



2012 年第九届苏北数学建模联赛



承 诺 书

我们仔细阅读了第九届苏北数学建模联赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与本队以外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其它公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们愿意承担由此引起的一切后果。

我们的参赛报名号为：**1563**

参赛组别（研究生或本科或专科）：**本科生**

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

获奖证书邮寄地址：陕西省西安市碑林区友谊西路 127 号西北工业大学旺园
学生公寓 赵松（收）

2012 年第九届苏北数学建模联赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）

1563

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2012 年第九届苏北数学建模联赛

题 目 煤炭企业生产调度与销售方案（B 题）

摘要

利润是企业赖以生存的基础，而高性价比的产品和良好的生产调度方案是企业盈利的保障。本文针对煤炭企业生产调度，旨在建立利润最大为目标的优化模型；并从微观角度模拟筒仓配煤过程中产品的堆积情况，建立仓内产品分布随时间实时变化的关系。

问题一，要求制定生产销售安排使得企业销售利润最大。首先，对三种原料加工后产品成分含量进行分析，得出合格产品必须由 A,B,C 三种原料产品进行混配。随后，分别以最大利润、最小成本为目标，以产品质量指标、原料采购量、筒仓容量、连续生产时间以及火车运载量为约束，建立两个优化模型。运用 Lingo11.0 求解得到以下结果：

- 最大利润为目标时，企业每天需加工 A、B、C 三种原料各 3528 吨、800 吨、6071 吨，每天获利 451 万（产品价格 1160 元/吨，忽略工人工资及机械维修费用等）；
- 最小成本为目标时，企业每天需加工 A、B、C 三种原料各 2338 吨、800 吨、3153 吨，每天成本 273 万。

最后，通过取不同煤炭销售价格，对优化模型进行灵敏度分析，并由此给企业提供不同价格下的生产销售安排。

问题二，我们从微观角度分析产品在理想筒仓内的存储分布情况。考虑到筒仓体积远远大于煤块体积，将煤块在筒仓内的运动抽象为颗粒流动问题。将大量煤炭看做颗粒流，以颗粒流微层（厚度很小）为研究对象，分别建立基于弹性碰撞的颗粒流运动学及动力学模型和基于离散元的二维颗粒流程序来刻画颗粒的注入与流出过程。在此基础上，运用 MATLAB 模拟颗粒微层叠加，分别进行 10 层、20 层、30 层和 40 层模拟观察仓内堆积形状，其演变规律显示：

- 理想筒仓入放料初始时，筒仓上部颗粒流动主要是整体流型，而下部为管状流型；
- 继续卸载时由于颗粒内外摩擦力的影响，筒仓上部慢慢过渡为漏斗状，最后变成管状流型。

问题三，结合实际筒仓入放料口形状和位置，基于最小能量理论假设，我们建立了流速公式，参考 Janssen 公式建立了法向应力计算公式；最终得到放料口的流速与时间的关系、筒仓内贮存煤炭体积与时间的关系。利用 MATLAB 分别绘制出放料口流速、筒仓内产品堆积高度及堆积体积随时间推移的实时变化曲线，由此表征筒仓内产品分布与堆积的实时状态。

问题四，根据上述所做研究及取得的结果，为企业提供了份生产销售安排建议书。

关键字：规划模型 颗粒流 微层叠加模拟 流速公式 实时变化曲线

目录

1	问题重述.....	1
2	问题分析.....	2
2.1	背景.....	2
2.2	题目分析.....	2
3	基本假设.....	3
4	符号说明及名词解释.....	4
4.1	符号说明.....	4
4.2	名词解释.....	4
5	问题一：最大利润的生产销售方案.....	5
5.1	原料成分.....	5
5.2	模型建立：优化模型.....	6
5.3	模型求解.....	8
5.4	灵敏度分析：产品价格影响.....	9
6	问题二：理想筒仓产品分布与堆积.....	11
6.1	模型准备.....	11
6.1.1	理想筒仓.....	11
6.1.2	原料：颗粒流.....	12
6.2	颗粒流运动模型.....	12
6.2.1	碰撞过程.....	13
6.2.2	放料过程：二维颗粒流程序（PFC2D）.....	15
6.3	模型求解.....	18
7	问题三：产品分布与堆积实时模拟.....	21
7.1	模型建立.....	21
7.2	模型求解.....	23
	生产销售建议书.....	25
8	模型优缺点.....	26
8.1	模型优点.....	26
8.2	模型缺点.....	26
	参考文献.....	26
	附录.....	27
	附录 1 不同种类煤炭详细指标及价格 ^[4]	27
	附录 2 利用 MATLAB 刻画筒仓边界曲线.....	27
	附录 2 颗粒流落点分布统计（10, 30,40 层）.....	28
	附录 3 生产安排随产品售价变化详细数据.....	29
	附录 4 流速公式推导 ^[9]	31

1 问题重述

某煤炭企业近几年来一直在生产一种利润很高的产品，从原料到成品需要经过加工、筒仓存储、混配等工序。

在生产过程中，以下问题需要进行充分考虑：

- 1) 该产品的成分包括：灰分 10.01%-10.50%，挥发分<35%，硫分<0.8%。为制造这种产品，企业利用了 A,B,C 三种原料。
- 2) 在加工生产过程中一次只能对一种原料进行生产加工，该企业的原料加工生产能力为 800 吨/小时，每次连续生产时间在 1~16 个小时，每次停车时间不少于 2 小时，加工成本为 10 元/吨。
- 3) 加工生产出来的产品存储到甲、乙两个筒仓中，可以根据用户的需要进行混装，使之达到用户的质量要求，其中甲仓的存储能力为 11000 吨，乙仓的存储能力为 13000 吨。
- 4) 满足客户要求的产品需要由 A,B,C 原料中的两种或三种进行仓下混配得到。通常情况下，配煤过程是由甲、乙两个筒仓同时放料弯沉的。
- 5) 产品采用铁路外运，每列火车大约 2000-3000 吨，装车时间 2-3 个小时。现企业高层不打算扩大现有的生产规模，并规定了两个原则：

原则一：确保产品质量符合用户要求；

原则二：为维护原料商长期合作积极性，规定 A 原料每年采购不少于 40 万吨，B 原料每年采购不少于 20 万吨，C 原料每年采购不少于 60 万吨。

基于以上情况，本文主要关注该企业的生产销售计划以及研究筒仓内产品的分布与堆积。具体需要进行的工作如下：

1. 规划安排生产销售流程，使企业的利润达到最大；
2. 只有一个入料口和一个放料口的理想筒仓建立数学模型，表征该筒仓在同时入放料情况下仓内产品的分布与堆积情况；
3. 根据企业生产的实际情况——筒仓入料口为两条 800mm×8000mm 的入料刮板，通过刮板将产品刮入筒仓入料口可以只运行一个刮板，也可以两个刮板同时运行；放料口为六个 984mm×1440mm 的方孔，形成两排，每排三个放料口，放料口下方为配煤皮带运输机（放料口通常部分运行，比如只运行一排中的 1-2 个，或同时运行两排每排 1-2 个）——建立适当的数学模型，对产品入放料过程中仓内产品的分布与堆积情况进行实时模拟，进而实现准确有效的产品入仓和混配装车。
4. 以企业生产调度者为报告对象，写一份生产调度销售方案建议书。

2 问题分析

2.1 背景

在我国各种能源资源中，煤炭资源最为丰富。自我国走上工业化道路以来，煤炭就一直是国民经济发展的助推剂；但现有的能源结构与能源消费给社会、经济所带来的问题也同趋显露。

煤炭混配技术，就是根据一定的煤质指标，将若干种不同性质的单种煤按照一定的比例混配起来，实现煤质互补。配煤技术的实现，能够提高燃煤质量，同时节约煤炭资源。同时，可以提高锅炉热效率，减少污染物的排放。

目前，煤炭混配的研究主要在两个方向：一是调配单种煤比例，确保不同客户的要求；二是研究配煤的模式。当前常用的配煤模式有悬臂式(或门式)斗轮堆取料机配煤、筒仓配煤以及卸煤沟配煤等。^[2]其中，具有占地面积小、运行方式简单、符合环保要求等优势筒仓配煤模型最有发展潜力。虽然筒仓的基建和设备投资高于煤场贮煤设施，但近年来土地征用费大幅度提高，环保对火力发电厂的要求越来越高，筒仓配煤模式在今后显现出越来越突出的竞争力。

2.2 题目分析

1.问题一

问题一要求设计生产销售方案，使得企业的利润最大。本质上，就是建立模型解决单种煤的混配，这是一个典型的优化问题，目标是企业利润最大。很明显，利润是煤炭的销售额减去生产成本。在本问题中，我们假设员工工资、设备维护等费用是一定的，故不予考虑。那么导致利润变化的生产成本就包括原料的价格和原料加工成本。进一步说，问题一的目标函数就是煤炭销售价格与原料成本及加工成本之差。该规划问题的约束包括产品质量指标、原料采购量、筒仓容量、连续生产时间以及火车运载量。根据目标函数和约束条件，我们建立规划模型，运用 Lingo 软件得到三种原料的年采购量，并由此设计出生产方案。

2.问题二

由于筒仓需要存储大量的煤炭，对其的关注点主要在其结构强度方面，尤其是筒仓结构的受力分布。目前对的研究方法主要集中于直接得到某种筒仓结果的应力分布，如应力实测或有限元分析。^{[6][7]}然而，这种思路的缺陷在于缺乏普适性；具体来说，就是上述方法仅适用于一种结果或与之相类似结构的强度分析，若要得到其他筒仓结构的特性，必须重复以上的研究方法。显然，这样的方法会消耗

大量的物力、财力。尤其是实测应力试验。

因此，将筒仓结构参数化，并在此基础上抽象入料、出料的运动方式，建立关于仓内产品的分布模型就能弥补上述缺陷。对于研究不同结构的筒仓，只需将相应的尺寸参数带入模型，就能得出产品在筒仓内的分布和堆积情况。类比流体在容器的中的情况，根据阿基米德定律，流体对容器壁的压强随高度的变化而变化；这样，考察仓内产品的分布进一步得到筒仓应力分布。我们的具体做法是：

1. 建立理想筒仓模型
2. 分析原料落入筒仓内和堆积的运动形式
3. 模拟产品的分布和堆积情况
4. 讨论产品分布对筒仓的应力作用

3.问题三

问题三要求对产品入放料过程中产品的分布与堆积进行实时模拟，有别于问题二对原料运动进行微观分析，本问需要表征产品状态参数随时间的变化情况。显然，表征产品在筒仓内分布情况的最本质的参数是产品的流量、堆积高度和残留体积。

