

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

07-08-3 高数 B 期中试卷参考答案

一. 单项选择题(本题共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

1. [A] 2. [C] 3. [B] 4. [B]

二. 填空题(本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

5. $\frac{\pi}{4}$; 6. $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 4$; 7. $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$;

8. $\frac{3}{2}$; 9. $[1, 3]$.

三. 计算下列各题(本题共 4 小题, 每小题 9 分, 满分 36 分)

10. 解 $s_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3)$, 平面方程为 $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$,

即 $x - y + z = 0$

11. 解 设所求直线与直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ 的交点为 (x_0, y_0, z_0) , $x_0 = 1 + 3t_0$,

$y_0 = -1 + 2t_0, z_0 = 3 - 5t_0$, 于是

$6(x_0 + 4) - 2(y_0 - 6) - 3(z_0 + 2) = 6(5 + 3t_0) - 2(-7 + 2t_0) - 3(5 - 5t_0) = 29(t_0 + 1) = 0$,

得 $t_0 = -1$, 交点为 $(-2, -3, 8)$, 所求直线方程为 $\frac{x+4}{2} = \frac{y-6}{-9} = \frac{z+2}{10}$

12

解 $f(x) = \ln(2x^2 + x - 3) = \ln(x-1)(2x+3) = \ln 18 + \ln\left(1 + \frac{x-3}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{9}(x-3)\right)$

$= \ln 18 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{2^n} + \left(\frac{2}{9}\right)^n \right) (x-3)^n, \quad 1 < x \leq 5$

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

13. 解 令 $y = x^2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n y^n = y \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} y^n \right)' = y \left(\frac{y}{1+y} \right)' = \frac{y}{(1+y)^2} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2},$$

$-1 < x < 1$

四 (14). (本题满分 9 分)

解 设 $M_0(x_0, y_0, 1)$ 是准线上一点, 则 $\frac{x-x_0}{0} = y-y_0 = z-1$, 则 $x_0 = x$,

$y_0 = y - z + 1$, 代入准线方程即得所求的柱面方程 $4x^2 - (y - z + 1)^2 = 1$

五 (15). (本题满分 9 分)

解 $\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx \leq e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{24}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由比较判别法得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$ 收敛

六 (16). (本题满分 10 分)

解 由题设知 $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - 2x}{4} \sin nx dx = \frac{1 + (-1)^n}{2n}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2n} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \sin 2nx, \quad x \in (0, \pi),$$

取 $x = \frac{\pi}{4}$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n}{2} \pi = \frac{\pi}{4}$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$