东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 高等数学A　考试日期 10-08　得分 ______

适用专业 转系转专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

学号 ______ 姓名 ______

------ 密 ------ 封 ------ 线 ------

一. 填空题（本题共5小题，每小题4分，满分20分）

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1-\sin x}{x(1-\cos\sqrt{2x})}=$ $\frac{1}{2}$；

2. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=x^2-x-y^2$，则其虚部 $v(x,y)=$ $2xy-y$；

3. 交换积分次序 $\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx=$ $\int_0^1dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^4dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$；

4. 设曲线 C 为由 $x+y=\pi$ 与 x 轴，y 轴围成的三角形的边界，则 $\oint_C e^{x+y}ds=$ $(\sqrt{2}\pi+2)e^{\pi}-2$?

5. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y-z=2xe^{x+y-z}$ 确定的隐函数，则 $dz\big|_{(0,1,1)}=$ $-dx+dy$.

二. 单项选择题（本题共4小题，每小题4分，满分16分）

6. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则必收敛的级数是 [D]　D

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a_n}{n}$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$

7. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x(0,0)=4, f_y(0,0)=1$，则 [A] ? BC

(A) $dz\big|_{(0,0)}=4dx+dy$　$\{f_x, f_y, -1\}$　B

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0))$ 处的法向量为 $\{4,1,-1\}$ ✓

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0))$ 处的切向量为 $\{1,0,4\}$ ✓

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0))$ 处的切向量为 $\{4,0,1\}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ [D] ?

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$ (B) $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$ (D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

9. 设m,n均是正整数，则反常积分$\int_0^1 \dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$的收敛性 [D] ?

(A) 仅与m的取值有关 (B) 仅与n的取值有关

(C) 与m,n的取值都有关 (D) 与m,n的取值都无关

三. 计算下列各题(本题共5小题，每小题7分，满分35分)

10. 计算积分$\int_0^2 (2+x)\sqrt{2x-x^2}dx$.

$=\int_0^2 (2+x)\sqrt{1-(1-x)^2}\,dx$

设 $1-x=t$ $x=1-t$

$=\int_1^{-1}(3-t)\sqrt{1-t^2}\,d(1-t)$

$=\int_{-1}^{1}(3-t)\sqrt{1-t^2}\,dt$

$=3\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$

设 $t=\sin a$

原式 $=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos a\,d\sin a$

$=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 a\,da$

$=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2a}{2}da$

$=3[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}da+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2a}{4}d2a]$

$=3(\frac{a}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{\sin 2a}{4}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}})$

$=\frac{3}{2}\pi$

11 设$f(u,v)$具有二阶连续偏导数且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又$g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{x^2-y^2}{2}\right)$，

试求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

$\dfrac{\partial g}{\partial x}=f_1 y+f_2 x$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y(f_{11}y+f_{12}\cdot x)+x(f_{21}y+f_{22}x)$

$=y^2 f_{11}+xyf_{12}+xyf_{21}+x^2 f_{22}$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}=f_1 x-f_2 y$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\cancel{x^2 f_{11}+xyf_{12}+xy}\ x(f_{11}x-f_{12}y)-y(f_{21}x-f_{22}y)$

$=x^2 f_{11}-xyf_{12}-xyf_{21}+y^2 f_{22}$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)f_{11}+(x^2+y^2)f_{22}$

$=(x^2+y^2)(f_{11}+f_{22})$

$=x^2+y^2$

12. 在曲线$C:\begin{cases}2x^2+3y-z^2+8=0\\x^2-2y+3z^2-17=0\end{cases}$上求一点$P$，使曲线在该点的切线与向量$\{2,-4,-1\}$平行.

$F_1x=4x \quad F_1y=3 \quad F_1z=-2z \quad F_2x=2x \quad F_2y=-2 \quad F_2z=6z$

$(4x,3,-2z) \quad (2x,-2,6z)$

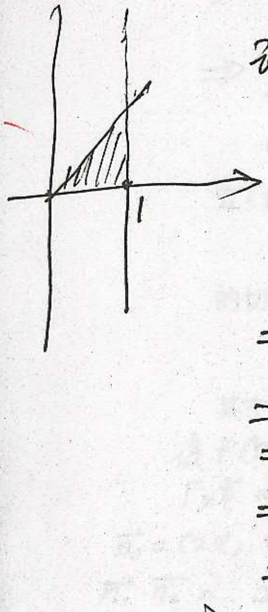
$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 4x & 3 & -2z\\ 2x & -2 & 6z\end{vmatrix} = 14zi-28xzj-14xk = 14\{z,-2xz,-x\}$$

$$\frac{z}{2}=\frac{-2xz}{-4}=\frac{-x}{-1}=t$$

$$\begin{cases} z=2t\\ x=t\\ xz=2t\end{cases} \quad \begin{cases}2t^2+3y-4t^2+8=0\\ t^2-2y+12t^2-17=0\end{cases} \Rightarrow t=\pm1 \quad \begin{cases}x=1\\ z=2\\ y=-2\end{cases} \quad \therefore (1,-2,+2) \quad \cancel{(-1,-2,-2)}$$

13. 计算二重积分$\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中

$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$.



设 $r\cos\theta=x \quad r\sin\theta=y$

$r=\sec\theta$

$r\cos\theta=1$

$x=1 \quad \Rightarrow D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

$$\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,drd\theta$$
$$=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\,drd\theta$$
$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,d(y^2+1-x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(\frac{2}{3}\right)(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x = \frac{1}{3}\left[\int_0^1 1dx-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\right]$$
$$\cancel{=\frac{1}{3}\left[1-x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right]}+$$
$$=\frac{1}{3}\left[1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2t)^{\frac{3}{2}}d\sin t\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,dt\right]$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$$

~~14.~~ 计算积分$\oint\limits_C\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z$，其中$C:|z|=3$,取逆时针方向.

