05-06-2几代B答案

一 (24%)填空题:

1. 过点$P(1, 0, 1)$且与直线$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$垂直的平面的方程为$\underline{2x+y+z-3=0}$;
2. 设$P=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 则$P^5AQ^5=\underline{\begin{bmatrix}c+5d&d\\a+5b&b\end{bmatrix}}$.
3. 直角坐标系中向量$\alpha=(1, 1, 2)$与$\beta=(1, 0, 1)$的向量积为$\underline{(1, 1, -1)}$;
4. 若3×3矩阵A的秩为2, α_1, α_2是线性方程组$Ax=b$的解向量, 并且$\alpha_1+\alpha_2=(2, 2, 4)^T$, $\alpha_1-\alpha_2=(0, 1, 1)^T$, 则$Ax=b$的通解是$\underline{x=k(0, 1, 1)^T+(1, 3/2, 5/2)^T}$.
5. 设A是3×3矩阵, 若矩阵$I+A$, $2I-A$, $2I-3A$均不可逆(其中I表示3阶单位矩阵), 则行列式$|A|=\underline{-4/3}$.
6. 若3是$n\times n$矩阵A的特征值, 行列式$|A|=2$, 则A的伴随矩阵A^*的一个特征值为$\underline{3/2}$.
7. 若$x^2+2y^2+z^2+2kxz=1$表示一单叶双曲面, 则k满足条件是$\underline{k>1或\ k<-1}$.
8. 设α是n维列向量$(n>1)$, 则n阶方阵$A=\alpha\alpha^T$的行列式$|A|$的值为$\underline{0}$.

二 (12%) 设$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&-1\end{bmatrix}$, 求$A^{-1}, B^{-1}$以及矩阵$X$, 使

$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}C\\O\end{bmatrix}$, 其中$O$表示相应的零矩阵.

解:
$$[A, I, C]=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&1&3\\0&2&1&0&1&0&2&0\\0&0&-1&0&0&1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1&0&2\\0&1&0&0&1/2&1/2&1/2&-1/2\\0&0&1&0&0&-1&1&1\end{bmatrix}=[I, A^{-1}, A^{-1}C],$$

$$[B, I]=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-2&1\\0&1&3/2&-1/2\end{bmatrix}=[I, B^{-1}].$$

于是可得$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1/2&1/2\\0&0&-1\end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{bmatrix}$,

$$X=\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}C\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{-1}C\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\1/2&-1/2\\1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

三 (12%) 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，问：参数$l, m$满足什么条件时，向量组$\alpha_1 + l\alpha_2$, $\alpha_2 + m\alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_3$也线性无关？

解：因为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$.

向量组$\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$线性无关等价于秩$(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) = 3$.

而$(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$，其中$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}$，

并且有秩$(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) \le$ 秩$(P) \le 3$.

所以向量组$\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩$(P) = 3 \Leftrightarrow$ 行列式$|P| = 1 + lm \ne 0$ $\Leftrightarrow lm \ne -1$.

四 (14%) 已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为：

$$\pi_1: x + y + 2z = 1,\ \pi_2: x + \lambda y + z = 2,\ \pi_3: \lambda x + y + z = 1+\lambda.$$

1. 问：λ取何值时这三个平面交于一点？交于一直线？没有公共交点？
2. 当它们交于一直线时，求该直线的方程.

解：1. 令$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \end{bmatrix} = C.$$

这三个平面交于一点 $\Leftrightarrow$ 秩$(A) =$ 秩$(B) = 3 \Leftrightarrow \lambda \ne 0$且$\lambda \ne 1$.

这三个平面交于一直线 $\Leftrightarrow$ 秩$(A) =$ 秩$(B) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

这三个平面没有公共交点 $\Leftrightarrow$ 秩$(A) <$ 秩$(B) \Leftrightarrow \lambda = 0$.

2. 当这三个平面交于一直线时，$\lambda = 1$，

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是可得交线的方程为$\begin{cases} x + y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$.

五 (12%) 已知3×3矩阵$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$有一个二重特征值.

1. 试求参数a的值，并讨论矩阵A是否相似于对角阵.
2. 如果A相似于对角阵，求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP = \Lambda$是对角阵.

