1 问题的转换

我们称游戏进行了一轮，指的是箱从全部开到被关闭再到全部开的一个过程.

我们采用这样一种策略，假设某一轮之后（通过适当标号）箱$1,\cdots,n$内的宝石数量(x_i)变成了这样

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \cdots \ge x_n. \tag{1}$$

Elisa每一步选取开着的指标最大的第i个箱来放宝石. 需要指出这不是一个完全的贪心算法所以并非最优，但已经足够。这样的话我们可以看出相当于得到的宝石数量变成了(y_i)，其中若给记号

$$y_i = x_i + 1 + r_i.$$

那么我们知道(r_i)必须满足条件

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \ge 0, \forall 1 \le k \le n-1, \sum_{i=1}^{k} r_i = 0, r_i \in \mathbb{Z}_{\ge -1}. \tag{2}$$

我们接下来为了简化问题，我们不妨在进行了一轮之后，把诸箱内的宝石数量-1（这样有可能会出现负数），这样$y_i = x_i + r_i$，我们可以假设所有宝石数字之和为0.

这样我们给出转化后的问题：

Problem 1.1. *数轴上初始在原点摆着n个纸箱，Bob每一时刻可以移动任意多个纸箱，遵循如下移动规则：*

1. *每一次纸箱可以向左或者向右移动整数个单位. 但向左移动最多一个单位.*
2. *任意选取一个数s，某一时刻位于s左侧的纸箱的位置的平均数在下一次移动之后不减少（注意，是这些纸箱在下一次移动之后的位置）.*

2 问题结果的证明

我们证明任意次移动之后，假设诸纸箱位置如同(1)式由多到少排列，我们证明更强的结论.

Lemma 2.1. *任意次移动后都有*

$$x_1 + \cdots + x_s \le (n-s)s.$$

特别地，等号可以取得，此时$x_i = n + 1 - 2i$. 不难看出这可以导出对于原题$C = 2 \cdot 2022$是一个可以取到的常数.

证明. 证明手段是归纳. 初始状态符合条件. 我们用反证法，假设某一个时刻这些条件第一次不成立. 此时箱子位置仍然记为$x_1 \ge x_2 \ge \cdots x_n$. 我们假设此时有

$$x_1 + \cdots + x_m \ge m(n-m).$$

此时我们对箱子的位置进行追踪. 记此时在位置x_i的纸箱为i号纸箱，我们考虑上一个时刻时候纸箱的位置，记i号纸箱对应的位置为x_i'. 我们可以设$1,\cdots m$这m个纸箱加在一起净向右移了s个单位. 于是我们有

$$x_1' + \cdots + x_m' + s > m(n-m).$$

于是考虑$x = \min x_1', \cdots x_m'$，注意到其他$x_j'$之和不会超过$(m-1)(n-m+1)$，因此我们一定有

$$x \ge m(n-m) - s - (m-1)(n-m+1) = n - 2m + 1 - s.$$

由于这m个箱子净向右移动了s个单位，不难看出一定至少有在x右侧的s纸箱向左移动一个单位. 于是

$$x_1' + \cdots + x_m' + sx > m(n-m) + s(x-1) \ge m(n-m) + s(n-2m-s) = (m+s)(n-m-s).$$

矛盾，故引理得证. □