07-08-3 期末高数 B 参考答案及评分标准（A） 08.6.20

一. 填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 3 6 分)

1. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛域为$\underline{[0,6)}$；

2. 设$z=y^2+f(x^2-y^2)$，其中$f(u)$可微， 则$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{2xy}$；

3. 曲线$\begin{cases}x+y+z=4\\ z=x^2+y^2\end{cases}$在点$(1,1,2)$处的法平面方程是$\underline{x-y=0}$；

4. 设C为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4z\\ z=1\end{cases}$，则曲线积分$\oint_C(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\underline{8\sqrt{3}\pi}$；

5. 交换二次积分的次序

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y=\underline{\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x}；$$

6. 三次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$的值是$\underline{\frac{\pi}{10}}$；

7. 散度$\operatorname{div}\left(x^3\mathbf{i}+y\cos(y-2z)\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)\Big|_{(2,0,\pi)}=\underline{13}$；

8. 已知第二型曲线积分$\int_A^B(x^4+4xy^n)\mathrm{d}x+(6x^{n-1}y^2-5y^4)\mathrm{d}y$与路径无关，则$n=\underline{3}$；

9. 平面$5x+4y+3z=1$被椭圆柱面$4x^2+9y^2=1$所截的有限部分的面积为$\underline{\frac{5\sqrt{2}\pi}{18}}$.

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分)

10. 设$z=z(x,y)$是由方程$xy+yz+xz=1$所确定的隐函数，$x+y\neq 0$，试求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z=0$，$\mathrm{d}z=-\frac{y+z}{x+y}\mathrm{d}x-\frac{x+z}{x+y}\mathrm{d}y$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y+z}{(x+y)^2}-\frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{x+y}=\frac{y+z}{(x+y)^2}-\frac{1-\frac{x+z}{x+y}}{x+y}=\frac{2z}{(x+y)^2}$$ **（4+3 分）**

学号________ 姓名________ 密 封 线

11．计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 $D=\left\{(x,y)\middle|2y\le x^2+y^2\le 4y\right\}$.

解 $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho=120\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{45}{2}\pi$

（2+2+3 分）

12．设立体 Ω 由曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 及平面 $z=0,z=\sqrt{3}$ 围成，密度 $\rho=1$，求它对 z 轴的转动惯量.

解 $\iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}v=\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+z^2}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1+z^2\right)^2\mathrm{d}z=\frac{12}{5}\sqrt{3}\pi$ **（2+3+2 分）**

13. 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z}$，$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上满足 $0<h\le z\le R$ 的部分.

解 Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D:\begin{cases}x^2+y^2\le\sqrt{R^2-h^2}\\ z=0\end{cases}$，**（1 分）**

$\iint\limits_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z}=R\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{R^2-x^2-y^2}=2\pi R\int_0^{\sqrt{R^2-h^2}}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{R^2-\rho^2}=2\pi R\ln\frac{R}{h}$ **（3+1+2 分）**

三（14）.（本题满分 8 分）求函数 $f(x,y)=x-x^2-y^2$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|2x^2+y^2\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解 令 $f_x=1-2x=0,\ f_y=-2y=0$，得 $x=\frac{1}{2},y=0$；**（1 分）**在区域 D 的边界

$\partial D=\left\{(x,y)\middle|2x^2+y^2=1\right\}$ 上，$g(x)=f\big|_{\partial D}=x^2+x-1$，$-\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$，令

$g'(x)=2x+1=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$，**（2 分）** $f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{4}$，$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$，

$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$，**（3 分）**由比较得 $f_{\max}=\frac{1}{4},\ f_{\min}=-\frac{5}{4}$ **（2 分）**

四（15）。（本题满分 8 分）计算 $\iint\limits_S (z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

解 补两个面，S_1：平面 $x+z=2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=4$ 所截部分，取上侧，在 xOy 平面的投影区域记为 $D:\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z=0 \end{cases}$；$S_2$：$\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z=0 \end{cases}$，取下侧，由曲面 S,S_1,S_2 所围成的内部区域记为 V，（**2 分**）由 Gauss 公式得

$$\iint_S (z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{S+S_1+S_2}(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\iint_{S_1}(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\iint_{S_2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \text{（1 分）}$$

$$=\iiint_V 0\mathrm{d}v-\iint_D(3-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-8\pi \text{（3+1+1 分）}$$

五（16）．（本题满分 7 分）计算 $I=\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y$，其中 C 是由点 $B(1+\pi,0)$ 沿曲线 $y=\sin(x-1)$ 到点 $A(1,0)$ 的一段弧.

解 补有向直线 $\overline{AB}$，由 C 与 $\overline{AB}$ 所围成的内部区域记为 D，（**1 分**）由 Green 公式得

$$I=\int_{C+\overline{AB}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y-\int_{\overline{AB}}x\mathrm{d}x=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\pi-\frac{1}{2}\pi^2$$

（**2+2+1 分**）

$$=\frac{4}{9}-\pi-\frac{1}{2}\pi^2 \text{（1 分）}$$

六（17）（本题满分 7 分）设 $a_1=1,a_2=2$，当 $n\ge 3$ 时，有 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，

（1） 证明不等式 $0<\frac{3}{2}a_{n-1}<a_n<2a_{n-1},n\ge 4$；

（2） 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛，且满足不等式 $2\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\le\frac{5}{2}$.

解 （1）首先易见 $\{a_n\}$ 单调递增，所以当 $n\ge 3$ 时，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}<2a_{n-1}$，因而当 $n\ge 4$ 时，$a_{n-2}>\frac{1}{2}a_{n-1}$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}>\frac{3}{2}a_{n-1}$ （**2 分**）

（2）$\frac{1}{a_n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}<\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{a_{n-2}}<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{a_3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$，$n\ge 4$

由比较判别法得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛。**（2 分）** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}=\frac{5}{2}$，

$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}>\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{a_{n-2}}>\cdots>\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{a_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$n\ge 3$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\ge 1+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2$ **（3 分）**

七（18）（本题满分 6 分）设C是圆周$x^2+y^2=x+y$，取逆时针方向，连续函数$f(u)>0$，

证明
$$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\ge\pi$$

证 圆周C所围的内部区域记为D，由 Green 公式得

$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}\sigma$，**（2 分）**由于区域$D$关于直线$y=x$对称，

利用轮换对称性，得$\iint_D f(y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x)\mathrm{d}\sigma$，**（2 分）**于是

$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}\sigma\ge 2\iint_D\mathrm{d}\sigma=\pi$ **（2 分）**