2010 级高等数学（A、B）（上）期中试卷

一. 填空题（每个空格 4 分，本题满分 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=$________；

2. 已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}, x>0\\ a\,\mathrm{e}^{x}\quad, \quad x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$________；

3. 设 $f(x)=\arctan \mathrm{e}^{x}$, 则微分 $\mathrm{d}f(x)=$________；

4. 设 $f(x)=x^{2010}\cos x$，则 $f^{(2010)}(0)=$________；

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1-x\mathrm{e}^{2y}$ 所确定的隐函数，则 $y'(0)=$________；

6. 曲线 $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=16$ 在点 $(4,4)$ 处的切线方程为________.

二. 单项选择题（每小题 4 分，本题满分 12 分）

7. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin ax$ 与 $x^{2}\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 [　　]

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$ (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$ (C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$ (D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\frac{\pi x}{2}\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}$ 的间断点 [　　]

（A）都是可去间断点　（B）都是跳跃间断点

（C）都是无穷间断点　（D）分别是可去间断点、跳跃间断点与无穷间断点

9. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导的一个充分条件是 [　　]

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left(f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right)$ 存在　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

三. 计算题（每小题 8 分，本题满分 32 分）

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$

11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^{2}+1}+\dfrac{n+2}{n^{2}+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^{2}+n}\right)$

12．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-2\arctan t \\ y=\dfrac{t^3}{3}-t \end{cases}$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

13. 写出函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $x=1$ 处的带有 Lagrange 余项的 3 阶 Taylor 公式.

四(14)．（**13 分**）设 a 和 b 都是实常数, $b<0$，定义 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\left(x^b\right), x>0 \\ 0, \quad x\le 0 \end{cases}$，

回答下列问题，并说明理由。

（1）当 a 、b 满足什么条件时，$f(x)$ 不是连续函数？

（2）当 a 、b 满足什么条件时，$f(x)$ 连续，但不可导？

（3）当 a 、b 满足什么条件时，$f(x)$ 可导，但 $f'(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上无界？

（4）当 a 、b 满足什么条件时，$f'(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有界，但 $f'(x)$ 不连续？

（5）当 a 、b 满足什么条件时，$f'(x)$ 连续？

五(15)．（**8 分**）对不同的实数 a，讨论方程 $x\ln x=a$ 有几个实根.

六(16)．（**6 分**）设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，且 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加，试证明：若 $x_0\in(a,b)$，对任意 $x\in(a,b)$，有 $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

七(17)．（**5 分**）设 $f\in C[a,b]$，且 f 在 (a,b) 内有二阶导数，试证存在 $c\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c).$$