根据题目，在实际企业生产过程中，入料和放料工序都是可控的。具体地说，指控刮板的运行可以调节入料的速度；我们假设入料过程是匀速的，那么同时运行两个刮板的入料速度即为只打开一个刮板的两倍。另外，筒仓底部的 6 个放料口也可以进行调节；根据题目信息，打开的放料口数量的调节范围在 1-4 个之间。但是，放料速度不随放料口打开的数量线性变化；打开的放料口之间的几何位置关系也会影响放料的速率。

目前相关的研究表明，影响筒仓内物质流动的因素有物料自身的质量是引起仓内压力和反压力的源；物料的固结特性引起颗粒间摩擦；料仓的几何形状和固结的物料在仓壁上的滑动特性。参考以上因素，已建立了相对成熟的流速公式^[9]。

3 基本假设

- 工厂设备 24 小时连续工作且不会意外损坏
- 生产出的原料可任意分配到不同的筒仓中
- 生产出的产品能够全部销售
- 每块煤块大小差异不大
- 筒仓内存储的产品分层分布
- 工人工资、设备维护费用不计
- 忽略社会因素等非可控影响

4 符号说明及名词解释

4.1 符号说明

符号	说明
x_i	第 i 种原料采购吨数
ξ_i	第 i 种原料灰分百分比
ψ_i	第 i 种原料挥发分百分比
θ_i	第 i 种原料硫分百分比
L_2	筒仓圆锥墩台高度
L_3	筒仓圆柱高度
D	筒仓顶圆直径
d	放料口直径
d_c	入料口直径

4.2 名词解释

- **产率** 生产出的产品占原料的质量比；例如，A 的产率为 80% 表示每 100 吨原料 A 可以生产 80 吨产品。
- **连续生产时间** 连续生产加工一种原料的时间
- **停车时间** 间隔于加工两种不同的原料，每次停车时间至少为 2 小时
- **存储能力** 筒仓在生产过程中允许存储的最大量
- **仓下混配** 将选定筒仓内的煤炭利用仓内环型倒锥刮煤机充分搅拌后，通过称重皮带将煤炭输送到仓下的带式输送机上进行混配。^[1]
- **理想筒仓** 依照实际生产中使用的筒仓尺寸的简化钢材模型
- **刮板** 将送到筒仓顶部的产品均匀送入筒仓的设备
- **实时模拟** 模拟相关状态量随时间变化的规律

5 问题一：最大利润的生产销售方案

5.1 原料成分

该企业生产的产品需要由两种或两种以上的原料混配而成，故我们首先分析哪些原料的组合能够配出所需的产品。图 1 清晰地表现了三种原料各成分比例与产品期望比例的关系。

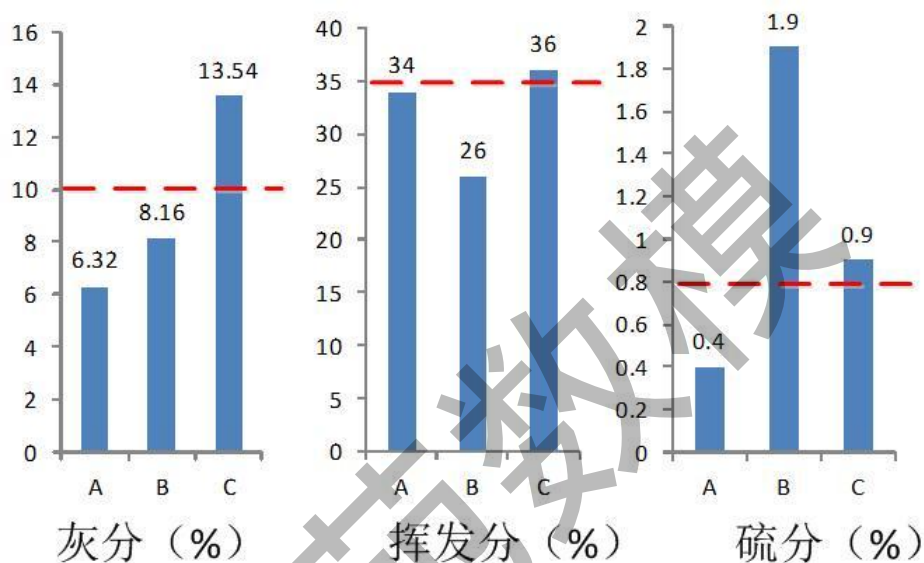


图 1 三种原料各成分比例

图中虚线表示合格产品中灰分、挥发分和硫分所占比例。

鉴于产品的灰分比例在 10.01-10.50% 之间，原料 C 必须用于产品的生产；同时，对三种原料挥发分进行类似的分析也会得到相同的结果。另外，考虑硫分的质量分数，即小于 0.8%，原料 A 也是生产过程中的必需原料。那么，原料的组成就有两种可能：A,C 或 A,B,C。

进一步，我们考虑在上面两种情况下，三种原料混配的范围。分别将 A,B,C 标记为 1,2,3 号原料。引入 x_i 表示三种原料采购的吨数； ξ_i 表示灰分百分比； ψ_i 表示挥发分百分比； θ_i 表示硫分百分比。

若混配后的原料生产出了合格的产品，则应满足

$$10.01\% < \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \cdot \xi_i}{\sum_{i=1}^3 x_i} < 10.50\% ; \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \cdot \psi_i}{\sum_{i=1}^3 x_i} < 35\% ; \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \cdot \theta_i}{\sum_{i=1}^3 x_i} < 0.8\% .$$

考虑产品有原料 A,C 混配而成, 则带入上面不等式方程组, 得到

$$\left\{ \begin{array}{l} 10.01 < \frac{x_1 \cdot 6.32\% + x_3 \cdot 13.54\%}{x_1 + x_3} < 10.50\% \\ \frac{x_1 \cdot 34\% + x_3 \cdot 36\%}{x_1 + x_3} < 35\% \\ \frac{x_1 \cdot 0.4\% + x_3 \cdot 0.9\%}{x_1 + x_3} < 0.8\% \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x_3 < x_1 \\ x_1 < 0.96x_3 \end{cases}$$

由此说明任何 (x_1, x_3) 的取值组合均无法满足上面的不等式方程组。换句话说, 仅以原料 A,C 混配不能生产出合格产品。因此, A,B,C 三种原料必须全部参与混配。

5.2 模型建立: 优化模型

根据问题分析, 我们针对问题一建立规划模型; 目标函数是煤炭销售价格与原料成本及加工成本之差, 约束包括合格产品质量指标、时间限制以及每年的原料最低采购量。

分别将 A,B,C 标记为 1,2,3 号原料。设 x_{ij} 表示第 i 种原料存储在筒仓 j 中的质量, ξ_i 为灰分百分比, ψ_i ——挥发分百分比, θ_i ——硫分百分比。令三种原料价格为 p_i ($p_1 = 500, p_2 = 700, p_3 = 300$), 产率分别为 η_i ; 产品售价为 P 。

1. 以最大利润为目标

➤ 目标函数:

$$Z = P \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_i - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \times 10 - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 p_i \cdot x_{ij} \cdot \eta_i$$

➤ 成分比例约束:

为保证原料 A,B,C 混配后能生产为合格的产品, 混合后各成分比例应达到

$$10.01\% < \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij} \cdot \xi_i}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij}} < 10.50\% ; \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij} \cdot \psi_i}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij}} < 35\% ; \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij} \cdot \theta_i}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij}} < 35\%$$

➤ 生产时间约束:

由于该企业加工能力为 800 吨/小时，且每次连续生产时间为 1-16 小时

$$800 < \sum_{j=1}^2 x_{ij} < 16 \times 800$$

➤ 筒仓容量约束:

考虑到两个筒仓的存储能力 r_j ($r_1=11000, r_2=13000$)

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} < r_j \quad (j=1,2)$$

➤ 火车装载能力约束:

针对产品外运的问题，我们假设一天中生产的所有产品被全部运走。设每列火车装载能力 w ，装车时间为 T 。那么，

$$\frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij}}{w} \cdot T < 24 - 2T' - \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij}}{800}$$

其中， T' 为停车时间。

根据题目， $2000 \leq w \leq 3000$ ， $2 \leq T \leq 3$ ；这里，我们设定 $w=2500, T=2.5$ 。

➤ 原料采购量约束:

为维护原料商长期合作的积极性，三种原料年采购量不能低于 d_i ，则平均每天原料的采购量为

$$\sum_{i=3}^3 x_{ij} > \frac{d_i}{365}$$

综上所述，我们得到如下优化模型：

$$\text{目标: } \max \quad Z = P \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \times 10 - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 p_i \cdot x_{ij} \cdot \eta_{ij}$$

$$\begin{aligned}
& 10.01\% < \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij} \cdot \xi_i}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij}} < 10.50\% \\
& \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij} \cdot \psi_i}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij}} < 35\% \\
& \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij} \cdot \theta_i}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij}} < 0.8\% \\
& 800 < \sum_{j=1}^2 x_{ij} < 16 \times 800 \\
& \sum_{i=1}^3 x_{ij} < r_j \\
& \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_{ij}}{w} \cdot T < 24 - 2T' - \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij}}{800} \\
& \sum_{i=3}^3 x_{ij} > \frac{d_i}{365}
\end{aligned}$$

2. 以最小成本为目标

题目要求给出利润最大的生产销售方案，但由于产品的售价是不固定的，通常情况下，生产企业也无法控制其变化。故以实现最大利润为目标不一定是该企业的最佳选择；然而，生产成本往往是一家生产企业可控制的因素。为此，我们进一步讨论以最小成本为目标的生产方案。

目标函数：

$$\min Z' = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \times 10 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 p_i \cdot x_{ij} \cdot \eta_{ij}$$

约束与上述模型相同。

5.3 模型求解

针对上述规划模型，我们运用 Lingo 软件编写程序进行求解。

1. 以最大利润为目标

在求解以最大利润为目标的模型中，由于不同煤质的煤炭价格差异很大，我们参考了市场上品质相近的煤炭（详细指标见附录）价格，设定该产品每吨价格为 $P=1160$ 。表 1 表示了以最大利润为目标的结果。

表 1 产品产量及成分（最大利润）

产量/吨	7552.81	A: 3528.07
		B: 800
		C: 6071.93
成分	实际指标	煤质要求
灰分(%)	10.01%	10.01%-10.50%
挥发指标(%)	34.79%	<35%
硫分指标(%)	0.69%	<0.8%
利润/元	4511641	