解：1. A的特征多项式$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ a & \lambda-2 & -a-3 \\ a+3 & 0 & \lambda-a-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-a-2)$.

A的特征值为$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = a + 2$.

当$a=-3$时, $\lambda_3=\lambda_1=-1$, $-I-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\-3&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 秩$(-I-A)=1$,

因而$\lambda_3=\lambda_1=-1$有2个线性无关的特征向量, 此时A相似于对角阵.

当$a=0$时, $\lambda_3=\lambda_2=2$, $2I-A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&-3\\3&0&0\end{bmatrix}$, 秩$(2I-A)=2$,

因而$\lambda_3=\lambda_2=2$只有1个线性无关的特征向量, 此时A不相似于对角阵.

2. 当$a=-3$时, $(-I-A)x=0$的基础解系可取为

$$\xi_1=(1,-1,0)^T,\ \xi_2=(0,0,1)^T,$$

它们已经正交, 单位化得$p_1=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)^T$, $p_2=(0,0,1)^T$.

$2I-A=\begin{bmatrix}3&0&0\\-3&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $(2I-A)x=0$的基础解系可取为

$$\xi_3=(0,1,0)^T,$$

令$p_3=\xi_3=(0,1,0)^T$, 则$P=(p_1,p_2,p_3)$可逆, 且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

六 (12%) 假设A, B是实对称矩阵. 证明: 分块矩阵$M=\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}$是正定矩阵的充分必要条件是$A$, B都是正定矩阵.

证明: (充分性)

[方法一]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow$ 对于任意非零的列向量X, Y(其中X, Y的维数分别等于A, B的阶数), 有

$$X^TAX>0,\ Y^TBY>0$$

$\Rightarrow$ 对于任意非零的列向量$Z=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$(其中$X$, Y, Z的维数分别等于A, B, M的阶数),

$$Z^TMZ=[X^T,Y^T]\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=X^TAX+Y^TBY>0$$

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

[方法二]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow A$的特征值$\lambda_1,\dots,\lambda_s$以及$B$的特征值$\mu_1,\dots,\mu_t$都大于零(其中$s$, t分别为A, B的阶数)

$\Rightarrow M=\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}$的特征值$\lambda_1,\dots,\lambda_s,\mu_1,\dots,\mu_t$都大于零

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

[方法三]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q使得$P^TAP = I_s$, $Q^TBQ = I_t$, (其中I_s, I_t为单位矩阵，阶数分别与A, B的阶数相同)

$\Rightarrow$ 存在可逆矩阵$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$，使得

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^T & O \\ O & Q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^TAP & O \\ O & Q^TBQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_t \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

[方法四]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q使得$A = P^TP$, $B = Q^TQ$ (其中P, Q的阶数分别与A, B的阶数相同)

$\Rightarrow$ 存在可逆矩阵$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$，使得

$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^TP & O \\ O & Q^TQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

[方法五]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow A, B$的各阶顺序主子式都大于零

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$的各阶顺序主子式都大于零

(事实上，设A, B的阶数分别为s, t; Δ_k是M的k阶顺序主子式，
则当k小于或等于s时，Δ_k也是A的k阶顺序主子式，因而大于零；
当k大于s时，$\Delta_k = |A|\Delta_{k-s}$，其中$\Delta_{k-s}$是$B$的$k-s$阶顺序主子式，因而$\Delta_k$大于零)

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

(必要性)

[方法一]

M是正定矩阵

$\Rightarrow$ 对于任意非零的列向量Z (其中Z的维数等于M的阶数)，有$Z^TMZ > 0$

$\Rightarrow$ 对于任意非零的列向量X, Y(其中X, Y的维数分别等于A, B的阶数), $Z_1 = \begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix}$和

$Z_2 = \begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix}$都非零(其中$Z_1, Z_2$的维数都等于$M$的阶数, θ为相应的零向量)，于是有

$$X^TAX = [X^T, \theta^T] \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix} = Z_1^TMZ_1 > 0,$$

$$Y^TBY = [\theta^T, Y^T] \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix} = Z_2^TMZ_2 > 0$$

$\Rightarrow A, B$都是正定矩阵.

