05高A期中试卷

一. 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 2$ 所确定，则 $\mathrm{d}z =$____________。

2. 设 $z = i^{1-i}$，则 $\mathrm{Im}\, z =$____________________。

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t) = \int_1^t \mathrm{d}y \int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2) =$_______。

4. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} y\left(x^2 + \cos y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$___________。

5. 设 S 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限部分的下侧，则 $\iint\limits_S \left(2x + \frac{4}{3}y + z\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y =$___。

二. 单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6. 设 $I_1 = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[xy^2 + f\left(x^2 + y^2\right)\right]\mathrm{d}y$，$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$，其中 $f(t)$ 是连续函数，则有 [　　]

(A) $I_1 < I_2$　　(B) $I_1 > I_2$　　(C) $I_1 = 2I_2$　　(D) $I_1 = I_2$

7. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线必定平行于平面 [　　]

(A) $y = 0$　　(B) $x = 0$　　(C) $z = 0$　　(D) $x + y - z = 0$

8. 设 L 是摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t - \pi \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 上从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的弧段，则 $\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} =$ [　　]

(A) π　　(B) $-\pi$　　(C) 0　　(D) 2π

9. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微，下列结论不正确的是 [　　]

（A） $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续　　（B） $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某邻域内有界

（C） $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处两个偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 都存在

（D） $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处两个偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 都连续.

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

10. 设 $z=f\left(x\sin y,\dfrac{x}{y}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

11. 设调和函数 $u(x,y)=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+x$,求 $u(x,y)$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$，并求解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$。(自变量单独用 z 表示)

12. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域 $D=\left\{(x,y)\middle|y\ge 0,x^2+y^2\ge 1,x^2+y^2\le 2x\right\}$。

13. 计算 $\iiint\limits_\Omega\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x^2y\right)\mathrm{d}V$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$。

14. 计算 $\int_L x^2\,\mathrm{d}\,s$，其中 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $z=\sqrt{5}$ 的交线。

四（15）.（本题满分 7 分）求由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的表面积。

五（16）.（本题满分 9 分）在曲面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1\,(x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0)$ 上求一点 P，使过点 P 的切平面与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小，并求最小体积。

六（17）.（本题满分 7 分）试求连续可微函数 $\varphi(x)$，使在右半平面内曲线积分

$$\int_A^B\left(\cos x-\varphi(x)\right)\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关，其中 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$；且当 $A=(1,0),B=(\pi,\pi)$ 时，求该曲线积分的值。

七（18）.（本题满分 6 分）计算 $\iint\limits_\Sigma\dfrac{ax\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 a 为大于 0 的常数，Σ 为 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。