由表 1，该企业每天生产大约 7552.81 吨产品。基于基本假设，同一种连续生产的原料能够任意地被分装到两个不同的筒仓内。详细的分配计划见表 2。

表 2 原料分装计划（单位：吨）

	A	B	C	存储能力
筒仓甲	887.29	542.4408	5336.026	11000
筒仓乙	9525.853	257.5592	7463.974	13000

2. 以最小成本为目标

同样，运用 Lingo 进行求解以最小成本为目标的规划模型，结果见表 3

表 3 产品产量及成分（最小成本）

产品总产量/吨	4558.31	A: 2338.731
		B: 800
		C: 3153.33
成分	实际指标	煤质要求
灰分(%)	10.01%	10.01%-10.50%
挥发指标(%)	34.13%	<35%
硫分指标(%)	0.80%	<0.8%
成本/元	2738283	

5.4 灵敏度分析：产品价格影响

如上文所述，产品价格的变动也为企业的盈利带来很大的不确定性。根据规划模型中所建立的目标函数

$$Z = P \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \cdot \eta_i - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \times 10 - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 p_i \cdot x_{ij} \cdot \eta_i$$

我们将产品售价 P 设置为变量，针对不同的产品价格，考察生产安排的变化。

设定 P 由 0 变化到 2900 元/吨，重复运用 Lingo 求解规划模型的解。然后绘制企业利润、原料的采购量以及产品成分比例变化曲线。

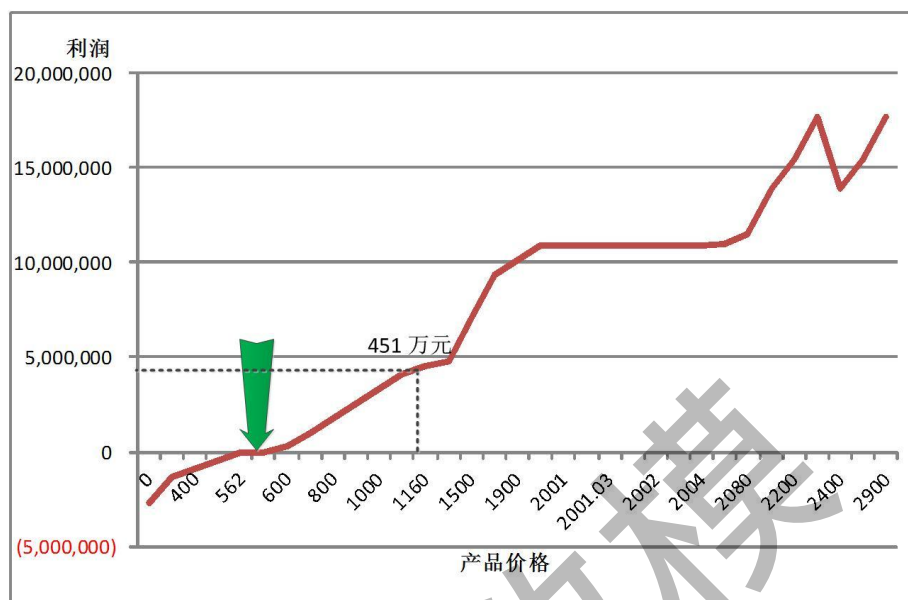


图 2 利润随产品售价变化规律 (单位: 元)

图 2 中清楚的显示,当产品价格为 1160 元/吨时,企业利润大约为 451 万元。箭头所指表示当产品售价高于该处数值时,该企业就能实现盈利。根据详细数据 (见附录),当价格高于 563 元/吨时,利润大于 0。另外,900-1200 元之间价格变化的斜率最大,根据当前市场价格 (200-1300 元的区间内),价格在这个范围内的浮动对利润的影响较大。

同时,原料的采购量以及产品成分比例也会随产品价格的变化而改变。根据图 3,原料采购量及产品成分比例曲线呈明显的阶梯状。这说明在一定的价格范围内,对应的生产安排可以保持不变。由此,在一定为范围内,企业可以在不改变原料配给的情况下尽量提高产品售价;这样,在提高了利润的同时也可以避免由改变原料采购而带来的非线性的影响。

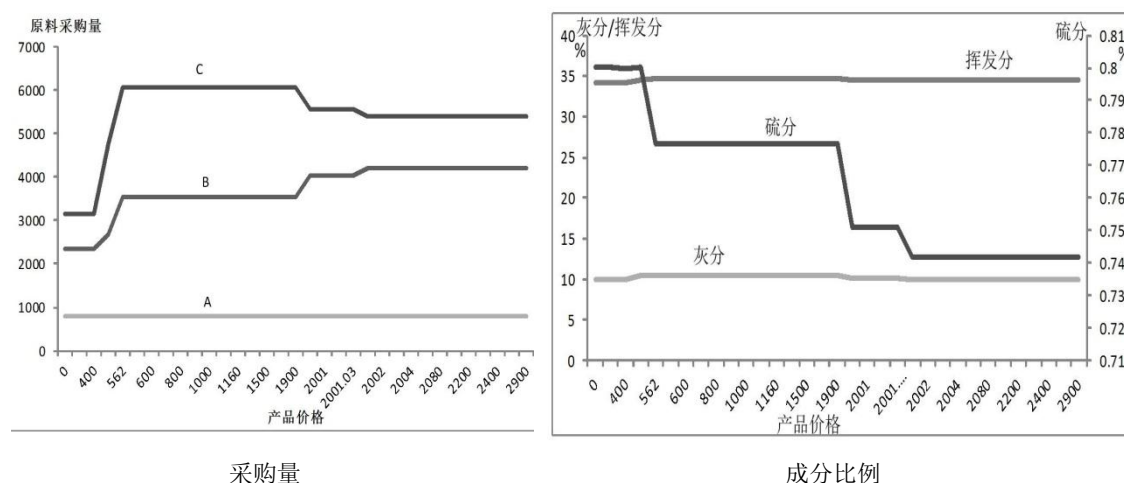


图 3 原料采购量、产品成分比例变化曲线

上图中，左图表示原料的采购量随产品售价的变化曲线，右图表示产品成分比例随产品价格的变化曲线。右图中，左侧坐标轴表示挥发分和灰分，二者的比例随价格的变化平稳；右侧坐标轴表示硫分，规划求解结果显示其比例随价格增加呈阶梯状下降。

6 问题二：理想筒仓产品分布与堆积

6.1 模型准备

6.1.1 理想筒仓

问题二要求建立只有一个入料口和一个放料口的理想筒仓。根据实际筒仓结构，我们设置理想筒仓形状为圆柱和到圆锥墩台的组合。出入料口均为圆形，入料口位于顶圆中心处，放料口半径即为圆锥墩台的底圆半径。图 4 中，左图为理想筒仓的立体示意图；参考该企业实际生产过程中所使用的设备，我们设定其尺寸参数，标注于右图。

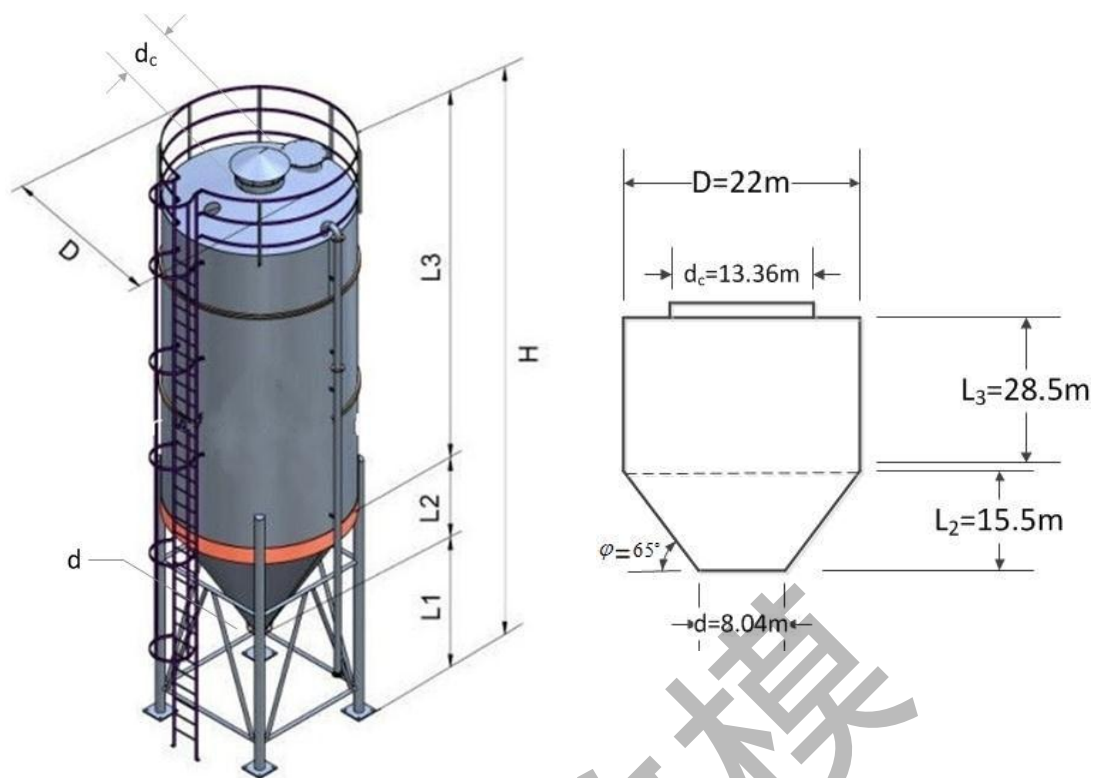


图 4 理想筒仓^[5]

6.1.2 原料：颗粒流

为研究原料运动规律，我们将落入筒仓煤炭抽象为颗粒流。

颗粒材料是大量离散固体粒子的聚集。颗粒流是指颗粒材料在外力作用和内部应力状况发生变化时类似于流体发生的运动状态。在工农业生产中，将研究对象抽象为颗粒材料具有广泛的应用：制药、陶瓷、煤炭、冶金、食品、能源等领域都会遇到颗粒流的问题。[8]

对于本问题，煤块的体积相对于筒仓的容积很小，我们定义为颗粒微元；由此，将大量的煤块运动抽象为颗粒流是合理的。为进一步考察产品在仓内的堆积，我们针对进入筒仓的原料做以下假设：

