高等数学（B）06-07-3 期中试卷参考答案及评分标准

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1． $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ ；2． $R=2$ ；3． $5x^2-2y+5z^2=4$ ；4． $\lambda=3$；5． $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6． [C]　7． [B]　8． [C]　9． [C]

三. 计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10． **解** L 的方向向量 $\mathbf{a}=\{2,5,6\}$，**（2 分）** Π 的法向量 $\mathbf{n}=\{7,8,9\}$，所求直线的方向向量

$\mathbf{a}\times\mathbf{n}=\{-3,24,-19\}$，**（4 分）** 所求直线的方程：$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{24}=\frac{z-3}{-19}$ **（2 分）**

11． **解** 设 Π 的方程：$Ax+By+Cz=0$，**（2 分）** 由题设条件得 $\begin{cases}6A-3B+2C=0\\4A-B+2C=0\end{cases}$，**（3 分）**

解得 $A=B,C=-\frac{3}{2}B$，取 $B=2$ **（2 分）** 得 Π 的方程：$2x+2y-3z=0$ **（1 分）**

12． **解** $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=f_1+f_2\cdot(g_1+2xg_2)$ **（3 分）**

$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=f_{11}+2f_{12}\cdot(g_1+2xg_2)+f_{22}\cdot(g_1+2xg_2)^2+f_2\cdot(g_{11}+4xg_{12}+4x^2g_{22}+2g_2)$ **（5 分）**

13. **解** $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{1+(x-1)}-\frac{2}{1-(x-1)}$ **（3 分）** $=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n-2\right)(x-1)^n$ **（4 分）**

$x\in(0,2)$ **（1 分）**

14． **解** 记 $u_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$，当 $|x|\le 1$ 时，$\lim_{n\to\infty}u_n(x)\ne 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$ 发散；**（3 分）**

当 $|x|>1$ 时，$u_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}\le\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^n$ 收敛，由比较判别法得知级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$ 收敛. **（4 分）** 收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ **（1 分）**

四（15）.（本题满分 8 分）

解 首先对 $f(x)$ 在 $-\pi \le x < 0$ 上作奇延拓, 再以 2π 为周期作周期延拓, 得

$a_n = 0\ (n = 0,1,2,\cdots)$，**（2 分）** $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\pi - x}{2}\sin nx\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\ \ (n = 1,2,\cdots)$，**（3 分）**

$f(x) = \dfrac{\pi - x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx \quad (0 < x \le \pi)$ **（3 分）**

五（16）.（本题满分 8 分）

解 设 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$，其收敛域为 $[-1,1]$，**（2 分）** $S''(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1} = \dfrac{2}{1+x^2}$，

$x \in (-1,1)$，**（2 分）** $S'(0) = S(0) = 0$，$S'(x) = 2\arctan x$，$S(x) = 2x\arctan x - \ln\left(1+x^2\right)$

（3 分） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} - \ln\dfrac{4}{3}$ **（1 分）**

六（17）.（本题满分 8 分）

解 $u_n = \sqrt[n]{a} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\ln a - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{2}\ln^2 a + \dfrac{1}{8}\right)\dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **（3 分）**

（1）当 $\ln a - \dfrac{1}{2} \ne 0$ 时, 即 $a \ne \sqrt{\mathrm{e}}$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \sim \left(\ln a - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{n} \quad (n \to \infty)$, 当 $\ln a - \dfrac{1}{2} > 0$ 时，为正项级数，当 $\ln a - \dfrac{1}{2} < 0$ 时，为负项级数，由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right)$ 发散；**（3 分）**

（2）当 $\ln a - \dfrac{1}{2} = 0$ 时，即 $a = \sqrt{\mathrm{e}}$，$\sqrt[n]{a} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \sim \left(\dfrac{1}{2}\ln^2 a + \dfrac{1}{8}\right)\dfrac{1}{n^2} \quad (n \to \infty)$，

由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right)$ 收敛。**（2 分）**