2003 级(非电类)高等数学(下)期中试卷 A.卷

一 填空题.

1. 直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角 $\theta=$________.

2. 已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{2}$, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, 则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$________.

3. 已知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n}}{n^p}$ 收敛，则 p 应满足的条件是___________.

4. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域为_____________.

5. 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 在 x=3 处条件收敛，则该幂级数的收敛半径为___________.

6. 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ 的和为______________.

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1, \end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$ ，其中 $a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$. 则 $S(-\frac{5}{2})=$____________.

二 单项选择题.

1. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为非零向量，则与 $\vec{a}$ 不垂直的向量是 ( )

   (A) $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$; (B) $\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$; (C) $\vec{a}\times\vec{b}$; (D) $\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$.

2. 点 (1,1,1) 到平面 $2x+y+2z+5=0$ 的距离 d=___________. ( )

   (A) $\dfrac{10}{3}$; (B) $\dfrac{3}{10}$; (C) 3; (D) 10.

3. 直线 L: $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $\Pi: 4x-2y-2z+4=0$ 的关系为 ( )

   （A）平行，但直线不在平面上； （B）直线在平面上；

（C）垂直相交；　　　　(D) 相交但不垂直.

4. 下面说法中正确的是　　（　　）

（A）　若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，且$u_n \ge v_n$，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也收敛；

（B）　若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\ 2}$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{\ 2}$都收敛；

（C）　若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$u_n \ge \frac{1}{n}$;

（D）　若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\ 2}$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{\ 2}$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$收敛.

三 解答题.

1. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} \le x \le \pi. \end{cases}$$

把$f(x)$展开为以2π为周期的余弦级数，并写出该级数和函数$S(x)$的表达式.

2. 已知直线$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$和直线$L_2: x+1 = y-1 = z$相交，求$\lambda$的值.

3. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{n} (a > 0)$的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

四 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 2^n}$的收敛域与和函数.

五 求过点 M(2, 1, 3) 且与直线 L:$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ x+3z+1=0 \end{cases}$垂直相交的直线方程.

六 将$f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展成x的幂级数，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

七 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内有连续的二阶导数，且$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$绝对收敛.