《为什么n^2-n+41的前40项是素数？》续集：$-53008+67024-14512+496=0$?（我也不知道这个标题在胡言乱语什么但我干脆就这么写了）

杨文颜

2025 年 1 月 23 日

1 上集回顾

书接上回. 我们看到了163这个数字的神奇，这是因为它拥有着类数为1的强大性质. 在结尾我们提到了一些神秘的等式. 比如所谓的Hurwitz-Kronecker关系.

$$\sigma_1^+(m)=\sum_{D<0}\frac{h(D)}{w(D)}r_D(m)=\sum_{t^2<4m}h^*(t^2-4m)\quad (m\text{不为完全平方数}).$$

以及Ramanujan常数

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768743.99999999999250072597\cdots$$

来源于j函数特殊值也被称为singular moduli.

$$j(\frac{1+\sqrt{-163}}{2})=-262537412640768000=-2^{18}\cdot 2^3\cdot 5^3\cdot 23^3\cdot 29^3=-(2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 23\cdot 29)^3.$$

看似平淡无奇的等式其实暗藏玄机. 然而，我们即将看到，这两个玄机又以一种意想不到的方式组合了起来. 如同一个侦探小说中的情节，你也许认出来造成一切的“凶手”就是j函数，我们一直在回避谈论它，但它与这种种巧合都有说不清的关系.

2 j函数

什么是j函数？它没有一个简单的定义. 如果我们直接看这个函数的定义那将会是一团糟.

$$j(\tau)=\frac{1+240\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^n}{q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}}.$$

其中τ为复数满足$\tau\in\mathbb{H}=\{\tau\in\mathbb{C}:\Im(\tau)>0\}$，$q=q=e^{2\pi i\tau}$，$\sigma_3(n)=\sum_{d|n}d^3$为正整数$n$的所有因子的三次方之和. 如果你参加一个比赛评比谁能写出最抽象的函数表达式，那么写出这个表达式的人很可能会是冠军. 但即便定义如此抽象，但令人震惊的是它有着极为神奇的性质. 我们简单来说就是

$$j(\tau)=j(\tau+1)=j(\frac{-1}{\tau}),\tau\in\mathbb{H}.$$

当然有这两个性质就能够得到这是一个$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$作用不变的函数. 也就是

$$j(\tau)=j(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}),\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\tau\in\mathbb{H}.$$

某种意义上来说第一个等式是容易满足的，$j(\tau+1)=j(\tau)$在暗示这个函数是周期函数，所以可以作Fourier展开. 但第二个等式的满足是不容易的. 事实上，可以证明的是，只有一个亚纯函数j函数本质上是这个函数方程的解，其他的具有相同特点的函数一定是j函数的多项式. 我们也称这个方程的解为模函数.

j函数还有很多性质，我们限于篇幅就只介绍这一个最基本的性质. 但是我们有必要再次强调，那就是j是一个$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$作用不变的函数意味着什么. 这实际上意味着$j$可以理解成一个格（lattice）的函数. 换言之如果平面上有一个格$L=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$，我们也许能换一组格基$L=\mathbb{Z}(a\tau+b)\oplus\mathbb{Z}(c\tau+d)$. 但只要$\tau_2/\tau_1,\tau\in\mathbb{H}$，那么我们就可以知道$j(\tau_2/\tau_1)=j(\tau)$. 或者你将一个格做一个伸缩$cL=\mathbb{Z}c\oplus\mathbb{Z}c\tau$，$c\tau/c=\tau$其实也不会对其有影响.

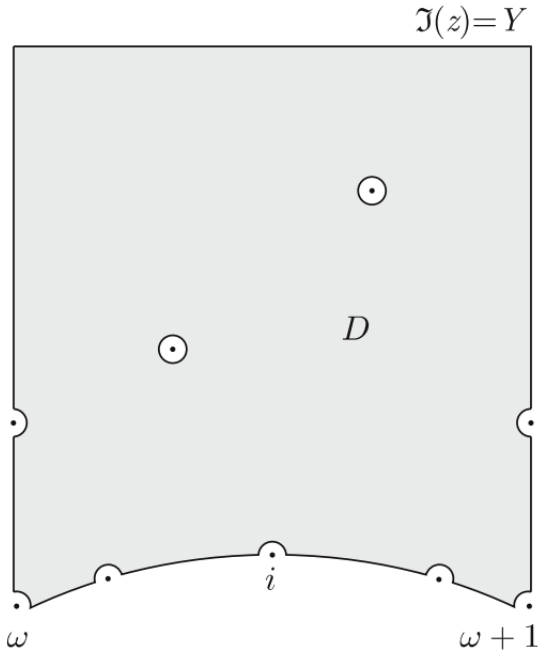

图 1: 基本区域的图示

所以我们可以看到上回我们说$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$的基本区域，也可以理解为选取适当的格基，也可以理解为某种$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$作用平移之后点的典范选取方式. 但要小心！有两个点是例外的，一个是i一个是$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. 它们实际上各自只有1/2和1/3的部分落在基本区域内（如图）.

