09高A期中试卷

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．由方程 $xyz+\sin(\pi z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$___；

2．设 $\ln z=1+\dfrac{\pi}{3}\mathrm{i}$，则 $\operatorname{Re} z=$_______，$\operatorname{Im} z=$__________________；

3．曲线 $x=\sin t, y=1-\cos t, z=t$ 在点 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的法平面方程为_____________；

4．设曲线 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 与平面 $y=x$ 的交线，则曲线积分

$\oint_C\left(\sqrt{2y^2+z^2}+z\right)\mathrm{d}s$ 的值等于________；

5．设曲面 $S:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\iint\limits_S(x+|y|)\mathrm{d}S=$_______.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

(A)　$(1,-1,2)$　　(B)　$(-1,1,2)$　　(C)　$(1,1,2)$　　(D)　$(-1,-1,2)$

7．设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于　　　　　　[　　]

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arctan y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arctan y}f(x,y)\mathrm{d}x$

8. 设 L 是摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的弧段，则 L 的形心的横坐标为　[　　]

(A) 1　　(B) $\dfrac{4}{3}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

9．函数 $u=x^2y-y^3z$ 在点 $(1,-1,3)$ 处的方向导数的最大值是　　　　[　　]

(A) $\sqrt{15}$　　(B)　$\sqrt{69}$　　(C)　$\sqrt{11}$　　(D)　3

三. 计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10．设 $z=f(2x-y,xy^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}(3x-2y+1)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2x+2y-1\right\}$.

12. 设调和函数 $u(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}\cos(x+y)+y$，求 $u(x,y)$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$，并求解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 表达式(**自变量单独用 z 表示**)，且满足 $f(0)=1+\mathrm{i}$.

13. 求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t^5}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

14. 计算 $\iint\limits_{S}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的立体的表面，取外侧.

四（15）（本题满分 8 分）求密度为1，半径为 R 的上半球面对球心处单位质量质点的引力.

五（16）（本题满分 10 分）平面 $x+y+z=1$ 被抛物面 $z=x^2+y^2$ 截得一椭圆，

（1）求该椭圆到坐标原点的最长距离和最短距离；（2）求该椭圆所围平面区域的面积.

六（17）（本题满分 6 分）证明不等式：$\dfrac{\pi}{2}\le\oint\limits_{L}-y\sin x^2\mathrm{d}x+x\cos y^2\mathrm{d}y\le\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$，

其中曲线 $L:x^2+y^2+x+y=0$，取逆时针方向.

止于至善