高等数学（B）09-10-3 期中试卷参考答案及评分标准

一、填空

1.由方程$xyz+\sin(\pi z)=0$确定的隐函数$z=z(x,y)$在点（1,0,1）处的全微分$dz=\dfrac{1}{\pi}dy$

2.曲线$\begin{cases}2z=x+3\\x^2+y^2=1\end{cases}$在$yOz$平面上的投影曲线为$\begin{cases}y^2+(2z-3)^2=1\\x=0\end{cases}$

3.函数$f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$的傅里叶级数中的系数$b_3$的值是$\dfrac{2}{3}\pi$

4.已知幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n n(x-1)^{n-1}$的收敛域是$[-1,3]$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$的收敛域是$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

5.设a，b为非零向量，且满足$(a+3b)\perp(7a-5b),(a-4b)\perp(7a-2b)$,则$a$和$b$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$

二、单项选择

6.设直线L$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面$\pi$:$4x-2y+z-2=0$，则（$D$）

（A）L平行于π（B）L在π上（C）L与π斜交（D）L垂直于π

7.已知曲面$z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$，则点P为（C）

$(A)(1,-1,2)(B)(-1,1,2)(C)(1,1,2)(D)(-1,-1,2)$

8.下列广义积分中收敛的是（C）

（A）$\int_1^e\dfrac{dx}{x(x-1)^2}(B)\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}(C)\int_2^{+\infty}\dfrac{\sin^2x}{\sqrt{x^3}-1}dx(D)\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\frac{5}{2}}}dx$

9.级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin x}{1+x}dx(C)$

(A)发散（B）条件收敛（C）绝对收敛（D）无法判断敛散性

三.计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

10.设 z=f(2x-y,xy ^{2}),其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1+y^2f_2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f_{11}+(4x-y)yf_{12}+2xy^3f_{22}+2yf_2.$$

11.求通过两平面 2x+y-4=0 与 y+2z=0 的交线及点 M_0 （2，-1，-1）的平面方程。

2x+y-4+λ(y+2z)=0,即 2x+(1+λ)y+2λz-4=0,将点 M_0（2，-1，-1）代入平面方程求得λ=

$-\frac{1}{3}$，于是所求平面方程为 3x+y-z-6=0.

12.求两异面直线 L_1：$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$ 与 L_2：$\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ 之间的距离。

$\{1,1,-1\}\times\{2,-1,1\}=-3\{0,1,1\},\{1,2,-1\}\times\{1,2,2\}=3\{2,-1,0\}$，$L_1$和$L_2$的方向向量分别为$I_1=\{0,1,1\}I_2=\{1,2,-2$

L_1过点$M(1,0,0),L_2$过点$(0,0,-2)$，则所求距离$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},I_1,I_2\right]\right|}{\left|I_1\times I_2\right|}=1.$

13.设 x+y-z=e^z ,xe^x =tan t,y=cos t,求 $\frac{dz}{dt}\big|_{t=0}$.

当 t=0 时，知 x=0，y=1,z=0.xe^x =tan t 两边对 t 求导得

$\frac{dx}{dt}\big|_{t=0}=\frac{\sec^2 t}{e^x(1+x)}\big|_{t=0}=1,\frac{dy}{dt}\big|_{t=0}=-\sin t\big|_{t=0}=0,$ x+y-z=e^z 两边对 t 求导得

（$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}$）$\big|_{t=0}$=（$e^z\frac{dz}{dt}$）$\big|_{t=0}$,于是$\frac{dz}{dt}\big|_{t=0}=\frac{1}{2}.$

14.将 f(x)=$\frac{x-1}{4-x}$在 x_0=1 点展成幂级数，并给出幂级数的收敛域，再求 $f^{(n)}(1)$.

f(x)=$\frac{x-1}{4-x}=\frac{x-1}{3-(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{x-1}{1-\frac{x-1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}},$ $|x-1|$<3,f(x) 的幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的系数 $a_n=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\frac{1}{3^n},f^{(n)}(1)=\frac{n!}{3^n}$

四. 将 f(x)=x-1($0\le x\le 2$)展开为周期为 4 的余弦级数，并设 S（x）为该余弦级数的和函数，求 S（3）和 S（6）的值.

将 f(x) 作偶式延拓，然后再做周期延拓，则

$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)dx=0,a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n-1),n=1,2,\cdots\cdots$，

f(x)=

$$\frac{-8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2},(0\le x\le 2),S(3)=S(-1)=S(1)=0,S(6)=S(2)=1.$$

五．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n^2-n+1)x^n$ 的和函数，并指明收敛域.

S(x)=

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=x\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-1}+\frac{1}{1+x}=x[\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)x^n]'+\frac{1}{1+x}=$$

$$x[x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)x^{n-2}]'+\frac{1}{1+x}=x[x^2(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^{n-1})']'+\frac{1}{1+x}=x[x^2(\frac{x}{1+x})']'+\frac{1}{1+x}=\frac{2x^2}{(1+x)^3}+\frac{1}{1+x}=\frac{3x^3+2x+1}{(1+x)^3}\quad x\in(-1,1)$$

六．设 f(x)在 x=0 的某一领域具有二阶连续导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 试证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

由 $\lim_{x\to 0},\frac{f(x)}{x}=0$ 得 f（0）=0， f’(0)=0, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)$, 取 x= $\frac{1}{n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由比较判别法的极限形式得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.