

1 Матпрак №7

1.1 №5 Найти решение рекуррентного соотношения

$$T_n = 3T_{n-1} - 15, \quad T_1 = 15 \quad (1.1)$$

$$T_1 = 3T_0 - 15 \Rightarrow T_0 = 10 \quad (1.2)$$

Воспользуемся методом производящих функций. Данное соотношение имеет порядок = 1, так как для вычисления T_n необходимо знать T_{n-1} . Нам необходимо найти производящую функцию последовательности вида

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n = T_0 + T_1 z + T_2 z^2 + \dots \quad (1.3)$$

Для этого умножим T_0 на z^0 (далее умножали бы T_1 на z^1 , ..., T_{m-1} на z^{m-1} , где m - порядок соотношения). Таким образом имеем:

$$1 \cdot T_0 = 1 \cdot 10 \quad (1.4)$$

$$z^n \cdot T_n = (3T_{n-1} - 15) \cdot z^n, n \geq 1 \quad (1.5)$$

Теперь сложим уравнения для всех значений n :

$$T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot T_n = 10 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (3T_{n-1} - 15) \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

Левая часть = $G(z)$, а правая часть содержит суммы, похожие на $G(z)$. Приведем их к виду $G(z)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot z^n \cdot T_{n-1} = 3 \cdot z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \cdot T_{n-1} = 3 \cdot z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot T_n = 3 \cdot z \cdot G(z) \quad (1.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 15 \cdot z^n = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 15 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1 \right) = 15 \cdot \left(\frac{1}{1-z} - 1 \right) = \frac{15z}{1-z} \quad (1.9)$$

Уравнение производящей функции примет следующий вид:

$$G(z) = 10 + 3 \cdot z \cdot G(z) - \frac{15z}{1-z} \quad (1.10)$$

$$(1-3z) \cdot G(z) = 10 - \frac{15z}{1-z} \quad (1.11)$$

$$G(z) = \frac{10-25z}{(1-z)(1-3z)} \quad (1.12)$$

Разложим дробь на сумму простых дробей:

$$\frac{10-25z}{(1-z)(1-3z)} = \frac{15}{2(1-z)} + \frac{5}{2(1-3z)} \quad (1.13)$$

Разложение рациональных функций:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n = 1 + 3z + 9z^2 + \dots$$

Таким образом имеем:

$$G(z) = \frac{15}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n \quad (1.14)$$

Так как мы искали ответ вида $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cdot z^n$, то решение рекуррентного соотношения (в силу равенства рядов):

$$T_n = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} \cdot 3^n \quad (1.15)$$

Ответ: $T_n = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} \cdot 3^n$.

1.2 №6 Найти решение рекуррентного соотношения

$$T_n = T_{n-1} + n - 1, \quad T_1 = 3 \quad (1.16)$$

$$T_1 = T_0 + 1 - 1 \Rightarrow T_0 = 3 \quad (1.17)$$

Перейдем к решению:

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot T_{n-1} = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1} \cdot T_{n-1} = z \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot T_n + T_0 - T_0 \right) = z \cdot (G(z) - 3) \quad (1.18)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot (n-1) = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot z^{n-1} = z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^n - 1 \right) = \frac{z^2}{(1-z)^2} \quad (1.19)$$

$$G(z) = 3 + z \cdot G(z) + \frac{z}{1-z} \quad (1.20)$$

$$G(z) = 3 + 3z + \frac{z^2}{(z-1)^2} + z(G(z) - 3) \quad (1.21)$$

$$(1-z)G(z) = 3 + \frac{z^2}{(z-1)^2} \quad (1.22)$$

$$G(z) = \frac{4z^2 - 6z + 3}{(1-z)^3} \quad (1.23)$$

$$\frac{4z^2 - 6z + 3}{(1-z)^3} = \frac{4}{(1-z)} + \frac{-2}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1-z)^3} \quad (1.24)$$

$$\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot (n+1) \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (1.27)$$

$$T_n = 4 - 2(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3 \quad (1.28)$$

Ответ: $T_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3$.

1.3 №7 Вычислить сумму

$$A(k) = \frac{1}{2^k - 1} \sum_{j=1}^k j \cdot 2^{j-1} \quad (1.29)$$

Перейдем к решению:

$$\sum_{j=1}^k j \cdot 2^{j-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^k j \cdot 2^j \quad (1.30)$$

$$S_k = \sum_{j=1}^k j \cdot 2^j \quad (1.31)$$

$$S_k = 2S_k - S_k = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2^2 + \dots + 2 \cdot k \cdot 2^k - (2 + 2 \cdot 2 \cdot 2^2 + \dots + k \cdot 2^k) = \quad (1.32)$$

$$= -2 - 2^2 - \dots - 2^k + k \cdot 2^{k+1} = 2 - 2^{k+1} + k \cdot 2^{k+1} = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{2} \cdot S_k = 2^k \cdot (k-1) + 1 \quad (1.34)$$

$$A(k) = \frac{1}{2^k - 1} \cdot (2^k(k-1) + 1) = \frac{2^k \cdot (k-1) + 1}{2^k - 1} \quad (1.35)$$

Ответ: $A(k) = \frac{2^k \cdot (k-1) + 1}{2^k - 1}$.

1.4 №8 Найдите решение рекуррентного соотношения

$$J_n = 6J_{n-1} + 16J_{n-2}, \quad J_0 = 1, \quad J_1 = 7 \quad (1.36)$$

Перейдем к решению:

$$1 \cdot J_0 = 1 \cdot 1 \quad (1.37)$$

$$z \cdot J_1 = z \cdot 7 \quad (1.38)$$

$$z^n \cdot J_n = (6J_{n-1} + 16J_{n-2}) \cdot z^n, n \geq 2 \quad (1.39)$$

$$J_0 + z \cdot J_1 + z^n \cdot J_n = 1 + 7 \cdot z + z^n \cdot 6 \cdot J_{n-1} + z^n \cdot 16 \cdot J_{n-2} \quad (1.40)$$

$$G(z) = 1 + 7z + 6 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-1} + 16 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-2} \quad (1.41)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-1} = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1} \cdot J_{n-1} = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot J_n = z \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot J_n + J_0 - J_0 \right) = \quad (1.42)$$

$$= z \cdot (G(z) - J_0) = z \cdot (G(z) - 1) \quad (1.43)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-2} \cdot J_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot J_n = z^2 \cdot G(z) \quad (1.44)$$

$$G(z) = 1 + 7z + 6z(G(z) - 1) + 16z^2G(z) \quad (1.45)$$

$$(1 - 16z^2 - 6z)G(z) = 1 + z \Rightarrow G(z) = \frac{1 + z}{-16z^2 - 6z + 1} \quad (1.46)$$

$$G(z) = \frac{9}{10(1 - 8z)} + \frac{1}{10(1 + 2z)} \quad (1.47)$$

$$G(z) = \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (8z)^n + \frac{1}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n \quad (1.48)$$

$$J_n = \frac{9}{10} \cdot 8^n + \frac{1}{10} \cdot (-2)^n \quad (1.49)$$

Ответ: $J_n = \frac{9}{10} \cdot 8^n + \frac{1}{10} \cdot (-2)^n$.

1.5 №9 Найти решение рекуррентного соотношения

$$J_n = 3J_{n-1} + 4J_{n-2}, \quad J_0 = 1, \quad J_1 = 3 \quad (1.50)$$

Перейдем к решению:

$$1 \cdot J_0 = 1 \cdot 1 \quad (1.51)$$

$$z \cdot J_1 = z \cdot 3 \quad (1.52)$$

$$z^n \cdot J_n = (3J_{n-1} + 4J_{n-2}) \cdot z^n, n \geq 2 \quad (1.53)$$

$$J_0 + z \cdot J_1 + z^n \cdot J_n = 1 + 3 \cdot z + z^n \cdot 3 \cdot J_{n-1} + z^n \cdot 4 \cdot J_{n-2} \quad (1.54)$$

$$G(z) = 1 + 3z + 3 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-1} + 4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-2} \quad (1.55)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-1} = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1} \cdot J_{n-1} = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot J_n = z \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot J_n + J_0 - J_0 \right) = \quad (1.56)$$

$$= z \cdot (G(z) - J_0) = z \cdot (G(z) - 1) \quad (1.57)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot J_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-2} \cdot J_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot J_n = z^2 \cdot G(z) \quad (1.58)$$

$$G(z) = 1 + 3z + 3z(G(z) - 1) + 4z^2G(z) \quad (1.59)$$

$$(1 - 4z^2 - 3z)G(z) = 1 \Rightarrow G(z) = \frac{1}{-4z^2 - 3z + 1} \quad (1.60)$$

$$G(z) = \frac{-4}{5(4z - 1)} + \frac{1}{5(z + 1)} \quad (1.61)$$

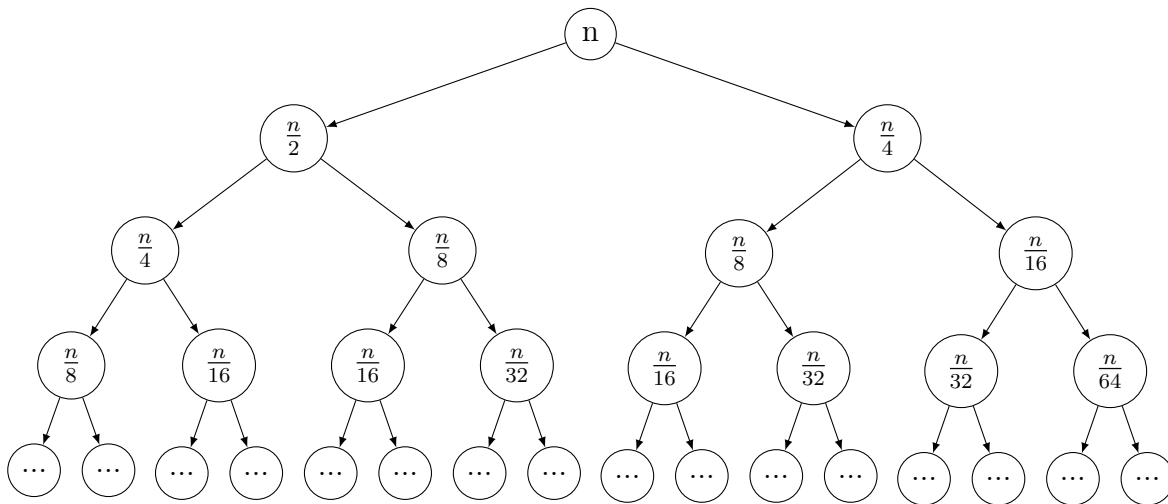
$$G(z) = \frac{4}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-4z)^n + \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1z)^n \quad (1.62)$$

$$J_n = \frac{4}{5} \cdot 4^n + \frac{1}{5} \cdot (-1)^n \quad (1.63)$$

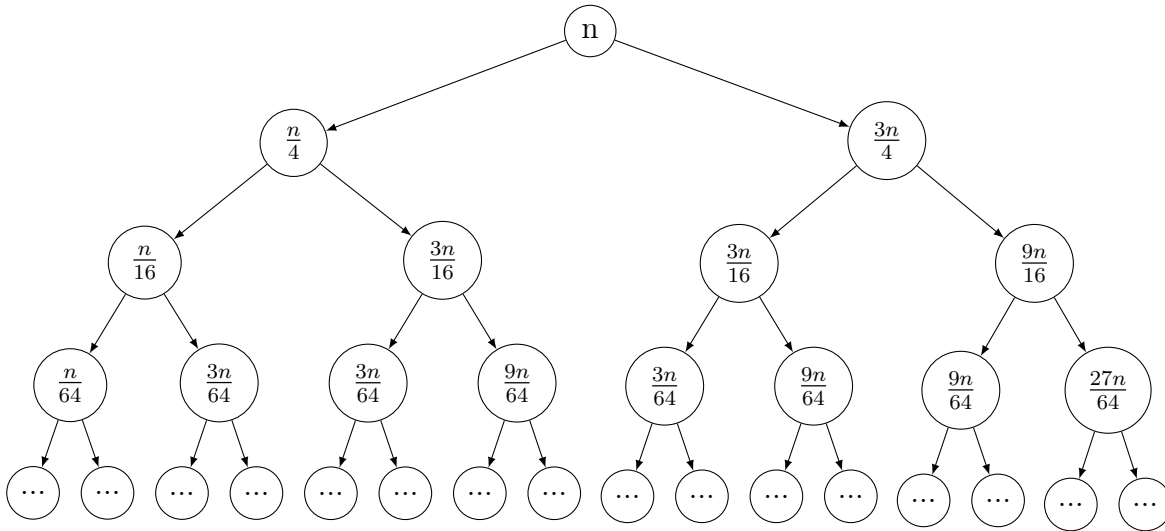
Ответ: $J_n = \frac{4}{5} \cdot 4^n + \frac{1}{5} \cdot (-1)^n$.

1.6 №12 Найти асимптотическое решение рекуррентного соотношения

Для того чтобы найти асимптотическое решение рекуррентного соотношения воспользуемся методом построения дерева рекурсий. Для этого нарисуем дерево, которое на 0-м уровне совершит 1 вызов, на 1-м уровне 2, на 2-м уровне 4 и так далее:



на 0-м уровне совершит 1 вызов, на 1-м уровне 2, на 2-м уровне 4 и так далее:



Как мы знаем рекурсия завершается по достижении базового кейса. В данном случае базовым кейсом будет $1 = \frac{n}{4^i}$. Прологарифмируя получим $i = \log_4(n)$, это высота построенного дерева.

Найдем суммы узлов на каждом из уровней:

$$i = 0 : n \quad (1.70)$$

$$i = 1 : \frac{n}{4} + \frac{3n}{4} = n \quad (1.71)$$

$$i = 2 : \frac{n}{16} + \frac{3n}{16} + \frac{3n}{16} + \frac{9n}{16} = \frac{n}{4} + \frac{12n}{16} = n \quad (1.72)$$

$$\dots \quad (1.73)$$

$$i : n \quad (1.74)$$

Заметим, что на каждом из уровней сумма узлов всегда будет равна n . Тогда сложность рекурсивного вызова от n будет $a_n = \sum_{n=0}^i n = n \cdot \sum_{n=0}^{\log_4(n)} 1 = n \cdot (\log_4(n) + 1)$. Это и есть искомое асимптотическое решение.

Ответ: $a_n = n \cdot (\log_4(n) + 1)$.

1.8 №14 Найти асимптотическое решение рекуррентного соотношения

Решим воспользовавшись Мастер-теоремой. Мастер-теорема нужна для решения рекуррентных соотношений типа $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$, где $a \geq 1, b > 1$ константы, а $f(n)$

- асимптотически положительная функция. Всего есть три случая:

$$1. \quad f(n) = O(n^c), c < \log_b(a) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) \quad (1.75)$$

$$2. \quad f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}), \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log(n)) \quad (1.76)$$

$$3. \quad f(n) = \Omega(n^c), \quad c > \log_b(a), \quad a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq k \cdot f(n), \quad k < 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n)) \quad (1.77)$$

Рассмотрим первый кейс: $2^x = O(x^c)$ для некоторой константы $c < \log_\beta(\alpha)$. Нам нужно проверить растёт ли функция 2^x медленнее, чем $x^{\log_\beta(\alpha)}$. Но так как по условию $x \leq 1$, то не найдутся такие значения α и β , при которых 2^x растёт медленнее. Таким образом, данный случай нам не подходит.

Рассмотрим второй кейс: $2^x = \Theta(x^{\log_\beta(\alpha)})$ для некоторой константы $c < \log_\beta(\alpha)$. Как было отмечено ранее, 2^x растёт экспоненциально, а $\log_\beta(\alpha)$ полиномиально. Таким образом, данный случай нам не подходит.

Рассмотрим третий кейс: $2^x = \Omega(x^c)$ для некоторой константы $c > \log_\beta(\alpha)$. Поскольку можно найти коэффициенты 2^x растёт экспоненциально, а $\log_\beta(\alpha)$ полиномиально. Таким образом, данный случай нам подходит. Проверим выполнение условия:

$$\alpha \cdot f\left(\frac{x}{\beta}\right) \leq k \cdot f(x), \quad k < 1. \quad (1.78)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 0 \leq k \cdot 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0 \quad (1.79)$$

Условие выполняется. Таким образом $T(n) = \Theta(2^x)$. Также проверим: $2^x \geq 0, x \leq 1$ - верно.

Ответ: при $\alpha \geq 1, \beta > 1 : T(n) = \Theta(2^x)$.

1.9 №17 Найти производящую функцию последовательности и решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1 \quad (1.80)$$

Перейдем к решению:

$$1 \cdot a_0 = 1 \cdot 0 \quad (1.81)$$

$$z \cdot a_1 = z \cdot 1 \quad (1.82)$$

$$z^2 \cdot a_2 = z^2 \cdot 1 \quad (1.83)$$

$$z^3 \cdot a_3 = z^3 \cdot 1 \quad (1.84)$$

$$z^n \cdot a_n = (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}) \cdot z^n, n \geq 4 \quad (1.85)$$

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + z^n \cdot a_n = z + z^2 + z^3 + z^n \cdot (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}) \quad (1.86)$$

