原问题 $f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{N}_+$，称为惊奇的如果对所有的正整数$a,b$有$f(a)|\left(b^a-f(b)^{f(a)}\right)$，求对最小的正实数$c$，使得对于所有的惊奇的$f$和所有的$n$都有$f(n)\le cn$.

引理 1. *$f(a)|a^a$. 特别地，对素数p，$f(p)=p^{\iota(p)}$对某个整数$0\le\iota(p)\le p$.*

引理 2. *所有惊奇的f可以被分成两类. 要么对除了有限个素数p，$f(p)=1$；要么对所有的素数p，$f(p)=p$. 记第一类为F型，第二类为V型.*

证明. 设$p\ne q$为两个素数，若$\iota(p)\ne 0$也就是说$f(p)\ne 1$，则由引理1，$p|f(p)$，由f惊奇知

$$0\equiv q^p-f(q)^{f(p)}\equiv q-q^{\iota(q)}\pmod p.$$

如果$p>q^q-q$则$\iota(q)=1$. □

引理 3. *对于V型的f，$f(n)=n$对一切n成立.*

证明. 考虑素数p和任意一个正整数n，由$f(p)=p$，由f惊奇知

$$0\equiv n^p-f(n)^{f(p)}\equiv n-f(n)\pmod p.$$

由于这样的p有无限多个，可得$f(n)=n$. □

引理 4. *对于F型的f，$f(p)=1$对一切奇素数p. 特别地由引理1，F型的f可以根据$f(2)$的可能的取值被分为3类：1、2、4，分别记为F_1、F_2、F_4型.*

证明. 假设q是一个素数且$f(q)=1$，p是一个奇素数且$f(p)\ne 1$，那么与引理2同理，

$$0\equiv q^p-f(q)^{f(p)}\equiv q-1\pmod p.$$

根据Dirichlet定理可以选取任意大的素数q使得$q\not\equiv 1\pmod p$，矛盾. □

引理 5. *F型的f必有$f(n)=2^{k(n)}$对某个整数$k(n)\ge 0$成立.*

证明. 由f惊奇与引理4知，对所有的奇素数p均有

$$0\equiv p^n-f(p)^{f(n)}\equiv p^n-1\pmod{f(n)}.$$

如果$f(n)$被某个奇素数p所整除，那么$p|(p^n-1)$，矛盾！ □

引理 6. *F_1型的f必有$f(n)=1$对一切n成立.*

证明. 由F_1定义，引理5中的p可以被换成2. 因此$f(n)|(2^n-1)$. 说明$f(n)$是奇数，故只能是1. □

引理 7. *在F_2和F_4型中，$f(n)$与n同奇偶. 特别地由引理5，$f(n)=1$对一切奇数n成立.*

证明. 由f惊奇知，$f(2)|\left(b^2-f(b)^{f(2)}\right)$，可得. □

引理 8. *在F_2和F_4型中，$k(n) \le v_2(n)+2$. 反过来，只要满足这个条件和引理7的条件，惊奇性质也就是*

$$b^a - f(b)^{f(a)} \pmod{f(a)}$$

对所有的奇数b和正整数a成立.

证明. 此时惊奇性质为

$$0 \equiv b^a - 1 \pmod{f(a) = 2^{k(a)}}.$$

a是奇数时显然. 由升幂引理，a为偶数时，这等价于$v_2(b^a-1) = v_2(b^2-1)+v_2(a)-1 \ge 3+v_2(a)-1$，当且仅当$b \equiv 3,5,11,13$之时等号可以成立. 与引理5同理可得. □

引理 9. *对满足引理5和7条件的任意$f:\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$，都一定有$f(a)|f(b)^{f(a)}$对偶数$b$和正整数$a$成立. 特别地，对$F_2$和$F_4$型的惊奇的$f$成立.*

证明. 由引理7，a是奇数时显然. 现在假设a是偶数. 那么由引理5只要证明

$$k(a) \le k(b) \cdot 2^{k(a)}.$$

b为偶数，由引理7，$k(b) \ge 1$. 此时结论成立. □

引理 10. *对满足5、7、8条件，与引理4条件$k(2) \le 2$的任意$f:\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$，都一定有$f(a)|f(b)^{f(a)}$对偶数$b$和正整数$a$成立. 特别地，对$F_2$和$F_4$型的惊奇的$f$成立.*

证明. 由引理7，a是奇数时显然. 现在假设a是偶数且不是2. 因为b是偶数所以必然被2整除，那么由引理5只要证明

$$k(a) \le a.$$

而由引理8，只要证明$a \ge 4$之时有

$$v_2(a)+2 \le a$$

这自然成立.

□

引理 11. *f为惊奇函数当且仅当满足以下条件之一：*

1. *V型：$f(n)=n$.*
2. *F_1型：$f(n)=1$.*
3. *F_2和F_4型：满足以下一系列条件.*
   - *（引理5条件）$f(n)=2^{k(n)}$对所有的n成立.*
   - *（引理7条件）$k(n) \ne 0$当且仅当n为偶数.*

- （引理*8*条件）$k(n) \le v_2(n) + 2$对所有的偶数n成立.
- （引理*4*条件）$k(2) = 1$或2.

证明. 由引理8、9、10可得F_2和F_4型成立. 由引理3可得对V型成立. 由引理6可得对F_1型成立. □

引理 12. $c = 4$为最优值.

证明. 由引理11，可知$f(n) \le 2^{v_2(n)+2} \le 4n$，且在$F_2$和$F_4$型中都可以被达到，不可以被改进. □