[方法二]

设A的特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, B的特征值$\mu_1, \ldots, \mu_t$ (其中s, t分别为A, B的阶数),
则M 的特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_t$.
若M是正定矩阵, 则$\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_t$都大于零, 因而$A, B$都是正定矩阵.

[方法三]

设A, B的阶数分别为s, t.
若M是正定矩阵, 则存在$s + t$阶可逆矩阵U使得

$$U^TMU = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_t \end{bmatrix}$$ (其中I_s, I_t分别为s, t阶单位矩阵)

将U分块为$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$, 其中$U_{11}, U_{22}$分别为$s, t$阶矩阵,

则$$\begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_t \end{bmatrix} = U^TMU = \begin{bmatrix} U_{11}^T & U_{21}^T \\ U_{12}^T & U_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^TAU_{11} & O \\ O & U_{22}^TBU_{22} \end{bmatrix}.$$

因而U_{11}, U_{22}都可逆, 且$U_{11}^TAU_{11} = I_s$, $U_{22}^TBU_{22} = I_t$.
所以A, B都是正定矩阵.

[方法四]

设A, B的阶数分别为s, t.
若$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$是正定矩阵, 则$M$的各阶顺序主子式都大于零.
于是, 我们可以断言A, B的各阶顺序主子式都大于零.
事实上, 假若A有一个k阶顺序主子式$\Delta_k \le 0$,
由于Δ_k也是M的k阶顺序主子式, 这就与M是正定矩阵矛盾!
假若A的各阶顺序主子式都大于零, 而B有一个k阶顺序主子式$\Delta_k \le 0$,
则M的$s + k$阶顺序主子式的值等于$|A|\Delta_k \le 0$ (注意行列式$|A| > 0$),
这又与M是正定矩阵矛盾!
所以A, B都是正定矩阵.

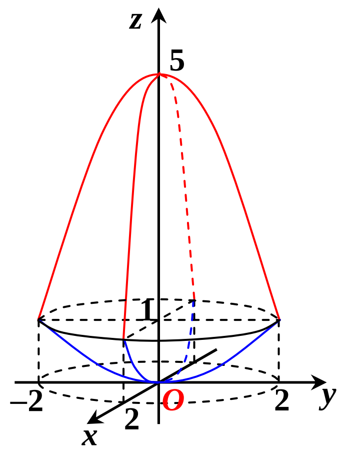
七 (8%)由与平面$z = -1$及点$M(0, 0, 1)$等距离运动的动点$P(x, y, z)$所生成的曲面记为π_1, 将yOz平面上曲线$\begin{cases} y^2 + z = 5 \\ x = 0 \end{cases}$以$z$轴为旋转轴所生成的旋转曲面记为$\pi_2$. 则

1. π_1的方程为 $\underline{4z = x^2 + y^2}$.

2. π_2的方程为 $\underline{x^2 + y^2 + z = 5}$.

3. π_1与π_2的交线在xOy平面上的投影曲线方程是 $\underline{x^2 + y^2 = 4}$.

4. 在右边的坐标系中画出由这两个曲面所围成的有限立体的简图.



八 (6%)证明题.

1. 若2×2矩阵A的行列式$|A| < 0$. 证明: A一定相似于对角阵.

证明: 设A的特征值为λ_1, λ_2, 则$\lambda_1\lambda_2 = |A| < 0$.

所以λ_1和λ_2是异号的两个实数.

而A的阶数恰好为2, 因而A一定相似于对角阵.

2. 假设$n\times n$实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, α是A的属于特征值λ_1的单位特征向量, 矩阵$B = A - \lambda_1\alpha\alpha^T$. 证明: B的特征值为$0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

证明: 由假设条件可知, 存在n阶正交矩阵$P = [\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

于是

$$P^TBP = P^T(A - \lambda_1\alpha\alpha^T)P = P^TAP - \lambda_1P^T(\alpha\alpha^T)P = P^TAP - \lambda_1(P^T\alpha)(\alpha^TP)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \lambda_1\left(\begin{bmatrix} \alpha^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix}\alpha\right)(\alpha^T[\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n])$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}[1, 0, \ldots, 0]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$