

2008 级高等数学 (A、B) (上) 期中试卷

一. 填空题 (每个空格 4 分, 本题满分 32 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{x}{2x^2 + 1} \right) =$ _____;
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos(1 - \cos x)$ 与 kx^α 是等价无穷小, 则 $k =$ _____, $\alpha =$ _____;
3. 设 $y = x^{\sin x}$, 则 $dy \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} =$ _____;
4. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^{xy} + \tan(xy) = y$ 所确定的隐函数, 则 $y'(0) =$ _____;
5. $f(x) = x \ln x$ 在 $x=1$ 处带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 _____;
6. 已知曲线 $y = x^2 - ax - b$ 和 $y = -2 + x^2 y^4$ 在点 $(1, -1)$ 处相切, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

二. 单项选择题 (每小题 4 分, 本题满分 12 分)

7. 设 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, 其中常数 a, b, c, d 互不相等, 且 $f'(k) = (k-a)(k-b)(k-c)$, 则 k 的值等于 []
(A) a (B) b (C) c (D) d
8. 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则下列极限一定存在的是 []
(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^\alpha$ (α 为实常数) (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$
(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)$ (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin f(x)$
9. 已知 $f'(a)$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a+2h) - f^2(a-h)}{h} =$ []
(A) $(f'(a))^2$ (B) $2f'(a)f(a)$ (C) $6f'(a)f(a)$ (D) $3f'(a)f(a)$

三. 计算题 (本题满分 27 分)

10. (7 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1-2x)}{\sqrt{1+x \sin x} - e^{x^2}}$
11. (6 分) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \sin x}{\ln x + \cos x}$
12. (7 分) 设 $\begin{cases} x = t + \arctan t + e^{1+\frac{\pi}{2}} \\ y = t^3 + 6t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1}$.
13. (7 分) 设 $y = \sin(f(x^2))$, 其中函数 f 具有二阶连续导数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

四(14). (7 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ae^{2x} + \cos x, & x \leq 0 \\ \frac{\sin(bx)}{x} + x, & x > 0 \end{cases}$ 可导, 试求常数 a 和 b 的值.

五(15). (7 分) 试求函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{tx} - x}{e^{tx} - \sin x}$ 的间断点, 并指出间断点的类型 (需说明理由).

六(16). (9 分) 设 $L(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x}, & x > 0, x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, 证明: $\sqrt{x} \leq L(x) \leq \frac{1+x}{2} \quad (x > 0)$.

七(17). (6 分) 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明: 对于任意的

$\alpha > 0$, 都存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{\alpha f'(\xi)}{b - \xi}$.