- 颗粒微元为球形
- 颗粒流中颗粒微元为刚性体
- 颗粒微元间的接触发生在很小的范围内，即点接触

6.2 颗粒流运动模型

原料由送入入料口到最终从放料口流出可以大致分为四个阶段：注入、下落、碰撞和流出；这其中最重要的是碰撞和流出过程，我们分别建立颗粒微元弹性碰

撞模型和二维颗粒流程序（PFC2D）这两个模型。

首先,我们认为注入的原料是正对入料口以 0 初速度直接掉落的煤块(颗粒)。那么,当颗粒流在筒仓内下落时,则是做自由落体运动。忽略仓内空气阻力,在下落过程中,颗粒流是呈与入料口直径相同的圆柱形,并保持到碰撞前的一瞬间。

为考察碰撞过程中颗粒流的微观运动情况,我们以颗粒流中厚度无限小(ds)的颗粒流作为研究对象,定义为颗粒流微层(如图 5);同时,我们假设颗粒流微层间在下落过程中没有相互作用力。

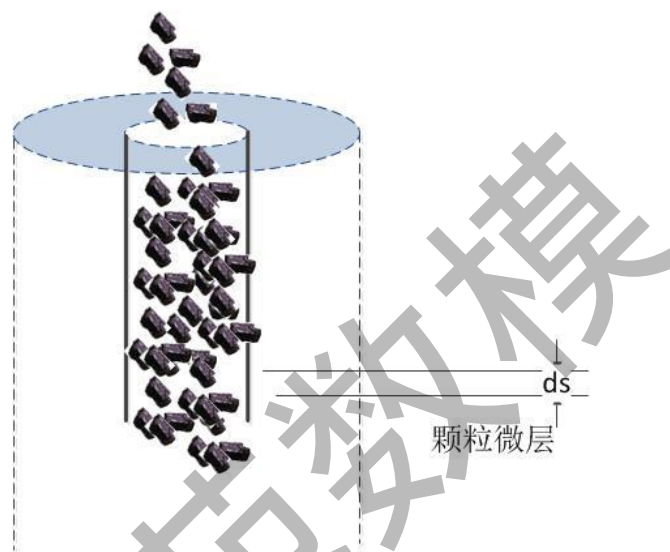


图 5 颗粒微层

6.2.1 碰撞过程

颗粒流的碰撞有三种可能情况:

- 1) 当仓内堆积原料很少时,颗粒流会与筒仓壁发生直接碰撞。由于我们假设颗粒微元呈球形,其与仓壁的碰撞可以看做是镜面反射。因此,我们假设这样的碰撞为完全弹性碰撞,即碰撞后速度大小不变,方向沿碰撞面法线对称。
- 2) 当仓内有一定堆积原料时,一部分颗粒流会与已堆积的原料发生碰撞,而此时的碰撞会使颗粒微元丢失绝大部分的动能;而另一部分的颗粒流仍会与仓壁碰撞。
- 3) 当仓内堆积原料超过圆锥墩台部分后,下落的颗粒流会全部与已堆积的原料进行碰撞。

首先,我们研究原料堆积很少的情况。为简化问题,假设所有颗粒微元都与筒仓壁碰撞。如图 6,区域 1 中的颗粒流直接撞击到放料口(若放料口关闭),

而区域 2 中颗粒流会首先与圆锥壁碰撞，然后再弹到出料口。

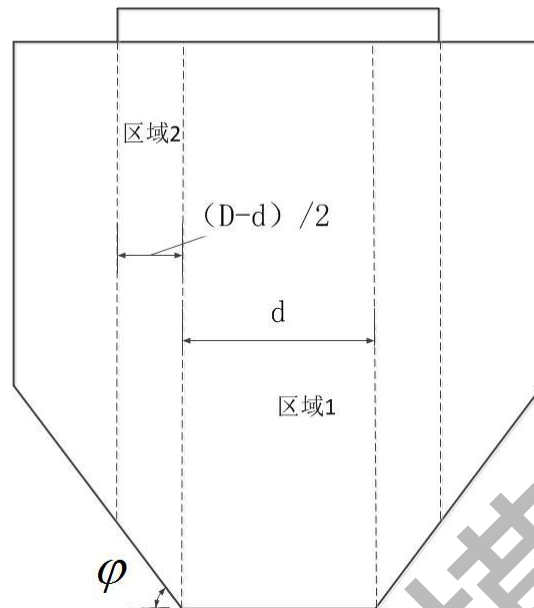


图 6 颗粒流碰撞区域划分

接下来，考察与圆锥壁发生碰撞的颗粒流运动特性。在颗粒微元与筒仓壁发生碰撞后，微元具有一个与水平方向成 α 的角度并在重力作用下继续运动，即做斜下抛运动（如图 7）。宏观上，在与仓壁碰撞后，一部分颗粒流直接落入放料口，而另一部分再一次或更多次碰撞后进入放料口。图中虚线表示可能的颗粒微元碰撞后运动轨迹。

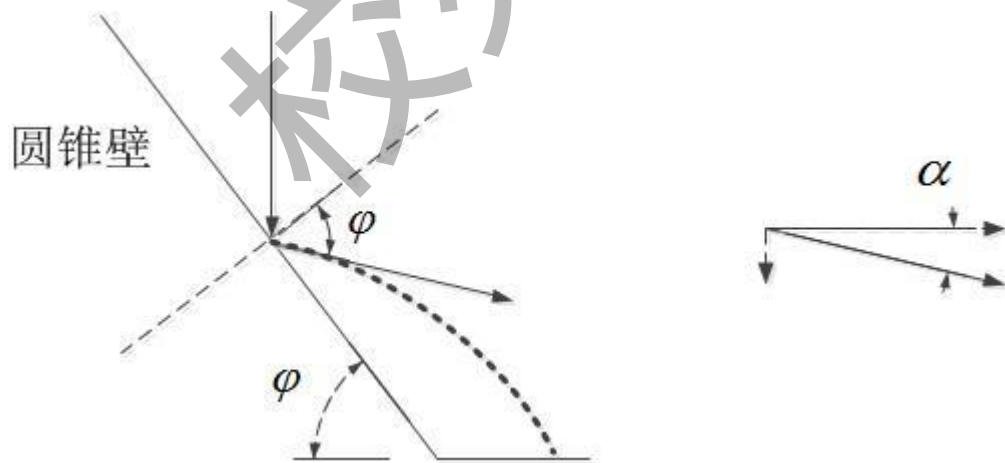


图 7 颗粒微元碰撞过程

以一个颗粒微元为对象，设其碰撞前瞬间与 Y 轴距离为 δ ，那么碰撞速度

$$v = \sqrt{2g(L_2 + L_3 - (\delta - r) \cdot \tan \varphi)}$$

由于发生完全弹性碰撞，碰撞后速度 $v' = v$ ，其中

水平方向 $v_t = v' \cdot \cos \alpha$

竖直方向 $v_n = v' \cdot \sin \alpha$

当 $\varphi = 65^\circ$ 时，由平面几何知识， $\alpha = 40^\circ$ 。

设经过时间 t 后再次碰撞筒仓壁（落入放料口或圆锥壁），根据运动学方程

$$v^2 - v_o^2 = 2gh$$

得到

$$(v_n + gt)^2 - v_n^2 = 2g(\delta - r) \cdot \tan \varphi$$

求解 t 带入表达式

$$s = v_n \cdot \cos \alpha \cdot t$$

距离 s 表示颗粒微元从第一次碰撞后到第二次碰撞间水平运动距离。我们设定第一次碰撞后刚好落在放料口边沿的微元运动距离为临界距离，用 s_0 表示。

由此，我们又可将碰撞圆锥壁的颗粒流分为两部分：

若 $s > s_0$ ，颗粒微元落入放料口，并开始堆积；

若 $s < s_0$ ，颗粒微元还会经过一次或以上碰撞，由此此后碰撞运动的复杂性，我们认为这部分颗粒流最终等概率分布到堆积表面。

6.2.2 放料过程：二维颗粒流程序（PFC2D）

根据理想筒仓的尺寸参数，入料口直径大于出料口直径，那么原料在筒仓内必然形成堆积。在形成堆积的情况下，原料从放料口流出是由颗粒微元之间相互挤压造成的。为描述这个过程，我们引入二维颗粒流程序，并在此基础上建立颗粒的运动模型。

1. 背景

PFC2D 即二维颗粒流程序，通过离散单元方法来模拟圆形颗粒介质的运动及其相互作用。最初，这种程序是研究颗粒介质特性的一种工具，它采用数值方法将物体分为有代表性的数百个颗粒单元，期望利用这种局部的模拟结果来研究边值问题连续计算的本构模型。以下 2 个因素促使 PFC2D 方法产生变革与发展：

(a) 通过现场试验来得到颗粒介质本构模型相当困难；

(b) 随着微机功能的逐步增强，用颗粒模型模拟整个问题成为可能，一些本构特性可以在模型中自动形成。

因此，PFC2D 便成为用来模拟固体力学和颗粒流问题的一种有效手段。

2. 理论基础

● 基本假设

颗粒流方法在模拟过程中作如下假设：

1. 颗粒单元为刚性体；
2. 接触发生在很小的范围内即点接触；
3. 接触特性为柔性接触，接触处允许有一定的“重叠”量；
4. “重叠”量的大小与接触力有关，但与颗粒大小相比，“重叠量”可以忽略；
5. 接触处有特殊的连接强度；
6. 颗粒单元为圆盘形球形。

