06-3高A期中试卷答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. $\underline{\dfrac{x-1}{2}=y-1=\dfrac{z-1}{-3}}$；2. $\underline{\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y}$；3. $\underline{\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^0 f(x,y)\mathrm{d}y}$；

4. $\underline{2\pi}$；5. $\oiint_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=\underline{\dfrac{4}{3}\sqrt{3}}$.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．[D] 7．[D] 8. [C] 9．[C]

三. 计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10．**解** $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=f_1+f_2\cdot(g_1+2xg_2)$，

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=f_{11}+2f_{12}\cdot(g_1+2xg_2)+f_{22}\cdot(g_1+2xg_2)^2+f_2\cdot(g_{11}+4xg_{12}+4x^2g_{22}+2g_2)$$

11. **解** $\nabla u(M_0)=\left\{\dfrac{xz^2}{\sqrt{x^2+2y^2}},\dfrac{2yz^2}{\sqrt{x^2+2y^2}},2z\sqrt{x^2+2y^2}\right\}\Big|_{M_0}=\left\{\dfrac{\sqrt6}{3},\dfrac{\sqrt6}{3},\sqrt6\right\}$，(**3 分**)

$$\mathbf{n}\Big|_{M_0}=\left\{\frac{x}{4},y,\frac{z}{2}\right\}\Big|_{M_0}=\left\{\frac14,\frac12,\frac12\right\},\mathbf{n}^\circ\Big|_{M_0}=\left\{\frac13,\frac23,\frac23\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{M_0}=\left\{\frac{\sqrt6}{3},\frac{\sqrt6}{3},\sqrt6\right\}\cdot\left\{\frac13,\frac23,\frac23\right\}=\sqrt6$$

12．**解** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x-\mathrm{e}^{-y}\sin x,u=x^2+\mathrm{e}^{-y}\cos x+\varphi(y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^{-y}\cos x+\varphi'(y)=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2y-\mathrm{e}^{-y}\cos x，\ \varphi(y)=-y^2+C，$$

$u(x,y)=x^2-y^2+\mathrm{e}^{-y}\cos x+C$，(**3 分**) $f(z)=z^2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+C$，

$$f'(\mathrm{i})=\left(2+\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{i}$$

13．**解** 原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$（**5 分**）$=\dfrac{15\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{5\pi}{4}$

14．解 $P=x^2+y^2$, $Q=2xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ，积分与路径无关，

$\mathrm{d}u=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}x^3+xy^2\right)$，（**2 分**）$\displaystyle\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\Big|_{(2,0)}^{(0,1)}=-\frac{8}{3}$

四(15).解 令 $L=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2+\lambda(3x-2z)$，

$L_x=2(2x-3)+3\lambda=0, L_y=2(2y-4)=0, L_z=2(2z-5)-2\lambda=0$，得唯一驻点的坐标：

$x=\dfrac{21}{13}, y=2, z=\dfrac{63}{26}$，由问题的实际意义知道，该问题一定存在最小值，故点$\left(\dfrac{21}{13},2,\dfrac{63}{26}\right)$即为所求.

五（16）解 设质心坐标为$(\overline{x},\overline{y})$，由对称性知$\overline{y}=0$，平板区域的极坐标表示为：

$a\le\rho\le a(1+\cos\theta)$，

$$M_y=\iint_\sigma\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{13}{10}a^3,$$

$$m=\iint_\sigma\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}a^2$$，质心坐标为$\left(\dfrac{39}{40}a,0\right)$.（

六（17）证 由题设条件知，由方程 $f(x,y)=C$ 唯一确定了二阶可导函数 $y=y(x)$，从而得知：$f(x,y)=C$ 为一直线的充分必要条件是 $y''(x)=0$.方程 $f(x,y)=C$ 的等号两端对 x 求导，得 $y'=-\dfrac{f_x}{f_y}$，再由 $f_y\ne0$ 及

$$y''=-\frac{f_y(f_{xx}+f_{xy}y')-f_x(f_{xy}+f_{yy}y')}{f_y^2}=-\frac{f_y^2f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+f_x^2f_{yy}}{f_y^3}=0,$$

即得所证.