量分别为 $\mathbf{n}_1=\{1,4,6\}$，$\mathbf{n}_2=\{3,0,6\}$，

于是所求切平面为 $x+4y+6z=21$，$x+2z=7$（**3 分**）

七（18）（本题满分 6 分）证 $\int_C x\,\mathrm{d}s=\int_0^\pi x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\le\sqrt{2}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$（**3 分**）

2