● 颗粒动力学与运动学方程

颗粒流方法以牛顿第二定律与力—位移定律为基础，对模型进行循环计算，程序流程见图 8：

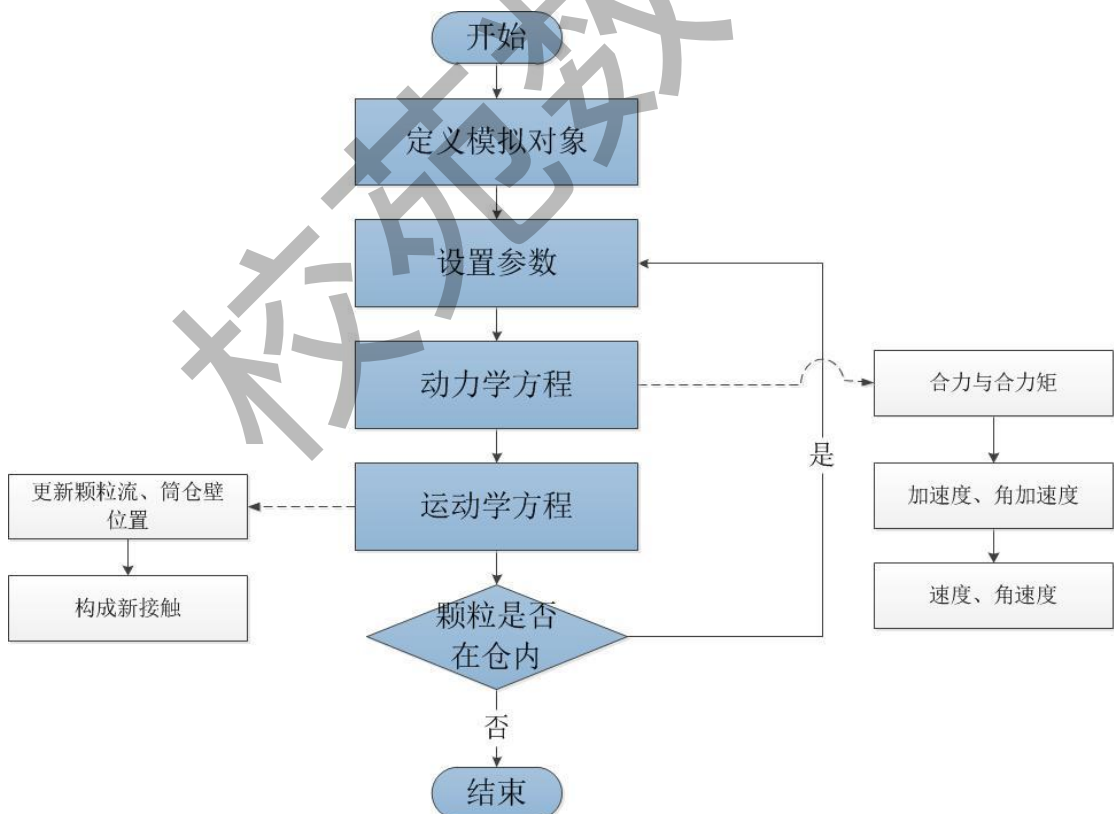


图 8 PFC2D 程序流程

通过力—位移定律把相互接触的两部分的力与位移联系起来，力—位移

定理仅在接触处起作用，可以根据接触平面内的接触点 C 来进行描述，接触平面是根据相邻两球的单位法向量定义的，对于“球体—球体”接触的情况，其单位法向量 \vec{n}_l 是沿着颗粒中心连线的方向。相邻两球 A、B 之间的单位法向量 \vec{n}_l 具体表达式如下：

$$\vec{n}_l = \frac{(x_A - x_B, y_A - y_B)}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

其中， (x_A, y_A) 、 (x_B, y_B) 分别为 A、B 两球球心坐标。

接触点叠合量 $U_n = R_A + R_B - d$ ，其中 R_A 、 R_B 为 A、B 两球的半径。

接触点 C 坐标计算如下：

$$\begin{aligned} (x_C, y_C) &= (x_A, y_A) - (R_A - 0.5U_n)\vec{n}_l \\ &= (x_B, y_B) + (R_B - 0.5U_n)\vec{n}_l \end{aligned}$$

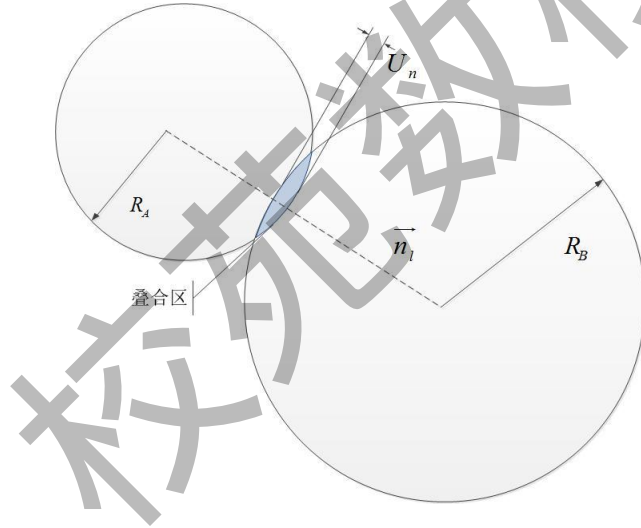


图 9 颗粒微元间受挤压分析

如图 9，两球间接触力可以分解为沿着接触平面的切向接触力及沿着法向量方向的法向接触力，即

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_n$$

其中， \vec{F}_s 为接触力切向分量， \vec{F}_n 为接触力法向分量。

切向分量 \vec{F}_s 及法向分量 \vec{F}_n 可以根据下式计算：

$$\begin{cases} F_s = k_s U_s \\ F_n = k_n U_n \end{cases}$$

其中, k_s 、 k_n 为接触面切向刚度与法向刚度 (根据接触刚度模型计算得到)。
单个颗粒的运动是由作用在其上的合力决定的, 我们用颗粒质心 (中心) 的速度来表示颗粒的速度, 设 F 为颗粒的合外力 (合外力在坐标轴上的分力分别为 F_x 、 F_y), 则有牛顿第二定律得:

$$F_x = m\ddot{x}; F_y = m\ddot{y}$$

由此, 建立运动学模型

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ddot{x} \cdot t^2 + v_{x0} \cdot t \\ y = \frac{1}{2}\ddot{y} \cdot t^2 + v_{y0} \cdot t \end{cases}$$

6.3 模型求解

对全过程的模拟即使对颗粒运动中的四个过程 (注入、下落、碰撞和流出) 的叠加。为简化模型, 我们认为整个过程是满足线性可叠加性的。在此基础上, 我们采取以下步骤近似求解产品在筒仓内的分布和堆积:

1. 假设放料口关闭, 根据针对碰撞过程建立的模型, 求解每层颗粒流的分布规律, 即统计一层中颗粒微元的落点分布;
2. 迭代多层颗粒流, 得出设定层数颗粒流的分布情况;
3. 加入筒仓的几何边界条件 (建立过程见附录), 得到产品在仓内的分布形状;
4. 假设打开放料口, 考虑放料的影响, 此时根据放料过程建立的模型得到真实的筒仓内产品分布特征。

参考上述步骤, 我们用 MATLAB 分别对 10 层、20 层、30 层、40 层颗粒流分布与堆积情况进行模拟。颗粒直径依照现实中煤炭大小设定为 50cm。当有 20 层颗粒流落入筒仓时, 颗粒微元落点分布情况如图 10 (10 层和 30 层的颗粒流落点统计见附录), 加入筒仓几何边界条件, 我们得到产品在仓内的分布形状 (见图 11)。

