计算方法

Ch05 线性方程组的迭代法

程勇

buctcourse@163.com

http://www.buct.edu.cn

Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology

March 1, 2017

提纲

1. Ch01 概论
2. Ch02 插值方法
3. Ch03 数值积分
4. Ch04 方程求根的迭代法
5. Ch05 线性方程组的迭代法
6. Ch06 线性方程组的直接法
7. Ch07 常微分方程的差分法

本章提纲

雅克比法

高斯-赛得尔迭代法

雅克比 (Jacobi) 迭代法

设有 n 阶方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

写成矩阵形式为：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

雅克比 (Jacobi) 迭代法 (续)

若系数矩阵 A 非奇异，且 $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，则可将上述方程组改写成如下形式:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \cdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

改写为迭代格式如下:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k) \\ \cdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^k) \end{cases}$$

雅克比 (Jacobi) 迭代法 (续)

将上述迭代格式可简写为：

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

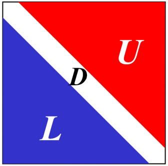
终止迭代条件为：

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon$$

其中 ε 为事前给定的阈值。

雅克比 (Jacobi) 迭代法的矩阵形式

矩阵按区域分为三部分 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{U}$，如下：



$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \underbrace{-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{x} + \underbrace{\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{f}} \end{aligned}$$

因此，雅克比 (Jacobi) 迭代法的矩阵形式为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{k+1} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{f} \\ &= -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Jacobi 迭代法例子

例：用 Jacobi 迭代法解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

初值 $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$，要求精度 $\varepsilon = 0.02$。

解：迭代格式：

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -0.3x_2^k - 0.1x_3^k + 1.4 \\ x_2^{k+1} = 0.2x_1^k + 0.3x_3^k + 0.5 \\ x_3^{k+1} = -0.1x_1^k - 0.3x_2^k + 1.4 \end{cases}$$

反复迭代，计算结果见下表。

Jacobi 迭代法例子 (续)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1.4	0.5	1.4
2	1.11	1.20	1.11
3	0.929	1.055	0.929
4	0.9906	0.9645	0.9906
5	1.01159	0.9953	1.01159
6	1.000251	1.005795	1.000251

Figure: 迭代计算结果

可以看到，当迭代次数 k 增大时，迭代值 x_1^k, x_2^k, x_3^k 会越来越接近解 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$。

高斯-赛得尔迭代式

$$
\begin{cases}
x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - a_{14}x_4^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1) \\
x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - a_{24}x_4^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2) \\
x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - a_{34}x_4^k - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3) \\
\cdots \\
x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - a_{n3}x_3^{k+1} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n)
\end{cases}
$$

将上述迭代格式可简写为如下通式：

$$
x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n
$$

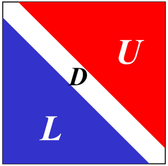
终止迭代条件为：

$$
\max_{1\le i\le n} |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon
$$

其中 ε 为事前给定的阈值。

高斯-赛得尔迭代法的矩阵形式

矩阵按区域分为三部分 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{U}$，如下：



$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}^{k+1} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{k+1} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{k}) + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \\
&\Leftrightarrow (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{k+1} = -\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{b} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{x}^{k} + \underbrace{(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{f}}
\end{aligned}$$

因此，高斯-赛得尔迭代法的矩阵形式为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{k+1} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{f} \\
&= -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{k} + (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

高斯-赛得尔迭代法例子

例：用 Gauss-Seidel 迭代法解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

初值 $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$，要求精度 $\varepsilon = 0.05$。
解：迭代格式：

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -0.3x_2^k - 0.1x_3^k + 1.4 \\ x_2^{k+1} = 0.2x_1^{k+1} + 0.3x_3^k + 0.5 \\ x_3^{k+1} = -0.1x_1^{k+1} - 0.3x_2^{k+1} + 1.4 \end{cases}$$

反复迭代，计算结果见下表。

高斯-赛得尔迭代法例子 (续)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1.4	0.78	1.026
2	1.06340	1.02048	0.98752
3	0.99510	0.99528	1.00191
4	1.00122	1.00082	0.99963

Figure: 迭代计算结果

可以看到，当迭代次数增大时，迭代值 x_1^k, x_2^k, x_3^k 会越来越接近解 $x_0 = x_1 = x_3 = 1$。一般来说，Gauss-Seidel 要比 Jacobi 迭代好，收敛速度快，但也有特例，甚至有时 Jacobi 迭代收敛而 Gauss-Seidel 迭代发散。

迭代法的收敛条件

对角占优矩阵定义

如果矩阵的每一行中，不在主对角线上的所有元素绝对值之和小于主对角线上元素的绝对值，即：

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行严格对角占优。类似地，也有按列严格对角占优。

定理

若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行严格对角占优，则雅克比迭代法和高斯-赛得尔迭代法对任意给定初值均收敛。

迭代收敛判定例子

例题：解方程组

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases}$$

取 $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$。问：Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法是否收敛?

解：由于

$$\begin{aligned} 20 &> 2 + 3 = 5 \\ 8 &> 1 + 1 = 2 \\ 15 &> 2 + |-3| = 5 \end{aligned}$$

因此系数矩阵是按行严格对角占优矩阵，根据定理 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法应用于此方程组均收敛。

本章小结

- 雅克比迭代法;
- 高斯-赛得尔迭代法;

练习题

1. 编程实现 Gauss-Seidel 迭代算法。

谢谢!

AUTHOR: Cheng Yong
ADDRESS: Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology
Beijing, 100029, China
EMAIL: buctcourse@163.com