1 Матпрак №7

1.1 №5 Найти решение рекуррентного соотношения

$$T_n = 3T_{n-1} - 15, \quad T_1 = 15 \tag{1.1}$$

$$T_1 = 3T_0 - 15 \Rightarrow T_0 = 10 \tag{1.2}$$

Воспользуемся методом производящих функций. Данное соотношение имеет порядок = 1, так как для вычисления T_n необходимо знать T_{n-1}. Нам необходимо найти производящую функцию последовательности вида

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n = T_0 + T_1 z + T_2 z^2 + \cdots \tag{1.3}$$

Для этого умножим T_0 на z^0 (далее умножали бы T_1 на z^1, ..., T_{m-1} на z^{m-1}, где m - порядок соотношения). Таким образом имеем:

$$1 \cdot T_0 = 1 \cdot 10 \tag{1.4}$$

$$z^n \cdot T_n = (3T_{n-1} - 15) \cdot z^n, n \geq 1 \tag{1.5}$$

Теперь сложим уравнения для всех значений n:

$$T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot T_n = 10 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (3T_{n-1} - 15) \tag{1.6}$$

$$\tag{1.7}$$

Левая часть = $G(z)$, а правая часть содержит суммы, похожие на $G(z)$. Приведем их к виду $G(z)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot z^n \cdot T_{n-1} = 3 \cdot z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \cdot T_{n-1} = 3 \cdot z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot T_n = 3 \cdot z \cdot G(z) \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 15 \cdot z^n = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 15 \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1) = 15 \cdot (\frac{1}{1-z} - 1) = \frac{15z}{1-z} \tag{1.9}$$

Уравнение производящей функции примет следующий вид:

$$G(z) = 10 + 3 \cdot z \cdot G(z) - \frac{15z}{1-z} \tag{1.10}$$

$$(1-3z) \cdot G(z) = 10 - \frac{15z}{1-z} \tag{1.11}$$

$$G(z) = \frac{10-25z}{(1-z)(1-3z)} \tag{1.12}$$

Разложим дробь на сумму простых дробей:

$$\frac{10-25z}{(1-z)(1-3z)} = \frac{15}{2(1-z)} + \frac{5}{2(1-3z)} \tag{1.13}$$

Разложение рациональных функций:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$
$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n = 1 + 3z + 9z^2 + \cdots$$

Таким образом имеем:

$$G(z) = \frac{15}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n \tag{1.14}$$

Так как мы искали ответ вида $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cdot z^n$, то решение рекуррентного соотношения (в силу равенства рядов):

$$T_n = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} \cdot 3^n \tag{1.15}$$

Ответ: $T_n = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} \cdot 3^n$.

1.2 №6 Найти решение рекуррентного соотношения

$$T_n = T_{n-1} + n - 1, \quad T_1 = 3 \tag{1.16}$$

$$T_1 = T_0 + 1 - 1 \Rightarrow T_0 = 3 \tag{1.17}$$

Перейдем к решению:

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot T_{n-1} = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1} \cdot T_{n-1} = z \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot T_n + T_0 - T_0) = z \cdot (G(z) - 3) \tag{1.18}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot (n-1) = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot z^{n-1} = z \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^n - 1) = \frac{z^2}{(1-z)^2} \tag{1.19}$$

$$G(z) = 3 + z \cdot G(z) + \frac{z}{1-z} \tag{1.20}$$

$$G(z) = 3 + 3z + \frac{z^2}{(z-1)^2} + z(G(z) - 3) \tag{1.21}$$

$$(1-z)G(z) = 3 + \frac{z^2}{(z-1)^2} \tag{1.22}$$

$$G(z) = \frac{4z^2 - 6z + 3}{(1-z)^3} \tag{1.23}$$

$$\frac{4z^2 - 6z + 3}{(1-z)^3} = \frac{4}{(1-z)} + \frac{-2}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1-z)^3} \tag{1.24}$$

$$\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{1.25}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot (n+1) \tag{1.26}$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{1.27}$$

$$T_n = 4 - 2(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3 \tag{1.28}$$

Ответ: $T_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3$.

1.3 №7 Вычислить сумму

$$A(k) = \frac{1}{2^k - 1} \sum_{j=1}^{k} j \cdot 2^{j-1} \tag{1.29}$$

Перейдем к решению:

$$\sum_{j=1}^{k} j \cdot 2^{j-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k} j \cdot 2^j \tag{1.30}$$

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} j \cdot 2^j \tag{1.31}$$

$$S_k = 2S_k - S_k = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2^2 + \cdots + 2 \cdot k \cdot 2^k - (2 + 2 \cdot 2 \cdot 2^2 + \cdots + k \cdot 2^k) = \tag{1.32}$$

$$= -2 - 2^2 - \cdots - 2^k + k \cdot 2^{k+1} = 2 - 2^{k+1} + k \cdot 2^{k+1} = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 \tag{1.33}$$

$$\frac{1}{2} \cdot S_k = 2^k \cdot (k-1) + 1 \tag{1.34}$$

$$A(k) = \frac{1}{2^k - 1} \cdot (2^k(k-1) + 1) = \frac{2^k \cdot (k-1) + 1}{2^k - 1} \tag{1.35}$$

Ответ: $A(k) = \frac{2^k \cdot (k-1)+1}{2^k-1}$.

1.4 №8 Найдите решение рекуррентного соотношения

$$J_n = 6J_{n-1} + 16J_{n-2}, \quad J_0 = 1, \quad J_1 = 7 \tag{1.36}$$

Перейдем к решению:

$$1 \cdot J_0 = 1 \cdot 1 \tag{1.37}$$

$$z \cdot J_1 = z \cdot 7 \tag{1.38}$$

$$z^n \cdot J_n = (6J_{n-1} + 16J_{n-2}) \cdot z^n, n \geq 2 \tag{1.39}$$

$$J_0 + z \cdot J_1 + z^n \cdot J_n = 1 + 7 \cdot z + z^n \cdot 6 \cdot J_{n-1} + z^n \cdot 16 \cdot J_{n-2} \tag{1.40}$$

$$G(z) = 1 + 7z + 6 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-1} + 16 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-2} \tag{1.41}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-1} = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1} \cdot J_{n-1} = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot J_n = z \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot J_n + J_0 - J_0) = \tag{1.42}$$

$$= z \cdot (G(z) - J_0) = z \cdot (G(z) - 1) \tag{1.43}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-2} \cdot J_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot J_n = z^2 \cdot G(z) \tag{1.44}$$

$$G(z) = 1 + 7z + 6z(G(z) - 1) + 16z^2 G(z) \tag{1.45}$$

$$(1 - 16z^2 - 6z)G(z) = 1 + z \Rightarrow G(z) = \frac{1+z}{-16z^2 - 6z + 1} \tag{1.46}$$

$$G(z) = \frac{9}{10(1-8z)} + \frac{1}{10(1+2z)} \tag{1.47}$$

$$G(z) = \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (8z)^n + \frac{1}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n \tag{1.48}$$

$$J_n = \frac{9}{10} \cdot 8^n + \frac{1}{10} \cdot (-2)^n \tag{1.49}$$

Ответ: $J_n = \frac{9}{10} \cdot 8^n + \frac{1}{10} \cdot (-2)^n$.

1.5 №9 Найти решение рекуррентного соотношения

$$J_n = 3J_{n-1} + 4J_{n-2}, \quad J_0 = 1, \quad J_1 = 3 \tag{1.50}$$

Перейдем к решению:

$$1 \cdot J_0 = 1 \cdot 1 \tag{1.51}$$

$$z \cdot J_1 = z \cdot 3 \tag{1.52}$$

$$z^n \cdot J_n = (3J_{n-1} + 4J_{n-2}) \cdot z^n, n \geq 2 \tag{1.53}$$

$$J_0 + z \cdot J_1 + z^n \cdot J_n = 1 + 3 \cdot z + z^n \cdot 3 \cdot J_{n-1} + z^n \cdot 4 \cdot J_{n-2} \tag{1.54}$$

$$G(z) = 1 + 3z + 3 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-1} + 4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-2} \tag{1.55}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-1} = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1} \cdot J_{n-1} = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot J_n = z \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot J_n + J_0 - J_0) = \tag{1.56}$$

$$= z \cdot (G(z) - J_0) = z \cdot (G(z) - 1) \tag{1.57}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-2} \cdot J_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot J_n = z^2 \cdot G(z) \tag{1.58}$$

$$G(z) = 1 + 3z + 3z(G(z) - 1) + 4z^2 G(z) \tag{1.59}$$

$$(1 - 4z^2 - 3z)G(z) = 1 \Rightarrow G(z) = \frac{1}{-4z^2 - 3z + 1} \tag{1.60}$$