3 一点点推广：模形式

j函数是一个非常好的函数，但这样的函数通常不太好找而且数量极少，一般更为常见的做法是寻找模形式. 模形式的定义是类似的，同样我们希望

$$f(\tau+1)=f(\tau).$$

但在$\tau\to-1/\tau$这个反演变换下我们希望有

$$f(\frac{-1}{\tau})=\tau^k f(\tau).$$

这里的k被称为所谓的权（weight），显然应当是一个偶数（奇数没有意义能够推出f为0）. 我们希望找到这样的τ使得它在上半平面，包括无穷远$i\infty$处都是全纯的. 如果你能得到两个权为k的模形式，那么两者的比就是一个0权的模形式也就是模函数. 等等，似乎有点不对，这样的话你得到的函数可能在有些点不全纯了. j函数虽然在有限点都全纯，但在无穷远点有一个极点. 当然你也可以说在有理数点j函数也有极点，但那些也可以理解为无穷远点

在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$平移下的像所以没有什么本质区别，本质上说我们只要考虑基本区域紧化后包括无穷远处的极点和零点个数！利用复分析可以知道如果f不是0的权k模形式那么

$$\sum_{P\in\text{基本区域}}\frac{1}{w_P}\operatorname{ord}_P(f)+\operatorname{ord}_\infty(f)=\frac{k}{12}.$$

这有一个推论，就是权k的全纯的模形式作为线性空间，应当是有限维的！更精确地说，我们知道不存在权为2的模形式，且权为4和6的模形式空间是1维的，权为12的模形式空间是2维的. 这是因为我们只需要看零点的数量. 如果$k=2$的话意味着f有$1/6$个零点落在基本区域内，但即便是ω对应的$1/w=1/3$也比$1/6$大. 而$k=4$的话意味着f有$1/3$个零点落在基本区域内也就是说应该是仅有ω或者$\omega+1$是f在基本区域内的单零点，$k=6$时则是仅有i是f在基本区域内的单零点. $k=12$的时候你会得到一个维数为2的模形式空间，并且此时$k/12=1$，所以真的有可能得到一个只在无穷远点消失的模形式.

怎么找到这些模形式呢？其实也不难，最简单的方法是使用Eisenstein级数，换言之在造出格$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$之后直接作和

$$\sum_{0\neq\omega\in L}\frac{1}{\omega^k}=\sum_{(0,0)\neq(m.n)\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{(m\tau+n)^k}$$

$k>2$的时候这个级数绝对收敛. 且通过计算后可以得到k为偶数时这个级数是

$$\zeta(k)E_k(\tau),$$

其中

$$E_k(\tau)=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n\geq1}\sigma_{k-1}(n)q^n,q=e^{2\pi i\tau}.$$

不难验证这是一个模形式. 并且根据模形式空间的维数的限制，我们显然就能得到

$$E_4^2=E_8,E_4E_6=E_{10}.$$

由此可以得到

$$\sum_{0<r<n}\sigma_3(r)\sigma_3(n-r)=\frac{\sigma_7(n)-\sigma_3(n)}{120},$$

$$\sum_{0<r<n}\sigma_3(r)\sigma_9(n-r)=\frac{\sigma_{13}(n)-11\sigma_9(n)+10\sigma_3(n)}{2640}.$$

祝贺！你第一次用模形式的手段得到了一些奇妙恒等式. 这些恒等式并不是不能用纯粹暴力的方式进行计算得到，但是往往计算方式会极为困难而且不得其法. 模形式的方法既体现了两边等式的联系，又给出了具体用到的体现对称性的函数，最重要的一点，你只需要对少数几个n验证等式，那么由于模形式空间的有限性，它将对所有的n自动成立！这是一种高效的一举三得的办法. 最后，j函数其实就是两个权12的模形式的比. 这就是Klein当年的定义.

$$j=1728\frac{E_4^3}{E_4^3-E_6^2}.$$

往往模形式会出现在与模形式毫无关系的问题中. 比如$\theta(\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}$. 使用Poisson求和公式，就可以得到

$$\theta(\frac{-1}{\tau})=(i\tau)^{1/2}\theta(\tau).$$

似乎，θ函数是一个1/2权的模形式？我们不去探讨细节，因为似乎我们之前所说的模形式的权应该是整数，但是我们不去管这些细节. 阀门已经打开，我们可以找到更多1/2权的模形式，比如

$$\eta(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{12}(n)q^{n^2/24}=q^{1/24}-q^{25/24}-q^{49/24}+q^{121/24}+\cdots.$$

其中$\chi_{12}(12m\pm1)=1,\chi_{12}(12m\pm5)=-1,\chi_{12}(n)=0$对于$(n,12)\neq1$. 这是Euler所发现的. 这也具有类似$\theta$函数的展开的性质，实际上每个1/2权的模形式都能写成类似的形式.