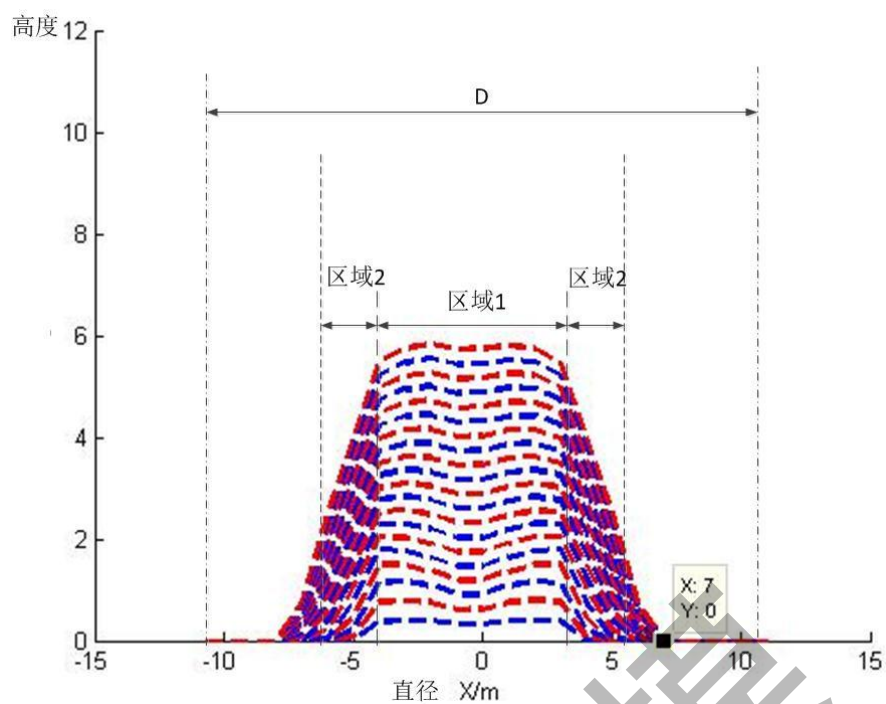


图 10-20 层颗粒流落点分布统计

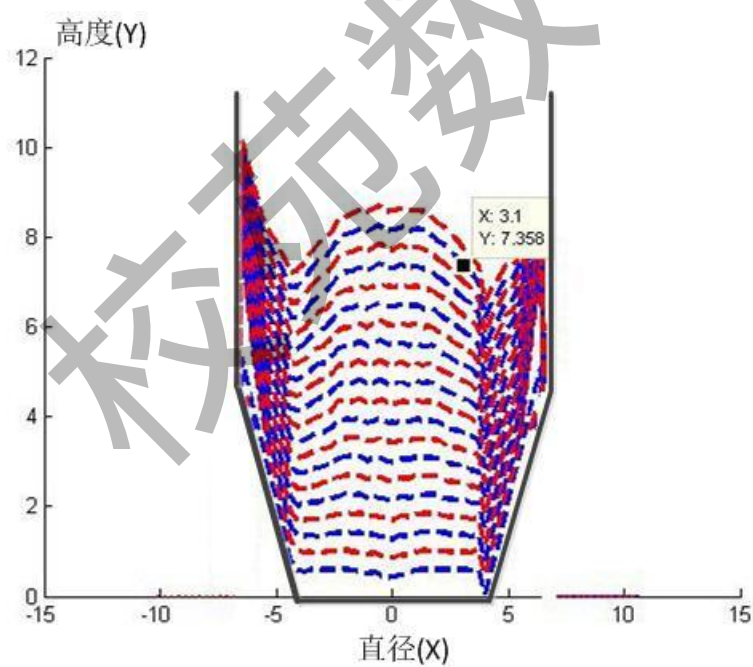


图 11-20 层颗粒流筒仓内真实分布

进一步，我们利用 MATLAB 绘制出三维环境下筒仓内产品分布的演变过程，如图 12

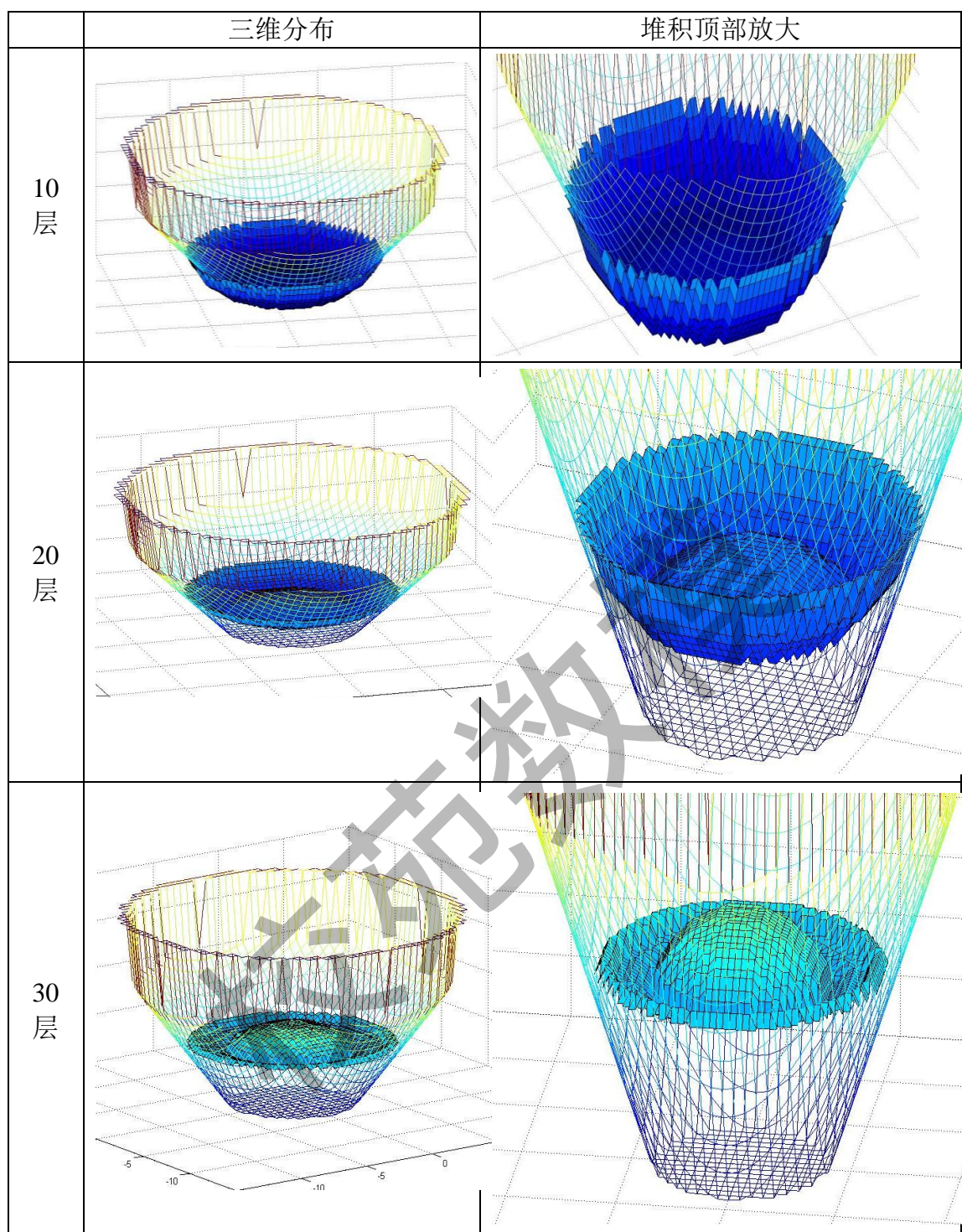


图 12 筒仓内产品分布演变过程

理想筒仓入放料过程中，筒仓上部颗粒流动主要是整体流型，而下部为管状流型。继续卸载由于颗粒内外摩擦力的影响，筒仓上部慢慢过渡为漏斗流型，最后变成管状流型。

上述现象的原因为卸载时筒仓中心部分流速比侧壁部分大，下部比上部大，放料口速度最大。

7 问题三：产品分布与堆积实时模拟

根据问题分析，问题三的核心在于表征产品状态参数随时间的变化情况。这其中，最关键是对单位时间内放料流量的模拟。

7.1 模型建立

设筒仓放料口流速为 V_c ，基于最小能量假设，槽型放料口的流速公式[9]（推导见附录）表示为

$$V_c = SL \cdot \sqrt{\frac{S \cdot g}{2 \tan \varphi} \left(1 - \frac{\mu \sigma (S + L)}{\rho_w SL \cdot \cos \varphi}\right)}$$

其中， μ 为筒仓壁摩擦因数； σ 为筒仓壁的法向应力； ρ_w 为流动物质密度； L, S 为放料口的长和宽； φ 为放料斗的倾角。

由于 $\mu, \rho_w, S, L, \varphi$ 均为常数，故流量是关于筒仓壁的法向应力 σ 的函数，设为

$$V_c = \Phi(\sigma)$$

目前，求解筒仓壁应力多用 Janssen 公式^[10]。Janssen 公式建立在以下两条假设的基础上：

- 1) 任一横截面的竖向压应力均匀分布；
 - 2) 侧向压应力与竖向压应力成正比，且侧压系数不随高度变化。
- 其中，法向应力计算公式为

$$\sigma = \frac{\rho_w g R}{2\mu} \left(1 - e^{-\frac{2\mu k_0 h}{R}}\right)$$

其中， k_0 表示侧压系数； h 表示产品堆积高度。

由此，法向应力 σ 又是关于堆积高度 h 的函数，即

$$\sigma = \psi(h)$$

而堆积高度直接由筒仓内产品的体积决定。假设初始时，筒仓内无产品堆积，则经过时间 t ，仓内堆积物体积为 Q 。设原料注入速度为 V_r （设为常数），则

$$Q = (V_r - V_c) \cdot t$$

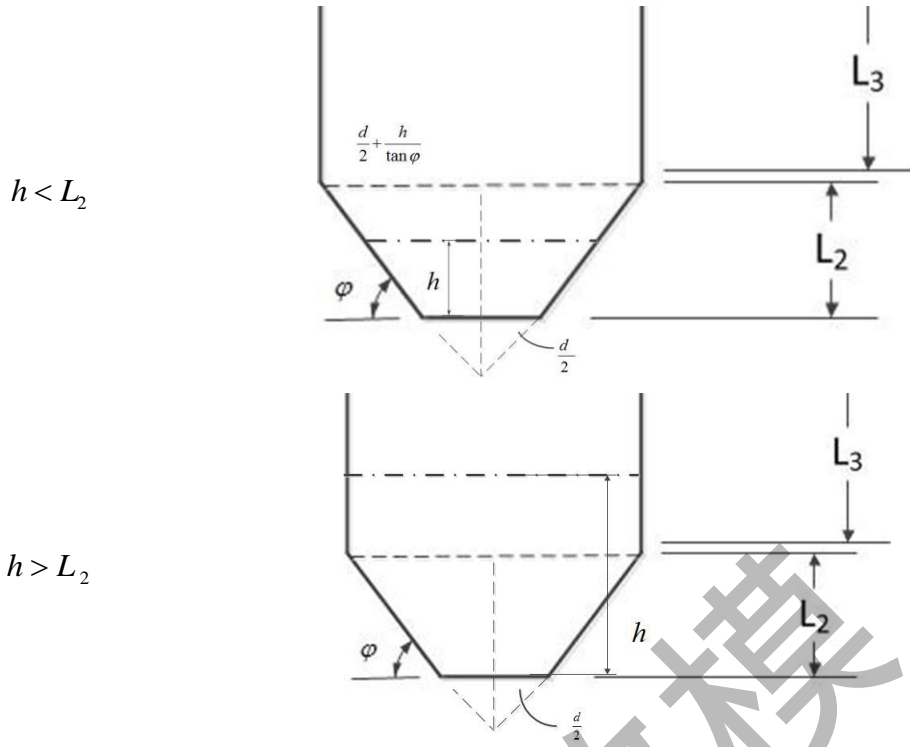


图 13 筒仓内产品堆积分析

图 13 展示了产品堆积的两种情况。当 $h < L_2$ 时，堆积物全部在圆柱墩台中；延长圆锥母线使其交于一点，得到一个虚拟的圆锥。根据圆锥体积计算公式，我们得到此时产品体积为

$$Q = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{\tan \varphi} \right)^2 \cdot \left(h + \frac{d}{2} \cdot \tan \varphi \right) - \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{d^3}{8} \cdot \tan \varphi$$

当 $h > L_2$ 时，产品将圆锥墩台填满，以上部分为圆锥，其体积为

$$Q = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{d}{2} + \frac{L_2}{\tan \varphi} \right)^2 \cdot \left(L_2 + \frac{d}{2} \cdot \tan \varphi \right) - \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{d^3}{8} \cdot \tan \varphi + \pi \left(L_2 \cdot \tan \varphi + \frac{d}{2} \right)^2 \cdot (h - L_2)$$

由于 $Q = (V_r - V_c) \cdot t$ ，流速 V_c 是关于 h, t 的二元函数，即设

$$V_c = f(h, t)$$

根据方程 $\sigma = \psi(h)$ ，我们得到

$$f(h, t) = \psi(h)$$

求解上述隐式方程，就能够得到高度与时间的关系。进一步，将结果回带，

得到堆积体积以及流速关于时间的变化规律，由此实现对筒仓内产品分布的实时模拟。

7.2 模型求解

由于上述模型含有隐函数，故无法通过解析方法求解。因此，我们采用数值方法。运用 MATLAB，我们给定一系列时间值，再求解其对应的高度。然后，以时间为横轴，高度为纵轴，拟合出产品堆积高度实时变化曲线。类似的，我们根据上述方程，作出放料口流速及堆积体积的实时变化曲线。

