原问题 对任意正实数ϵ，除了有限个正整数n外，每个有n个顶点及至少$(1+\epsilon)n$条边的简单图，都有两个长度相同的圈.

证明. 使用概率方法. 假设G是一个这样的图. 现在我们这样随机挑选一个由G中边生成的子图，其中每条边被选中的概率独立且为p. 那么H总边数的期望$(1+\epsilon)pn$. 由条件，而H中至多有一个k-圈对所有的$k \geq 3$，也就是G中可能有的唯一的k-圈. 我们可以删去H中每个这样的圈至多一条边使得H变成一个森林. 但是若G中有这样的一个k-圈，H中有这样的一个k-圈的概率是p^k. 因此，通过这种方式使得H变为森林，删去边的数量的期望不超过$\sum_{k=3}^{\infty} p^k = \frac{p^3}{1-p}$. 而删去这些边之后得到的森林，至多有$n$个顶点也就意味着最多有$n-1$条边. 也就是说$(1+\epsilon)pn - \frac{p^3}{1-p} \leq n-1$. 我们只需要选取$\frac{1}{1+\epsilon} < p < 1$即可.

$\square$