2002级（非电类）高等数学（下）期中试卷

一、 单项选择题（$3'\times4=12'$）

在以下级数或反常积分后的括号内填入适当的字母，各字母的含义是：

（A）绝对收敛；（B）条件收敛；（C）发散；（D）可能收敛，可能发散。

1．$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}$（ C ）；　　2．设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$（ D ）；

3．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}\sin\frac{n\pi}{3}$（ A ）；　　4．设$P$为任意实数，则$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$（ C ）。

二、单项选择题（$4'\times4=16'$）

1．设平面π：$2x+7y+4z-1=0$及直线L_1：$x=3t,\ y=t+1,\ z=2t-3$，

L_2：$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-3}$，则（ C ）

（A）$\pi\parallel L_1$；　（B）$\pi\perp L_1$；　（C）$\pi\parallel L_2$；　（D）$\pi\perp L_2$。

2．曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$z=0$绕$x$轴旋转而成的曲面方程为（ A ）

（A）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$；（B）$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；（C）$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$；（D）$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$。

3．设$\vec{a}=\{-1,\ 2,\ -1\}$，$\vec{b}=\{1,\ -1,\ 2\}$，$\vec{c}=\{3,\ -4,\ 5\}$，则（ D ）

（A）$\vec{a}\perp\vec{b}$；　（B）$\vec{b}\perp\vec{c}$；　（C）$\vec{c}\perp\vec{a}$；　（D）$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面。

4．两非零向量$\vec{a}$及$\vec{b}$的方向角分别为α,β,γ 及α',β',γ'，则$\cos(\vec{a},\vec{b})=$（ B ）

（A）$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha'\cos\beta'\cos\gamma'$；　（B）$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$；

（C）$\cos(\alpha+\alpha')+\cos(\beta+\beta')+\cos(\gamma+\gamma')$；（D）$\cos(\alpha-\alpha')+\cos(\beta-\beta')+\cos(\gamma-\gamma')$。

三、填空题（$4'\times5=20'$）

1． $f(x)=3^x$ 在 $x_0=-1$ 处的泰勒级数及收敛域为

$$f(x)=3^x=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n(x+1)^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

2．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}$ 的和为 $\underline{1-\sin 1.}$

3．级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和函数及收敛域为 $\underline{S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad x\in(-1,1).}$

4．曲面 $z=x^2+2y^2$ 的名称为<u>椭圆抛物面</u>，它与曲面 $z=6-2x^2-y^2$ 的交线在 xoy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ z=0.\end{cases}$

四、计算题（$6'\times 3=18'$）

1．求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 L： $x=1,\ y=3t+2,\ z=3t+4$ 的距离 d。

解法 1：直线 L 的方向向量 $\vec{a}=\{0,3,3\}$， $A(1,2,4)\in L$， $\overrightarrow{PA}=\{-2,3,2\}$，

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PA}}\times\vec{\boldsymbol{a}}=\{3,6,-6\},\quad \left|\overrightarrow{PA}\times\vec{a}\right|=9,\quad d=\frac{\left|\overrightarrow{PA}\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{9}{3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}。$$

解法 2：过点 P 垂直于直线 L 的平面方程为 $0\cdot(x-3)+0\cdot(y+1)+3\cdot(z-2)=0$，

即 $y+z-1=0$，把直线 L 的方程代入平面方程得： $3t+2+3t+4-1=0$， $t=-\frac{5}{6}$。

$\therefore$ 平面与直线 L 的交点为 $B(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$， $\overrightarrow{PB}=\{-2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\}$， $d=\left|\overrightarrow{PB}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$。

2．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 的和函数及收敛域。

解： $u_n=\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}\right)=\frac{1}{x+1},$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 的和函数为 $S(x)=\frac{1}{x+1}$，收敛域为除负整数外的一切实数。

3．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ 的收敛域。

解：$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$，$\therefore R=\frac{1}{\rho}=1$。

或 $1=\sqrt[n]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{1+1+\cdots+1}=\sqrt[n]{n}$，而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，

故 $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$，$\therefore R=1$。

当 $|x|=1$ 时，$\because a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，$\therefore$ 级数在 $x=\pm1$ 处发散，故收敛域为 $(-1,1)$。

五、计算题（$9'\times3=27'$）

1. 已知直线 L 过点 $P(3,1,-2)$，且与两直线 L_1：$x-6=y+4=z+2$ 及 L_2：$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 都相交，求 L 的方程。

解法 1：$M_1(6,-4,-2)\in L_1$，$\overrightarrow{PM_1}=\{3,-5,0\}$，$L_1$ 的方向向量 $\vec{a_1}=\{1,1,1\}$，

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PM}_1}\times\vec{\boldsymbol{a}}_1=\{3,-5,0\}\times\{1,1,1\}=\{-5,-3,8\},$$

$\therefore$ 由点 P 与 L_1 所确定的平面为 π_1：$-5(x-3)-3(y-1)+8(z+2)=0$，即 $5x+3y-8z-34=0$。

L_2的参数方程为 $x=5t+4,\ y=2t-3,\ z=t$，代入平面π_1，得$t=1$，

L_2 与π_1的交点为$M(9,-1,1)$，$\overrightarrow{PM}=\{6,-2,3\}$，$\therefore L$的方程为$\frac{x-3}{6}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3}$。