4 计算入门1：Hecke算子的使用

回到问题当中，j函数现在有了定义，我们就可以给出它的Fourier展开，也叫q-展开.

$$j(\tau)=q^{-1}+744+196884q+21493760q^2+\cdots,q=e^{2\pi i\tau}.$$

记$j(\tau)=\sum_{n\geq -1}c(n)q^n$，具体的表如下.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$c(n)$	1	744	196884	21493760	864299970	20245856256	333202640600	4252023300096

现在看起来还是一头雾水，既看不出这些系数有什么意义，也不知道如何计算出j函数的特殊值比如$j(\frac{1+\sqrt{-163}}{2})=-262537412640768000$.

接下来基本的想法是我们可以去利用模形式来造模形式. 比如说

$$j(2\tau)+j(\frac{\tau+1}{2})+j(\frac{\tau}{2})$$

是一个模函数. 原因很简单，它在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$作用下不变. 三项对应于$L=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$的三种不同的指标为2的子格$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(2\tau),2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau,2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\tau+1)$. 所以，在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$的作用下，也只是把一种换成另一种，因此整体在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$下不变. 这就得出了它是一个权为0的模形式也就是模函数. 但是等等，模函数又是j函数的多项式. 我们可以用待定系数法确定这个多项式. 如果记$J(\tau)=j(\tau)-744$消去常数项，那么就能得到

定理 4.1.

$$J(2\tau)+J(\frac{\tau+1}{2})+J(\frac{\tau}{2})=J(\tau)^2-2\cdot c(1)=J(\tau)^2-2\cdot 196884.$$

很好，这样我们两边作q-展开，又可以得到$j(\tau)$的q-展开式中系数之间的一些关系，比如说如果记$J(\tau)=\sum_{n\geq -1}c(n)q^n$，那么有

$$40491909396=2\cdot 20245856256+196884=c(4)+c(1)=c(1)^2+2c(-1)c(3)=196884^2+2\cdot 864299970.$$

这是Hecke算子T_2的一个例子. 我们可以利用这个算子得到一些特殊的j函数的值. 首先我们根据上一节的结果可以得到

$$E_4(\omega)=0\implies j(\omega)=0.$$

如果我们想要计算$j(\sqrt{3}i)$的值，我们只需要注意到

$$j(\sqrt{3}i+1)+j(\frac{1+\sqrt{3}i}{4})+j(\frac{3+\sqrt{3}i}{4})-3\cdot 744=(j(\omega)-744)^2-2\cdot 196884.$$

而$j(\sqrt{3}i)=j(\sqrt{3}i+1)=j(\frac{1+\sqrt{3}i}{4})=j(\frac{3+\sqrt{3}i}{4})$. 可以用$j$满足的$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$平移不变性来证明，但其实也可以直接看出，因为这三种对应的格其实没有本质差别. 因此，我们可以得到

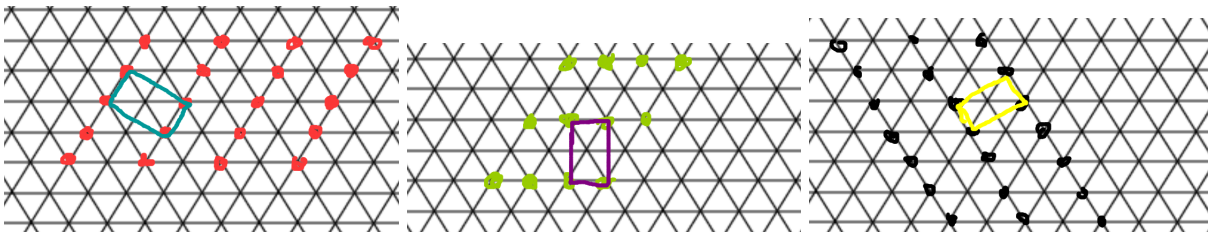

图 2: $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\omega$的三种指标为2的格本质上是一样的

$$j(\sqrt{3}i)=\frac{744^2-2\cdot 196884+3\cdot 744}{3}=54000.$$

5 计算入门2：模形式的多项式

我们刚刚得到了很神奇的事情，那就是$j(\sqrt{3}i)=54000$是一个整数. 如果$j(\tau)$对一个虚二次数τ是整数，那其实也可以用q-展开计算到一定精度就直接取整来计算，但事实上并非总是如此，判别式最小的反例就是最小的类数非1的例子.

