06高A期末试卷答案

一。填空题(本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分)

1. $x_0=\underline{-3}$，$y_0=\underline{-1}$，$z_0=\underline{3}$；**2.** $\underline{\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\mathrm{d}x}$；**3.** $\underline{0}$；

4. $\underline{0}$；**5.** $\underline{(-2,4)}$；**6.** $\underline{\dfrac{(2n)!}{n!}}$；**7.** $\underline{\dfrac{1+\pi}{2}}$；**8.** $\underline{2\pi\mathrm{i}}$；**9.** $\underline{-\dfrac{1}{2}}$；**10.** $\underline{\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{1}{4}y^2\le 1\right\}}$

二.(本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分)

11．解 记 $a_n=\dfrac{3^n}{4^n-2^n}$，$b_n=\dfrac{3^n}{4^n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{4^n-2^n}$ 收敛.

$$P'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}-1,\quad P(2x)=-\ln(1-2x)-2x,\quad S(x)=\frac{x}{1-2x}+\frac{1}{2}\ln(1-2x)$$

12．解 记 $a_n=\dfrac{2^n n}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，$R=\dfrac{1}{2}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，在收敛区间的两端点处，级数都发散，故收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n+1}x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(2x)^{n+1}=\frac{2x^2}{1-2x}-\frac{1}{2}P(2x)$$

三.(本题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分)

13．解 $a_0=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1,\ a_n=2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n-1)$，

$$b_n=2\int_0^1 x\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi},n=1,2$$

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x=\begin{cases}f(x),-1<x<1\\1,\qquad x=\pm1\end{cases}$$

14．解

$$f(z)=\frac{1}{z^2-4z+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-1}\right)=-\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$$

四.（15）解 $\dfrac{\partial(x^2-y^2+3)}{\partial x}=\dfrac{\partial(\cos x+2xy+1)}{\partial y}=2x$，所验证的表达式确是某一函数的全微分. 采用凑微分法

$$(\cos x+2xy+1)\mathrm{d}x+(x^2-y^2+3)\mathrm{d}y=(\cos x+1)\mathrm{d}x+(-y^2+3)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}(\sin x+x+x^2y-\frac{1}{3}y^3+3y)=\mathrm{d}u,$$

故原函数为 $u=\sin x+x+x^2y-\dfrac{1}{3}y^3+3y+C$.

五.（16）解 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4},\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4},\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right]\right)$

$$=\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}(\mathrm{i}-1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}\right)=-\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

六.（17） 解 $\displaystyle\Phi=\iint_S\mathbf{V}\cdot\mathbf{dS}=\iint_S(y^3-z^3)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z^3-x^3)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+2z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$$=6\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}v=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^4\mathrm{d}\rho=9\pi$$

七.（18）证所证不等式等价于不等式： $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1(1-f(x))\mathrm{d}x\ge\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，而

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1(1-f(x))\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1(1-f(y))\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{f(y)}{1-f(y)}\mathrm{d}y\int_0^1(1-f(x))\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{f(x)-f(x)f(y)}{1-f(x)}+\frac{f(y)-f(x)f(y)}{1-f(y)}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\frac{(f(x)+f(y))(1+f(x)f(y))-4f(x)f(y)}{(1-f(x))(1-f(y))}\mathrm{d}\sigma$$

$$\ge\frac{1}{2}\iint_D\frac{(f(x)+f(y))(1+f(x)f(y))-(f(x)+f(y))^2}{(1-f(x))(1-f(y))}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\frac{(f(x)+f(y))(1-f(x))(1-f(y))}{(1-f(x))(1-f(y))}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D(f(x)+f(y))\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

其中 $D=[0,1]\times[0,1]$