04高A下期末试卷答案

一. 填空题(本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 2 0 分)

1. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$； **2.** $(-2,2]$； **3.** $\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dy$； **4.** 2π； **5.** $\alpha=1,\beta=3$.

二. 单项选择题

1. C; **2.** B; **3.** D; **4.** B.

三. (本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 3 5 分)

a) 令 $F(x,y,z)=x^2-2z-f(y^2-3z)$, 则 $F_x=2x, F_y=-2yf', F_z=-2+3f'$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-2x}{3f'-2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2yf'}{3f'-2}, \text{(3 分)}\ 2y\frac{\partial z}{\partial x}+3x\frac{\partial z}{\partial y}=2xy$$

b) 由条件得 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ，即 $4\lambda xy^{\lambda-1}=6(\lambda-1)x^{\lambda-2},\lambda=3$,

$$\int_{(0,0)}^{(3,1)}\left(x^2+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-2y\right)dy=\left(\frac{1}{3}x^3-y^2+2x^2y^3\right)\Big|_{(0,0)}^{(3,1)}=26$$

3. $f=\ln(x+2)(x-1)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$

而 $\ln(x+2)=\ln 4+\ln\left(1+\dfrac{x-2}{4}\right)=\ln 4+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{4}\right)^n,-2<x\le 6$

$$\ln(x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n},1<x\le 3$$

$$f(x)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)(x-2)^n\quad,\quad 1<x\le 3$$

4. (1) 将 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓. $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2},x\in[0,1)\cup(1,2],$$

(2) $S(1)=\dfrac{1}{2}$, (1 分) $S\left(\dfrac{7}{2}\right)=S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

5. (1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+1)}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{z-1}{2}\right)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$

(2)
$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z+2)-3}-\frac{1}{(z+2)-1}\right)$$
$$=\frac{1}{2(z+2)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z+2)^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^n-1\right)\frac{1}{(z+2)^{n+1}}$$

四. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}$ 在 $|z|=2$ 内有奇点: $z=1$（二级极点）, $z=\pm i$（一级极点） 原式 $=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

$f\left(\dfrac{1}{z}\right)\cdot\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{z}{(1-z)^2(1+z^2)}$, $z=0$ 是可去奇点, 留数为 0, 故原积分=0.

五. 收敛域为 $[-1,1]$, 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(2n-1)}x^{2n},[-1,1]$ 则

$\dfrac{1}{2}S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n(2n-1)}x^{2n},\dfrac{1}{2}S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1+x^2}$

$S'(x)=2\arctan x$ （1 分） $S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\ x\in[-1,1]$

六. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{2n}\ (n\to\infty)$

因此绝对值级数发散. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 为 Leibniz 型级数, 故收敛.

而 $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1$ 单调减少, 且 $\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)=0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ 收敛.

由收敛级数性质知原级数收敛. 故原级数条件收敛. .

七. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^{k+1},x\in[0,1]$, 由于级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 所以 $\lim_{k\to\infty}a_k=0$, 因而 $\{a_k\}$ 有界. 设

$|a_k|\le M\,(k=1,2,\cdots)$, 则 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\dfrac{1}{n^{k+1}}\le M\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{k+1}}$.

当 $n\ge 2$ 时, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)\le M\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{k+1}}=\dfrac{M}{n(n-1)}$, 又级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)}$ 收敛, 由比较判别法知原

级数绝对收敛, 故原级数收敛.