11-12-3高数B期末A卷参考答案及评分标准

一、 填空题（本题共9小题，每小题4分，共36分）

1. $y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$; 2. 3; 3. $\frac{\pi}{4}$; 4. $2x+y-4=0$;

5. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{3-x}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y$;

6. $\frac{\sqrt{1378}}{3}$; 7. 5π; 8. $\frac{1}{5}x^5-y^5+2x^2y^3+C$; 9. $8\sqrt{3}\pi$

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 解 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (x-1)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D (y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$ (2+2+2+1分)

2. 解 $A=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(\sqrt{1+4(x^2+y^2)}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6-x^2-y^2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (2+2分)

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(\sqrt{1+4\rho^2}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6-\rho^2}})\rho\mathrm{d}\rho=(\frac{49}{3}-4\sqrt{6})\pi$$ (3分)

3. 解 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^1\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-y^2)\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ (3+1+3分)

4. 解 设所求直线 L_1 与 z 轴的交点为 $(0,0,z_0)$, 则 L_1 的方向向量 $\{3,-1,2-z_0\}$ 与直线 L 的方向向量 $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$ 垂直,即$3-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(2-z_0)=0$, $z_0=\frac{19}{2}$, (4分)

L_1 的方向向量为 $\{3,-1,-\frac{15}{2}\}$, L_1 的方程为 $\frac{x-3}{6}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-15}$ (3分)

5. 解 $D=D_1\cup D_2$, 其中 $D_1=\{(\rho,\theta)|\sqrt{\cos 2\theta}\le\rho\le\frac{1}{\cos\theta},0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$,

$D_2=\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le 2\cos\theta,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$ (3分)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\cos 2\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

(2分) (2分)

三、 （本题满分8分） 解 记点 $D(2,1)$,补有向线段 $\overline{BD},\overline{DA}$,由Green公式得

$$I=-12\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^2 x\mathrm{d}x+\int_0^1(\cos y-2\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y-\int_2^1(12x+\mathrm{e})\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1+\sin 1$$

(4分) (1分) (1分) (2分)

四、 （本题满分8分） 解补一个面 $\Sigma_1:z=0$, 取下侧, Σ 与 Σ_1 所围区域记为 Ω,由Gauss公式得 $I=2\iiint\limits_\Omega(1+z)\mathrm{d}v+3\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{20}{3}\pi+6\pi=\frac{38}{3}\pi$

(3分) (1分) (3分) (1分)

五、 （本题满分7分） 解 设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 切平面方程为

$\frac{x_0}{2}x+2y_0y+z=8-z_0$,(1分)三个坐标平面与切平面所围四面体的体积为

$V^*=\frac{(8-z_0)^3}{6x_0y_0}$,Lagrange函数为 $L=\frac{(8-z_0)^3}{6x_0y_0}+\lambda(\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0-4)$,令

$L_{x_0}=-\frac{(8-z_0)^3}{6x_0^2y_0}+\frac{1}{2}\lambda x_0=0$, $L_{y_0}=-\frac{(8-z_0)^3}{6x_0y_0^2}+2\lambda y_0=0$,

$L_{z_0}=-\frac{(8-z_0)^2}{2x_0y_0}+\lambda=0$,解得 $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,2)$,由问题的实际意义知,该点即为所求切点,(4分)最小体积 $V_{\min}=V^*-\frac{\pi}{4}\int_0^4 2(4-z)\mathrm{d}z=18-4\pi$ (2分)

六、 （本题满分6分） 解 设球体方程为 $\Omega:x^2+y^2+z^2\le 2Rz$, Ox 轴为其切线,则

$$I_x=\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2)\mathrm{d}v=\pi\int_0^{2R}z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\int_0^{2R}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2Rz-z^2}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

(2分) (2分)

$$=\frac{8}{5}\pi R^5+\frac{4}{15}\pi R^5=\frac{28}{15}\pi R^5=\frac{7}{5}MR^2$$ (2分)