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_n = z + z^2 + z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}) \quad (1.87)$$

$$G(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} z^n (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 18a_{n-3} - 27a_{n-4}) \quad (1.88)$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_{n-1} = z \cdot \sum_{n=4}^{\infty} z^{n-1} \cdot a_{n-1} = z \cdot \sum_{n=3}^{\infty} z^n \cdot a_n = z \cdot \left(\sum_{n=3}^{\infty} z^n \cdot a_n + a_0 - a_0 + \right. \quad (1.89)$$

$$\left. + a_1 z - a_1 z + a_2 z^2 - a_2 z^2 \right) = z(G(z) - z - z^2) \quad (1.90)$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=4}^{\infty} z^{n-2} \cdot a_{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot a_n = z^2 \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot a_n + a_0 - a_0 + \right. \quad (1.91)$$

$$\left. + a_1 z - a_1 z \right) = z^2(G(z) - z) \quad (1.92)$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_{n-3} = z^3 \cdot \sum_{n=4}^{\infty} z^{n-3} \cdot a_{n-3} = z^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot a_n = z^3 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot a_n + a_0 - a_0 \right) = z^3 G(z) \quad (1.93)$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} z^n \cdot a_{n-4} = z^4 \cdot \sum_{n=4}^{\infty} z^{n-4} \cdot a_{n-4} = z^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot a_n = z^4 G(z) \quad (1.94)$$

$$G(z) = z + z^2 + z^3 + 6z(G(z) - z - z^2) - 12z^2(G(z) - z) + 18z^3 G(z) - 27z^4 G(z) \quad (1.95)$$

$$G(z)(1 - 6z + 12z^2 - 18z^3 + 27z^4) = z + z^2 + z^3 - 6z^2 - 6z^3 + 12z^3 \quad (1.96)$$

$$G(z) = \frac{z - 5z^2 + 7z^3}{1 - 6z + 12z^2 - 18z^3 + 27z^4} = \frac{1}{72(1 - 3z)} + \frac{1}{36(1 - 3z)^2} + \frac{19z - 1}{24(3z^2 + 1)} \quad (1.97)$$

$$\frac{1}{72(1 - 3z)} = \frac{1}{72} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n \quad (1.98)$$

$$\frac{1}{36(1 - 3z)^2} = \frac{1}{36} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n \cdot (1 + n) \quad (1.99)$$

$$\frac{19z - 1}{24(3z^2 + 1)} = \frac{-1}{16} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z)^n \cdot 3^{\frac{n-3}{2}} \cdot (-19i(-i)^n + 19n^{i+1} + (-i)^n \sqrt{3} + i \sqrt[3]{3}) \quad (1.100)$$

$$(1.101)$$

$$a_n = \frac{1}{72} \cdot 3^n + \frac{1}{36} \cdot (3)^n \cdot (1+n) - \frac{1}{16} \cdot 3^{\frac{n-3}{2}} \cdot (-19i(-i)^n + 19n^{i+1} + (-i)^n \sqrt[3]{3} + i \sqrt[3]{3}) \quad (1.102)$$

Ответ: $a_n = \frac{1}{72} \cdot 3^n + \frac{1}{36} \cdot (3)^n \cdot (1+n) - \frac{1}{16} \cdot 3^{\frac{n-3}{2}} \cdot (-19i(-i)^n + 19n^{i+1} + (-i)^n \sqrt[3]{3} + i \sqrt[3]{3})$.

1.10 №18 Найти асимптотическое значение произведения используя формулу суммирования Эйлера

$$\prod_{k=1}^n k^k \quad (1.103)$$

Перейдем к решению. Чтобы применить формулу суммирования Эйлера нам нужно перейти от произведения к суммированию. Прологарифмируем:

$$\prod_{k=1}^n k^k = e^{\ln(\prod_{k=1}^n k^k)} = e^{\sum_{k=1}^n k \cdot \ln(k)} \quad (1.104)$$

Рассмотрим $\sum_{k=1}^n k \cdot \ln(k)$. По формуле суммирования Эйлера-Маклорена для вычисления асимптотического выражения для суммы используется следующее приближение:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \equiv \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \cdot (f(b)^{2k-1} - f(a)^{2k-1}) \quad (1.105)$$

Тогда рассматриваемая сумма примет вид:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \ln(k) \equiv \int_1^n x \cdot \ln(x) dx + \frac{n \cdot \ln(n)}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_{2m} \cdot (n \cdot \ln(n))^{2m-1}}{(2m)!} \quad (1.106)$$

