Iwasawa引理

123

2024 年 5 月 3 日

1 定理叙述

Theorem 1.1 (Iwasawa). *如果G是一个有限完美群，且忠实(faithfully)、素(primitively)地作用在一个集合上，使得某个点的稳定子群H有正规$Abel$子群A，且其共轭可以生成整个群G，那么G是单的。*

证明. 假设不然，存在正规子群K使得$1 < K < G$。由于作用忠实，那么它不能固定所有点不动。选取某个稳定子群H使得$K \not\leq H$，那么$G = HK$。这是因为作用是素的，所以H为G极大子群。那么任意$g \in G$可以被写成$hk, h \in H, k \in K$的形式。于是A的共轭必然有形式$g^{-1}Ag = k^{-1}h^{-1}Ahk = k^{-1}Ak \leq AK$。于是$G = AK$。那么$G/K = AK/K = A/A \cap K$是Abel的，这与$G$为完美群之假设是矛盾的。 □

2 简单的应用

我们来证明$\mathrm{PSL}_n(q)$之单性。首先，$\mathrm{PSL}_2(2) \simeq S_3$与$\mathrm{PSL}_2(3) \simeq A_4$不是单的。

其次，$\mathrm{SL}_n(q)$可以自然作用在一维线性空间上，且作用的核就是标量矩阵，我们就能得到$\mathrm{PSL}_n(q)$也可以作用于其上，且由于基变换的任意性，我们知道这个作用2-可迁，因而也是素的。

我们接下来要考虑稳定子群。比如说一维线性空间被选取为$<(1, 0, \cdots, 0)>$，那么这样对应的矩阵第一行为$(\lambda, 0, \cdots, 0), \lambda \neq 0$。

不难看出由$\begin{pmatrix} 1 & 0_{n-1} \\ v_{n-1} & I_{n-1} \end{pmatrix}$生成的矩阵群$A$是这个稳定子群的一个正规的Abel子群，被称为平延(transvections)。平延的定义就是满足$t - I_n$的秩为1且$(t - I_n)^2 = 0$的矩阵t。通过基变换所有平延都在A的共轭之中。

并且根据线性代数我们知道$\mathrm{SL}_n(q)$可以由形如$r_i \mapsto r_i + \lambda r_j$初等变换生成，而这样的变换就是平延，自然$\mathrm{SL}_n(q)$也可以由平延生成。

接下来我们要证明除了$\mathrm{SL}_2(2), \mathrm{SL}_2(3)$之外，$\mathrm{SL}_n(q)$是完美的（自然$\mathrm{PSL}_n(q)$也是）。那我们只要证明初等变换可以是交换化子$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$就可以了。

而我们知道$n > 3$的时候结论成立，因为

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$n = 2, q > 3$的时候结论成立，因为

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y(x^2 - 1) & 1 \end{pmatrix},$$

这个时候选取$x^2 - 1 \neq 0$就可以了。