12-13-3高数B期末(A)卷参考答案及评分标准

一、 填空题（本题共9小题，每小题4分，共36分）

1. $\underline{4x+y+z-6=0}$; 2. $\underline{\sqrt{2}}$; 3. $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho}$; 4. $\underline{\frac{7}{4}}$;

5. $\underline{\frac{5}{4}\pi}$; 6. $\underline{2\ ,3}$; 7. $\underline{1-\pi}$; 8. $\underline{1}$; 9. $\underline{\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}}$.

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 解 $\mathrm{d}z = f(yz)(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)+2xf(\cos x^2)\sin x^2\mathrm{d}x$， (5分)

$\mathrm{d}z = \frac{zf(yz)}{1-yf(yz)}\mathrm{d}y + \frac{2xf(\cos x^2)\sin x^2}{1-yf(yz)}\mathrm{d}x$. (2分)

2. 解 $\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy)+\varphi_1+\frac{1}{y}\varphi_2$, (3分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi_{12}-\frac{x}{y^3}\varphi_{22}-\frac{1}{y^2}\varphi_2$. (4分)

3. 解 原式$=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$ (2+2+3分)

4. 解 原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{2\rho\cos\varphi}z\mathrm{d}z=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{5}{6}\pi$.

(3+2+2分)

5. 解 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{3\sqrt{2}}r^4\mathrm{d}r=\frac{486(\sqrt{2}-1)}{5}\pi$. (5分+2分)

三、 (本题满分8分)解 补面$S:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ z=0\end{cases}$,取上侧，由 Σ 与 S 合成的封闭曲面取内侧，其内部区域记为 Ω (1分)，由Gauss公式得

$$I=\iint\limits_{\Sigma+S}-\iint\limits_{S}=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v+3\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}y^2\mathrm{d}\sigma=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{4-\rho^2}\mathrm{d}z$$

$+12\pi=-6\pi\int_0^2(4\rho^3-\rho^5)\mathrm{d}\rho+12\pi=-32\pi+12\pi=-20\pi$. (3+2+2分)

$$\begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$x=(1-\frac{z}{b})a$

$a^2(\frac{b-z}{b})^2+y^2=a^2$

四、 (本题满分7分)解$x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=b(1-\cos\varphi), 0\le\varphi\le 2\pi$ (2分)

$\frac{(b-z)^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$I=\int_0^{2\pi}(ab(\sin\varphi+\cos\varphi)-a^2-ab)\mathrm{d}\varphi=-2\pi a(a+b)$ (3+2分)

也可用Stokes公式，

$I=-2\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\wedge\underset{2}{\mathrm{d}z}+\underline{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$

$2+1+2$

$=-\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=-2\pi a(a+b)$

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

五、 (本题满分8分)解 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+(x^2+y^2)^2}$， (1分)

原曲线在平面上的投影曲线方程为 $x^2+y^2+x+2y=1$，即圆

$(x+\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=(\frac{3}{2})^2$，圆心 $(-\frac{1}{2},-1)$， (1分)原点到圆周的最短距离为

$\frac{3}{2}-\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，最长距离为 $\frac{3}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

因此 $d_{\min}=\sqrt{(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2+(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^4}=\sqrt{27-12\sqrt{5}}$， (3分)

$d_{\max}=\sqrt{(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^4}=\sqrt{27+12\sqrt{5}}$， (3分)

此题也可用Lagrange乘数法求解.

$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+2y+z-1)$,

$L_x=2x+2\lambda x+\mu=0, L_y=2y+2\lambda y+2\mu=0, L_z=2z-\lambda+\mu=0$,

解得 $M_1(-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5},-1+\frac{3}{5}\sqrt{5},\frac{7-3\sqrt{5}}{2}), M_2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5},-1-\frac{3}{5}\sqrt{5},\frac{7+3\sqrt{5}}{2})$,

$d_{\min}=d(M_1)=\sqrt{27-12\sqrt{5}}, d_{\max}=d(M_2)=\sqrt{27+12\sqrt{5}}$

六、 (本题满分6分)解 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 不一定收敛.例如 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$, 此时 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散. (6分)