Найдем определенный интеграл:

$$\int_1^n x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (2\ln(n) - 1) + \frac{1}{4} \quad (1.107)$$

Теперь поработаем с бесконечным рядом $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(2m-1)}(n) \cdot B_{2m}}{(2m)!}$, где $f^{(2m-1)}(n)$ - $(2m-1)$ -я

производная функции $n \cdot \ln(n)$. Рассмотрим данную сумму ряда при $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{f(n)^{(1)}}{12} - \frac{f(n)^{(3)}}{720} + \frac{f(n)^{(5)}}{30240} - \frac{f(n)^{(7)}}{1209600} + \frac{f(n)^{(9)}}{47900160} - \dots \quad (1.108)$$

Подставим производные функции $n \cdot \ln(n)$:

$$\frac{\ln(n) + 1}{12} + \frac{1}{n^2 \cdot 720} - \frac{1}{n^4 \cdot 30240} + \frac{1}{n^6 \cdot 1209600} - \frac{1}{n^8 \cdot 47900160} + \dots \quad (1.109)$$

Можно заметить, что полученное значение будет в большинстве своем зависеть только от $\frac{\ln(n)+1}{12}$ поскольку сумма остальных членов ряда будет стремиться к нулю. Таким образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(2m-1)}(n) \cdot B_{2m}}{(2m)!} \equiv \frac{\ln(n) + 1}{12} \quad (1.110)$$

Тогда итоговое преобразование:

$$\prod_{k=1}^n k^k \equiv e^{\frac{n^2 \cdot \ln(n)}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{n \cdot \ln(n)}{2} + \frac{\ln(n)+1}{12}} \quad (1.111)$$

1.11 №19 Найти асимптотическое значение произведения используя формулу суммирования Эйлера

$$\prod_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}} \quad (1.112)$$

Перейдем к решению. Чтобы применить формулу суммирования Эйлера нам нужно перейти от произведения к суммированию. Прологарифмируем:

$$\prod_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}} = e^{\ln(\prod_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}})} = e^{\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}} \quad (1.113)$$

Рассмотрим $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$. По формуле суммирования Эйлера-Маклорена для вычисления асимптотического выражения для суммы используется следующее приближение:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \equiv \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \cdot (f(b)^{2k-1} - f(a)^{2k-1}) \quad (1.114)$$

Тогда рассматриваемая сумма примет вид:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \equiv \int_1^n \frac{\ln(x)}{x} dx + \frac{\ln(n)}{2n} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_{2m} \cdot \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{2m-1}}{(2m)!} \quad (1.115)$$

Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int u du = \frac{u^2}{2} \Rightarrow \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} \quad (1.116)$$

Теперь можем найти определенный интеграл:

$$\int_1^n \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{\ln^2(n)}{2} \quad (1.117)$$

Теперь поработаем с бесконечным рядом $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(2m-1)}(n) \cdot B_{2m}}{(2m)!}$, где $f^{(2m-1)}(n)$ - $(2m-1)$ -я производная функции $\frac{\ln(n)}{n}$. Рассмотрим данную сумму ряда при $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{f(n)^{(1)}}{12} - \frac{f(n)^{(3)}}{720} + \frac{f(n)^{(5)}}{30240} - \frac{f(n)^{(7)}}{1209600} + \frac{f(n)^{(9)}}{47900160} - \dots \quad (1.118)$$

Подставим производные функции $\frac{\ln(n)}{n}$:

$$\frac{1 - \ln(n)}{n^2 \cdot 12} - \frac{11 - 6 \cdot \ln(n)}{n^4 \cdot 720} + \frac{274 - 120 \cdot \ln(n)}{n^6 \cdot 30240} - \frac{13068 - 5040 \cdot \ln(n)}{n^8 \cdot 1209600} + \dots \quad (1.119)$$

$$+ \frac{1026576 - 362880 \cdot \ln(n)}{n^{10} \cdot 47900160} - \dots \quad (1.120)$$

Можно заметить, что полученное значение будет в большинстве своем зависеть только от $\frac{1 - \ln(n)}{12n^2}$ поскольку сумма остальных членов ряда будет стремиться к нулю. Таким образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(2m-1)}(n) \cdot B_{2m}}{(2m)!} \equiv \frac{1 - \ln(n)}{12n^2} \quad (1.121)$$

Тогда итоговое преобразование:

$$\prod_{k=1}^n k^k \equiv e^{\frac{\ln(n)^2}{2} + \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{1 - \ln(n)}{12n^2}} \quad (1.122)$$