

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

05-06-2几代B

一. (24%)填空题

1. 直角坐标系中向量 $\alpha = (1, 1, 2)$ 与 $\beta = (1, 0, 1)$ 的向量积为_____;
2. 过点 $P(1, 0, 1)$ 且与直线 $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 垂直的平面的方程为_____;
3. 设 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $P^{10}AQ^{10} =$ _____;
4. 若 3×3 矩阵 A 的秩为 2, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性方程组 $Ax = b$ 的解向量, 并且 $\alpha_1 = (2, 3, 4)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (2, 4, 6)^T$, 则线性方程组 $Ax = b$ 的通解是_____;
5. 设 α 是 $n(n > 1)$ 维列向量, 则 n 阶方阵 $A = \alpha\alpha^T$ 的行列式 $|A|$ 的值为_____;
6. 设 A 是 3×3 矩阵, 若矩阵 $I + A, 2I - A, 2I - 3A$ 均不可逆, 则行列式 $|A| =$ _____;
7. 若 3 是 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值, $A = 2, A^*$ 是 A 的伴随矩阵, 则矩阵 A^* 的一特征值为_____;
8. 若 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2kxz = 1$ 表示一单叶双曲面, 则 k 满足条件_____;

二 (12%) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}, B^{-1} 以及矩阵 X , 使

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}. \text{ 式中的 } O \text{ 均指相应的零矩阵.}$$

三 (10%) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 问: 参数 l, m 满足什么条件时, 向量组 $\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 也线性无关?

四 (14%) 已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为:

$$\pi_1: x + y + 2z = 1,$$

$$\pi_2: x + \lambda y + z = 2,$$

$$\pi_3: \lambda x + y + z = 1 + \lambda$$

1. 问: 当 λ 取何值时这三个平面交于一点? 交于一直线? 没有公共交点?
2. 当它们交于一直线时, 求直线的方程.

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

五 (12%) 已知 3×3 矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ 有一个二重特征值。

1. 试求参数 a 的值, 并讨论矩阵 A 是否相似于对角阵。
2. 如果 A 相似于对角阵, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 是对角阵。

六 (10%) 假设 A, B 是实对称矩阵。证明: 分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 是正定矩阵的充分必要条件是 A, B 都是正定矩阵。

七 (8%) 由与平面 $z = -1$ 及点 $M(0, 0, 1)$ 等距离运动的动点 $P(x, y, z)$ 所生成的曲面记为 π_1 , 将 yOz 平面上曲线 $\begin{cases} y^2 + z = 5 \\ x = 0 \end{cases}$ 以 z 轴为旋转轴所生成的旋转曲面记为 π_2 。

则:

1. π_1 的方程是: _____; π_2 的方程是: _____;
2. π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程是: _____;
3. 在坐标系中画出由这两个曲面所围成的有限立体的简图。

八 (10%) 证明题:

1. 若 2×2 实矩阵 A 的行列式 $|A| < 0$, 证明: A 必定相似于对角阵。
2. 假设 $n \times n$ 实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, α 是 A 的属于特征值 λ_1 单位特征向量, 矩阵 $B = A - \lambda_1 \alpha \alpha^T$. 证明: B 的特征值为 $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.