$$j(\frac{1+\sqrt{15}i}{2})=\frac{-191025-85995\sqrt{5}}{2}$$

那我们现在该怎么办？通过上面的方法，其实你可以计算出

$$j(\frac{1+\sqrt{15}i}{2})+j(\frac{1+\sqrt{15}i}{4})=-191025.$$

那么还差了什么呢？对，根据韦达定理，你还需要

$$j(\frac{1+\sqrt{15}i}{2})j(\frac{1+\sqrt{15}i}{4})=?$$

这该怎么办呢？我们再来造模函数. 我们还是回到刚刚的例子，由于在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$的作用下的置换下指标为2的子格会发生一个置换，那么我把这三个作其他的对称和应该也是$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$作用下不变的. 通过韦达定理的手段，我们改成

$$(X-j(2\tau))\left(X-j(\frac{\tau+1}{2})\right)\left(X-j(\frac{\tau}{2})\right)=X^3-AX^2+BX-C$$

那么A,B,C可以被表成$j(\tau)$的多项式. 其表达式为

$$A=j^2-1488j+16200, B=1488j^2+40773375j+8748000000, C=-j^3+162000j^2-8748000000j+157464000000000.$$

把j的位置换成Y就可以得到

$$\Phi_2(X,Y)=-X^2Y^2+X^3+Y^3+1488(X^2Y+XY^2)-162000(X^2+Y^2)+40773375XY+8748000000(X+Y)-157464000000000.$$

这是一个二元的对称多项式. 如果一个虚二次数满足一个判别式为$-d$的二次方式，那么不难知道它应当是某个$\Phi_n(X,X)$的根. Φ_n的定义自然是

$$\Phi_n\left(X,j(\tau)\right)=\prod_{M\in\Gamma\backslash\mathcal{M}_n}\left(X-j(M\circ\tau)\right).$$

M表示$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Z})$在$\mathbb{H}$上的作用. $M\in\Gamma\backslash\mathcal{M}_n$的意思是取行列式为$n$的矩阵，并取在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$的作用下的一组代表元. 这里我们先把$n$是平方数的情况排除出去. 因为这种情况的话$\Phi_n(X,X)$恒为0这是因为$\Phi_n(X,Y)$有一个因子$\Phi_1(X,Y)=X-Y$.

命题 5.1. *当n不是一个平方数时，$\Phi_n(X,X)$是一个（差一个符号）首一多项式，次数是$\sigma_1^+(n)=\sum_{d|n}\max(d,n/d)$.*

证明.

$$\begin{aligned}\Phi_n(X,X)&=\prod_{ad=n}\prod_{1\le b\le d}\left(j(\tau)-j(\frac{a\tau+b}{d})\right)\\&=\prod_{ad=n}\prod_{1\le b\le d}\left(q^{-1}-e^{-2\pi ib/d}q^{-a/d}+O(q)\right)\\&=\prod_{ad=n}\left(q^{-d}-q^{-a}\right)\left(1+O(q)\right)\sim\pm q^{-\sigma_1^+(n)}\end{aligned}$$

让$\Im(\tau)\to\infty$，此时$j(\tau)\sim q^{-1}$. □

推论 5.2. *当τ是一个虚二次数时，$j(\tau)$是一个代数整数.*

我们来举一个例子. $\Phi_2(X,X)=-(X-8000)\cdot(X+3375)^2\cdot(X-1728)$. 注意到$i,\frac{1+\sqrt{7}i}{2},\sqrt{2}i$可以被行列式为2的矩阵$\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}$作用不动. 通过稍微展开到一定精度得到

$$j(i)=1728,\quad j(\frac{1+\sqrt{7}i}{2})=-3375,\quad j(\sqrt{2}i)=8000.$$

6 计算入门3：第一恒等式的导出

我们先给一个表格，当D为模4余1的负整数时$z_D = \frac{1+\sqrt{-D}i}{2}$，当$D$为模4余0的负整数时$z_D = \frac{\sqrt{-D}i}{2}$，那么得到下表.