解法 2： $M_2(4,-3,0)\in L_2$， $\overrightarrow{PM_2}=\{1,-4,2\}$， $\boldsymbol{L_2}$的方向向量$\overrightarrow{\boldsymbol{a}_2}=\{5,2,1\}$，

$\overrightarrow{PM_2}\times\overrightarrow{a_2}=\{-8,9,\ 22\}$，

由点 P 与 L_2 所确定的平面为 π_2： $-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0$，即

$8x-9y-22z-59=0$。

故交线L的方程为$\begin{cases}5x+3y-8z-34=0\\8x-9y-22z-59=0\end{cases}$。

解法 3：设L的方程为$\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z+2}{n}$，则$L$的方向向量$\vec{a}=\{l,m,n\}$，

$$\because [\vec{a}\ \ \overrightarrow{a_1}\ \ \overrightarrow{PM_1}]=\begin{vmatrix}l & m & n\\1 & 1 & 1\\3 & -5 & 0\end{vmatrix}=5l+3m-8n=0,$$

$$[\vec{a}\ \ \overrightarrow{a_2}\ \ \overrightarrow{PM_2}]=\begin{vmatrix}l & m & n\\5 & 2 & 1\\1 & -4 & 2\end{vmatrix}=8l-9m-22n=0,\quad \therefore l=2n,\quad m=-\frac{2}{3}n$$

$$\therefore L\text{的方程为}\frac{x-3}{2n}=\frac{y-1}{-\frac{2}{3}n}=\frac{z+2}{n}，\text{即}\frac{x-3}{6}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3}。$$

2．将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\0, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$ 展开成正弦级数，并写出该级数的和函数$S(x)$的表达式。

解：先将 $f(x)$ 作奇式延拓，再作周期延拓，则$a_n=0\,(n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}0\cdot\sin nxdx]=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n\pi}(1-\cos\frac{n\pi}{2}).$$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-\cos\frac{n\pi}{2})\sin nx,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$。$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi] \\ 0, & x=0, \\ \frac{1}{2}, & x=\frac{\pi}{2}. \end{cases}$。

3．常数 P 取什么范围时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ 是（1）发散；（2）条件收敛；（3）绝对收敛。

分析：设 $u_n=(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$，$|u_n|=\frac{\ln n}{n^p}$。当 $p\le 0$ 时，$\because \lim_{n\to\infty}|u_n|=+\infty$，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

当 $p>0$ 时，$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0$，但不能确定 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否收敛。为此用比较判别法：$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{n^r}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{p-r}}$，显然，当 $1<r<p$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛。综上可知，要分 $p\le 0$，$0<p\le 1$，$p>1$ 三种情况进行讨论。

解：设 $u_n=(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$，$|u_n|=\frac{\ln n}{n^p}$，

（1）当 $p\le 0$ 时，$\because \lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}=+\infty$，$\therefore \lim_{n\to\infty}u_n\ne 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ 发散。

（2）当 $p>1$ 时，取 $r>0$, 且满足 $1<r<p$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^r}}=\lim_{n\to\infty}n^r\frac{\ln n}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{p-r}}=0$$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$ 收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ 绝对收敛。

（3）当 $0<p\le 1$ 时，

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_n|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\ln n}{n^p}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{1-p}\ln n=+\infty$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散。

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^p}$， $f'(x)=\dfrac{1-p\ln x}{x^{p+1}}$，当 x 充分大时， $f'(x)<0$，

$\therefore f(x)\downarrow$，从而 $\{f(n)\}=\{\dfrac{\ln n}{n^p}\}\downarrow$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^p}=0$，

故由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n^p}$ 条件收敛。

综上讨论可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n^p}$ 当 $p\le 0$ 时发散；当 $0<p\le 1$ 时 条件收敛；当 $p>1$ 时绝对收敛。

六．证明题 (7′)

设在区间 $[0,a]$ 上 $u_{\circ}(x)$ 连续，且 $u_n(x)=\int_0^x u_{n-1}(t)dt,\ x\in[0,a],\ n=1,2,\cdots$，

证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,a]$ 上绝对收敛。

证明：$\because\ u_{\circ}(x)\in C[0,a]$，$\therefore \exists M>0$， $\forall\, x\in[0,a]$，有 $|u_{\circ}(x)|\le M$，

$|u_1(x)|=\left|\int_0^x u_{\circ}(t)dt\right|\le\int_0^x|u_{\circ}(t)|dt\le M\cdot\dfrac{x}{1!}$；

$|u_2(x)|=\left|\int_0^x u_1(t)dt\right|\le\int_0^x|u_1(t)|dt\le\int_0^x M\cdot\dfrac{t}{1!}dt\le M\cdot\dfrac{x^2}{2!}$；

$|u_3(x)|=\left|\int_0^x u_2(t)dt\right|\le\int_0^x|u_2(t)|dt\le\int_0^x M\cdot\dfrac{t^2}{2!}dt\le M\cdot\dfrac{x^3}{3!}$；

……

$\therefore |u_n(x)|\le M\cdot\dfrac{x^n}{n!}$。从而 $\forall\, x\in[0,a]$，有 $|u_n(x)|\le M\cdot\dfrac{a^n}{n!}$，

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}=0<1$，$\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$收敛，从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{Ma^n}{n!}$收敛，

由比较判别法知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n(x)|$收敛，故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$在$[0,a]$上绝对收敛。