四（15）（**本题满分 8 分**）求函数 $y=y(x)$，使它满足方程 $y''-3y'+2y=2e^x+10\sin x$，

且其图形与曲线 $y=x^2-x+1$ 在点 $(0,1)$ 处有相同的切线.

$r^2-3r+2=0 \quad r_1=1 \; r_2=2 \quad Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

设 $y^*=Axe^x+Bcos x+C\sin x$

$y^{*\prime}=Ae^x+Axe^x-B\sin x+C\cos x$

$y^{*\prime\prime}=2Ae^x+Axe^x-B\cos x-C\sin x$

$\Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \\ C=1 \end{cases}$

$\therefore y^*=-2xe^x+3\cos x+\sin x$

$\therefore y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x+3\cos x+\sin x$

$y'=2x-1=-1$

$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}-2e^x-2xe^x-3\sin x+\cos x=C_1+2C_2-1=-1$

$0^2-0+1=C_1+C_2+3$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1=-4 \\ C_2=2 \end{cases} \quad \therefore y=-4e^x+2e^{2x}-2xe^x+3\cos x+\sin x$

五（16）（**本题满分 8 分**）设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{(y+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

设 $P(x,y,z) \quad F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1=0$

$F_x=2x \quad F_y=2y-z \quad F_z=2z-y$

$\vec{n_1}=(2x,\ 2y-z,\ 2z-y) \quad \vec{n_2}=(0,0,1)$

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=2z-y=0 \quad y=2z$

$C:\begin{cases} y=2z \\ x^2+y^2+z^2-yz=1 \end{cases}$

$z=\frac{y}{2} \quad x^2+y^2+\frac{y^2}{4}-y\times\frac{y}{2}=1 \Rightarrow x^2+\frac{3}{4}y^2=1$

投影 $\begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

$\iint_\Sigma \frac{(y+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$

$x^2+\frac{3}{4}y^2\leq 1$

$x^2+y^2+z^2-yz=1$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-z}{y-2z}$

$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ 化简

$=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}dxdy$

原积分 $=\iint_{D_{xy}}\frac{(y+\sqrt{3})(y-2z)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dxdy$

$=\iint_{D_{xy}}(y+\sqrt{3})dxdy$

$=2\pi$

$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\cancel{(t-\sin t-\pi-1+\cos t)(1-\cos t)+(t-\sin t-\pi-4\cos t)(\sin t)}]dt$

$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{0}[(\pi\cos t-\frac{\pi}{2}\sin t)\cdot\pi(-\sin t)+(\pi\cos t+2\pi\sin t)\cdot\frac{\pi}{2}\cos t]dt$

$= \int_{-\pi}^{0}\frac{1}{2}dt = \frac{\pi}{2}$

六（17）（**本题满分 7 分**）计算曲线积分 $\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，其中 L 为摆线

$\begin{cases} x = t-\sin t-\pi \\ y = 1-\cos t \end{cases}$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段弧.

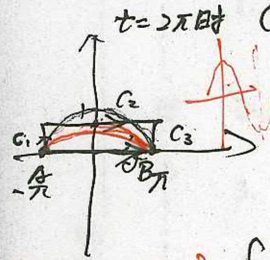
$P=\frac{x-y}{x^2+4y^2}$ $Q=\frac{x+4y}{x^2+4y^2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+4y^2-(x+4y)\cdot 2x}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{4y^2-x^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2}$

$\because \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \therefore$ 与路径无关 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(x^2+4y^2)-(x-y)8y}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{4y^2-x^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2}$

$t=0$ 时 $(-\pi,0)$

$t=2\pi$ 时 $(\pi,0)$ ~~设 AB 为 $(-\pi,0)\to(\pi,0)$~~

$\cancel{\int_L=\int_{AB}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}}$



设 $C_1: (-\pi,0)\to(-\pi,1)$

$C_2: (-\pi,1)\to(\pi,1)$

$C_3: (\pi,1)\to(\pi,0)$

$\int_{C_2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x-1)dx}{x^2+4}=-\arctan\pi$

$\int_{C_3}=\int_1^0\frac{\pi+4y}{\pi^2+4y^2}dy$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2}{\pi^2+4}\ -\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{\pi}$

$x^2+4y^2=\pi^2$

$\int_L=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}$

$\int_{C_1}=\frac{(-\pi+4y)dy}{\pi^2+4y^2}=\int_0^1(\frac{4y-\pi}{\pi^2+4y^2})dy$

$\therefore \int_L = -2\arctan\frac{2}{\pi}$?

$x=\pi\cos t$

$y=\frac{\pi}{2}\sin t$

$\frac{1}{\pi^2}\int_L(x-y)dx+(x+4y)dy$

$=\int_0^1\frac{4y}{\pi^2+4y^2}dy-\int_0^1\frac{\pi}{\pi^2+4y^2}dy=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2+4}{\pi^2}-\frac{1}{2}\arctan(\frac{2}{\pi})$

~~$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}(t-\sin t-\pi$~~

七（18）（**本题满分 6 分**）设 $f(x)$ 区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，

$f(1)=\frac{1}{2}$，试证：$\exists\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=1$.

$f(x)-f(\frac{1}{2})=f(a)(x-\frac{1}{2})$ $a\in(0,1)$

令 $x=0$

$f(0)-f(\frac{1}{2})=f'(\xi)(-\frac{1}{2})$ $\xi\in(0,\frac{1}{2})$

$f(1)-f(\frac{1}{2})=f'(\eta)\frac{1}{2}$ $\eta\in(\frac{1}{2},1)$

$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}(f'(\eta)+f'(\xi))$

则 $f'(\xi)+f'(\eta)=1$