姓名________ 线 封 密 学号________

# 东 南 大 学 考 试 卷（ A 卷）（共 4 页第 1 页）

课程名称 高等数学（B）期末 考试学期 05-06-3 得分

适用专业 选学高数（B）的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150 分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

**一、 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）**

1．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=xe^{yz}$ 确定，则 $\mathrm{d}z=\underline{\dfrac{1}{e^{-yz}-xy}\mathrm{d}x+\dfrac{xz}{e^{-yz}-xy}\mathrm{d}y}$；

2．曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在对应于 $t=-1$ 的点处的切线方程是 $\underline{\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}}$；

3．曲面 $e^z+z+xy=3$ 在点 $M(2,1,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{x+2y+2z=4}$；

4．交换积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\underline{\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_0^{y+1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x}$；

5．向量场 $\mathbf{A}=3x^2yz^2\mathbf{i}+4xy^2z^2\mathbf{j}+2xyz^3\mathbf{k}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的散度 $\mathrm{div}\mathbf{A}=\underline{40}$；

6．$\iint\limits_{|x|+|y|\le1}x\left(x^2+\sin y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{0}$；

7．空间区域 $\Omega$ 为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，则 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$ 的值为 $\underline{\pi R^4}$；

8．已知曲线积分 $\int_L\left(e^x\cos y+yf(x)\right)\mathrm{d}x+\left(x^3-e^x\sin y\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则 $f(x)=\underline{3x^2}$；

9．已知 $\mathrm{d}z=\left(2xy+3x^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2+3y^2\right)\mathrm{d}y$，则 $z=\underline{x^3+y^3+x^2y+C}$。

**二．计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 8 分，满分 32 分）**

10．设 $z=\int_0^{x^2y}f\left(t,e^t\right)\mathrm{d}t$，其中 $f$ 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf+2x^3y\left(f_1+e^{x^2y}f_2\right)$$ （3+5 分）

**11**．计算二次积分： $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^1 \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^1 \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left( y\mathrm{e}^y - y \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$ （**2+3+3 分**）

**12**．问通过两直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ 和 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 能否决定一平面？若能，则求此平面的方程。

$\begin{vmatrix} 2-1 & -2+1 & 3-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$，通过两条已知直线能决定一平面。（**3 分**）

$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$，（**2 分**）平面方程为 $5x + 3y - z - 1 = 0$。（**3 分**）

**13**．设半球体 $\Omega: 0 \le z - 2 \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的密度函数为 $\mu = z$，试求半球体 $\Omega$ 的质量。

$$M = \iiint_{\Omega} z \,\mathrm{d}V = \pi \int_2^3 z \left( 4z - z^2 - 3 \right) \mathrm{d}\,z = \frac{19}{12} \pi$$ （**2+3+3 分**）

**三．（14）（本题满分 10 分）**设三角形的三边长分别为 $a$、$b$、$c$，其面积记为 $S$，试求该三角形内一点到三边距离之乘积的最大值。

设三角形内一点到三边的距离分别为 $x, y, z$，则目标函数为

$f = xyz$，且满足 $ax + by + cz = 2S$。（**3 分**）令 $L = xyz + \lambda(ax + by + cz - 2S)$，则由

$L_x = yz + \lambda a = 0, L_y = xz + \lambda b = 0, L_z = xy + \lambda c = 0, L_\lambda = ax + by + cz - 2S = 0,$（**4 分**）

解得 $x = \frac{2S}{3a}, y = \frac{2S}{3b}, z = \frac{2S}{3c},$ 因为驻点唯一，而实际问题存在最大值，所以

$f_{\max} = \frac{8S^3}{27abc}$。（**3 分**）

**四.（15）（本题满分 10 分）**计算第二型曲线积分 $I=\int_L x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y$

，其中 $L$ 是从点 $A(2,1)$ 沿曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 到点 $B(1,0)$ 的一段。

取点 $C(2,0)$，以 $L$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 为边界的区域记为 $D$，**（2 分）**

$$I=\int_{L\cup\overline{BC}\cup\overline{CA}} x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y-\int_0^1 y\left(2+\sqrt{4+y^2}\right)\mathrm{d}y-\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}\,x$$ **（2 分）**

$$=\iint_D y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y-1-\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)-\frac{7}{3}=-\frac{5}{12}-\frac{5}{3}\sqrt{5}$$ **（4+2 分）**

**五.（16）（本题满分 6 分）**计算第二型曲面积分：

$$\iint_S \left(yf(x,y,z)+x\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(xf(x,y,z)+y\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(2xyf(x,y,z)+z\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中 $S$ 是曲面 $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ 介于平面 $z=2$ 与平面 $z=8$ 之间的部分，取上侧，

$f(x,y,z)$ 为连续函数。

由 $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ 指向上侧的单位法向量

$$\mathbf{n}^\circ=\left\{\frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right\}$$，**（1 分）**

$$\text{原积分}=\iint_S\left[\frac{-x(yf+x)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{-y(xf+y)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{2xyf+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right]\mathrm{d}S=\iint_S\frac{z-x^2-y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}S$$ **（2）**

$$=-\frac{1}{2}\iint_S\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}S=-\frac{1}{2}\iint_{4\le x^2+y^2\le 16}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4 r^3\mathrm{d}r=-60\pi$$

**（2+1）**

**六.**（**17**）（**本题满分 6 分**）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$，

试证：
$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \ge (b-a)(b-a+A)$$

记 $D=\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \middle| a\le x\le b, a\le y\le b\right\}$，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{e}^{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （**1 分**）

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{e}^{f(x)} + \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{e}^{f(y)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge \iint_D \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （**1 分**）

$$\ge \iint_D \left(1+\frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$ （**3 分**）

$$= (b-a)^2 + (b-a)A = (b-a)(b-a+A)$$ （**1 分**）