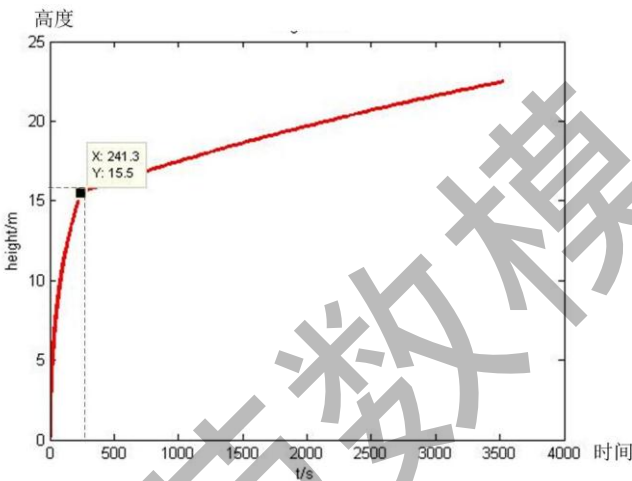


图 14 产品高度堆积实时变化曲线

图 14 显示，堆积高度开始迅速增加，在 $h=15.5\text{ m}$ 时出现拐点，高度变化变缓。这符合实际的生产情况，因为 15.5 正是圆锥墩台的高度。接下来，绘出放料口流速实时变化曲线，如图 15。

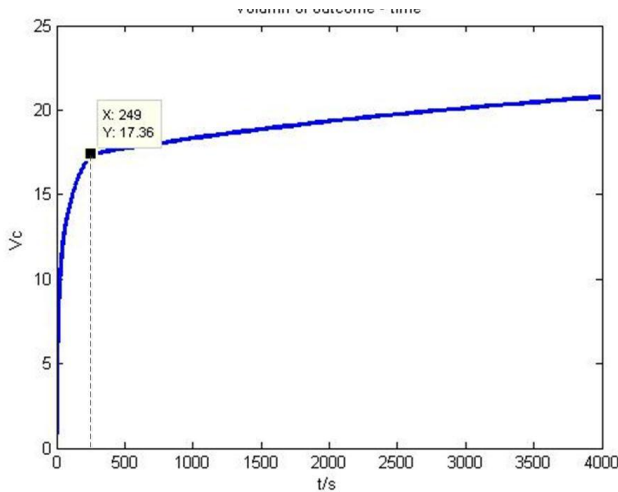


图 15 流速实时变化曲线

流速变化曲线趋势与高度曲线相似，也是在一段很快的增长后出现拐点并趋于平缓。进一步考察拐点，流速增加变缓发生于产品注入后 249 秒，即大约 4 分钟后。对比产品堆积填满圆锥墩台的时间——241.3 秒，可以发现流速的改变与产品堆积到的位置直接相关。随后，绘制出堆积体积随时间变化的曲线（见图 16）。

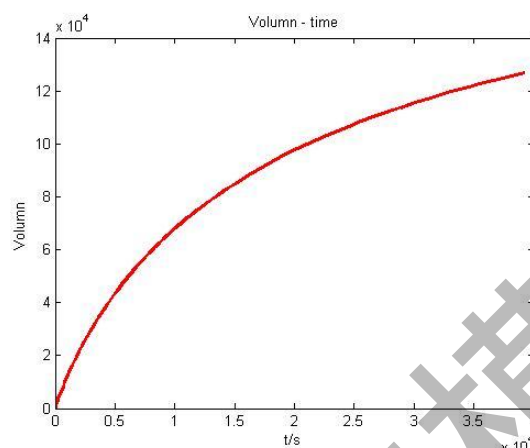


图 16 产品在筒仓内体积实时变化曲线

图 16 表示体积的变化始终比较平缓。

上述三幅图形象地描述了产品在筒仓内堆积高度、筒仓流速以及筒仓内煤炭体积的实时变化情况，根据以上三个实时变化量，我们可以计算任意时刻筒仓内产品分布与堆积情况，企业可以根据产品流速变化，准确监控入料口与放料口，以实现准确配料。

生产销售建议书

尊敬的×××先生：

我们对贵企业煤炭生产调度与销售方案设计进行了分析，在满足产品质量符合用户需求及维护原料商长期合作积极性两条原则的基础上，制定出企业利润最大化生产策略。通过网上查找同质量煤销售价格（1160 元/吨），得到 A、B、C 三种原料每天的加工量，分别为 3528.068 吨、800 吨、6071 吨；然后我们浮动煤售价，在 0~2900 范围取了 33 组值表示 33 种不同价格，进而得到对应的原料加工量。对 33 组数据进行分析，得到以下 3 条结论：

- 随着煤炭销售价格提高，企业利润会不断增加，但是这仅仅是基于供需平衡假设条件之下的，实际生活中，价格升高会影响顾客的需求，进而给企业带来负面影响；
- 当优质煤销售价格低于 563 元/吨时，企业将要亏本，因此，企业销售价格必须维持在 563 元/吨以上。在计算企业利润时，我们忽略了工人工资、机器维修费用等，因此实际企业利润会低于模型求解结果，这就要求煤炭销售价格应该比 563 元/吨高许多；
- 依据当前同质量产品的销售价格 1160 元/吨，模型得到企业利润为 451 万元；
- 每天连续加工原料 A、B、C 时间分别为 3 小时、1 小时、4 小时，中间会有至少 4 小时停产时间，这几乎就占去了 12 小时；火车运输时间只能安排在 3 种原料均加工完之后。

企业可以根据我们给出的生产策略，结合当前价格选择加工计划。当然，在以企业利润为优化目标制定生产计划时，我们没有考虑工人工资、机器维修费用等对利润的影响，这些因素可能会减少企业实际利润值。

8 模型优缺点

8.1 模型优点

1. 问题一中，按照实际生活中企业运行的有序性，以一天为周期，制定出企业一天的生产计划，并使得其利润达到最优；
2. 根据问题一建立的优化模型，不断改变优质煤的销售价格，发现模型灵敏度较好，并且根据不同售价，制定出相应的生产方案，供企业选择；
3. 问题二中，鉴于筒仓尺寸远大于煤炭，将煤炭在筒仓内运动简化为颗粒的运动，进而建立颗粒运动学和动力学方程，既符合实际情况又大大简化了计算；
4. 问题三中，通过借鉴 Janssen 公式计算出筒仓入放料时的侧压力，进而推导出流速公式，参数通过查阅文献并结合煤炭实际情况得到，比较圆满地解决了该问题。

8.2 模型缺点

1. 问题一中，我们将企业成本仅仅限制在加工成本、原料购买成本两方面，忽略了工人工资、设备维修费用，可能会给优化结果带来影响；
2. 将煤炭刻画成球形颗粒，改变了物质本身的性质，比如说，球形颗粒更易滚动等，这些假设可能对模拟带来一定误差。

参考文献

- [1] 周家海，筒仓配煤系统在港口的应用，港口装卸，第 3 期：2011。
- [2] 唐颖，基于专业配煤功能的环保型煤炭码头关键生产策略研究，硕士学位论文，武汉理工大学，2009.5
- [3] 马彦敏，筒仓配煤技术在我国的应用前景，起重运输机械，第 12 期：2009
- [4] 煤炭价格，<http://www.sxcoal.com/system/price/>，2012.4.29
- [5] 理想筒仓，<http://www.cement-silo.tk/archives/tag/cement-silos/>，2012.4.30
- [6] 张翀,舒赣平，落地式钢筒仓卸料的模型试验研究，东南大学学报,No.3 Vol.39: 2009.5
- [7] 黄小玲, 陈明祥等,大型整体式浅圆贮煤筒仓局部堆煤作用有限元分析，武汉大学学报,增刊 Vol.41:2008.7
- [8] 吴清松, 胡茂彬,颗粒流的动力学模型和实验研究进展，力学进展, No.2 Vol.32: 2002.5
- [9] 张静,宋存义等，选煤厂大型贮煤筒仓设计方法及计算机仿真，煤炭学报，No.9 Vol.32: 2007.9
- [10] 张炎圣,杨晓蒙等，钢板筒仓侧壁压力的非线性有限元分析，工业建筑，Vol.38:2008
- [11] T.V. Nguyen, etc. Gravity Flow of Granular Materials in Conical Hoppers,

Division of Engineering and Applied Science 104-44.

[12] 胡茂彬,吴清松等, 具有毛细出口的竖直玻璃管中的颗粒物质卸料过程, 科学通报, No.50 Vol.15: 2005.8

[13] 周健,池永等, 颗粒流方法及 PFC2D 程序, 岩土力学, No.3 Vol.21:2000.9

[14] 费海波, 筒仓混配式港口配煤系统的技术分析,水运工程, No.6 Serial No.454:2011.6

[15] 俞良群, 邢纪波, 筒仓装卸料时力场及流场的离散单元法模拟, 农业工程学报, No.4 Vol.16: 2000.7

附录

附录 1 不同种类煤炭详细指标及价格^[4]

种类 \ 成分	灰分	挥发分	硫分	价格
喷吹煤	11-12%	12%	<0.8%	1160
电煤	10-15%	35%	0.5%	400
烟煤	7%	31%	0.5%	210
4 号焦煤	15-18%	19-21%	<0.6%	1100
产品	10.01-10.50%	《35%	<0.8%	

附录 2 利用 MATLAB 刻画筒仓边界曲线

我们将理想筒仓按比例缩小到空间直角坐标系中; 以筒仓放料口圆心为原点, 放料口所在平面为 X,Y 轴平面, 竖直方向为 Z 轴。根据设定的理想筒仓, 我们刻画出研究颗粒流的边界条件, 即筒仓壁的曲线方程。然后运用 MATLAB 绘制出理想筒仓 (见图 17)。

