05-06-2几代B补考

一(30%)填空题

1. 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)$。若 A 的行列式 $|A|=2$，则 B 的行列式 $|B|=$_________；

2. 直角坐标系中经过点 $P(1,2,1)$，并且与直线 l：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 垂直的平面的方程为_______；

3. 坐标系中点 $A(1,1,2)$，$B(-2,-1,1)$，$C(3,a,b)$ 共线的充分必要条件是参数 a,b 满足条件_______；

4. 假设 $\alpha=(1,-1),\beta=(2,3)$，则 $\alpha^T\beta=$______；$\alpha\beta^T=$_______；

5. 若 A 为 n 阶方阵，则方阵 $B=\begin{pmatrix}-I & A\\ O & 2I\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $B^{-1}=$______；

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 2 & 0 & a\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$，若 A 不可逆，则参数 a 满足条件_______，这时，A 的秩为__________；

7. 假设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+2I=O$，但 $A\neq I$，则可以肯定，A 的一个特征值等于_______；

8. 假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 相似于对角阵，并且 2 是 A 的一个二重特征值，则参数 x,y 的值分别等于_______。

二（12%）假设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$。求矩阵方程 $2X=B+XA$ 的解。

三（14%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1+\lambda\end{pmatrix}$。

1. 问：当参数 λ 取什么值时，线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解、有无穷多组解、无解？
2. 当线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多组解时，求出其通解。

四（14%）已知三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & y\end{pmatrix}$ 相似，求参数 x,y 的值，

并求一可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$。

五（12%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2kx_1x_3$

1. 求一可逆线性变换将 f 变成其标准形；
2. 问：当参数 k 取什么值时，f 是正定二次型？
3. 试就参数 k 不同的取值，讨论二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 的类型；

六 （12%）假设空间直角坐标系中，二次曲面 π_1 的方程为：$x^2+4y^2=2z$；π_2 为曲线 $\begin{cases} z=2-3y^2 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面。

1. 曲面 π_2 的方程为______________________；
2. π_1 与 π_2 的交线向 xy 平面作垂直投影所得的投影曲线 l 的方程为__________；
3. 画出 π_1 与 π_2 所围成的立体的草图（请给坐标轴标上名称），并在同一坐标系中

   画出它们的交线在 $x-y$ 平面上的投影曲线所围成的有限区域的草图。

七（6%）假设 A 是 n 阶正交阵。若 A 是实对称矩阵，证明：A 的特征值只能是 1 和 -1，并且，若 $A\neq I$，则 -1 一定是 A 的特征值。