D	-3	-4	-7	-8	-11	-12	-15	-16	-19
$j(z_D)$	0	1728	-3375	8000	-32768	54000	$\frac{-191025-85995\sqrt{5}}{2}$	287496	-884736

那么我们可以定义

$$\mathcal{H}_{-D}(X) = \prod_{Q\in Q_D/\Gamma} (X - j(\alpha_Q))^{1/w_Q}$$

α_Q为$Q(X,1)$的根. $w_Q = 2,3$若Q和$[a,0,a]$或$[a,a,a]$等价，其余时候均为1. $Q \in Q_D/\Gamma$的意思是Q的判别式为D，且选取一个既约的二次型（或者说$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$作用下代表元）. 判别式为$D$既约二次型前几个例子是

$$\mathcal{H}_3(X) = X^{1/3},$$

$$\mathcal{H}_4(X) = (X-1728)^{1/2},$$

$$\mathcal{H}_7(X) = X + 3375,$$

$$\mathcal{H}_8(X) = X - 8000,$$

$$\mathcal{H}_{11}(X) = X + 32768,$$

$$\mathcal{H}_{12}(X) = X^{1/3}(X-54000),$$

$$\mathcal{H}_{15}(X) = X^2 + 191025X - 121287375,$$

$$\mathcal{H}_{16}(X) = (X-1728)^{1/2}(X-287496).$$

由于$\Phi_n(j(\tau),j(\tau)) = 0$当且仅当$\tau$可以被一个行列式为$n$的矩阵固定不动，设为$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，那么$\pm(c\tau^2 + (d-a)\tau - b) = 0$为对应的二次型，判别式$(d-a)^2 + 4bc = (d+a)^2 - 4(ad-bc) = (\operatorname{tr} M)^2 - 4n$. 故我们可以得到

$$\Phi_n(X,X) = \pm \prod_{|t|<2\sqrt{n}} \mathcal{H}_{4n-t^2}(X).$$

如果我们在两边取degree，就会得到

$$\sigma_1^+(n) = \sum_{t^2<4n} H(4n-t^2).$$

这就推导出了Hurwitz-Kronecker类数关系. 我们这里改用了Hurwitz-Kronecker的记号$H(n) = h^*(-n)$.

7 计算入门4：norm的计算

另一个关于j函数特殊值的现象是其素因子分解. 如果你还有印象的话，我们上一次给出的例子是

$$j(z_{-163}) = -(2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 23\cdot 29)^3, j(z_{-163}) - 1728 = -(2^3\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot 127)^2\cdot 163.$$

并且暗示了前者的因子来自$(3\cdot 163 - r^2)/4$，后者的因子来自$(163-r^2)$，我们要说明这并不是巧合. 但在此之前让我们先来分析这样一个问题.

（任意）模函数的特殊值天生具有这样类似的特性吗？

当然不是！如果你用$j(\tau)-C$替换$j(\tau)$，那么这也是模函数，算术性质和解析性质没有任何变化，但是分解就完全变了，这是为什么呢？为什么减去的C一定是0和1728这样的数字呢？这是因为$0=j(\omega),1728=j(i)$，这个时候其实你考虑的是$j(\tau_1)-j(\tau_2)$这样的两个singular moduli之差！当然，这个时候还有另一个问题，那就是一般来说j函数的特殊值只是代数整数而不是一个整数，为了得到一个整数，我们要计算二者差的norm.

Berwick最早进行了大量这样的计算. 在没有计算机的时代，他在1928年计算出了所有当时已知道类数$h(D)\leq 3$的$j(z_D)$，并且给出了j和$j-1728$的分解. Gross和Zagier最早总结出了这类分解的规律.

我们先给出结果. 下面假设d_1,d_2是判别式且互质，$D=d_1d_2$.

$$J(d_1,d_2)=\left(\prod_{\tau_i\text{判别式}=d_i,\tau_i\in\text{基本区域}}(j(\tau_1)-j(\tau_2))\right)^{1/w_1w_2}$$

选取基本区域内元素也是因为要取一个$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$作用下代表元. w_i定义同前，其引入也是因为与前面几乎一致的原因.

定理 7.1.

$$J(d_1,d_2)^2=\pm\prod_{\substack{x,n,n'\in\mathbb{Z}\\ n,n'>0\\ x^2+4nn'=D}}n^{\epsilon(n')}$$

这里的$\epsilon(l)$对满足$\left(\frac{D}{l}\right)\neq -1$的素数$l$定义是

$$\epsilon(l)=\begin{cases}\left(\frac{d_1}{l}\right) & if\ (l,d_1)=1,\\ \left(\frac{d_2}{l}\right) & if\ (l,d_2)=1.\end{cases}$$

对于其他的$n=\prod_i l_i^{a_i}$，若对所有i有$\left(\frac{D}{l_i}\right)\neq -1$，定义$\epsilon(n)=\prod_i\epsilon(l_i)^{a_i}$.

定理中的$\epsilon(n')$良定，因为假设l整除$\frac{D-x^2}{4}$那么$(\frac{D}{l})\neq -1$. 我需要警告$(\frac{d}{2})$按惯例定义为$d\equiv 1,7\pmod 8$时为$+1$而$d\equiv 3,5\pmod 8$时为-1.