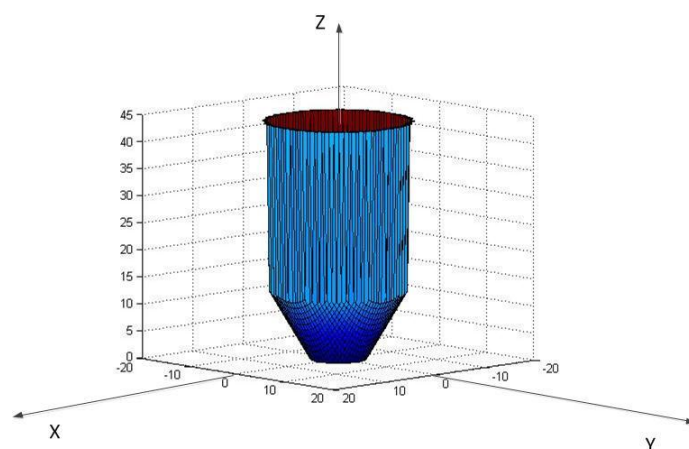


图 17 MATLAB 生成的理想筒仓边界

为简化问题，我们在平面上研究颗粒流特性。将筒仓沿直径剖开，以放料口圆心为原点，放料口直径所在的直线为 X 轴，竖直方向为 Y 轴。

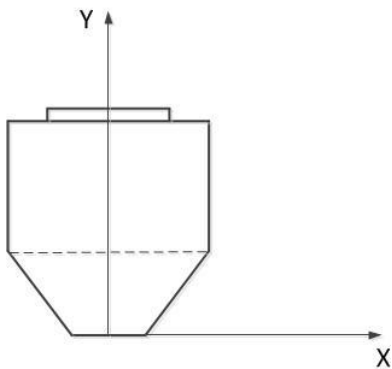
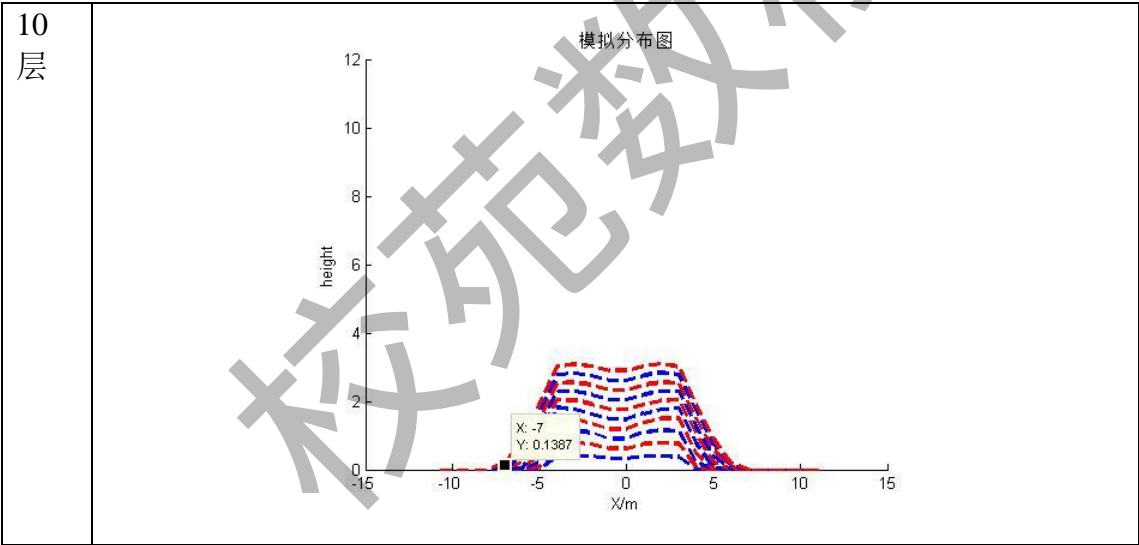
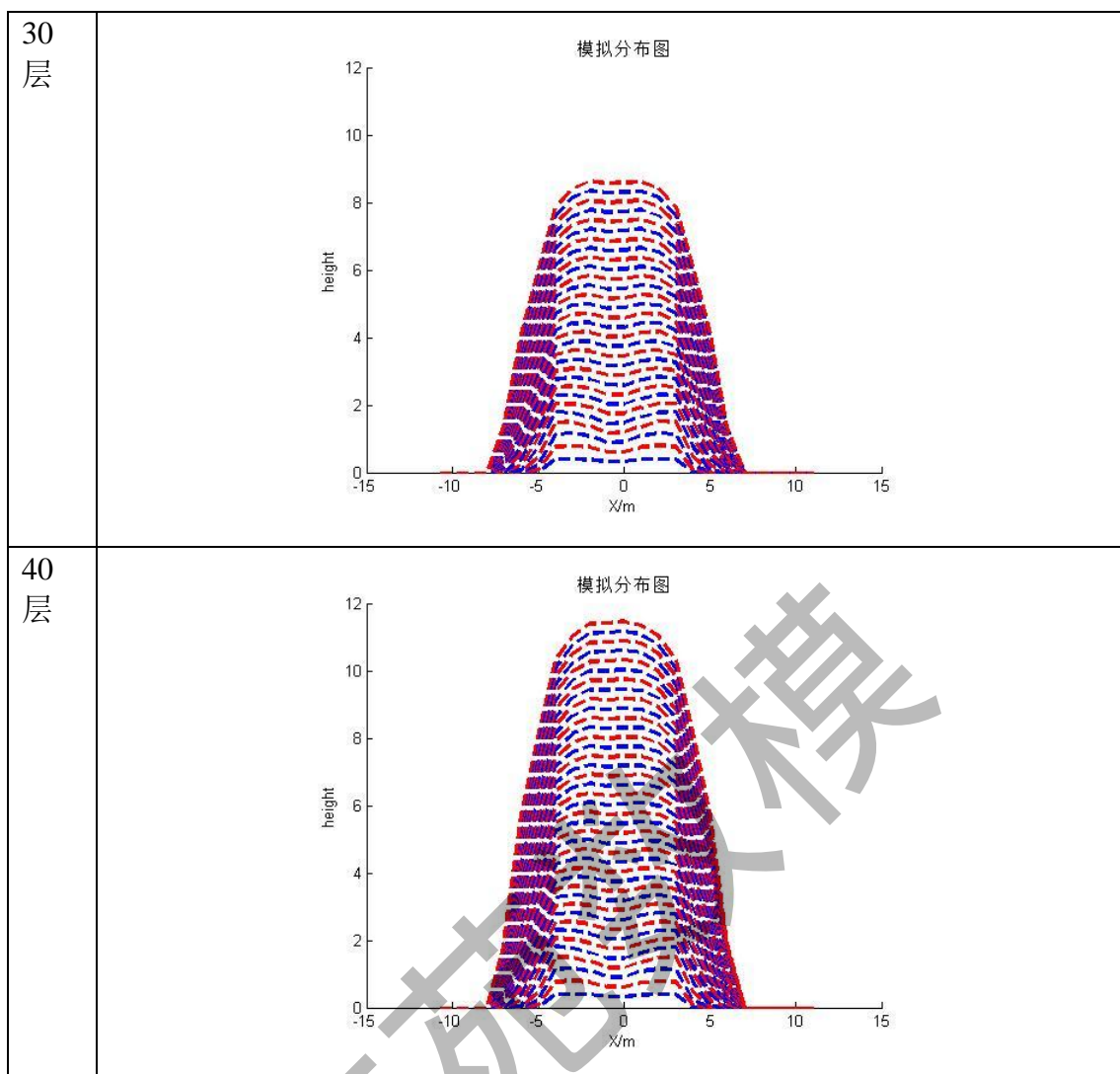


图 18 平面坐标系下的理想筒仓

附录 2 颗粒流落点分布统计（10， 30,40 层）





附录 3 生产安排随产品售价变化详细数据

出售价格	利润（元）/天	产量/吨
0	-2738283	4558.3123
300	-1370790	4558.3123
400	-915269.1	4560.499
500	-433694.7	5960.479
562	-4936.491	7552.8047
563	2616.316	7552.8047
600	282070.2	7552.8047
700	1037351	7552.807
800	1792632	7552.807
900	2547912	7552.807
1000	3303192	7552.8047
1100	4058474	7552.8047

1160	4511641	7552.8047
1200	4813754	7552.8047
1500	7079596	7552.8047
1800	9345435	7552.8047
1900	1.01E+07	7552.8047
2000	1.09E+07	7602.8276
2001	1.09E+07	7602.8276
2001.01	1.09E+07	7602.8276
2001.03	1.09E+07	7602.8276
2001.09	1.09E+07	7621.0511
2002	1.09E+07	7621.0511
2003	1.09E+07	7621.0511
2004	1.09E+07	7621.0511
2020	1.10E+07	7621.0511
2080	1.15E+07	7621.0511
2100	1.39E+07	7621.0511
2200	1.54E+07	7621.0511
2300	1.77E+07	7621.0511
2400	1.39E+07	7621.0511
2600	1.54E+07	7621.0511
2900	1.77E+07	7621.0511

续表

出售价格	利润/天	A 吨/天	B 吨/天	C 吨/天	灰分%	挥发分%
0	-2738283	2338.731	800	3153.325	10.00998512	34.12606749
300	-1370790	2338.731	800	3153.325	10.00998512	34.12606749
400	-915269.1	2340.123	800	3154.858	10.00991471	34.12647765
500	-433694.7	2689.958	800	4755.018	10.50004341	34.47261725
562	-4936.491	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
563	2616.316	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
600	282070.2	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
700	1037351	3528.07	800	6071.93	10.50000013	34.6170821
800	1792632	3528.07	800	6071.93	10.50000013	34.6170821
900	2547912	3528.07	800	6071.93	10.50000013	34.6170821
1000	3303192	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
1100	4058474	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
1160	4511641	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
1200	4813754	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
1500	7079596	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
1800	9345435	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
1900	1.01E+07	3528.068	800	6071.929	10.50000073	34.6170821
2000	1.09E+07	4028.276	800	5571.724	10.13998575	34.52091325
2001	1.09E+07	4028.276	800	5571.724	10.13998575	34.52091325

2001.01	1.09E+07	4028.28	800	5571.72	10.13998575	34.52091325
2001.03	1.09E+07	4028.28	800	5571.72	10.13998575	34.52091325
2001.09	1.09E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2002	1.09E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2003	1.09E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2004	1.09E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2020	1.10E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2080	1.15E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2100	1.39E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2200	1.54E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2300	1.77E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2400	1.39E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2600	1.54E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076
2900	1.77E+07	4210.511	800	5389.489	10.00999985	34.48619076

附录 4 流速公式推导^[9]

分析限于同一粒度的自由流动,但很容易用连续区求解法扩大到不同粒度组成的散料。流速公式是在最小能量假设的基础上推导出来的,它能计算出由于有效筛分效应引起的邻近斗口处的卸空环。它是从流管边上存在摩擦、单位体积内能量和势能总和 T 随流动方向而递减的假设开始的,即

$$T = \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g R \cdot \cos \theta$$

其中,

ρ 为物料质量密度; R, θ 为单位体积坐标。

如果能力 T 沿流管减少,则最小能量面 (R_m, θ) 必落在楔形或圆锥形斗上,流动率

Q 可用斗口大小和最小能量面表示,即

$$\begin{cases} Q_c = \left[\frac{S \cdot g}{2 \tan \theta} \left(1 - \frac{\mu \sigma (S + L)}{\rho_w S L \cdot \cos \theta} \right) \right]^{\frac{1}{2}} & \text{槽型斗口} \\ Q_r = \left[\frac{S \cdot g}{2 \tan \theta} \left(1 - \frac{4 \mu \sigma}{\rho_w D \cdot \cos \theta} \right) \right]^{\frac{1}{2}} & \text{圆形斗口} \end{cases}$$