东南大学学生会
Students' union of Southeast University

12-13-2高数AB期末试卷

一、 填空题（本题共9小题，每小题4分，共36分）

1. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ，$x>1$, 则$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=$ ______；

2. 曲线 $y=\dfrac{x^2-2}{x+5}$ 的斜渐近线方程是 ______；

3. 设 $y=y(x)$满足$x^2+y^2-y\mathrm{e}^{xy}=2$, 则曲线 $y=y(x)$在$(0,2)$处的切线方程是______；

4. 设 $f'(x_0)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=$ ______；

5. 当 $x\to 0$时，$f(x)=\sin x-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{6}}$ 是x的___ (填数字)阶无穷小；

6. 函数 $f(x)=10\arctan x-3\ln x$的极大值是______；

7. 抛物线 $y=2x^2-3x+3$在点$(1,2)$处的曲率$k=$ ______；

8. $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^5 x\mathrm{d}x=$ ______ ；

9. 已知 e^{-x}是$f(x)$ 的原函数，则$\displaystyle\int x^2f(\ln x)\mathrm{d}x=$ ______ .

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 求解常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x^2\mathrm{d}y=(xy-x^2)\mathrm{d}x \\ y(1)=1. \end{cases}$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\ln(1+2x)}\sin t^2\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\tan x}$

3. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

止于至善

4. $\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$

5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x.$

三、（**本题满分**6**分**）求曲线$y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{4}}$ 与$x=0$, $x=4$及$y=0$ 所围平面图形绕x轴旋转而成的立体的体 积.

四、（**本题满分**9**分**）设 D是由两条抛物线$y=x^2$与$y=4-3x^2$所围成的平板.

(1) 计算平板D的面积；

(2) 将该平板垂直置于水中，睡眠在$y=4$处，试求平板一侧所受到的水的静压力.

五、（**本题满分**8**分**）设$f(x)$二阶可导，且满足$f(x)=\cos^2 x+\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$, 试求函数$f(x)$.

六、（**本题满分**6**分**）设函数$f(x)$在(a,b)内二阶可导，且对$\forall\ x\in(a,b)$, $f''(x)>0$, 证明：对任意的$x_1,x_2\in(a,b)$且$x_1\neq x_2$及$\lambda\in(0,1)$, 恒有 $f\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

止于至善