

东南大学学生会
Students' Union of Southeast University

07-08-2几代A

一. (21%) 填空题

1. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, n 是正整数, 则 $A^n =$ _____
2. 假设 4 阶方阵 $A = (\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $B = (\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 的行列式分别等于 2, 3, 矩阵 $A+B$ 的行列式 $|A+B| =$ _____
3. 点 $P(1, 2, 3)$ 到平面 $2x + y - z = 5$ 的距离为 _____
4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix}$, 则满足 $AP = B$ 的初等矩阵 $P =$ _____
5. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$ 正定的充分必要条件是参数 x 满足条件 _____
6. 已知二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2tyz$, 若 $f(x, y, z) = 1$ 表示直角坐标系中的单叶双曲面, 则参数 t 满足条件 _____
7. 设向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 在线性变换 f 下的像分别为 $f(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, 则 $\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 在线性变换 f 下的像为 $f(\gamma) =$ _____。

二. (9%) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 问:

- (1) a 满足什么条件时, 不论 b 取何值, A 都相似于对角矩阵?
- (2) b 满足什么条件时, 不论 a 取何值, A 都正交相似于对角矩阵?
- (3) 若 A 不相似于对角矩阵, 求 A 的极小多项式以及 A 的 Jordan 标准形。

三. (16%) 已知平面 π 的方程为 $x - y + z = 1$, 直线 l 的方程为 $\begin{cases} x + ty + z = -7 \\ 3x - 2y + tz = 1 \end{cases}$ 。

1. 问: 当 t 取何值时, l 与 π 有惟一交点?
2. 问: 当 t 取何值时, l 与 π 没有公共交点?
3. 问: 当 t 取何值时, l 在 π 内? 求这时 l 的对称方程。

四. (16%) 已知平面 π 的方程为 $x - y + z = 1$, 直线 l 的方程为 $\begin{cases} x + ty + z = -7 \\ 3x - 2y + tz = 1 \end{cases}$ 。

1. 问: 当 t 取何值时, l 与 π 有惟一交点?
2. 问: 当 t 取何值时, l 与 π 没有公共交点?
3. 问: 当 t 取何值时, l 在 π 内? 求这时 l 的对称方程。

东南大学学生会

Students' Union of Southeast University

五. (14%) 假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X , 使得 $A^{-1}X = 2X - B$

六. (16%) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似。

1. 求参数 a, b 的值;
2. 求一可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$ 。
3. 问: 是否存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = B$? 为什么?

七. (8%) 已知空间直角坐标系中曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} 3z = (y+1)(y-1) \\ x = 0 \end{cases}$, 平面 π_1 的方程

为 $x+z=2$ 。记 π_2 是 Γ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面。

1. 求 π_2 的方程;
2. 求 π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线 Ω 的方程

八. (12%) 假设 A 是 2 阶方阵, x 是 2 维非零列向量, 并且 x 不是 A 的特征向量。

1. 证明: x, Ax 线性无关;
2. 若 $A^2x + Ax - 6x = 0$, $B = (x, Ax)$, 求矩阵 C , 使得 $AB = BC$;
3. 若 $A^2x + Ax - 6x = 0$, 求 A 的特征值, 并问: A 是否相似于对角阵? 为什么?

九. (4%) 证明: 对于任意 $s \times n$ 实矩阵 B , n 阶方阵 $A = I + B^T B$ 的特征值全大于零。