09-10-2几代B

一. （30%）填空题

1. 若 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $(AB)^2=A^2B^2$，则 a,b 满足条件________________；

2. 设 2 阶方阵 $A=(\alpha,\beta)$，$B=(2\alpha-\beta,\alpha+3\beta)$，若 $B=AC$，则矩阵 $C=$__________；

3. 直线 $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ 的一个方向向量为_____________________________；

4. 点 $P(1,1,1)$ 到平面 $x-2y+2z=3$ 的距离是_____________________________；

5. 如果向量组 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性相关，则参数 a 满足条件______________；

6. 向量 $\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 在 R^2 的基 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 下的坐标是________________________；

7. 如果 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的属于特征值 b 的特征向量，则 $(a,b)=$________________；

8. 假设 A 是 2×2 矩阵，若可逆矩阵 $P=(\alpha,\beta)$ 满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$Q=(\beta,\alpha)$，

   则 $Q^{-1}AQ=$____；

9. 假设 A 是 2×2 矩阵，若 $A+E, A-E$ 都不可逆，则行列式 $|A+2E|=$______________；

10. 若 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 $n\times n$ 正交矩阵，则 $B=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_r\alpha_r^T$ $(1\le r\le n)$ 的特征多项式是____。

二. （10%）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。已知 $XA=B+X$，求 X。

三．（14%）设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 4x_4 = b \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+6)x_4 = 5 \end{cases}$。

1．当参数 a,b 满足什么条件时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？

2．有无穷多解时，求方程组的通解。

四．14%）假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$，且 A 与 B 相似。

1. 求参数 a,b 的值；
2. 求一可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$；
3. 证明存在矩阵 C，使得 $A = C^2$。

五．（10%）设 π_1 是抛物线 $\begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得曲面，π_2 是平面 $x - 2y + z = 4$。

求 π_1 的方程；求 π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程；并画出由 π_1、π_2 所围成的空间有界区域的草图。

六．（12%）假设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$。

1. 求一可逆线性变换 $x = Cy$ 将 f 化成其标准形；
2. 求 f 的矩阵 A，问：当参数 a 取什么值时，A 的特征值都大于零？
3. 如果二次曲面 $f(x,y,z) = 1$ 表示单叶双曲面，问：参数 a 应满足什么条件？

七．（10%）证明题

1. 假设 A 是 $n \times n$ 正定矩阵，B 是 $s \times n$ 实矩阵，证明：BAB^T 是正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = s$。
2. 假设 A, B 都是 $n \times n$ 矩阵，若存在不为零的数 x, y 使得 $AB = xA + yI$，证明：$AB = BA$。