2012 级高等数学（A、B）（上）期中试卷

一、 填空题（本题共6小题，前5题每题4分，第6题9分,共29分）

1. 设斜率为$-\dfrac{1}{2}$的直线L是曲线$y=\dfrac{2}{x}(x>0)$的切线,则L的方程为

2. 函数$f(x)=\dfrac{3}{2-\frac{2}{x}}$的全部间断点分别是_____,它们的类型依次分别为 ____________;

3. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2012)$, 则 $f'(-1)=$ _______;

4. 设 $y=f(\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}))$, 其中 $f(u)$ 为可微函数, 则微分 $\mathrm{d}y=$ ______;

5. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$ 带Peano余项的 2 阶Maclaurin公式是 __________;

6. 分别举出符合下列各题要求的一例,并将其填写在横线上:

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在, 但极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在的数列 $a_n=$ ____________;

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)$ 都存在,但极限 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在的函数

$f(x)=$ ____________, $g(x)=$ ____________;

(3) 在 $x=0$ 处导数不存在,但 $x=0$ 是极值点的连续函数有____________.

二、 单项选择题（本题共3小题，每小题4分，满分12分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ b, & x=0\\ x\sin\frac{1}{x}-a, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 [　　]

2. 设 $f(x)=(x+|\sin x|)\cos x$, 则 [　　]

(A) $a=b=\mathrm{e}$　(B) $a=b=\mathrm{e}^{-1}$　(C) $a=1-b=\mathrm{e}$　(D) $a=-b=\mathrm{e}^{-1}$

(A) $f'(0)=2$　(B) $f'(0)=0$　(C) $f'(0)=1$　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

3. 下列命题正确的是: [　　]

(A)任何两个无穷小量之比的极限必存在(极限值为有限实数或∞);

(B)若数列 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 都收敛,则数列 $\{a_n\}$ 也收敛;

(C)若数列 $\{a_n\}$ 收敛,数列 $\{b_n\}$ 发散,则数列 $\{a_nb_n\}$ 必发散;

(D)若数列$\{a_n\}$单调增加,数列$\{b_n\}$单调减少,且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

资料均由学实君整理自网络，仅供参考

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{(1-\cos x)\sin^2 x}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x+y=\arctan(x-y)$ 所确定的隐函数,求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x=\mathrm{e}^{2t}-1 \\ y=t^3+1 \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=2}$.

四、 （本题满分8分） 证明：当 $x>0$ 时， $x^2+1>\ln x$.

五、 （本题满分8分） 设函数$f(x)$在闭区间$[0,3a]$ $(a>0)$上连续，在开区间$(0,3a)$内可导，且$f(3a)=f(a)<f(0)<f(2a)$.
证明：至少存在一点 $\xi\in(0,2a)$, 使得 $f'(\xi)=f'(\xi+a)$.

六、 （本题满分8分） (1) 证明不等式 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$; 利用单调有界原理证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 设 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$