02-03-2几代B答案

一 填空题(每小题 3 分，共 36 分):

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}[5\quad 1\quad -3]\right\}^{2002} = \underline{\begin{bmatrix}-5 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -10 & -2 & -6\end{bmatrix}}$;

2. $\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}}$;

3. 若 A 是正交矩阵，则行列式 $|A^3A^T| = \underline{1}$;

4. 空间四点 $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(1, 2, k)$, $D(-1, 4, 9)$共面的充分必要条件是 $\underline{k = 3}$;

5. 点 $P(2, -1, 1)$到直线 l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 的距离为 $\underline{\ 1\ }$;

6. 若 4 阶方阵 A 的秩为 2，则伴随矩阵 A^*的秩为 $\underline{\ 0\ }$;

7. 若可逆矩阵 P 使 $AP = PB$, $B = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$，则方阵 A 的特征多项式为$\underline{(\lambda-1)(\lambda-3)}$;

8. 若 3 阶方阵 A 使 $I-A$, $2I-A$, $A+3I$ 都不可逆，则 A 与对角阵$\underline{\underline{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}}}$相似(其中 I 是 3 阶单位矩阵);

9. 若 $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$与对角阵相合，则$(x, y) = \underline{(1, -2)}$.

10. 设 $A = [A_1, A_2, A_3, A_4]$，其中列向量 A_1, A_2, A_4 线性无关, $A_3 = 2A_1 - A_2 + A_4$，则齐次线性方程组 $Ax = \theta$的一个基础解系是 $\underline{\xi = [2, -1, -1, 1]^T}$;

11. 设 A, B 都是 3 阶方阵, $AB = O$, $r(A) - r(B) = 2$，则 $r(A) + r(B) = \underline{\ D\ }$;
    (A) 5;　　(B) 4;　　(C) 3;　　(D) 2;

12. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$，则以下结论中未必成立的是 $\underline{\ B\ }$.
    (A) $A-I$ 可逆，且$(A-I)^{-1} = A-I$;　　(B) $A = O$ 或 $A = 2I$;
    (C) 若 2 不是 A 的特征值，则 $A = O$;　　(D) $|A| = 0$ 或 $A = 2I$.

二 计算题(每小题 8 分，共 24 分)

13. $$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \times(-1)\quad\times(-2)\end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 11\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0 & 1 & 11\\ 1 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \\ \end{matrix} \quad -\begin{vmatrix}0 & 1 & 11\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & -3 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 11\\ -3 & -4\end{vmatrix} = 29.$$

14. 求直线 l: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 在平面 $\pi: x+y-2z+1=0$ 上的垂直投影直线方程.

解: 过直线 l 且垂直于平面π的平面π_1的法向量必垂直于向量$\{2, 1, 2\}$和$\{1, 1, -2\}$,

因而可取为 $\left\{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right\} = \{-4, 6, 1\}$.

又因为π_1过直线 l 上的点$(2, 1, -1)$, 由此可得平面π_1的点法式方程

$$-4(x-2)+6(y-1)+(z+1)=0$$

整理得

$$4x-6y-z-3=0$$

于是可得直线 l: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 在平面 $\pi: x+y-2z+1=0$ 上的垂直投影直线的一般方程: $\begin{cases}x+y-2z+1=0\\ 4x-6y-z-3=0\end{cases}$.

15. 设 $XA = AB + X$, 其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 求 X^{99}.

解: 原方程可化为 $X(A-I) = AB$, 其中 I 表示单位矩阵.

$$A-I=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}, AB=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}A-I\\ AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\ AB(A-I)^{-1}\end{bmatrix}.$$

于是可得 $X=AB(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $X^2=\begin{bmatrix}3/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3/2\end{bmatrix}=\dfrac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

$$X^{99}=(X^2)^{49}X=\frac{3^{49}}{2^{49}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\frac{3^{49}}{2^{49}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

(注意 X 未必等于$(A-I)^{-1}AB$!)

三 计算题, 解答题(3 小题共 32 分).

16. 设向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\\ a\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ -3\\ b\end{bmatrix}$. $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$是由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$生成的空间. 已知维$(V) = 2$, $\beta \in V$.

(1) 求 a, b; (2) 求 V 的一个基, 并求β在此基下的坐标; (3) 求 V 的一个标准正交基.

解: (1) $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-6 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

因为维$(V) = 2$, $\beta \in V$. 所以 $a - 6 = b + 2 = 0$, 即 $a = 6$, $b = -2$.

(2) 由上述初等行变换的结果可知α_1, α_2 构成 V 的一个基, 且$\beta = 3\alpha_1 - \alpha_2$.

(3) 令$\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \dfrac{3}{6}\begin{bmatrix} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

再单位化得 V 的一个标准正交基

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

17. 用正交变换化简二次曲面方程:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$$

求出正交变换和标准形, 并指出曲面类型.

解: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

A 的特征多项式$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$.

A 的特征值$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda = -2$.

由$(\lambda_i I - A)x = \theta$求得 A 的对应于$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda = -2$ 的特征值向量:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

它们已经两两正交, 单位化得 $p_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $p_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

令 $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$, 则 $P^TP = I$, 且 $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

令 $x = Py$, 则原二次曲面的方程化为 $3y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2 = 1$.