我们也可以重写表达式为

$$J(d_1,d_2)^2=\pm\prod_{\substack{x^2<D\\ x^2\equiv D\pmod 4}}F(\frac{D-x^2}{4}),$$

$$F(m)=\prod_{\substack{nn'=m\\ n,n'>0}}n^{\epsilon(n')}.$$

注意到$F(m)$或者为1或者为某一个素数l的幂. 当且仅当m的素因子分解形如

$$m=l^{2a+1}l_1^{2a_1}\cdots l_s^{2a_s}p_1^{b_1}\cdots p_r^{b_r},$$

其中$\epsilon(l)=\epsilon(l_i)=-1$而$\epsilon(p_i)=1$时，$F(m)$不是1，且为

$$F(m)=l^{(a+1)(b_1+1)\cdots(b_r+1)}.$$

为什么？我们这里并不取所有的正整数，只是取形如$\frac{D-x^2}{4}$这样的数. 而$\epsilon(\frac{D-x^2}{4})=-1$. 为了证明这一点，我们仅考虑一种本质上的情形，假设d_1模4余1且$\frac{D-x^2}{4}$与d_1互质.

$$\epsilon\left(\frac{D-x^2}{4}\right)=\prod_i\epsilon(l_i)^{a_i}=\prod_i\left(\frac{d_1}{l_i}\right)^{a_i}\overset{\text{二次互反律}}{=}\prod_i\left(\frac{l_i}{-d_1}\right)^{a_i}=\left(\frac{(D-x^2)/4}{-d_1}\right)=-1.$$

事实上$\epsilon(n')$也可以被替换成$-\epsilon(n)$. 并且存在一个素数l s.t. $\mathbf{v}_l(m)=2a+1,\epsilon(l)=-1$. 对素数$p\neq l$就有

$$\mathbf{v}_p\left(F\left(m\right)\right)=\sum_{n|m}-\epsilon(n)\mathbf{v}_p(n)=-\sum_{0\leq t\leq 2a+1,w|\frac{m}{l^{2a+1}}}\epsilon(w\cdot l^t)\mathbf{v}_p(w\cdot l^t)=-\sum_{w|\frac{m}{l^{2a+1}}}\epsilon(w)\mathbf{v}_p(w)\cdot\sum_{0\leq t\leq 2a+1}(-1)^t=0.$$

我们给一个例子. 选取$d_1=-67,d_2=-163$. 得到了 $J(-67,-163)=j(\frac{1+\sqrt{67}i}{2})-j(\frac{1+\sqrt{163}i}{2})=-147197952000+262537412640768000=262537265442816000=2^{15}\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 13\cdot 139\cdot 331$.

计算见下表. （$\sqrt{D}=\sqrt{d_1d_2}\approx 104.50.$）

$\lvert x\rvert$	$\frac{D-x^2}{4}$	$F(\frac{D-x^2}{4})$	$\lvert x\rvert$	$\frac{D-x^2}{4}$	$F(\frac{D-x^2}{4})$	$\lvert x\rvert$	$\frac{D-x^2}{4}$	$F(\frac{D-x^2}{4})$
1	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$	1	35	$2^2\cdot 3\cdot 101$	1	69	$2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$	1
3	$2^3\cdot 11\cdot 31$	1	37	$2^2\cdot 3\cdot 199$	3^2	71	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2$	1
5	$2^2\cdot 3\cdot 227$	3^2	39	$2\cdot 5^2\cdot 47$	2^2	73	$2\cdot 3\cdot 233$	1
7	$2\cdot 3^2\cdot 151$	2^2	41	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$	1	75	$2^2\cdot 331$	331
9	$2\cdot 5\cdot 271$	1	43	$2^2\cdot 3^4\cdot 7$	7	77	$2^5\cdot 3\cdot 13$	1
11	$2^2\cdot 3^3\cdot 5^2$	3^2	45	$2^4\cdot 139$	139	79	$2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$	1
13	$2^7\cdot 3\cdot 7$	1	47	$2\cdot 3^2\cdot 11$	2	81	$2\cdot 5\cdot 109$	1
15	$2\cdot 7\cdot 191$	1	49	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 71$	1	83	$2^4\cdot 3^2\cdot 7$	7
17	$2\cdot 3\cdot 443$	1	51	$2^2\cdot 5\cdot 13$	1	85	$2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$	1
19	$2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 11$	1	53	$2^2\cdot 3\cdot 13^2$	3	87	$2\cdot 419$	2^2
21	$2^2\cdot 5\cdot 131$	5^2	55	$2\cdot 3\cdot 329$	1	89	$2\cdot 3\cdot 5^3$	1
23	$2\cdot 3\cdot 443$	1	57	$2\cdot 7\cdot 137$	1	91	$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$	1
25	$2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 13$	1	59	$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 31$	1	93	$2^3\cdot 71$	2^4
27	$2^2\cdot 7^2\cdot 13$	13	61	$2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$	2^2	95	$2\cdot 3\cdot 79$	1
29	$2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$	1	63	$2\cdot 11\cdot 79$	1	97	$2\cdot 3^3\cdot 7$	1
31	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 83$	1	65	$2\cdot 3^3\cdot 31$	1	99	$2^3\cdot 5\cdot 7$	1
33	$2\cdot 1229$	2^2	67	$2^3\cdot 3\cdot 67$	1	101	$2^2\cdot 3^2\cdot 5$	5
						103	$2\cdot 3\cdot 13$	1

