# 2009 级高等数学（A、B）（上）期中试卷

## 一. 填空题（每小题 4 分，本题满分 24 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0\\ a+bx, & x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$______，$b=$________；

2. 已知 $y=\arctan \mathrm{e}^x-x+\dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=$_____________；

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x\sin y+y\mathrm{e}^x+\dfrac{\pi}{2}=0$ 所确定的隐函数，则 $y'(0)=$______；

4. 函数 $y=\mathrm{e}^{2x}(x^2-2)$ 的单调减少区间是_______；

5. $f(x)=\arcsin x$ 带 Peano 余项的 3 阶 Maclaurin 公式是__________________；

6. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sin x-2\sin 3x+\sin 5x$ 是 $x$ 的___（用数字作答）阶无穷小量.

## 二. 单项选择题（每小题 4 分，本题满分 12 分）

7. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则必有 [ ]

（A）$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$ （B）$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

（C）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$ （D）$\lim\limits_{x\to a}kf(x)=\infty$（$k$ 为非零常数）

8. 设 $f$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，则有 [ ]

（A）$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ （B）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C）$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ （D）$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

9. 下列命题中正确的命题是 [ ]

(A) 若 $f$ 在点 $x_0$ 处可导，则 $|f|$ 在点 $x_0$ 处也可导。

(B) 若 $f$ 在点 $x_0$ 处可导，则 $f$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内连续。

(C) 设 $f\in C[a,b]$，$f$ 在 $(a,b)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=k$（$k$ 为有限数），则 $f$ 在点 $a$ 处存在右导数 $f'_+(a)$，且 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=k$。

(D) 设函数 $y=f\circ g$ 是由 $y=f(u),u=g(x)$ 复合而成，如果 $g$ 在点 $x_0$ 处间断，$f$ 在点 $u_0=g(x_0)$ 处间断，则复合函数 $y=f\circ g$ 在点 $x_0$ 处也间断。

三. 计算题（每小题 9 分，本题满分 36 分）

10. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sin^2 n\right)^n$.

11. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{\sin^4\left(\sqrt{2}x\right)}$.

12. 设 $f$ 二阶可导，$f'(0)=3, f''(0)=1$，且 $\begin{cases} x=f(t)-\pi \\ y=f\left(e^{3t}-1\right) \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$.

13. 设 $f(x)=x^2\cos^2 x$，求 $f^{(n)}(x)\quad(n\geq 3)$.

**四(14).（本题满分 8 分）** 求函数 $F(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2-3e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点，并指出间断点的类型（需说明理由）.

**五(15).（本题满分 8 分）** 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$2\sin x+\tan x>3x$.

**六(16).（本题满分 6 分）** 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,b,c$ 为常数)，且当 $|x|\leq 1$ 时，$|f(x)|\leq 1$，证明：当 $|x|\leq 1$ 时，$|f'(x)|\leq 4$.

**七(17).（本题满分 6 分）** 设 $f\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)=M>0$，证明：对于大于 $1$ 的任意正整数 $n$，存在互异的两点 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{n}{M}$.