

Problem 0.1. 给出反例构造使得 A 有限生成且存在子代数只含有幂零元, 但其任意方幂均不为 0 .

证明. 我们取 $k[A, B]/(A^3, B^2, BAB, BA^2B - BA)$.

有限生成条件是显然的. 不难知道生成元可取为 $1, A, A^2, B, BA, AB, A^2B, ABA$.

接下来我们需要找到其子代数只含有幂零元, 最自然的选取方式是取 BA, AB 生成的子代数.

我们知道 $BA \cdot AB = BA, AB \cdot AB = 0, BA \cdot BA = 0, AB \cdot BA = 0$, 因此我们非常幸运地得到这能生成一个子代数, 并且每个元素都是幂零的, 但其任意方幂均不为 0 . \square