$$G(z) = \frac{-4}{5(4z-1)} + \frac{1}{5(z+1)} \tag{1.61}$$

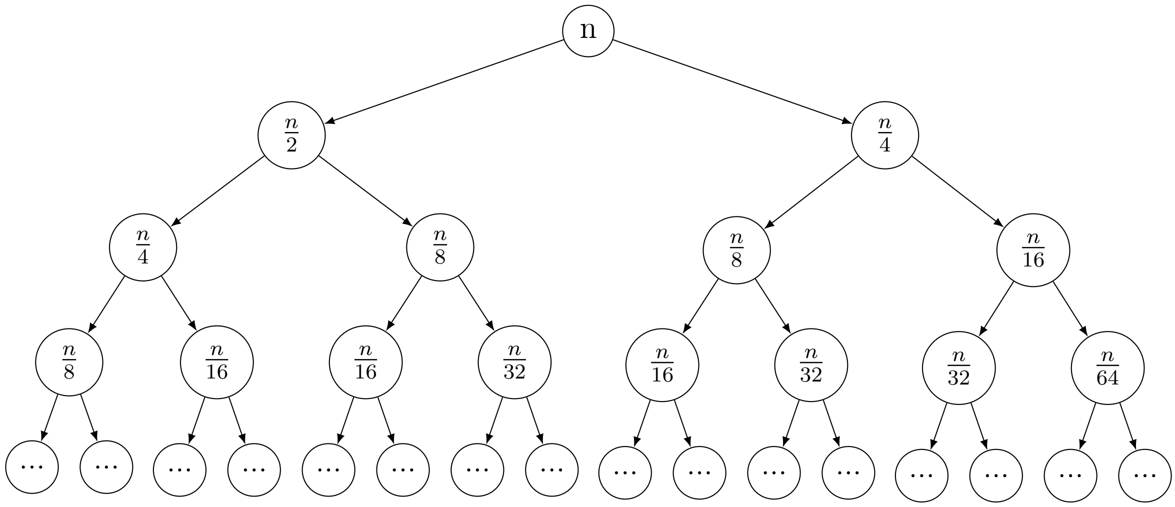
$$G(z) = \frac{4}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-4z)^n + \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1z)^n \tag{1.62}$$

$$J_n = \frac{4}{5} \cdot 4^n + \frac{1}{5} \cdot (-1)^n \tag{1.63}$$

Ответ: $J_n = \frac{4}{5} \cdot 4^n + \frac{1}{5} \cdot (-1)^n$.

1.6 №12 Найти асимптотическое решение рекуррентного соотношения

Для того чтобы найти асимптотическое решение рекуррентного соотношения воспользуемся методом построения дерева рекурсий. Для этого нарисуем дерево, которое на 0-м уровне совершит 1 вызов, на 1-м уровне 2, на 2-м уровне 4 и так далее:



Как мы знаем рекурсия завершается по достижении базового кейса. В данном случае базовым кейсом будет $1 = \frac{n}{2^i}$. Прологарифмируя получим $i = log_2(n)$, это высота построенного дерева.

Найдем суммы узлов на каждом из уровней:

$$i = 0 : n \tag{1.64}$$

$$i = 1 : \frac{n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{3n}{4} \tag{1.65}$$

$$i = 2 : \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16} = \frac{9n}{16} \tag{1.66}$$

$$i = 3 : \frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16} + \frac{n}{32} + \frac{n}{16} + \frac{n}{32} + \frac{n}{32} + \frac{n}{64} = \frac{27n}{64} \tag{1.67}$$

