08-09-2高数AB期末试卷

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. 函数 $F(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-2\right)\mathrm{d}t\ (x>0)$ 的单调增加区间为____________；

2. 已知 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^{t^2}x\arctan(ax)\mathrm{d}x}{t^6}=1$，则 $a=$______；

3. 曲线 $y=x^3-6x^2+3x+5$ 的拐点是______________；

4. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{3(2+x)^2}$ 的斜渐近线的方程是_____________；

5. 二阶常系数线性非齐次微分方程 $y''+y'-6y=5\mathrm{e}^{2x}$ 的特解形式是 $y^*=$____；

6. 设 θ 是常数，若对 $\forall x>0$，有 $\int_0^x\ln t\mathrm{d}t=x\ln\left(\dfrac{\theta x}{2}\right)$，则 $\theta=$________；

7. $\int_0^{2\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=$________________；

8. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=$_______；

9. 设 $f(x)=\int_1^x\cos t^2\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$______________.

二. 按要求计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin t^3}{t}\mathrm{d}t}{x(1-\cos x)}$

11. $\int_0^2\left(x^2\sqrt{4-x^2}+(x-1)^4\sin(x-1)\right)\mathrm{d}x$

12．已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$

13．设 $f(x)=2+\int_0^x \frac{x+\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$, $p(x)=ax^2+bx+c$，求常数 a、b、c，使得 $p(0)=f(0), p'(0)=f'(0), p''(0)=f''(0)$。

14。$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}\mathrm{d}x$

三（15）.（本题满分 8 分）求微分方程 $y''+y=\sin x+2\mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=0$ 的特解.

四(16).(本题满分 7 分)设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续,且恒取正值,若对 $\forall x\in(0,+\infty)$，f 在 $[0,x]$ 上的积分（平）均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值，试求 $f(x)$ 的表达式.

五（17）.（本题满分 7 分） 在 xOy 平面上将连接原点 $O(0,0)$ 和点 $A(1,0)$ 的线段 OA（即区间 $[0,1]$）作 n 等分，分点记作 $P_k\left(\frac{k}{n},0\right)$，$k=1,2,\cdots,n-1$，过 P_k 作抛物线 $y=x^2$ 切线，切点为 Q_k，（1）设三角形 ΔP_kQ_kA 的面积为 S_k，求 S_k；（2）求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$.

六（18）.（本题满分 6 分）试比较 $\sqrt{2}-1$ 与 $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ 的大小，并给出证明.**（注：若通过比较这两个数的近似值确定大小关系，则不得分）**

七（19）.（本题满分 6 分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续可导，$f(0)=f(2)=0$，求证：

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le\max_{0\le x\le 2}\left|f'(x)\right|$$