06高A下期末试卷

一。填空题(本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分)

1．已知曲面 $z = xy$ 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，则

$x_0=$_____，$y_0=$_____，$z_0=$_____；

2. 交换积分次序 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y =$________________________；

3. 设 $\mathbf{r}=\{x,y,z\}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}=$______；

4. 设正向闭曲线 C：$|x|+|y|=1$，则曲线积分 $\oint_C x^2y\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y=$______；

5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为3，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_______；

6. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，则 $f^{(2n)}(0)=$_________；

7. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ 1+x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，其以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数记为 $S(x)$，则

$S(3\pi)=$___________；

8. 设正向圆周 $C:|z|=1$，则 $\oint_C\dfrac{\cos z}{z}\mathrm{d}z=$________；

9. 函数 $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点 $z=0$ 的类型是________（如为极点，应指明是几级极点），$\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]=$___________；

10. 使二重积分 $\iint_D\left(4-4x^2-y^2\right)\mathrm{d}\sigma$ 的值达到最大的平面闭区域 D 为___________.

二.（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

11. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{4^n-2^n}$ 的敛散性.

12. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域与和函数.

三．（本题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分）

13． 将函数 $f(x)=x+|x|$ 在 $(-1,1]$ 上展开为以 2 为周期的 Fourier 级数.

14． 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$ 在圆环域 $1<|z|<3$ 内展开为 Laurent 级数.

四．（15）（本题满分 9 分）验证表达式 $(\cos x+2xy+1)\mathrm{d}x+(x^2-y^2+3)\mathrm{d}y$ 为某一函数的全微分，并求其原函数.

五．（16）（本题满分 9 分）利用留数计算反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

六．（17）（本题满分 10 分） 已知流体的流速函数

$$\mathbf{v}(x,y,z)=\left\{y^3-z^3, z^3-x^3, 2z^3\right\},$$

求该流体流过由上半球面 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体表面的外侧的流量.

七．（18）（本题满分 8 分） 设函数 $f\in C([0,1])$，且 $0\le f(x)<1$，利用二重积分证明不等式：

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\ge\frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$