01-02-2高数AB期末试卷

一、填空题

1. 若当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $f(x)=\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt$ 与 $g(x)=\ln(1-\alpha x^3)$ 等价，

   则 $\alpha=$_________。

2. 设曲线 C：$\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ y=e^y\sin t+1 \end{cases}$，则 C 在 $t=0$ 所对应点处的法线方程

   为____________________。

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=f(x+y)$ 确定，其中 f 二阶可导，且 $f'\neq 1$，

   则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_____________。

4. 若 $y=\dfrac{x}{2-x}$，则 $y^{(10)}(0)=$_______。

5．若某二阶线性常系数齐次方程 的一个特解为 $y=-3e^x\cos 2x$，

   则该方程为________________。

二、单项选择题

1．设 $y=f(x)$ 是 x 的三次多项式，其图象关于原点对称，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有极小值 -1，则（　　）

（A）$f(x)=-4x^3-x$；　　（B）$f(x)=4x^3-3x$；

（C）$f(x)=5x^3-\dfrac{13}{4}x$；　　（D）$f(x)=-5x^3-\dfrac{3}{4}x$。

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2e^{t(x-2)}+ax-1}{e^{t(x-2)}+1}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则常数 $a=$（　　）

（A）5；　（B）4；　（C）$\dfrac{7}{2}$；　（D）$\dfrac{5}{2}$。

3. 曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})$ 的渐近线（　　）

（A）不存在；（B）有一条；（C）有两条；（D）有三条。

4. 曲线 $y=4(x-1)^2(x+2)^2$ 的拐点个数是（　　）

（A）3；　　（B）2；　　（C）1；　　（D）0。

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)dt}{\sin^2 x}$；　　2. $\int x^2\ln(1-x)dx$

3. $\int \dfrac{x^3}{1+\sqrt{x^2+1}}dx$；　　4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1+\sin x}dx$；

5. $\int_0^{+\infty} \dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$

四、 1. 求方程 $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解。

2．求方程 $y''-6y'+8y=x-4xe^{2x}$ 的通解。

五、 1．设 $f(x)$ 可导，其反函数为 $g(x)$，若 $f(x)$、$g(x)$ 满足关系式

$$\int_0^{f(x)} g(t)dt=\int_0^x \frac{tdt}{e^t+e^{-t}}，且 f(0)=\frac{\pi}{4}，求 f(1)。$$

2．试在曲线 L：$y=e^x$ 位于第二象限的部分上求一点 $P(x,y)$，使过该点的切线与曲线 L、y 轴以及直线 $x=a$（a 为切线与 x 轴交点的横坐标）所围成的面积最小。

六、 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，$f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数），$g(x)$ 为偶函数，

1、证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$；

2、计算 $\int_{-a}^{a}|f(x)|\arctan e^x dx$。

七、（6 分） 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，且满足关系式 $f(x)=1+\int_1^x \dfrac{dt}{t^2+f^4(t)}$，

令 $x_n=f(n),(n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛。