计算方法

Ch02 插值方法

程勇

buctcourse@163.com

http://www.buct.edu.cn

Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology

March 1, 2017

提纲

本章提纲

什么是插值？

在初等微积分中，我们用函数 $y=f(x)$ 来描述一个平面曲线，但在实际问题中，函数 $y=f(x)$ 往往是通过实验观测得到的一组数据来给出的，即在某个区间 $[a,b]$ 上给出一系列节点的函数值：

$$y_i=f(x_i) \qquad i=0,1,2,\cdots,n$$

或者给出一张函数表：

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots\cdots$	y_n

Table: 函数表

如何通过这些对应的关系去找出函数 $f(x)$ 的一个近似表达式或求某个不在期间的给定点 x 的函数值呢？

例子：PM2.5 指数计算

某日北京市昌平区南环东路某地点 PM2.5 随时间变化如下表：

时间 (t)	0	4	8	12	16	20
PM2.5 值	63	54	146	181	172	95

Table: 南环东路某地点 PM2.5 测量值

要想知道 PM2.5 随时间变化的情况 $PM = f(t)$，或某一时刻 $t = 10$ 的 PM2.5 指数值应该如何计算？

最简单实用的方法就是插值。简单地说，插值的目的就是根据给定的数据表，寻找一个解析形式的函数 $p(x)$ 近似代替 $f(x)$，根据 $p(x)$ 值计算来对 $f(x)$ 值进行估计。

基本概念

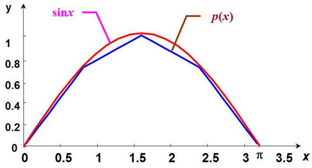
已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点 $a \leq x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \leq b$ 上的函数值 $y_i = f(x_i)$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，寻找一个 $f(x)$ 的近似函数 $p(x)$，且满足

$$p(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

称 $f(x)$ 为被插函数；
称函数 $p(x)$ 为插值函数 (公式)；
若 $p(x)$ 为多项式函数，称 $p(x)$ 为插值多项式；
称数据表中给出的已知节点 x_i 为插值节点；其对应的函数值 y_i 为样本点；
称待求函数值的节点为插值点；
称插值节点所界定的范围 $\Delta = [\min x_i, \max x_i]$ 为插值区间。

$\sin x$ 插值的例子

例如，对函数 $y = \sin x$，若给定 $[0, \pi]$ 的 5 个等分点，可构造插值函数如下：



sinx的插值

对于插值函数 $p(x)$ 与被插函数 $f(x)$ 在节点处的函数值相等，但在节点外 $p(x)$ 与 $f(x)$ 可能会有偏离，因此 $p(x)$ 代替 $f(x)$ 必然存在误差。函数 $p(x)$ 的类型有各种不同的选择，但最常用的类型是代数多项式，因为代数多项式具有一些很好的性质，如它具有各阶导数，计算多项式比较方便等，本章讨论的就是代数插值多项式。

代数插值多项式的存在及唯一性

设函数 $y = f(x)$ 在区间上的插值多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

且满足

$$p_n(x_i) = y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

即多项式 $p_n(x)$ 的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

代数插值多项式的存在及唯一性 (续)

上述方程组系数行列式为 $n+1$ 阶 Vandermond 行列式：

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i) \overset{x_i \neq x_j}{\neq} 0$$

根据克莱姆 (Cramer) 法则，上述线性方程组具有唯一解。

命题

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点 $a \leq x_0, x_1, \cdots, x_n \leq b$ 上的函数值，并且 $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$。则满足插值条件 $p(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 的插值多项式 $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 存在且唯一。

拉格朗日 (Lagrange) 插值形式

虽然线性方程组推出的插值多项式存在且唯一，但通过解线性方程组求插值多项式却不是好方法，而需采用其他的方法。

现将插值多项式表示成如下形式：已知 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点

$$a \leq x_0, x_1, \cdots, x_n \leq b$$

上的函数值

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

构造满足插值条件 $L_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 的次数不超过 n 次的多项式

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) f(x_i)$$

其中 $\varphi_i(x)(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 是次数不超过 n 次的多项式。

两点拉格朗日插值

两点插值也称线性插值。设已知两个不同节点 x_0, x_1 上的函数值 (样本值)

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$$

构造满足插值条件 $L_1(x_i) = y_i (i = 0, 1)$ 的次数不超过一次多项式 $L_1(x) = \varphi_0(x) y_0 + \varphi_1(x) y_1$。其中 $\varphi_i(x)(i = 0, 1)$ 是次数为 1 次的多项式。

实际上就是构造一次的多项式 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 并满足:

$$L_1(x_0) = \varphi_0(x_0) y_0 + \varphi_1(x_0) y_1 = y_0$$
$$L_1(x_1) = \varphi_0(x_1) y_0 + \varphi_1(x_1) y_1 = y_1$$

令 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 满足如下的条件:

	x_0	x_1
$\varphi_0(x)$	1	0
$\varphi_1(x)$	0	1

两点拉格朗日插值 (续)

由于 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 均为一次多项式，因此可求得：

$$\varphi_0\left(x\right) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \varphi_1\left(x\right) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

因此有

$$L_1\left(x\right) = \varphi_0(x) y_0 + \varphi_1(x) y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

这就是两点 Lagrange 插值 (线性插值) 公式，用它来作为函数 $y = f(x)$ 的近似。

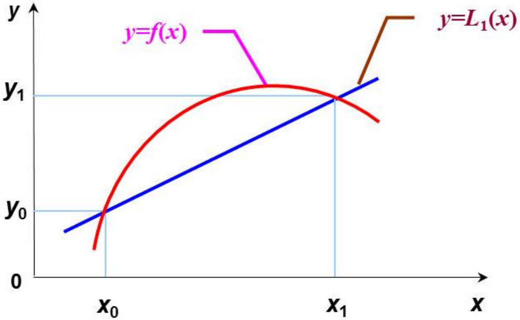
显然 $L_1(x)$ 是次数不超过一次的多项式，且满足：

$$L_1(x_0) = \varphi_0(x_0) y_0 + \varphi_1(x_0) y_1 = 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 = y_0$$
$$L_1(x_1) = \varphi_0(x_1) y_0 + \varphi_1(x_1) y_1 = 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 = y_1$$

即 $L_1(x)$ 满足问题 1 中所要求的条件，$L_1(x)$ 即为所求。

两点拉格朗日插值 (续)

我们称 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。
实际上 $L_1(x)$ 就是这两个插值基函数的线性组合。



两点插值

两点拉格朗日插值例子

例 1 设 $y = f(x) = x^{1/2}$ 在 $x = 100, 121$ 处的函数值为 $10, 11$，试以这两点建立 $y = x^{1/2}$ 的 Lagrange 一次插值多项式，并由此计算 $f(115)$ 处的近似值。

解：取 $x_0 = 100, x_1 = 121$，则 $y_0 = f(x_0) = 10, y_1 = f(x_1) = 11$，

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 121}{100 - 121} \\
\varphi_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 100}{121 - 100} \\
L_1(x) &= \varphi_0(x) y_0 + \varphi_1(x) y_1 \\
&= \frac{x - 121}{100 - 121} \cdot 10 + \frac{x - 100}{121 - 100} \cdot 11 \\
&= \frac{x + 110}{21}
\end{aligned}
$$

两点拉格朗日插值例子 (续)

当 $x = 115$ 时，

$$L_1(115) = \frac{115-121}{100-121}\cdot 10 + \frac{115-100}{121-100}\cdot 11 \\ = 10.71428$$

而 $f(115) = \sqrt{115} = 10.723805$，$f(115) \approx L_1(115)$。该近似值有三位有效数字。

由上面的例子可见，两点插值的精度很低。原因是我们用线性函数来代替非线性函数，不可能有很好的效果。为了进一步改进插值精度，下面考察三点情况下的拉格朗日插值公式。

三点拉格朗日插值

问题 2 设已知三个不同节点 x_0, x_1, x_2 上的函数值 (样本值)

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$$

构造满足插值条件 $L_2(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2)$ 的次数不超过 2 次多项式

$$L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2$$

其中 $\varphi_i(x)(i = 0, 1, 2)$ 是次数为 2 次的多项式。实际上就是构造二次的多项式 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$，满足：

$$\begin{aligned}
L_2(x_0) &= \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 + \varphi_2(x_0)y_2 = y_0 \\
L_2(x_1) &= \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 + \varphi_2(x_1)y_2 = y_1 \\
L_2(x_2) &= \varphi_0(x_2)y_0 + \varphi_1(x_2)y_1 + \varphi_2(x_2)y_2 = y_2
\end{aligned}$$

三点拉格朗日插值 (续)

令 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 满足如下的条件:

	x_0	x_1	x_2
$\varphi_0(x)$	1	0	0
$\varphi_1(x)$	0	1	0
$\varphi_2(x)$	0	0	1

显然可以使上面三式成立。由于 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 均为二次多项式，因此可求得:

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

三点拉格朗日插值 (续)

因此有：$L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2$

这就是三点 Lagrange 插值公式，用它来作为函数 $y = f(x)$ 的近似。显然 $L_2(x)$ 是次数不超过二次的多项式，且满足：

$$\begin{aligned}
L_2(x_0) &= \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 + \varphi_2(x_0)y_2 \\
&= 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_0 \\
L_2(x_1) &= \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 + \varphi_2(x_1)y_2 \\
&= 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_1 \\
L_2(x_2) &= \varphi_0(x_2)y_0 + \varphi_1(x_2)y_1 + \varphi_2(x_2)y_2 \\
&= 0 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = y_2
\end{aligned}$$

即 $L_2(x)$ 满足问题 2 中所要求的条件，$L_2(x)$ 即为所求。称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。实际上 $L_2(x)$ 就是这三个插值基函数的线性组合。

三点拉格朗日插值例子

例 2 设 $y = f(x) = x^{1/2}$ 在 $x = 100, 121, 144$ 处的函数值为 $10, 11, 12$，试以这三点建立 $y = x^{1/2}$ 的二次 Lagrange 插值多项式，并由此计算 $f(115)$ 处的近似值。

解：取 $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$，则 $y_0 = f(x_0) = 10, y_1 = f(x_1) = 11, y_2 = f(x_2) = 12$。

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 121)(x - 144)}{(100 - 121)(100 - 144)}$$
$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 100)(x - 144)}{(121 - 100)(121 - 144)}$$
$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 100)(x - 121)}{(144 - 100)(144 - 121)}$$

三点拉格朗日插值例子 (续)

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2 \\
&= \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \cdot 10 \\
&+ \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \cdot 11 \\
&+ \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \cdot 12
\end{aligned}
$$

当 $x = 115$ 时，

$$L_2(115) = \varphi_0(115) \cdot 10 + \varphi_1(115) \cdot 11 + \varphi_2(115) \cdot 12 = 10.7228$$

而 $f(115) = \sqrt{115} = 10.723805$，$f(115) \approx L_2(115)$。可见近似值具有四位有效数字。

多点拉格朗日插值

我们可以用同样的方法建立多点的插值公式。

问题 3 设已知 $n+1$ 个不同节点 $x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n$ 上的函数值 $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2, \cdots, f(x_n)=y_n$ 构造满足插值条件 $Ln(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$L_n(x)=\varphi_0(x)y_0+\varphi_1(x)y_1+\cdots+\varphi_n(x)y_n$$

其中 $\varphi_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 是次数为 n 的多项式。

同前述方法，令 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 满足如下的条件：

	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$\varphi_0(x)$	1	0	$\cdots$	0
$\varphi_1(x)$	0	1	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\varphi_n(x)$	0	0	$\cdots$	1

多点拉格朗日插值 (续)

可求得：

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$
$$= \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) y_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) y_i$$

这就是 $n+1$ 点 Lagrange 插值 (n 次插值) 公式，用它来作为函数 $y=f(x)$ 的近似。$L_n(x)$ 满足问题 3 中所要求的条件。我们称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。$L_n(x)$ 就是这 $n+1$ 个插值基函数的线性组合。

拉格朗日插值法分析

1. 插值点要求等距;
2. 插值基函数形式简单，但计算比较复杂;
3. 当有新的插值点加入时，基函数要重新计算;
4. 高次插值的精度不一定高;

Newton 插值公式思想

我们知道 Lagrange 插值多项式的插值基函数为：

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

上述基函数形式上比较复杂、计算量大，并且重复计算很多，由线性代数可知任何一个 n 次多项式都可以表示成：

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \cdots, (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

共 $n+1$ 个多项式的线性组合。那么，是否可以将这 $n+1$ 个多项式作为插值基函数呢？答案是肯定的。多项式组

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \cdots, (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

线性无关，因此可以作为插值基函数。

Newton 插值公式

问题 4 设已知 $n+1$ 个不同节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n$$

构造满足插值条件 $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$\begin{aligned} p_n(x) = a_0 &+ a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ &+ a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots \\ &+ a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

为了便于计算系数值 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$，我们引入差商的概念。

差商

设 $f(x)$ 在不同节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为：

$$f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

称 $f(x_i)$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i 的零阶差商。

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \quad (i, j = 0, 1, 2, \cdots, n, i \neq j)$$

为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j 的一阶差商。

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i} \quad (i, j, k = 0, 1, 2, \cdots, n, i \neq j \neq k)$$

为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j, x_k 的二阶差商。

差商 (续)

依此类推，$f(x)$ 关于节点 $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ 的 k 阶差商为：

$$f(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) = \frac{f(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) - f(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_{k-1}})}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

显然有：

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_k) - f(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

差商的性质

差商具有如下性质：

1. 对称性。任意调整节点的次序，差商的值不变，如：

$$
\begin{aligned}
f(x_0, x_1) &= f(x_1, x_0) \\
f(x_i, x_j, x_k) &= f(x_j, x_k, x_i) = f(x_i, x_k, x_j) = \cdots
\end{aligned}
$$

2. $f(x)$ 的 k 阶差商 $f(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 可以由函数值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_k)$ 的线性组合来表示。即：

$$
\begin{aligned}
& f(x_0, x_1, \cdots, x_k) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_k)}
\end{aligned}
$$

差商的计算方法 (表格法)

使用表格法计算差商：

节点	样本值	一阶差商	二阶差商	$\cdots$	n阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0,x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$\cdots$	
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$	
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$	
x_n	$f(x_n)$	$f(x_{n-1},x_n)$	$f(x_{n-2},x_{n-1},x_n)$		$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$

差商计算例子

例：已知节点 0, 2, 3, 5 对应的函数值为 1, 3, 2, 5，试使用表格法计算差商值。

节点	样本值	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1			
2	3	1		
3	2	-1	$-\frac{2}{3}$	
5	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{10}$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{3-1}{2-0} = 1$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{5-2}{5-3} = \frac{3}{2}$$

......

差商形式的 Newton 插值公式

设已知 $n+1$ 个不同节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \cdots f(x_n) = y_n$$

构造满足插值条件 $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$\begin{aligned} p_n(x) = a_0 &+ a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

由插值条件可得:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f(x_0, x_1) \\ &\cdots \\ a_n &= f(x_0, x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

差商形式的 Newton 插值公式 (续)

这样可得到差商形式的 Newton 插值公式如下：

一次插值多项式：

$$p_1(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0)$$

二次插值多项式：

$$p_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$

......

n 次插值多项式：

$$\begin{aligned} p_n(x) = f(x_0) &+ f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Newton 插值多项式例子

例：已知节点 $0, 2, 3, 5$ 对应的函数值为 $1, 3, 2, 5$，构造三次 Newton 插值多项式，当 $x = 2.5$ 时，计算 Newton 多项式插值结果。

解：由前面计算的差商值，我们很容易写出三次 Newton 插值多项式如下：

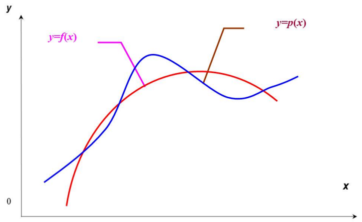
$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 1 + 1 \cdot (x - 0) - \frac{2}{3}(x - 0)(x - 2) + \frac{3}{10}(x - 0)(x - 2)(x - 3) \\ &= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1 \end{aligned}$$

当 $x = 2.5$ 时，Newton 多项式插值结果为：

$$p_3(2.5) = \frac{3}{10}(2.5)^3 - \frac{13}{6}(2.5)^2 + \frac{62}{15}(2.5) + 1 = 2.479167$$

埃尔米特插值

Lagrange 插值、Newton 插值虽然构造比较简单，但仅要求他们的函数值与被插函数的函数值在节点上相同，但没有考虑到导数值。



Hermite 插值 (切触插值) 是要构造一个插值函数，不但在给定的节点上取已知函数值，而且取已知导数值，使插值函数与被插函数的密合程度更好。

待定系数法例子

待定系数法是构造多项式最基本的方法。这种方法原理简明并且原则上总是可行的，只是处理过程往往比较繁琐。

例：求作二次式 $\varphi_0(x)$ ，使分别满足插值条件：$\varphi_0(0)=1,\varphi_0(1)=0,\varphi_0'(0)=0$。

解：由于 $\varphi_0(1)=0$，可知它有一个零点 $x_0=1$，故二次式 $\varphi_0(x)$ 具有形式：

$$\varphi_0(x)=(cx+d)(x-1)$$

因此：$\varphi_0'(x)=c(x-1)+(cx+d)$
由条件 $\varphi_0(0)=1,\varphi_0'(0)=0$ 可得：

$$\varphi_0(0)=(c\cdot 0+d)(0-1)=1$$
$$\varphi_0'(0)=c(0-1)+(c\cdot 0+d)=0$$

因此得到：$c=d=-1$。从而有：$\varphi_0(x)=-x^2+1$

待定系数法例子

例：求作三次式 $\varphi_0(x)$，使分别满足插值条件：

$$\varphi_0(0)=1,\varphi_0(1)=0,\varphi_0'(0)=0,\varphi_0'(1)=0$$

解：由于 $\varphi_0(1)=\varphi_0'(1)=0$，可知它有一个二阶零点 $x_0=1$，故三次式 $\varphi_0(x)$ 具有形式

$$\varphi_0(x)=(ax+b)(x-1)^2$$

$\varphi_0'(x)=a(x-1)^2+2(ax+b)(x-1)$
再由 $\varphi_0(0)=1,\varphi_0'(0)=0$

$$\varphi_0(0)=(a\cdot 0+b)(0-1)^2=1$$
$$\varphi_0'(0)=a(0-1)^2+2(a\cdot 0+b)(0-1)=0$$

求解得到：$a=2,b=1$。因此：$\varphi_0(x)=(2x+1)(x-1)^2$。

Hermite 插值的基函数方法

基函数方法是将所有的插值多项式表达为某些简单函数—基函数的线性组合。这些基函数满足某些特定的插值条件，比较容易构造。基函数方法主要针对如下一类问题：

问题：给定 $[a, b]$ 区间上 $n+1$ 个节点和相应的函数值和导数值

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
y'	y'_0	y'_1	y'_2	$\cdots$	y'_n

构造满足条件 $p_{2n+1}(x_i) = y_i, p'_{2n+1}(x_i) = y'_i$ 的次数不超过 $2n+1$ 次的插值多项式 $p_{2n+1}(x)$。

两点三次 Hermite 插值

设 $f(x)$ 在节点 x_0, x_1 处的函数值为 y_0, y_1，在节点 x_0, x_1 处的一阶导数值为 y_0', y_1'，构造次数不超过三次的多项式 $p_3(x)$ 并满足插值条件：

$$p_3(x_0) = y_0, p_3(x_1) = y_1$$
$$p_3'(x_0) = y_0', p_3'(x_1) = y_1'$$

根据 Lagrange 方法，它应该具有如下的形式：

$$p_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_0'\psi_0(x) + y_1'\psi_1(x)$$

其中 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ 为待定的三次多项式。

两点三次 Hermite 插值 (续)

实际上是在每个节点上构造两个插值基函数，x_0 点对应 $\varphi_0(x), \psi_0(x)$，x_1 点对应 $\varphi_1(x), \psi_1(x)$，其取值情况如下：

	函数值		导数值	
	x_0	x_1	x_0	x_1
$\varphi_0(x)$	1	0	0	0
$\varphi_1(x)$	0	1	0	0
$\psi_0(x)$	0	0	1	0
$\psi_1(x)$	0	0	0	1

两点三次 Hermite 插值 (续)

这样可由待定系数法或 Lagrange 中构造基函数的方法直接解得:

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$\psi_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\psi_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

两点三次 Hermite 插值 (续)

即三次 Hermite 插值多项式为：

$$p_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_0'\psi_0(x) + y_1'\psi_1(x)$$

其中：

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$\psi_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\psi_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

Hermite 插值例子

例题：已知 $f(x)$ 在节点 $1,2$ 处的函数值为 $f(1)=2, f(2)=3$，$f(x)$ 在节点 $1,2$ 处的导数值为 $f'(1)=0, f'(2)=-1$，求 $f(x)$ 的两点三次插值多项式及 $f(x)$ 在 $x=1.5,1.7$ 处的函数值。

解：

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1, x_1 = 2, y_0 = 2, y_1 = 3, y_0' = 0, y_1' = -1 \\
p_3(x) &= y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_0'\psi_0(x) + y_1'\psi_1(x) \\
&= y_0\left(1 + 2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 \\
&+ y_1\left(1 + 2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \\
&+ y_0'(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 + y_1'(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2
\end{aligned}
$$

Hermite 插值例子 (续)

分别代入并化简，可求得 Hermite 插值公式为：

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 2(1+2(x-1))(x-2)^2 + 3(1-2(x-2))(x-1)^2 \\ &\quad - (x-2)(x-1)^2 \\ &= -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9 \end{aligned}$$

$$f(1.5) \approx p_3(1.5) = 2.625$$

$$f(1.7) \approx p_3(1.7) = 2.931$$

对于高次的 Hermite 插值，可采用类似的方法来进行构造。作为多项式插值，三次已是较高的次数，次数再高就有可能发生 Runge 现象，下面采用被称为分段插值的办法来解决多条件插值问题。

