12-13-2高数AB期中参考答案及评分标准

一、 填空题（本题共6小题，前5题每题4分，第6题9分,共29分）

1. $\underline{x+2y-4=0}$； 2. $\underline{0,1;\text{可去,无穷}}$; 3. $\underline{-2011!}$; 4. $\underline{\dfrac{f'(\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}))}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x}$;

5. $\underline{1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}$; 6. (1)$\underline{(-1)^n}$； (2)$\underline{x,\sin\dfrac{1}{x}}$; (3)$\underline{f(x)=|x|}$.

二、 单项选择题（本题共3小题，每小题4分，满分12分）

1. D; 2. D; 3. D

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分） 用L法则, 算错, 扣4'.

思路都对, 计算小错, 扣2分.

1. **解** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{(1-\cos x)\sin^2 x}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{3}$. (5分+2分)

2. **解** $4\le\sqrt[n]{n^4+4^n}\le4\sqrt[n]{2}\ (n\ge5)$ (2分), 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ (2分),
由夹逼定理得, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}=4$. (3分)

化成指数对数处理 但导到答案 4'. (计算错误) or 做一半没答案 4' 只化: 2'.

3. **解** $1+y'=\dfrac{1-y'}{1+(x-y)^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-(x-y)^2}{2+(x-y)^2}$. (5分+2分)

此处错 扣2分

4. **解** (1分) (3分+3分)

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{n!}{3}\left(\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(x+2)^{n+1}}\right)$$

5. **解** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t}$, (3分) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=2}=\dfrac{3}{2}t(1-t)\mathrm{e}^{-4t}\Big|_{t=2}=-3\mathrm{e}^{-8}$. (4分)

四、 （本题满分8分） **证** 设 $f(x)=x^2+1-\ln x$, (2分)

令 $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}=0$, 得 $x=\dfrac{1}{\sqrt2}$ 是 $f(x)$ 唯一的极小值点, 因而是最小值点, (4分) 所以 $f(x)\ge f(\frac{1}{\sqrt2})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln2>0$, 即 $x^2+1>\ln x$. (2分)

五、 （本题满分8分） **证** 设 $F(x)=f(x+a)-f(x)$, (2分)

$F(0)=f(a)-f(0)<0, F(a)=f(2a)-f(a)>0, F(2a)=f(3a)-f(2a)<0$,

由连续函数零点存在定理,知存在$\xi_1\in(0,a),\xi_2\in(a,2a)$,使$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$, (4分)再由Rolle定理知,存在 $\xi\in(0,2a)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=f'(\xi+a)$.(2分)

六、（本题满分8分） 证 (1) 由Lagrange中值定理知,存在 $\xi \in (n, n+1)$, 使得 $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$, 从而 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ (3分)

(2) $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$, 所以 $\{x_n\}$ 单减.(2分)

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 有下界. 由单调有界原理知 $\{x_n\}$ 收敛. (3分)