06-07-2几代B

一．(30%)填空题（I 表示单位矩阵）

1. 向量 $\alpha=(1,0,-1),\beta=(-1,1,0),\gamma=(1,1,k)$ 共面时参数 k 的值为_____，此时，与这三个向量都正交的一个单位向量是______；

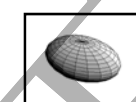
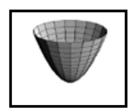
2. 向量组

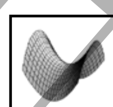
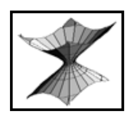
$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

的秩等于___，这个向量组的一极大线性无关组是__；

3. 假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(2,t)$，若1是 A 的特征值，则参数 t 的值为____；

4. 二次型 $f(x,y,z)=x^2+2z^2+2xy$ 的正、负惯性指数分别为____，下列图形中，能表示二次曲面 $f(x,y,z)=1$ 的图形的标号为____：

（A）  ，（B） 

（C）  ，（D） 

5. 由曲线 $\begin{cases}z=x^2\\ y=0\end{cases}$ 绕 $z-$轴旋转所产生的旋转曲面方程为______；

6. 若向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ 与向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix}$ 等价，则参数 a,b 必定满足条件____；

7. 若 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&b\\0&0&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}c&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $(a,b,c)=$___。

二. （10%）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，问：当参数 p 取何值时，向量组

$$\beta_1=\alpha_2+2\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2,\ \beta_3=\alpha_3+2\alpha_4,\beta_4=p\alpha_1+\alpha_4$$

也线性无关？

三. （15%）假设 p,q 是参数，空间直角坐标系中平面 π_1,π_2,π_3 的方程分别如下：

$$\pi_1: x-y+2z=1,$$

$$\pi_2: 2x+py+z=2,$$

$$\pi_3: 3x+5y+2z=q$$

（1） 问：当 p,q 取何值时，这三个平面的公共点构成一直线？

（2） 当它们的公共点构成一直线时，求直线的方向向量，并给出该直线的对称方程。

四. （15%）设 $P=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，并且 $AP=P\Lambda$，求 A 及 A^{99}。

五. （15%）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_2。$$

（1） 写出二次型 f 的矩阵；

（2） 求一个正交变换 $x=Qy$，把 f 化为标准形，并给出该标准形；

（3） 假设 $a>0$，求 $t=\max\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=a} f(x_1,x_2,x_3)$ 的值.

六. （15%）证明题：

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\neq I$，其中，$a+d=2,ad-bc=1$。证明：$A$ 不与任何对角阵相似.

2. 假设 $s\times n$ 矩阵 A 的秩等于 r，并且非齐次线性方程组 $Ax=b$（$b\neq\theta$）有解。证明：$Ax=b$ 有并且只有 $n-r+1$ 个线性无关的解向量.

3. 若 A、B 都是可逆的实对称矩阵，且 A、B　$A-B$ 都是正定矩阵，证明：$B^{-1}-A^{-1}$ 也是正定矩阵.