习 题 课

一、填空题

1．设 C 为闭曲线 $|x|+|y|=2$，取逆时针方向，则 $\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=$____。

2．设 Σ 为平面 $x+y+z=4$ 被圆柱 $x^2+y^2=1$ 截下的有限限部分，则 $\iint\limits_{\Sigma} zdS=$____。

3．设 $f(u)$ 具有连续导数，且 $\int_0^4 f(u)du=4$，C 为半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$，起点为 $A(0,0)$，终点为 $B(2,0)$，则 $\int_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=$____。

二、解答题

1. 计算曲线积分 $I=\int_C (e^y-12xy)dx+(xe^y-\cos y)dy$，其中 C 曲线 $y=x^2$ 上从 $A(-1,\ 1)$ 到 $B(1,\ 1)$ 的一段。

2．求 $I=\int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$，其中 C 从点 $A(-a,\ 0)$ 经上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geq 0)$ 到达点 $B(a,\ 0)$ 的弧段，且 $0<b<a$。

3．计算曲线积分 $\int_C \frac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}$，其中 C 是由点 $A(1,0)$ 经半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到点 $B(-1,0)$ 再沿直线 $x+y=-1$ 到点 $E(1,-2)$ 的路径。

4. 设曲线积分 $\int_C xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 的值。

5．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内有向分段光滑曲线,其起点为 (a,b),终点为 (c,d),记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy,$$

（1） 证明：曲线积分 I 与路径无关；（2）当 $ab=cd$ 时，求 I 的值。

6. 已知曲线积分 $\oint_C \frac{xdy-ydx}{2y^2+\varphi(x)} \equiv A$($A$为常数)，其中 $\varphi(x)$ 的一阶导数连续，且 $\varphi(1)=1$，C 是围绕原点一周的任一正向闭曲线，

（1）证明在任一不包含原点的单连通区域内，曲线积分 $\int_C \frac{xdy-ydx}{2y^2+\varphi(x)}$ 与路径无关；

（2）确定 $\varphi(x)$，并求 A 的值。

7．设 $x>0$， $f(x)$ 为连续可微函数，且 $f(1)=2$，对 $x>0$ 的任一闭曲线 C，有 $\oint_C 4x^3ydx+xf(x)dy=0$，求 $f(x)$ 和积分 $\oint_{C(AB)} 4x^3ydx+xf(x)dy$ 的值，其中 AB 是由 $A(2,0)$ 至 $B(3,3)$ 的一段弧。