04-05-2高数（电）期末试卷

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $f(x)=\left[\dfrac{1}{1+|x|}\right]$ 的间断点______是第_____类间断点.

2. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $f(x)=\dfrac{xF(x)}{1+x^2}$，则 $f(x)=$____________.

3. $\int_{-1}^{1}x\left(1+x^{2005}\right)\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=$______.

4. 设 $f(x)=\int_0^x\left(\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$，则 $f''(0)=$_____.

5. 设函数 $f(x)=\int_x^{2x}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}\ (x>0)$，则当 $x=$_____时，取得最大值.

二. 单项选择题(每小题 4 分，共 16 分)

1. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 都是无穷小 $(\beta(x)\neq 0)$，则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是 [ ]

(A) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$ (B) $\alpha^2(x)+\beta^2(x)\sin\dfrac{1}{x}$ (C) $\ln(1+\alpha(x)\cdot\beta(x))$ (D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

2. 曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线共有 [ ]

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

3. 微分方程 $y''-y'-2y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解形式为 $y^*=$ [ ]

(A) $(ax+b)x^2\mathrm{e}^{2x}$ (B) $ax\mathrm{e}^{2x}$ (C) $(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$ (D) $(ax+b)x\mathrm{e}^{2x}$

4. 下列结论正确的是 [ ]

(A) 若 $[c,d]\subseteq[a,b]$，则必有 $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(B) 若 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

(C) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，则对任意常数 a 都有 $\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

（D）若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内必有原函数.

三. （每小题 7 分, 共 35 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\ln(\cos t)+t^2\right)\mathrm{d}t}{x^3}$

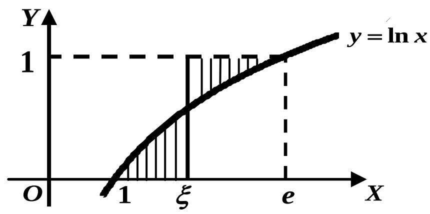
2. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-y\mathrm{e}^{xy}=2$ 所确定的隐函数, 求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

3. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

4. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x$

5. 求初值问题 $\begin{cases} y''+y=x+\sin x \\ y(0)=1,\ y'(0)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 的解.

四. (8 分) 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上求一点 ξ, 使得图中所示阴影部分绕 x 轴旋转所得旋转体的体积最小.



五. (7 分) 设 $0<a<b$, 求证 $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$

六. (7 分) 设当 $x>-1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$ 且 $f(0)=1$, 试证: 当 $x\ge 0$ 时, 有 $\mathrm{e}^{-x}\le f(x)\le 1$ 成立.

七. (7 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续, 且 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\tan x\mathrm{d}x=0$, 证明在区间 $(-1,1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1,ξ_2, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.