2006 级高等数学（A、B）（上）期中试卷

一. 填空题（前四题每题 4 分，第 5 题 8 分，满分 24 分）

1．函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|(x-1)}$ 的全部间断点分别是 ，它们的类型依次分别为_____；

2．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则 $a=$， $b=$；

3．设 $y=\arctan f(x)$，其中 $f(x)$ 为可微函数，则微分 $\mathrm{d}y=$；

4．设 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1\\ x^3, & x\le 1\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$， $b=$；

5．举出符合各题要求的一例，并将其填写在横线上：

（1）在 $x=0$ 处不连续，但当 $x\to 0$ 时，极限存在的函数有

（2）在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 时不可导的函数有

（3）在 $x=0$ 处导数为 0，但 $x=0$ 不为极值点的连续函数有

（4）属于“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”未定型，且存在有限极限，但极限不能用洛必达法则求得的有

二. 单项选择题（每题 4 分，满分 12 分）

1．设 $f(x)$ 是单调增函数， $g(x)$ 是单调减函数，且复合函数 $f\left(f(x)\right), f\left(g(x)\right)$，$g\left(f(x)\right), g\left(g(x)\right)$ 都有意义，则下列函数组中全为单调减函数的是 [ ]

(A) $f\left(f(x)\right), f\left(g(x)\right)$ (B) $g\left(f(x)\right), g\left(g(x)\right)$

(C) $f\left(g(x)\right), g\left(f(x)\right)$ (D) $g\left(g(x)\right), f\left(f(x)\right)$

2．当 $x\to 0$ 时，若 $y=\ln(1+x)-ax-bx^2$ 是比 x^2 更高阶的无穷小，则 [ ]

(A) $a=1,b=\dfrac{1}{2}$ (B) $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$ (C) $a=-1,b=\dfrac{1}{2}$ (D) $a=-1,b=-\dfrac{1}{2}$

3．下面四个论述中正确的是 [ ]

(A) 若 $x_n\ge 0(n=1,2,\cdots)$，且数列 $\{x_n\}$ 单调递减，则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且其极限 $a>0$

(B) 若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，且数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限 $a>0$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\ge 0$，则 $x_n\ge 0(n=1,2,\cdots)$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>\dfrac{a}{2}$。

三. 计算题（每题 7 分，满分 35 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-1}$

3. 设 $\begin{cases} x=t+\arctan t \\ y=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=1}$.

4. 设 $y=x^2\mathrm{e}^{3x}$，求 $y^{(10)}(x)$.

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-y\mathrm{e}^{xy}=2$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

四.（**8** 分）设 $x_0=\sqrt{2}, x_n=\sqrt{2}+\dfrac{x_{n-1}-1}{\sqrt{2}+x_{n-1}},(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

五.（**8** 分）证明：当 $x\ge 0$ 时，有

$$(1+x)^2\left(2\ln(1+x)-1\right)+1\ge 4x\arctan x-2\ln\left(1+x^2\right).$$

六. **(7 分)** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，试证：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\dfrac{3f(\xi)}{1-\xi}=f'(\xi)$

七. **(6 分)** 设 $f_n(x)=\dfrac{1}{n+1}x-\arctan x$ (其中 n 为正整数)，

（1）证明：$f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一的零点，即存在唯一的 $x_n\in(0,+\infty)$，使 $f_n(x_n)=0$；

（2）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.