$$\ldots \tag{1.68}$$

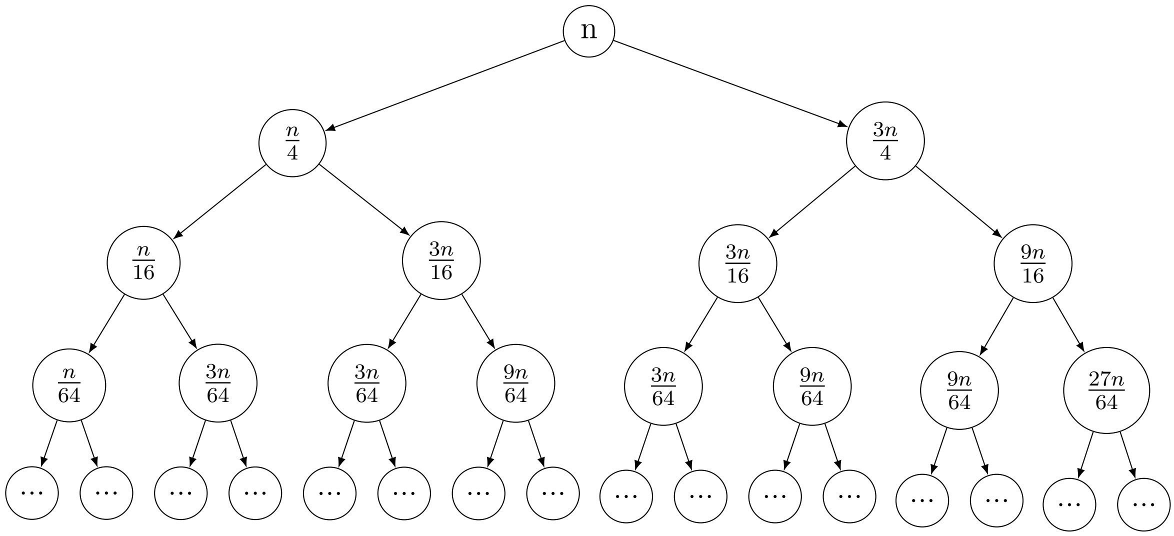
$$i : (\frac{3}{4})^i \cdot n \tag{1.69}$$

Заметим, что на каждом из уровней сумма узлов всегда будет равна n. Тогда сложность рекурсивного вызова от n будет $a_n = \sum_{n=0}^{i} n \cdot (\frac{3}{4})^i = n \cdot \sum_{n=0}^{log_2(n)} (\frac{3}{4})^i = n \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4n$. Это и есть искомое асимптотическое решение.

Ответ: $a_n = 4n$.

1.7 №13 Найти асимптотическое решение рекуррентного соотношения

Для того чтобы найти асимптотическое решение рекуррентного соотношения воспользуемся методом построения дерева рекурсий. Для этого нарисуем дерево, которое на 0-м уровне совершит 1 вызов, на 1-м уровне 2, на 2-м уровне 4 и так далее:



Как мы знаем рекурсия завершается по достижении базового кейса. В данном случае базовым кейсом будет $1 = \frac{n}{4^i}$. Прологарифмируя получим $i = log_4(n)$, это высота построенного дерева.

Найдем суммы узлов на каждом из уровней:

$$i = 0 : n \tag{1.70}$$

$$i = 1 : \frac{n}{4} + \frac{3n}{4} = n \tag{1.71}$$

$$i = 2 : \frac{n}{16} + \frac{3n}{16} + \frac{3n}{16} + \frac{9n}{16} = \frac{n}{4} + \frac{12n}{16} = n \tag{1.72}$$

$$\cdots \tag{1.73}$$

$$i : n \tag{1.74}$$

Заметим, что на каждом из уровней сумма узлов всегда будет равна n. Тогда сложность рекурсивного вызова от n будет $a_n = \sum_{n=0}^{i} n = n \cdot \sum_{n=0}^{log_4(n)} 1 = n \cdot (log_4(n) + 1)$. Это и есть искомое асимптотическое решение.

Ответ: $a_n = n \cdot (log_4(n) + 1)$.

1.8 №17 Найти производящую функцию последовательности и решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1 \tag{1.75}$$

22222Перейдем к решению:

$$1 \cdot a_0 = 1 \cdot 0 \tag{1.76}$$

$$z \cdot a_1 = z \cdot 1 \tag{1.77}$$

$$z^2 \cdot a_2 = z^2 \cdot 1 \tag{1.78}$$

$$z^3 \cdot a_3 = z^3 \cdot 1 \tag{1.79}$$

$$z^n \cdot a_n = (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}) \cdot z^n, n \geq 4 \tag{1.80}$$

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + z^n \cdot a_n = z + z^2 + z^3 + z^n \cdot (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}) \tag{1.81}$$

