09-10-2几代B答案

一. （30%）填空题

1. 若 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $(AB)^2 = A^2B^2$，则 a,b 满足条件 $a=b$ ；

2. 设 2 阶方阵 $A=(\alpha,\beta)$，$B=\left(2\alpha-\beta,\alpha+3\beta\right)$，若 $B=AC$，则矩阵 $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$；

3. 直线 $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ 的一个方向向量为 $(5,4,3)$

4. 点 $P(1,1,1)$ 到平面 $x-2y+2z=3$ 的距离是 $2/3$

5. 如果向量组 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性相关，则参数 a 满足条件 $a=1$

6. 向量 $\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 在 R^2 的基 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 下的坐标是 $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. 如果 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的属于特征值 b 的特征向量，则 $(a,b)=(0,2)$

8. 假设 A 是 2×2 矩阵，若可逆矩阵 $P=(\alpha,\beta)$ 满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$Q=\left(\beta,\alpha\right)$，

   则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. 假设 A 是 2×2 矩阵，若 $A+E, A-E$ 都不可逆，则行列式 $\left|A+2E\right|=3$

10. 若 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$ 是 $n\times n$ 正交矩阵，则 $B=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_r\alpha_r^T$

    $(1\le r\le n)$ 的特征多项式是 $\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r$

三. （10%）设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$。已知 $XA=B+X$ ，求 X 。

解：$X(A-E)=B$，$X=B(A-E)^{-1}$，……4

$$A-E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}，(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&1\\1/2&-1/2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}，$$ ……4

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\5/2&-1/2&-2\end{pmatrix}$$ ……2

四. （14%）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2-x_3+2x_4=1\\2x_1+3x_2+ax_3+4x_4=b\\3x_1+5x_2+x_3+(a+6)x_4=5\end{cases}$。

1. 当参数 a,b 满足什么条件时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？

解：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a&4&b\\3&5&1&a+6&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a-2&2&b-2\\0&2&-2&a+3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a-1&0&b-3\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}$$

……3

有唯一解 $\Leftrightarrow a\neq 1$；……2

有无穷多解 $\Leftrightarrow a=1,b=3$；……2

无解 $\Leftrightarrow a=1,b\neq 3$。……2

2. 有无穷多解时，求方程组的通解。

有无穷多解时，$a=1,b=3$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……2

故通解为：$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$，$x_3, x_4$ 是任意常数。……………………………………3

五. （14%）假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$。若 A 与 B 相似，

1. 求参数 a, b 的值；

若 $A \sim B$，则 $trA = trB, |A| = |B|$，即 $a+5 = b+4, 6(a-1) = 4b$，…………2

故 $a = 5, b = 6$。……………………………………………………………………2

2. 求一可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$；

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $(A-2E)x = \theta$ 有基础解系 $\eta_1 = (1,0,1)^T, \eta_2 = (0,1,1)^T$；…………………4

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $(A-2E)x = \theta$ 有基础解系 $\eta_3 = (1,-2,3)^T$；………………………………..2

所以，可以令 $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ …………………………………2

3. 证明存在矩阵 C，使得 $A = C^2$。

令 $M = diag(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$，$C = PMP^{-1}$

则，$C^2 = (PMP^{-1})^2 = PM^2P^{-1} = PBP^{-1} = A$ ……………………………..2

六. （10%）设 π_1 是抛物线 $\begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得曲面，π_2 是平面 $x - 2y + z = 4$。

（1）求 π_1 的方程；

$x^2 + z^2 = -2y$ ……………………………………………………………………3

（2）求π_1与π_2的交线在xOy平面上的投影曲线的方程；

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2xy-4x+9y+8=0 \\ z=0 \end{cases}$$ ……………………………………………4

（3）画出由π_1、π_2所围成的空间有界区域的草图。

（略）…………………………………………………………………………..3

七. （12%）假设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_3-2x_2x_3$。

1. 求一可逆线性变换$x=Cy$将f化成其标准形；

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3)^2+(x_2-x_3)^2+(a-5)x_3^2$……………………..…………2

令$\begin{cases} y_1=x_1+2x_3 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1=y_1-2y_3 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，………………………….………………2

得 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+(a-5)y_3^2$…………………………………..…………2

2. 求f的矩阵A，问：当参数a取什么值时，A的特征值都大于零；

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$……………………………………………………………..………...2

A的特征值都大于零$\Leftrightarrow f$的正惯性指数为$3\Leftrightarrow a>5$。……………….………..2

3. 如果二次曲面$f(x,y,z)=1$表示单叶双曲面，问：参数a应满足什么条件？

$f(x,y,z)=1$表示单叶双曲面$\Leftrightarrow f$的正、负惯性指数为2、$1\Leftrightarrow a<5$………..2

八. （10%）证明题

1. 假设A是$n\times n$正定矩阵，B是$s\times n$实矩阵，证明：BAB^T是正定矩阵的充分必要条件是B的秩$r(B)=s$。

必要性：若BAB^T是正定的，则BAB^T可逆，

从而$s\ge r(B)\ge r(BAB^T)=s$，故$r(B)=s$。………………..…………3

充分性：若$r(B)=s$，则$r(B^T)=s$，即$B^Tx=\theta$只有零解。

对任意$x\neq\theta$，$B^Tx\neq\theta$，

因A正定，有$x^TBAB^Tx=(B^Tx)^TA(B^Tx)>0$

所以，BAB^T是正定的。……………………………..………..………3

2. 假设A,B都是$n\times n$矩阵，若存在不为零的数x,y使得$AB=xA+yI$，证明：$AB=BA$。

因为 $AB = xA + yB$，所以 $(A - yE)(B - xE) = xyE$，

从而，$(A - yE)[\frac{1}{xy}(B - xE)] = E$，即 $(A - yE)^{-1} = \frac{1}{xy}(B - xE)$，…………..…..2

因此，$[\frac{1}{xy}(B - xE)](A - yE) = E$，即 $(B - xE)(A - yE) = xyE$

从而 $BA = xA + yB$，故 $AB = BA$。………………………………………………….....2