09高A下期末试卷答案

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\underline{[-1,3)}$；**2.** $\underline{x-2y-2z+3=0}$；**3.** $m=\underline{\frac{1}{9}}$；

4. $\underline{\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{0}^{y+1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x}$；**5.** $\underline{\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2}f(r^2)r^2\mathrm{d}r}$；

6. $\underline{25}$； **7.** $a=\underline{2}$, $b=\underline{-2}$；**8.** $\underline{\mathrm{e}^r(3+r)}$；**9.** $\underline{2\pi}$

二. 计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

10．解 $\frac{\partial z}{\partial x}(1+z)\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^y+y\mathrm{e}^x$，（**2 分**）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{e}^{y-z}+y\mathrm{e}^{x-z}}{1+z}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{e}^{x-z}+x\mathrm{e}^{y-z}}{1+z}$

11．解 $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\sin\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\sin^3\theta-2\sqrt{2})\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$

12．解 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4,0\le x\le y\right\}$，

原式

13. **解** $\Sigma_y: x^2+z^2\le 1+y^2, 0\le y\le 2$ ，

$$\iiint_\Omega \mathrm{e}^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\iint_{\Sigma_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\pi\int_0^2(1+y^2)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=3\pi(\mathrm{e}^2-1),$$

三（14）解 题中的立体记为Ω，则

$$I_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_1^2\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{14}{3}\pi$$

四（15）解 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(x,y,z)$，

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_S(x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{8}$$

五（16）（本题满分 7 分） 计算 $\oint_C \dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 C 为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$，方向为逆时针.

解 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，取正数 ε 很小，使 $C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$ 含于

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ 内，**（1 分）** $\oint_C \dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=2\varepsilon^{-2}\iint\limits_{D_\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$

六（17）解 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{1}{1+x-2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{4}}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{2^{2n+1}}\right)(x-2)^n$， $x\in(1,3)$

七（18）解 记 S_1 为锥面 $2z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截部分，其面积记为 A_1，记 S_2 为柱面 $x^2+y^2=2x$ 被锥面 $2z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 xOy 平面所截部分，其面积记为 A_2，记 S_3 为底面，其面积记为 A_3，表面积 $A=A_1+A_2+A_3$

$$A=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{x^2+y^2=2x}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s+\pi=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\pi+2\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\pi+4$$