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_n = z + z^2 + z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}) \tag{1.82}$$

$$G(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} z^n (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}) \tag{1.83}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_{n-1} = z \cdot \sum_{n=4}^{\infty} z^{n-1} \cdot a_{n-1} = z \cdot \sum_{n=3}^{\infty} z^n \cdot a_n = z \cdot (\sum_{n=3}^{\infty} z^n \cdot a_n + a_0 - a_0 + \tag{1.84}$$

$$+ a_1 z - a_1 z + a_2 z^2 - a_2 z^2) = z(G(z) - z - z^2) \tag{1.85}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=4}^{\infty} z^{n-2} \cdot a_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot a_n = z^2 \cdot (\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot a_n + a_0 - a_0 + \tag{1.86}$$

$$+ a_1 z - a_1 z) = z^2 (G(z) - z) \tag{1.87}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_{n-3} = z^3 \cdot \sum_{n=4}^{\infty} z^{n-3} \cdot a_{n-3} = z^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot a_n = z^3 \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot a_n + a_0 - a_0) = z^3 G(z) \tag{1.88}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_{n-4} = z^4 \cdot \sum_{n=4}^{\infty} z^{n-4} \cdot a_{n-4} = z^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot a_n = z^4 G(z) \tag{1.89}$$

$$G(z) = z + z^2 + z^3 + 6z(G(z) - z - z^2) - 12z^2(G(z) - z) + 18z^3 G(z) - 27z^4 G(z) \tag{1.90}$$

$$G(z)(1 - 6z + 12z^2 - 18z^3 + 27z^4) = z + z^2 + z^3 - 6z^2 - 6z^3 + 12z^3 \tag{1.91}$$

$$G(z) = \frac{z - 5z^2 + 7z^3}{1 - 6z + 12z^2 - 18z^3 + 27z^4} = \frac{1}{72(1-3z)} + \frac{1}{36(1-3z)^2} + \frac{19z - 1}{24(3z^2+1)} \tag{1.92}$$

$$\frac{1}{72(1-3z)} = \frac{1}{72} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n \tag{1.93}$$

$$\frac{1}{36(1-3z)^2} = \frac{1}{36} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n \cdot (1+n) \tag{1.94}$$

$$\frac{19z - 1}{24(3z^2+1)} = \frac{-1}{16} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z)^n \cdot 3^{\frac{n-3}{2}} \cdot (-19i(-i)^n + 19n^{i+1} + (-i)^n \sqrt(3) + i \sqrt[n](3)) \tag{1.95}$$

$$\tag{1.96}$$

$$a_n = \frac{1}{72} \cdot 3^n + \frac{1}{36} \cdot (3)^n \cdot (1+n) - \frac{1}{16} \cdot 3^{\frac{n-3}{2}} \cdot (-19i(-i)^n + 19n^{i+1} + (-i)^n \sqrt(3) + i \sqrt[n](3)) \tag{1.97}$$

Ответ: $a_n = \frac{1}{72} \cdot 3^n + \frac{1}{36} \cdot (3)^n \cdot (1+n) - \frac{1}{16} \cdot 3^{\frac{n-3}{2}} \cdot (-19i(-i)^n + 19n^{i+1} + (-i)^n \sqrt(3) + i \sqrt[n](3)$.

1.9 №18 Найти асимптотическое значение произведения исопльзуя формулу суммирования Эйлера

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \tag{1.98}$$

Перейдем к решению. Чтобы применить формулу суммирования Эйлера нам нужно перейти от произведения к суммированию. Прологарифмируем:

$$\prod_{k=1}^{n} k^k = e^{ln(\prod_{k=1}^{n} k^k)} = e^{\sum_{k=1}^{n} k \cdot ln(k)} \tag{1.99}$$

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{n} k \cdot ln(k)$. По формуле суммирования Эйлера-Маклорена для вычисления асимптотического выражения для суммы используется следующее приближение:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \equiv \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \cdot (f(b)^{2k-1} - f(a)^{2k-1}) \tag{1.100}$$

Тогда рассматриваемая сумма примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \ln(k) \equiv \int_1^n x \cdot \ln(x) + \frac{n \cdot ln(n)}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_{2m} \cdot (n \cdot \ln(n))^{2m-1}}{(2m)!} \tag{1.101}$$

Найдем определенный интеграл:

$$\int_1^n x \cdot ln(x) = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (2ln(n) - 1) + \frac{1}{4} \tag{1.102}$$

Теперь поработаем с бесконечным рядом $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(2m-1)}(n) \cdot B_{2m}}{(2m)!}$, где $f^{(2m-1)}(n)$ - $(2m-1)$-я производная функции $n \cdot ln(n)$. Рассмотрим данную сумму ряда при $n \to \infty$.

