

IMO 2023 Shortlist C5: 数轴上的纸箱

不知名

2024 年 8 月 3 日

1 问题的转换

我们称游戏进行了一轮，指的是箱从全部开到被关闭再到全部开的一个过程。

我们采用这样一种策略，假设某一轮之后（通过适当标号）箱 $1, \dots, n$ 内的宝石数量 (x_i) 变成了这样

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n. \quad (1)$$

Elisa每一步选取开着的指标最大的第 i 个箱来放宝石。需要指出这不是一个完全的贪心算法所以并非最优，但已经足够。这样的话我们可以看出相当于得到的宝石数量变成了 (y_i) ，其中若给记号

$$y_i = x_i + 1 + r_i.$$

那么我们知道 (r_i) 必须满足条件

$$\sum_{i=1}^k r_i \geq 0, \forall 1 \leq k \leq n-1, \sum_{i=1}^n r_i = 0, r_i \in \mathbb{Z}_{\geq -1}. \quad (2)$$

我们接下来为了简化问题，我们不妨在进行了一轮之后，把诸箱内的宝石数量-1（这样有可能出现负数），这样 $y_i = x_i + r_i$ ，我们可以假设所有宝石数字之和为0。

这样我们给出转化后的问题：

Problem 1.1. 数轴上初始在 origin 摆着 n 个纸箱，Bob每一时刻可以移动任意多个纸箱，遵循如下移动规则：

1. 每一次纸箱可以向左或者向右移动整数个单位。但向左移动最多一个单位。
2. 任意选取一个数 s ，某一时刻位于 s 左侧的纸箱的位置的平均数在下次移动之后不减少（注意，是这些纸箱在下次移动之后的位置）。

2 问题结果的证明

我们证明任意次移动之后，假设诸纸箱位置如同(1)式由多到少排列，我们证明更强的结论。

Lemma 2.1. 任意次移动后都有

$$x_1 + \dots + x_s \leq (n-s)s.$$

特别地，等号可以取得，此时 $x_i = n + 1 - 2i$ 。不难看出这可以导出对于原题 $C = 2 \cdot 2022$ 是一个可以取到的常数。

证明。证明手段是归纳。初始状态符合条件。我们用反证法，假设某一个时刻这些条件第一次不成立。此时箱子位置仍然记为 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ 。我们假设此时有

$$x_1 + \dots + x_m \geq m(n-m).$$

此时我们对箱子的位置进行追踪. 记此时在位置 x_i 的纸箱为 i 号纸箱, 我们考虑上一个时刻时候纸箱的位置, 记 i 号纸箱对应的位置为 x'_i . 我们可以设 $1, \dots, m$ 这 m 个纸箱加在一起净向右移了 s 个单位. 于是我们有

$$x'_1 + \dots + x'_m + s > m(n - m).$$

于是考虑 $x = \min x'_1, \dots, x'_m$, 注意到其他 x'_j 之和不会超过 $(m - 1)(n - m + 1)$, 因此我们一定有

$$x \geq m(n - m) - s - (m - 1)(n - m + 1) = n - 2m + 1 - s.$$

由于这 m 个箱子净向右移动了 s 个单位, 不难看出一定至少有在 x 右侧的 s 纸箱向左移动一个单位. 于是

$$x'_1 + \dots + x'_m + sx > m(n - m) + s(x - 1) \geq m(n - m) + s(n - 2m - s) = (m + s)(n - m - s).$$

矛盾, 故引理得证. □