08-09-2几代A

一. （30%）填空题

1. 设 n 是正整数，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^n=$ ________________________；

2. 若 B 是可逆矩阵，且分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A & B\\ O & I\end{pmatrix}$ 可交换，则 $A-B=$ ________；

3. 如果向量组 $(1,1,1),(1,2,2),(0,1,k)$ 的秩为 2，则参数 $k=$ ________________；

4. 若 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=3$，则 A 的伴随矩阵的行列式 $|A^*|=$ ____________；

5. 已知 A 是 2 阶方阵，若 $trA=2$，$|A|=-3$，则 A 的特征值为 ________________；

6. 直线 $\begin{cases}y+z=3\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转面的方程为 ____________________；

7. 如果 $x^2-2y^2+z^2+2kxz=1$ 是一双叶双曲面，则参数 k 满足条件 ____________；

8. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的若当标准形是 ________________________；

9. 若矩阵 A,B 满足 $BA^T-A^TB=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$，则 $B^TA-AB^T=$ ________________；

10. 如果矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$ 合同，则参数 a,b 满足条件 ____________。

二.（10%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 X，使得 $XA=2X+B$。

三.（10%）假设 $n\times n$ 矩阵 A 满足 $A^2-6A+8I=O$，并且矩阵 $A-2I$ 的秩 $r(A-2I)=r$，求矩阵 $A+I$ 的行列式 $|A+I|$。

四． （16%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4+a\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$。

1.当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解？有唯一解时，用 Cramer 法则求 x_1。

2.当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 没有解？

3.当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解？有无穷多解时，求方程组的通解。

五． （14%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & b\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$， $\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

1.问：参数 a,b 满足什么条件时，η 是 A 的特征向量？若 η 是 A 的特征向量，求相应的特征值。

2.若 η 是 A 的特征向量，且 A 有一个二重特征值，求 a,b 的值，并讨论 A 是否相似于对角阵。如果 A 相似于对角阵，求对角阵及相应的相似变换矩阵。

六． （8%）设有球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0$，平面 π 过球面 Σ 的球心且垂直于直线 $L: \dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$。求 Σ 与 π 的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程

七． （12%）设 $n\ge 2$，α,β 都是实 n 维列向量，且 α,β 是一标准正交向量组，p,q 都是非零实数，$A=p\alpha\alpha^T+q\beta\beta^T$。

a) 证明 α,β 都是 A 的特征向量，并求相应的特征值；

b) A 相似于对角阵。试说明理由，并求相应的对角阵；

c) 问：当参数 k 满足什么条件时， $kI+A$ 是正定矩阵？