大量的1的出现来自于事实如果有$l_1\neq l_2$都有$\epsilon(l_i)=-1$且$l^{\text{奇数}}||m$那么$F(m)=1$. 但此时看起来$\epsilon(l)=-1$的较小的素数多一些！让我们来列一个表格.

l	$\left(\frac{-163}{l}\right)$	$F\left(\frac{-67}{l}\right)$	l	$\left(\frac{-163}{l}\right)$	$F\left(\frac{-67}{l}\right)$	l	$\left(\frac{-163}{l}\right)$	$F\left(\frac{-67}{l}\right)$
2	-1	-1	13	-1	-1	31	-1	-1
3	-1	-1	17	-1	1	37	-1	1
5	-1	-1	19	-1	1	41	1	-1
7	-1	-1	23	-1	1	43	1	-1
11	-1	-1	29	-1	1	47	1	1

直到47才会出现$\epsilon(l)=1$的素数. 上表似乎暗示着我们有如下事实

$$\left(\frac{-163}{l}\right)=\left(\frac{l}{163}\right)=-1,\quad \forall\text{素数}l<41.$$

$$\left(\frac{-67}{l}\right)=\left(\frac{l}{67}\right)=-1,\quad \forall\text{素数}l<17.$$

好眼熟的结论！这件事情是不是自然的呢？

命题 7.2. 假设$p>5$是一个模4余3的素数并且$\tau=\frac{1+\sqrt{-p}}{2}$，我们有$\mathbb{Z}[\tau]$类数为$1$，那么

$$\left(\frac{l}{p}\right)=-1,\quad \forall 素数 l<\frac{p+1}{4}.$$

证明. 注意到$\left(\frac{l}{p}\right)=1$意味着$(l)$这个$\mathbb{Z}$中的素理想在$\mathbb{Z}[\tau]$中分裂. 由于类数为1这意味着它能分解成两个主理想之积也就是

$$l=(a+b\tau)(a+b\bar{\tau})=a^2-ab+\frac{p+1}{4}b^2\geq\frac{p+1}{4}.$$

不妨设$a\geq 0$. 注意到$b=0$或者$a=0$的时候得到了a^2和$\frac{p\pm1}{4}b^2$，前者不可能是一个素数，后者只有$b=\pm1$的时候可能是一个素数但也等于$\frac{p\pm1}{4}$. 最后一个不等号当$a\geq b$的时候显然成立. 如果$b\geq a+1\geq 2$那么

$$a^2-ab+\frac{p+1}{4}b^2=b^2\cdot\left(\frac{p+1}{4}-\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)\geq 4\cdot(\frac{p+1-1}{4})=p\geq\frac{p+1}{4}.$$

□

下面我们来看看我们是怎么“猜到”这个分解的. 也许你会觉得着是一个偶然的观察. 但为了看到规律，Zagier在意识到应当选用两个j的值相减后，他计算了所有的$j(z_{-p_1})-j(z_{-p_2})$，其中p_i为满足$h(-p_i)=1$的素数. 我们在上一篇文章中说了，对于$j(z_{-p})-j(z_{-4})$的例子，我们猜测的结果应该是$l|p-x^2$，因为我们在$p=163$的例子看到了数字$127=163-36$其他的也是类似的. 对于$j(z_{-p})-j(z_{-3})$，通过一些效仿的办法可能会猜测答案是$l|\frac{3p-x^2}{4}$. 所以这个时候可以看到最合理的猜测是$l|\frac{p_1p_2-x^2}{4}$. 通过一些细致的观察，也可以看到我们应当有$\left(\frac{-p_1}{l}\right)=\left(\frac{-p_2}{l}\right)=-1$. 但是很容易看出来不是所有的整除$\frac{p_1p_2-x^2}{4}$的满足上述条件的数都在这个分解里面. 事实上，所有的例子中这个数字从未达到接近$\frac{p_1p_2}{4}$的大小. 以刚刚我们计算过的$j(z_{-67})-j(z_{-163})$为例，此时最大的因子只有331，只是稍稍超过了163的二倍而已，而$\frac{p_1p_2}{4}=2730.25$，这无疑是令人感到震惊的结果.

