原问题 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是一个无穷项的正整数序列，且 N 是一个正整数。已知对任意整数 $n > N$，a_n 等于整数 a_{n-1} 在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 中出现的次数。证明：序列 $a_1, a_3, a_5, \cdots$ 与序列 $a_2, a_4, a_6, \cdots$ 两者至少有一个是最终周期的。

引理 1. 存在正整数 k，其在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次。

引理 2. 设 $k \geqslant 2$。若 k 在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次，则 $k-1$ 在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次。

引理 3. 若 $\{a_n\}$ 中出现连续两项 (p, k) 和 (q, k)，其中 $q > p > \max(a_1, \cdots, a_N)$，则 (p, k) 出现在 (q, k) 之前。

证明. 设 (x, p, k) 和 (y, q, k) 皆是 $\{a_n\}$ 中的连续三项。$\{a_n\}$ 中有 k 个连续三项 (z_i, q, i) 在 (y, q, k) 之前，$1 \leqslant i \leqslant k$，其中 $z_1, \cdots, z_k$ 两两不同，$z_k = y$。进而 $\{a_n\}$ 中有连续三项 (z_i, p, s_i) 在 (z_i, q, i) 之前，$1 \leqslant i \leqslant k$，其中 $s_1, \cdots, s_k$ 两两不同。必有某个 $s_i \geqslant k$。因此，(x, p, k) 在 (z_i, p, s_i) 之前或与之重合，得 (x, p, k) 在 (y, q, k) 之前，即 (p, k) 在 (q, k) 之前。 □

引理 4. 若 $\{a_n\}$ 中出现连续两项 (p, k)，其中 $p > \max(a_1, \cdots, a_N)$ 并且 k 在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次，则 $\{a_n\}$ 中必有连续两项 $(p+1, k)$。

证明. 设 (x, p, k) 和 (y, q, k) 皆是 $\{a_n\}$ 中的连续三项，使得 $q > p$。$\{a_n\}$ 中有 k 个连续三项 (z_i, q, i)，$1 \leqslant i \leqslant k$，其中 $z_1, \cdots, z_k$ 两两不同，$z_k = y$。进而 $\{a_n\}$ 中有连续三项 $(z_i, p+1, s_i)$，$1 \leqslant i \leqslant k$，其中 $s_1, \cdots, s_k$ 两两不同。必有某个 $s_i \geqslant k$。因此，$\{a_n\}$ 中有连续两项 $(p+1, k)$。 □

引理 5. 在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次的 k 仅有限多个。

证明. 反证法。否则，根据引理 2，任意正整数 k 在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次。取 $k > \max(a_1, \cdots, a_N)$，则 $\{a_n\}$ 中有连续两项 $(k, 1)$，从而有连续三项 $(k, k, k+1)$。根据引理 3 和 4，$\{a_n\}$ 中有连续三项 $(x, k+1, k+1)$ 在 $(k, k, k+1)$ 之后。若 $x < k$，则 $(x, k+1)$ 在 $(k, k+1)$ 之后，与引理 3 矛盾。若 $x > k+1$，则 $(x, k+1)$ 在 $(k+1, k+1)$ 之前，与引理 3 矛盾。由于 $\{a_n\}$ 中不可能有连续三项 $(k+1, k+1, k+1)$，故 $x = k$，$\{a_n\}$ 中有连续四项 $(k, k, k+1, k+1)$，与 $\{a_n\}$ 中有连续两项 $(k+1, k)$ 在 (k, k) 与 $(k+1, k+1)$ 之间矛盾。 □

引理 6. 设 m 是在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次的最大正整数。当 n 充分大时，$\min(a_n, a_{n+1}) \leqslant m < \max(a_n, a_{n+1})$。从而存在正整数 n，使得 $a_{n+2i} \leqslant m < a_{n+2i+1}$，$\forall i \in \mathbb{N}$。