可见该二次曲面为单叶双曲面.

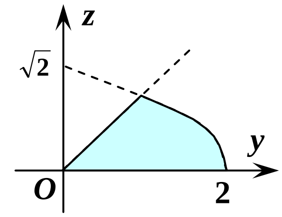
18. 设 D 为由 yOz 平面中的直线 $z = 0$, 直线 $z = y\ (y \geq 0)$及抛物线 $y + z^2 = 2$, 围成的平面区域. 将 D 绕 y 轴旋转一周得旋转体Ω.

(1) 画出平面区域 D 的图形;

(2) 分别写出围成Ω的两块曲面 S_1, S_2 的方程;

(3) 求 S_1, S_2 的交线 l 在 zOx 平面上的投影曲线 C 的方程;

(4) 画出 S_1, S_2 和 l, C 的图形.



解: (1) 平面区域 D 的图形如右图所示:

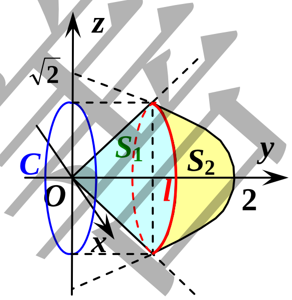
(2) Ω由锥面 S_1: $y=\sqrt{x^2+z^2}$ 和旋转抛物面 S_2: $y = 2 - x^2 - z^2$ 围成.

(3) 由 $y=\sqrt{x^2+z^2}$ 和 $y = 2 - x^2 - z^2$ 消去 y 得 $x^2 + z^2 = 1$.

由此可得 S_1, S_2 的交线 l 在 zOx 平面上的投影曲线

C 的方程: $\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$

(4) S_1, S_2 和 l, C 的图形如右图所示:



四 证明题, 解答题(每小题 4 分, 共 8 分).

19. 设η是线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $b \neq \theta$, ξ_1, ξ_2 是导出组 $Ax = \theta$的基础解系. 证明: η, $\xi_1+\eta$, $\xi_2+\eta$线性无关.

证明: 因为 $A\eta = b \neq \theta$, 所以η不是线性方程组 $Ax = \theta$的解.

而ξ_1, ξ_2是$Ax = \theta$的基础解系, 故η, ξ_1, ξ_2线性无关, 否则η能由ξ_1, ξ_2线性表示, 从而是线性方程组 $Ax = \theta$的解, 矛盾!

假若 $k_1\eta + k_2(\xi_1+\eta) + k_3(\xi_2+\eta) = \theta$, 则$(k_1 + k_2 + k_3)\eta + k_2\xi_1 + k_3\xi_2 = \theta$.

于是$(k_1 + k_2 + k_3) = k_2 = k_3 = 0$, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

所以η, $\xi_1+\eta$, $\xi_2+\eta$线性无关.

20. 设α是 3 维非零实列向量, $\|\alpha\| = \sqrt{2}$. 又 $A = \alpha\alpha^T$.

(1) 求 A 的秩; (2) 求 A 的全部特征值;

(3) 问 A 是否与对角阵相似? (4) 求$|I - A^3|$.

解: (1) 设$\alpha = [a, b, c]^T \neq \theta$, 则 $A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{bmatrix} \neq O$, 且秩$(A) = 1$.

(2) 设$\beta \neq \theta$是 A 的对应于特征值λ的特征向量. 即$\alpha\alpha^T\beta = \lambda\beta$.

若$\alpha^T\beta = 0$, 则$\lambda\beta = \alpha\alpha^T\beta = \theta$, 而$\beta \neq \theta$, 故$\lambda = 0$.

此时, β是$\alpha^Tx = 0$ 的解向量. 而秩$(\alpha^T) = 1$,

故$\alpha^Tx = 0$ 的每个基础解系均由两个线性无关的解向量构成.

即对应于$\lambda = 0$, A 有两个线性无关的特征向量,

若$\alpha^{\mathrm{T}}\beta \neq \mathbf{0}$，则由$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\beta = \lambda\beta$ 可得$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\beta = \lambda\alpha^{\mathrm{T}}\beta$. 从而$\lambda = \alpha^{\mathrm{T}}\alpha$.

此时，由于$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \lambda\alpha$. 故可取$\beta = \alpha$作为对应于$\lambda = \alpha^{\mathrm{T}}\alpha$的特征向量.

综上所述，$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值有：$\lambda = \mathbf{0}$ 和$\lambda = \alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \|\alpha\|^2 = 4$.

(另解) 因为 $\boldsymbol{A}^2 = (\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) = \alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha^{\mathrm{T}} = 4\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = 4\boldsymbol{A}$,

所以 $\boldsymbol{A}^2 - 4\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，即$\lambda^2 - 4\lambda$是 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式,

因而 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能的特征值有：0, 4.

注意到秩$(\boldsymbol{A}) = 1$，可见都是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值有 0(二重)和 4.

(3) 由(2)可见 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

(另解) 因为实矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\alpha\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\alpha^{\mathrm{T}} = \alpha\alpha^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

(4) 由(2)可见存在 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

因此$|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^3| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^3||\boldsymbol{P}| = |(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{P})| = |\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^3|$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4^3 \end{vmatrix} = 1 - 4^3.$$