习 题 课

一、填空题

1．设函数 $f(x)=x^2$，$0\le x\le\pi$，若 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx\ (n=1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{\pi}{3})+S(\frac{5\pi}{3})=$ ________。

2．设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x<\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于_______。

3．在 $(-\pi,\pi)$ 内将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 展开为傅里叶级数，则 $a_0=$ _______。

4．将函数 $f(x)=1-|x|$ 在 $[-1,1]$ 上展开成以 2 为周期的余弦级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则其中系数 a_3 的值为_______。

5．函数 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期，且在 $[-2,2]$ 上有 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0,\\ 1, & 0<x<2.\end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时，$b_1=$ ______。

6．设以 2π 为周期的函数，在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\pi\le x<0,\\ 2-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$ 它的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为______。

二、选择题

1．设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 1, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$，$f(x)$ 以 2π 为周期的正弦级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(3\pi)$ 等于（　　）

（A）1；　　（B）−1；　　（C）$\frac{1}{2}$；　　（D）0.

2．设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1. \end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$，

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx(n=0,1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{5}{2})=$（　　）。

三、解答题

1．将 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ 展开成正弦级数，并写出该级数的和函数 $S(x)$ 的表达式。

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<\frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4}\le x\le\pi. \end{cases}$ 把 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的余弦函数，并写出该级数和函数 $S(x)$ 的表达式。

3． 将 $f(x)=\pi-x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数 。

4． 将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数，并求

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$$ 的和。

5．将 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。