学号____________ 姓名____________

密 封 线

东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 高等数学A　考试日期 2011-08　得分______

适用专业 转系转专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一．填空题（本题共9小题，每小题4分，满分36分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}=$ $e^{-\frac{2}{3}}$；

2. 已知当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x\left((1+\alpha t^2)^{\frac{1}{3}}-1\right)dt$ 与 $\ln(1+2x^3)$ 是等价无穷小，则常数 $\alpha=$ 18；

3. 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $f^{(n)}(-1)=$ $\frac{n!}{2^n}$；?

4. 设函数 $y=y(x)\ (0<x<\sqrt{2\pi})$ 由方程 $\int_0^x \sin t^2 dt+\int_0^y e^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $y(x)$ 的极小值点为 $x=\sqrt{\pi}$；

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\varphi(x-2z,z-y^2)$ 确定，其中 φ 具有一阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\frac{\varphi_1-2y\varphi_2}{1+2\varphi_1-\varphi_2}$；

6. 已知二阶常系数线性齐次方程的一个特解为 $y=-3e^{-x}\sin 2x$，则此微分方程为 $2y''+3y'+5y=0$；?

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 3^{n+1}}$ 的收敛域为 $(-2,4]$；

8. 设曲线 $C:|x|+|y|=2$，第一型曲线积分 $\oint_C\dfrac{|x|}{|x|+|y|}ds$ 的值为 $4\sqrt{2}$；

9. 设 C 为正向圆周 $x^2+y^2=1$ 位于第一和第四象限的部分，则第二型曲线积分 $\int_C -2xy\,dx+4xy^3dy$ 的值为 $\frac{4}{3}$.

二．计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

10. 计算积分 $\int_0^1 \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx + \int_0 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \arctan x \, d\arctan x$$

$$= x|_0^1 - \arctan x|_0^1 + \frac{\arctan^2 x}{2}\Big|_0^1 \quad ?$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32} \quad \times$$

11 设函数 $F(u,v)$ 可微，求曲面 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程与法线方程.

$$F_x = F_1\left(\frac{1}{z}\right) + F_2(0) = \frac{1}{z_0}\cdot F_1$$

$$F_y = F_1(0) + F_2\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z_0}\cdot F_2$$

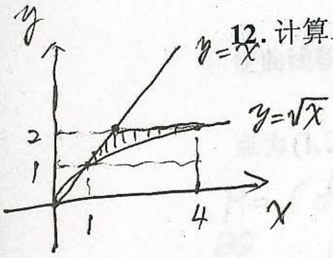
$$F_z = F_1\left(-\frac{x}{z^2}\right) + F_2\left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{x_0}{z_0^2}F_1 - \frac{y_0}{z_0^2}F_2$$

$$\frac{F_1}{z_0}(x-x_0) + \frac{F_2}{z_0}(y-y_0) + \left(-\frac{x_0}{z_0^2}F_1 - \frac{y_0}{z_0^2}F_2\right)(z-z_0) = 0$$

$$\therefore z_0F_1(x-x_0) + z_0F_2(y-y_0) - \cancel{(x_0F_1+y_0F_2)}(x_0F_1+y_0F_2)(z-z_0) = 0$$

$$\frac{x-x_0}{z_0F_1} = \frac{y-y_0}{z_0F_2} = \frac{z-z_0}{-x_0F_1-y_0F_2}$$

12. 计算二重积分 $\iint_D \sin\frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=\sqrt{x}, y=x, y=2$ 围成的有界闭区域.



$$\iint_D \sin\frac{\pi x}{2y} dxdy = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y} dx = \frac{2y}{\pi}\int_1^2 \frac{2y}{\pi} dy \int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y} d\left(\frac{\pi x}{2y}\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_1^2 y dy \cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2}$$

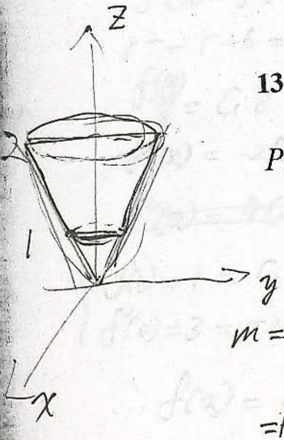
$$= -\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}y\, dy$$

$$= -\frac{2}{\pi}\times\frac{2}{\pi}\left[y\sin\frac{\pi}{2}y\Big|_1^2 - \int_1^2 \sin\frac{\pi}{2}y\, dy\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\left[-1 + \frac{2}{\pi}\int_1^2 1 d\left(\cos\frac{\pi}{2}y\right)\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\left[-1 - \frac{2}{\pi}\right] = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3}$$

13. 设立体 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 及 $z=2$ 围成，已知 Ω 上任一点 $P(x,y,z)$ 处的密度与该点到原点的距离的平方成正比（比例系数为 k），试求 Ω 的质量.



$$\rho = k\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 = k(x^2+y^2+z^2)$$

设 $x = \rho\cos\varphi\sin\theta \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta \quad z = \rho\cos\theta$

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \rho^2 \cdot k\rho^2\, d\rho$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta\, \frac{\rho^5}{5}\Big|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}}$$

$$= -\frac{k}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{32}{\cos^5\theta} - \frac{1}{\cos^5\theta}\right) d\cos\theta$$

$$= -\frac{k}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{31}{\cos^5\theta}\, d\cos\theta$$

$$= -\frac{31}{5}k\int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\cos^4\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{31}{5}k\times 2\pi\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times 3 = \frac{93}{10}k\pi$$

14. 设$C:|z-1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，取逆时针方向，计算复积分$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$．

三（15）（**本题满分 7 分**）求函数$f(z)=\frac{1}{z(z+2)^2}$在圆环域$0<|z+2|<2$内的Laurent展开式.