$$\frac{f(n)^{(1)}}{12} - \frac{f(n)^{(3)}}{720} + \frac{f(n)^{(5)}}{30240} - \frac{f(n)^{(7)}}{1209600} + \frac{f(n)^{(9)}}{47900160} - \cdots \tag{1.103}$$

Подставим производные функции $n \cdot ln(n)$:

$$\frac{ln(n)+1}{12} + \frac{1}{n^2 \cdot 720} - \frac{1}{n^4 \cdot 30240} + \frac{1}{n^6 \cdot 1209600} - \frac{1}{n^8 \cdot 47900160} + \cdots \tag{1.104}$$

Можно заметить, что полученное значение будет в большинстве своем зависеть только от $\frac{ln(n)+1}{12}$ поскольку сумма остальных членов ряда будет стремиться к нулю. Таким образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(2m-1)}(n) \cdot B_{2m}}{(2m)!} \equiv \frac{ln(n)+1}{12} \tag{1.105}$$

Тогда итоговое преобразование:

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \equiv e^{\frac{n^2 \cdot ln(n)}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{n \cdot ln(n)}{2} + \frac{ln(n)+1}{12}} \tag{1.106}$$

1.10 №19 Найти асимптотическое значение произведения исопльзуя формулу суммирования Эйлера

$$\prod_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} \tag{1.107}$$

Перейдем к решению. Чтобы применить формулу суммирования Эйлера нам нужно перейти от произведения к суммированию. Прологарифмируем:

$$\prod_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} = e^{ln(\prod_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}})} = e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{ln(k)}{k}} \tag{1.108}$$

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{n} \frac{ln(k)}{k}$. По формуле суммирования Эйлера-Маклорена для вычисления асимптотического выражения для суммы используется следующее приближение:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \equiv \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \cdot (f(b)^{2k-1} - f(a)^{2k-1}) \tag{1.109}$$

Тогда рассматриваемая сумма примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{ln(k)}{k} \equiv \int_{1}^{n} \frac{ln(x)}{x} dx + \frac{ln(n)}{2n} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_{2m} \cdot (\frac{ln(n)}{n})^{2m-1}}{(2m)!} \tag{1.110}$$

Найдем неопределлнный интеграл $\int \frac{ln(x)}{x} dx$:

$$u = ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int u du = \frac{u^2}{2} \Rightarrow \int \frac{ln(x)}{x} dx = \frac{ln^2(x)}{2} \tag{1.111}$$

Теперь можем найти опредленный интеграл:

$$\int_{1}^{n} \frac{ln(x)}{x} dx = \frac{ln^2(n)}{2} - \frac{ln^2(1)}{2} = \frac{ln^2(n)}{2} \tag{1.112}$$

Теперь поработаем с бесконечным рядом $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(2m-1)}(n) \cdot B_{2m}}{(2m)!}$, где $f^{(2m-1)}(n)$ - $(2m-1)$-я производная функции $\frac{ln(n)}{n}$. Рассмотрим данную сумму ряда при $n \to \infty$.

$$\frac{f(n)^{(1)}}{12} - \frac{f(n)^{(3)}}{720} + \frac{f(n)^{(5)}}{30240} - \frac{f(n)^{(7)}}{1209600} + \frac{f(n)^{(9)}}{47900160} - \cdots \tag{1.113}$$

Подставим производные функции $\frac{ln(n)}{n}$:

$$\frac{1 - ln(n)}{n^2 \cdot 12} - \frac{11 - 6 \cdot ln(n)}{n^4 \cdot 720} + \frac{274 - 120 \cdot ln(n)}{n^6 \cdot 30240} - \frac{13068 - 5040 \cdot ln(n)}{n^8 \cdot 1209600} + \tag{1.114}$$

$$+ \frac{1026576 - 362880 \cdot ln(n)}{n^{10} \cdot 47900160} - \cdots \tag{1.115}$$

Можно заметить, что полученное значение будет в большинстве своем зависеть только от $\frac{1-ln(n)}{12n^2}$ поскольку сумма остальных членов ряда будет стремиться к нулю. Таким образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(2m-1)}(n) \cdot B_{2m}}{(2m)!} \equiv \frac{1 - ln(n)}{12n^2} \tag{1.116}$$

Тогда итоговое преобразование:

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \equiv e^{\frac{ln(n)^2}{2} + \frac{ln(n)}{2n} + \frac{1-ln(n)}{12n^2}} \tag{1.117}$$