09-10-3 高等数学 B 期中试卷

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 由方程 $xyz+\sin(\pi z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$____；

2. 曲线 $\begin{cases}2z=x+3\\x^2+y^2=1\end{cases}$ 在 yOz 平面上的投影曲线为________________________；

3. 函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数中的系数 b_3 的值是__________；

4. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n n(x-1)^{n-1}$ 的收敛域是 $[-1,3]$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$ 的收敛半径是_________；

5. 设 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为非零向量，且满足 $(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\perp(7\mathbf{a}-5\mathbf{b})$，$(\mathbf{a}-4\mathbf{b})\perp(7\mathbf{a}-2\mathbf{b})$，则 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角为__________.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6. 设直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则 [ ]

（A）L 平行于 π （B）L 在 π 上 （C）L 与 π 斜交 （D）L 垂直于 π

7. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 为 [ ]

(A) $(1,-1,2)$ (B) $(-1,1,2)$ (C) $(1,1,2)$ (D) $(-1,-1,2)$

8. 下列广义积分中收敛的是 [ ]

（A）$\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$ （B）$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$ （C）$\int_2^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}x$ （D）$\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$

9. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$ [ ]

（A）发散 （B）条件收敛 （C）绝对收敛 （D）无法判断敛散性

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

10. 设 $z=f(2x-y,xy^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11. 求通过两平面 $2x+y-4=0$ 与 $y+2z=0$ 的交线及点 $M_0(2,-1,-1)$ 的平面方程.

12. 求两异面直线 $L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x-y+z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$ 之间的距离.

13. 设 $x+y-z=\mathrm{e}^z, x\mathrm{e}^x=\tan t, y=\cos t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$.

14. 将 $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{4-x}$ 在 $x_0=1$ 点展成幂级数，并给出幂级数的收敛域，再求 $f^{(n)}(1)$.

四(15)(本题满分 9 分) 将 $f(x)=x-1(0\le x\le 2)$ 展开为周期为 4 的余弦级数，并设 $S(x)$ 为该余弦级数的和函数，求 $S(3)$ 和 $S(6)$ 的值

五（16）（本题满分 9 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)x^n$ 的和函数，并指明收敛域.

六（17）（本题满分 6 分） 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域具有二阶连续导数，且

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，试证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.