四（16）（**本题满分 8 分**）设$f(x)$有二阶连续导数，且$f(0)=1, f'(0)=3$，试确定$f(x)$，使曲线积分$\int_L (f'(x)+6f(x))y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$与路径无关，并求当$L$的起点为$(0,0)$，终点为$(1,2)$时曲线积分的值.

$P=(f'(x)+6f(x))y \qquad Q=f'(x)$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=f''(x) \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=f'(x)+6f(x)$

$\therefore f''(x)=f'(x)+6f(x)$

$f''(x)-f'(x)-6f(x)=0$

$r^2-r-6=0 \quad r_1=3 \quad r_2=-2$

$\therefore f(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$

$f'(x)=-2C_1e^{-2x}+3C_2e^{3x}$

~~$f''(x)=4C_1e^{-2x}+9C_2e^{3x}$~~

$\begin{cases} f(0)=1=C_1+C_2 \\ f'(0)=3=-2C_1+3C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=1 \end{cases}$

$\therefore f(x)=e^{3x} \quad f'(x)=3e^{3x}$

$\therefore \int_L (3e^{3x}+6e^{3x})y\,dx+3e^{3x}dy$

$=\int_L 9e^{3x}y\,dx+3e^{3x}dy$

又 $9e^{3x}y\,dx+3e^{3x}dy=d(3e^{3x}y)$

$\therefore \int_{L(0,0)}^{(1,2)}=3e^{3x}y\Big|_{(0,0)}^{(1,2)}$

$=3e^3\times 2-3e^{3\times 0}\times 0$

$=6e^3$

五（17）（本题满分 8 分）计算第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{S}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)},$$

其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和平面 $x-y+z=2$ 所截下部分的外侧.

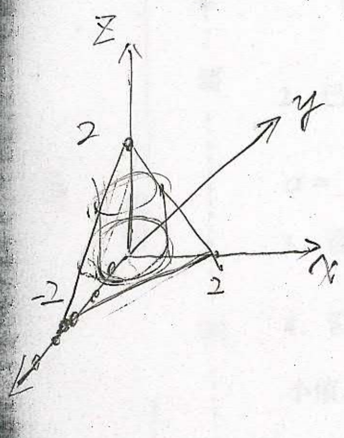
$\cancel{P=\frac{x}{x^2+y^2}\quad Q=\frac{-y}{x^2+y^2}\quad R=\frac{z+1}{x^2+y^2}}$

$\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)-(-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\cancel{\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{x^2+y^2}}$

$\cancel{I=\iiint_\Omega \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}+\frac{1}{x^2+y^2}\,dV$

设平面 $z=0$ 为 Σ_1，取下侧
平面 $x-y+z=2$ 为 Σ_2 取上侧



$I=\iint_S x\,dy\wedge dz-y\,dz\wedge dx+(z+1)\,dx\wedge dy$

$=\oiint_{S+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}$

$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV-\iint_{\Sigma_1}(x\cdot\vec{n}_x-y+z+1)\cdot\vec{n}_0\,dS-\iint_{\Sigma_2}1\,dx$

$=\iiint_\Omega 1\,dV-\frac{1}{\sqrt3}\iint_{\Sigma_1}(x+y+z)\,dS+\pi$

$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{2-\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}dz-\frac{1}{\sqrt3}\iint_D(x+y+2-x+y)\cdot\sqrt{1+1^2+1^2}\,dx\,dy+\pi$

$=2\pi-(2\pi)+\pi=\pi$

六（18）（本题满分 6 分）设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right).$$

$a_n=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin x\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}x\sin x\,dx\cdots\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x\sin x\,dx$ n为奇数

$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x\sin x\,dx-\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}x\sin x\,dx$ n为偶

$a_n=$

$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x\sin x\,dx=-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x\,d\cos x=-\left[x\cos x\Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\cos x\,dx\right]=(4k+1)\pi$

$\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}x\sin x\,dx=-(4k+3)\pi$

$\cancel{a_n=\pi+3\pi+5\pi+\cdots+(2n-1)\pi\quad(n=1,2\cdots)}$

$\cancel{2n\pi}$

$a_n=\pi+3\pi+5\pi+\cdots+(2n-1)\pi=n^2\pi\quad(n=1,2,3)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2^2\pi}{2^2}+\cdots+\frac{n^2\pi}{2^n}\right)$

设 $b(x)=\frac{n^2\pi}{2^n}x^{n-1}=\left(\frac{\pi n}{2^n}x^n\right)'$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi}{2^n}\right)$

设 $b(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi}{2^n}x^{n-1}\quad -2<x<2$

$\int_0^x b(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{2^n}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{2^n}x^{n-1}$

$\int_0^x b(x)dx=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi x^n}{2^n}\right)'=x\pi\left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)'$

$=\frac{\pi x^2}{2-x}$

$b(x)=\left(\frac{\pi x^2}{2-x}\right)'=\frac{4\pi x-\pi x^2}{(2-x)^2}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi}{2^n}\right)=b(1)=\frac{4\pi-\pi}{(2-1)^2}=3\pi$