东 南 大 学 考 试 卷（A卷）

课程名称 高等数学B（下)期中　**考试学期** 11-12-3　**得分** ______

适用专业 选学高数B的各类专业　**考试形式** 闭卷　**考试时间长度** 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

学号________　姓名________

密　封　线

一、 填空题（本题共5小题，每小题4分，共20分）

1. 设$|\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=4, |\mathbf{c}|=5, \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$,则$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|=$ $12+12+12=36$;

2. 设$z=z(x,y)$由方程$z=\int_{xy}^{z} f(t)\mathrm{d}t$确定,其中$f$连续,则$\mathrm{d}z=$ 法1 $\frac{\partial z}{\partial x}=f(z)\frac{\partial z}{\partial x}-yf(xy)$ $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yf(xy)}{f(z)-1}$　法二. $F(x,y,z)=z-\int_{xy}^{z}$ $F_x=yf(xy)$ $F_z=1-f(z)$

3. 点$(1,2,3)$到直线$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$的距离为________;

$d=\frac{|(1,-2,0)\times(1,-3,-2)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\frac{|(-4,2,-1)|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

4. 已知直线$2x=3y=z-1$平行于平面$4x+\lambda y+z=0$,则$\lambda=$ -9;

$\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{3}\times\lambda+1\times1=0$　$\frac{1}{3}\lambda=-3$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ $\leq \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$

二、 单项选择题（本题共4小题，每小题4分，共16分）

1. 下列反常积分中收敛的是 [ ]

(A)$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$ (B)$\displaystyle\int_1^2\left[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$ (C)$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$ (D)$\displaystyle\int_0^2\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$

$\geq\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_1^{+\infty}=+\infty$

$\left(-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x-1}\right)\Big|_1^2$　$\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

$2\sqrt{(x-2)}\Big|_2^c$, $2\sqrt{x-2}\Big|_c^{+\infty}$

$=\int_0^1+\cdots=\ln|x^2-1|=-\infty$

2. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x=1$处条件收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}(x+2)^{n+1}$的收敛半径为[ ]

$\Rightarrow$ 收敛半径为3.

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 不能确定

3. 设$\varphi(x),\psi(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续,且$\varphi(-x)=\psi(x)$,则$\varphi(x)$的Fourier系数a_n, b_n与$\psi(x)$的Fourier系数α_n,β_n的关系是 [ ]

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\cos[n(-t)]\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx=\alpha_n.$

(A) $a_n=\alpha_n, b_n=\beta_n$　(B) $a_n=\alpha_n, b_n=-\beta_n$

(C) $a_n=-\alpha_n, b_n=\beta_n$　(D) $a_n=-\alpha_n, b_n=-\beta_n$

4. 以下表述正确的是 [ ]

切 选项

偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 偏导数存在
可微 $\Downarrow$ 连续

(A)若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在偏导数,则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$一定存在;

(B)若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微,则$f(x,y)$在该点处必连续; ✓

(C)若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在偏导数f_x,f_y,则$f(x,y)$在该点处必可微;

(D)以上表述皆不正确.

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

$\{1,0,2\}\times\{0,1,-3\}=\{-2,3,1\}$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$$

2. 设 $z=f(x^2-y^2,xy)+g(x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+yf_2+2xg'$

~~$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(f_{11}($~~

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(-2yf_{11}+xf_{12})+f_2+y(-2yf_{21}+xf_{22})+2x\cdot 2yg''$

$=-4xyf_{11}+2(x^2-y^2)f_{12}+xyf_{22}+f_2+4xyg''$

$\dfrac{x-x+1}{(x-1)\ln x}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-x}{x}\cdot\dfrac{x}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1}{1+\ln x+1}=-\dfrac{1}{2}$

3. 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\prod: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程,并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程. $\to x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$.

1° 通过直线L的平面束方程为 $(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0$ 即 $x+(\lambda-1)y+\lambda z-\lambda-1=0$

投影柱面满足 $\{1,\lambda-1,\lambda\}\cdot\{1,-1,2\}=0 \Rightarrow \lambda=-2$.

故过L且垂直于$\prod$的平面方程为 $x-3y-2z+1=0$, 投影直线L_0方程为 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=2y\\z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$

2° $M(x,y,z)$ 设曲面上一点坐标为, 过此点作y轴的垂直面,交L_0于点$M_0(x_0,y_0,z_0)$

则M到y轴距离$=M_0$到y轴距离, 且$y=y_0$, 从而 $\begin{cases}y_0=y\\x_0^2+z_0^2=x^2+z^2\end{cases}$ 又(x_0,y_0,z_0)在L_0

故 $x_0^2+z_0^2=(2y_0)^2+\dfrac{(y_0-1)^2}{4}=4y^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}$

4. 求点 $(2,3,1)$ 在直线 $\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$ 上的投影.

过点 $(2,3,1)$ 且垂直于已知直线的平面方程为 $(x-2)\cdot 1+(y-3)\cdot 2+(z-1)\cdot 3=0$

即 $x+2y+3z-11=0$

令 $\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}=t$，则 $\begin{cases} x=t-7 \\ y=2t-2 \\ z=3t-2 \end{cases}$ 代入平面方程得 $t=4$.

故点 $(2,3,1)$ 在已知直线上的投影为 $(-5,2,4)$.

5. 设方程 $e^{x^2z}+xy^2\ln z=1$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

法一（即推导隐函数求偏导的方法）

两边关于 x 求导

$$e^{x^2z}\left(2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y^2\ln z+xy^2\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xz^2e^{x^2z}+zy^2\ln z}{x^2ze^{x^2z}+xy^2}$$

法二：令 $F(x,y,z)=e^{x^2z}+xy^2\ln z-1=0$

$F_x=e^{x^2z}\cdot 2xz+y^2\ln z$

$F_z=e^{x^2z}\cdot x^2+\frac{xy^2}{z}$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2xz^2e^{x^2z}+zy^2\ln z}{x^2ze^{x^2z}+xy^2}$$

四、（本题满分8分）将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数.

奇式延拓，周期延拓.

$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

~~$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\,dx-\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx\right)$~~

~~$=-\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$~~

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\,d(\cos nx)\right]$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n} \quad (n=1,2\cdots)$$

$\therefore f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx \quad (0<x\le\pi)$

当 $x=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ 收敛于 0.

五、（本题满分8分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}$ 的和函数 $S(x)$, 并求 $S(x)$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(\sqrt{2})^{2n-2}(2n-1)!}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$S(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin\frac{(x-1)+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left[\sin\frac{x-1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\frac{x-1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n)!}(x-1)^{2n}+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{(\sqrt{2})^{2n+1}(2n+1)!}\right] \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

六、（本题满分8分）就参数 k 的不同取值, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^k(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$$

的敛散性.

$$a_n=n^k(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$$

$$=n^k\left[(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\right]$$

$$=n^k\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)$$

$$=n^k\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}=n^k\frac{-2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}$$

$$=n^{k-\frac{3}{2}}\frac{-2}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-k}} \quad (n\to+\infty)$$

~~而 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散~~

由P级数及比较判别法, 知 $\frac{3}{2}-k\le 1$, 即 $k\ge\frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

$\frac{3}{2}-k>1$, 即 $k<\frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.