证明. 满足 $a_n \leqslant m$ 且 $a_{n+1} \leqslant m$ 的 n 仅有限多个。若存在无限多个 n 满足 $a_n > m$ 且 $a_{n+1} > m$，则存在无限多个 n 满足 $a_{n+1} = m+1$，与 m 的最大性矛盾。故满足 $a_n > m$ 且 $a_{n+1} > m$ 的 n 也仅有限多个。 □

引理 7. 设 m 是在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次的最大正整数。当 $m \geqslant 2$ 时，对于任意正整数 $p < m$，仅有限多个 n 满足 $a_n = a_{n+2p}$。

证明. 对 p 归纳。首先证明命题对 $p=1$ 成立。假设存在无限多个 n 满足 $a_n=a_{n+2}$。设 $(a_n,a_{n+1},a_{n+2})=(i,d,i)$，其中 $i\leqslant m$ 并且 d 可任意大。根据引理 3 和 4，$\{a_n\}$ 中有连续两项 $(d-1,i)$ 在 (d,i) 之前，故 $a_{n-1}=d-1$。注意到 $(a_1,\cdots,a_{n+1})$ 中形如 $(*,d-1)$ 的连续两项共有 i 个，设为 $(x_1,d-1),\cdots,(x_i,d-1)$；形如 $(*,d)$ 的连续两项也共有 i 个，设为 $(y_1,d),\cdots,(y_i,d)$。故 $a_{n-2}\in\{x_1,\cdots,x_i\}=\{y_1,\cdots,y_i\}$。从而 $(a_1,\cdots,a_{n+1})$ 中有连续两项 (a_{n-2},d)，得 $a_{n-2}=a_n$。由于这样的 n 有无限多个，故当 n 充分大时，皆有 $a_{n+2}=a_n$。因此，$m=1$。
下设 $p\geqslant 2$。假设存在无限多个 n 满足 $a_n=a_{n+2p}$。设 $(a_n,\cdots,a_{n+2p})=(i,\cdots,j,d,i)$，其中 $i\leqslant m$ 并且 d 可任意大。根据引理 3，$a_{n-1}\leqslant d-1$。若 $a_{n-1}<d-1$，则根据引理 3 和 4，$(a_{n+1},\cdots,a_{n+2p-2})$ 中有连续两项 $(d-1,i)$。根据归纳假设，这样的连续项 $(d-1,i,\cdots,d,i)$ 仅有限多个。故当 n 充分大时，$a_{n-1}=d-1$。注意到 $(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 中形如 $(*,d-1)$ 的连续两项共有 i 个，设为 $(x_1,d-1),\cdots,(x_i,d-1)$；$(a_1,\cdots,a_{n+2p-1})$ 中形如 $(*,d)$ 的连续两项也共有 i 个，设为 $(y_1,d),\cdots,(y_i,d)$。若某个 $(y_t,d-1)$ 在 $(a_n,\cdots,a_{n+2p-1})$ 中，则 (y_t,d) 也在 $(a_n,\cdots,a_{n+2p-1})$ 中。根据归纳假设，这样的连续项 $(y_t,d-1,\cdots,y_t,d)$ 仅有限多个。故当 n 充分大时，$a_{n-2}\in\{x_1,\cdots,x_i\}=\{y_1,\cdots,y_i\}$。从而 $(a_{n-2},\cdots,a_{n+2p-1})$ 中有连续项 $(a_{n-2},d-1,\cdots,a_{n-2},d)$。若 $a_{n-2}\neq j$，则根据归纳假设，这样的连续项仅有限多个。故当 n 充分大时，$a_{n-2}=a_{n+2p-2}$。由于这样的 n 有无限多个，故当 n 充分大时，皆有 $a_n=a_{n+2p}$。因此，$m=p$。 □

引理 8. *存在正整数 n，使得 $\{a_{n+2i}\mid i\in\mathbb{N}\}$ 是周期数列。*

证明. 根据引理 7，当 n 充分大且 $a_n\leqslant m$ 时，$(a_n,a_{n+2},\cdots,a_{n+2m-2})$ 皆是 $(1,\cdots,m)$ 的排列。因此，$\{a_{n+2i}\mid i\in\mathbb{N}\}$ 有周期 m。 □