分段插值概念

分段插值，就是将被插值的函数逐段进行多项式化，选取分段多项式作为插值多项式。

分段插值方法的处理过程分两步，先将所考察区间 $[a, b]$ 作划分

$$\Delta : a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

并在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造插值多项式；然后将每个区间上的插值多项式拼接到一起，形成区间 $[a, b]$ 上的插值多项式。这样构造的插值多项式称为分段插值多项式。

如果多项式 $p_k(x)$ 在划分 Δ 的每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上都是次数不超过 k 次的多项式，则称 $p_k(x)$ 为具有划分 Δ 的分段 k 次插值多项式。

线性分段插值

问题：给定 $[a,b]$ 区间上 $n+1$ 个节点 $(a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b)$ 和相应的函数值

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

构造满足上述条件的次数不超过一次的分段插值多项式 $p_1(x)$，满足插值条件：$p_1(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$。

解：构造多项式 $p_1(x) = y_i\varphi_0(x) + y_{i+1}\varphi_1(x)$，$x \in [x_i, x_{i+1}]$。其中 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 为一次多项式且满足插值条件：

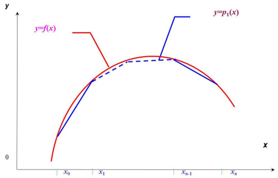
$$p_1(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

线性分段插值 (续)

可得插值基函数：

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$



分段一次插值

分段插值的特点是算法简单，计算量小，但精度不高，插值曲线也不光滑。

分段线性插值例子

例题：已知 $y=x^2$ 在 $x=1,2,3$ 点的值为 $1,4,9$。构造分段线性插值多项式，并求在 $x=1.2$ 和 2.5 处的近似值。

解：令 $p_1(x)=y_i\varphi_0(x)+y_{i+1}\varphi_1(x)$，得插值基函数：

$$\varphi_0(x)=\frac{x-2}{1-2},\quad \varphi_1(x)=\frac{x-1}{2-1},\quad x\in[1,2]$$

$$\varphi_0(x)=\frac{x-3}{2-3},\quad \varphi_1(x)=\frac{x-2}{3-2},\quad x\in[2,3]$$

当 $x\in[1,2]$ 时，$p_1(x)=1\cdot\frac{x-2}{1-2}+4\cdot\frac{x-1}{2-1}=3x-2$

当 $x\in[2,3]$ 时，$p_1(x)=4\cdot\frac{x-3}{2-3}+9\cdot\frac{x-2}{3-2}=5x-6$

所以

$$p_1(1.2)=3\cdot1.2-2=1.6,\quad 实际上1.2^2=1.44$$

$$p_2(2.5)=5\cdot2.5-6=6.5,\quad 实际上2.5^2=6.25$$

分段三次 Hermite 插值

下面介绍分段三次 Hermite 插值以进一步改进逼近效果。

问题：给定 $[a,b]$ 区间上 $n+1$ 个节点 $(a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b)$ 和相应的函数值及导数值，如下表所示。

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
y'	y'_0	y'_1	y'_2	$\cdots$	y'_n

试构造次数不超过 3 次的分段插值多项式 $p_3(x)$，满足插值条件：

$$p_3(x_i) = y_i \quad p'_3(x_i) = y'_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

我们构造多项式

$$p_3(x) = y_i\varphi_0(x) + y_{i+1}\varphi_1(x) + y'_i\psi_0(x) + y'_{i+1}\psi_1(x)$$

分段三次 Hermite 插值 (续)

可得插值基函数：

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\psi_0(x) = (x - x_i)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\psi_1(x) = (x - x_{i+1})\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

本章小结

本章主要介绍了数值计算中常用的插值方法，主要包括 Lagrange 插值、Newton 插值公式、Hermite 插值和分段插值，并使用例子对各种插值进行了详细分析。

- 问题的提出；
- 拉格朗日 (Lagrange) 插值；
- Newton 插值公式；
- 埃尔米特插值；
- 分段插值；

练习题

1. 编程实现拉格朗日插值算法。
2. 编程实现牛顿插值算法。

谢谢!

AUTHOR: Cheng Yong
ADDRESS: Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology
Beijing, 100029, China
EMAIL: buctcourse@163.com