

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

07-08-3 高数 B 期中试卷

一. 单项选择题(本题共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{a}{\sqrt{n^3}} \right)$ (常数 $a > 0$) []
(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 敛散性与 a 的取值有关
2. 下列反常积分发散的是 []
(A) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \arctan x}{1+x^3} dx$ (B) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ (C) $\int_2^3 \frac{1}{\ln(x-1)} dx$ (D) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$
3. 已知直线 $L_1: \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{5}$ 与 $L_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4}$, 则 L_1 与 L_2 []
(A) 相交 (B) 异面 (C) 平行但不重合 (D) 重合
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$,
 $-\infty < x < +\infty$, 其中 $a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx$ ($n=0,1,2,\dots$),
 $b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx$ ($n=1,2,\dots$), 则 $S(3) =$ []
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 0 (D) 2

二. 填空题(本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

5. 若 $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 垂直于 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 且 $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}|\mathbf{b}|$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 _____;
6. 曲线 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面方程是 _____;
7. 曲线 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 5 \\ x^2 - y^2 - 2z^2 = 0 \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影曲线方程是 _____;
8. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=4$ 处条件收敛, 则该幂级数的收敛半径为 _____;
9. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x-2)^{2n+1}$ 的收敛域为 _____.

三. 计算下列各题(本题共 4 小题, 每小题 9 分, 满分 36 分)

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

10. 求过点 $(1, 2, 1)$ 且与直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 及直线 $\frac{x}{0} = \frac{y+2}{-1} = -z$ 都平行的平面方程.

点 $(-4, 6, -2)$, 与平面 $6x-2y-3z+1=0$ 平行, 且与直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ 相交的直线方程.

12. 将函数 $f(x) = \ln(2x^2 + x - 3)$ 展开为 $x-3$ 的幂级数, 并求收敛域.

13. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{2n}$ 的和函数, 并指明收敛域

四 (14). (本题满分 9 分) 求母线平行于向量 $\mathbf{j} + \mathbf{k}$, 准线为 $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ 的柱面方程.

五 (15). (本题满分 9 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$ 的敛散性.

六 (16). (本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = \frac{\pi - 2x}{4}$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成正弦级数, 并求级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.