

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

10-11-2几代B

一. 填空(每空 2 分, 共 30 分)

1. 设向量 $\alpha = (1, 0, 1)$, $\beta = (0, 2, 2)$, 矩阵 $A = \alpha^T \beta$, 则 $A^{10} =$ _____,
 A 的秩 $r(A) =$ _____, A 的行列式 $|A| =$ _____,
 α 与 β 的夹角为 _____, 若 γ 是垂直于 α, β 的单位向量,
则 $\gamma =$ _____.
2. 设平面 π 过点 $P(1, 0, -1)$ 且垂直于直线 $l: \begin{cases} x = t - 9, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t, \end{cases}$ 则平面 π 的方程为 _____,
直线 l 与平面 π 的交点坐标为 _____.
3. 原点 O 到平面 $x + y - z + 3 = 0$ 的距离为 _____.
3. 设 A, B 为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} 2A & O \\ O & AB \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.
4. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $a =$ _____, 这个向量组的一个极大线性无关组是 _____.
5. 向量空间 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \right\}$ 的一组基为 _____,
 V 的维数 $\dim V =$ _____.
6. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 中, _____ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, _____ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 合同.

二. (6 分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

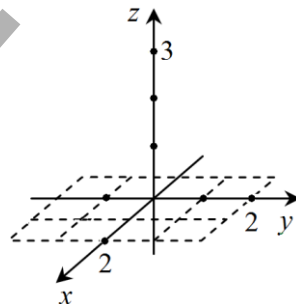
三. (8 分) 设三个平面 $\pi_1: x + 2y + z = 0$; $\pi_2: 2x + 5y + z = 1$; $\pi_3: x - y + az = b$ 交于一条直线 l .

1. 求参数 a, b 的值.
2. 求直线 l 的方向向量和对称方程.

四. (8 分) 设 3×2 矩阵 X 满足 $AX = B - X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, 求 X .

五. (8 分) 设 S 为曲线 $\begin{cases} y^2 - z - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面.

1. 曲面 S 的方程为_____.
2. 设曲面 S 与平面 $2x + 2y - z - 2 = 0$ 的交线为 c . 求曲线 c 到 xOy 平面的投影柱面 S_1 和投影曲线 c_1 的方程.
3. 在右边的坐标系中作出曲面 S 和曲线 c_1 的图形



六. (20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. 求 A 的特征值为_____.
2. 求 A 的所有特征向量为_____.
3. A 是否相似于对角矩阵? 请说明理由.
4. 若 $B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 与 A 相似, 求 x, y .
5. 若 $f(x) = x^2 - x - 1$, 则行列式 $|f(A)| =$ _____.

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

七. (10 分) 用配方法把二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + kz^2 + 4yz$ 化为标准形. 请写出所用的可逆线性变换, 并就参数 k 不同的取值范围, 讨论二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 的类型.

八. (10 分)

1. 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq O$, η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解. 证明:

(1) $\eta_1 - \eta_2$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

(2) 存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得 $A^* = (k_1(\eta_1 - \eta_2), k_2(\eta_1 - \eta_2), \dots, k_n(\eta_1 - \eta_2))$.

2. 设 A 为 3 阶实矩阵, 而且 $\|A\alpha\| = \|\alpha\|$ 对于任意的 3 维列向量 α 都成立. 证明: A 为正交矩阵.