我们来展示一个Zagier自己手迹中的计算. 表中展示了$h(-p)=h(-q)=1$之时$j(z_{-p})-j(z_{-q})$的分解.

p \ q	11	19	43	67	163
7	$7\cdot13\cdot17\cdot19$	$3^7\cdot13\cdot31$	$3^6\cdot5^3\cdot7\cdot19\cdot73$	$3^7\cdot5^2\cdot7\cdot13\cdot61\cdot97$	$3^8\cdot5^3\cdot7\cdot13\cdot17\cdot31\cdot103\cdot229\cdot283$
11		$2^{16}\cdot13$	$2^{15}\cdot7^2\cdot19\cdot29$	$2^{17}\cdot7^2\cdot13\cdot41\cdot43$	$2^{15}\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot73\cdot79\cdot107\cdot109$
19			$2^{15}\cdot3^6\cdot37$	$2^{16}\cdot3^7\cdot13\cdot79$	$2^{15}\cdot3^7\cdot13\cdot19\cdot31\cdot37\cdot67\cdot193$
43				$2^{15}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2$	$2^{19}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^3\cdot37\cdot433$
67					$2^{15}\cdot3^7\cdot5^3\cdot7^2\cdot13\cdot139\cdot331$

所以这就留下了两个谜团. 第一个问题，**为什么分解中出现的数字如此之少**. 第二个问题，**为什么分解中出现的数字如此之小**. 从事后诸葛亮的角度，我们已经可以回答这两个问题. 第一个问题的答案就是我们的命题7.2暗示的结果，由于选取的p_i类数为1，很多小的素数l都满足$\epsilon(l)=-1$，若m的素因子分解中有两个这样的l以奇次幂出现则$F(m)=1$. 对于第二个问题，也不难看出我们可以来简单估计一下大小. 首先我们希望说明

$$\mathbf{v}_l\left(F\left(m\right)\right)=\sum_{\substack{t\geq1\\ t奇数\\ l^t|m}}\sum_{\substack{d|\frac{m}{l^t}\\ d\geq1}}\epsilon(d).$$

现在假设m具有之前我们提到的那种形式.

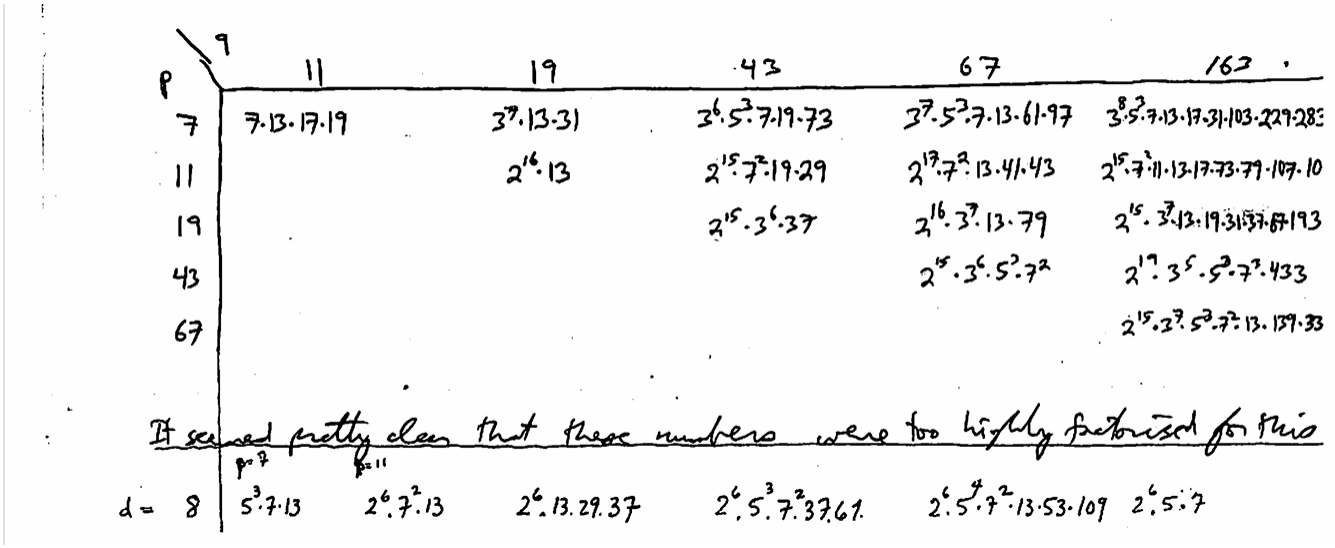

图 3: 底下的一行字："It seemed pretty clear that these numbers were *too* highly factorised"（看起来非常明确的是，这些数字过于高度分解）

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_l\left(F\left(m\right)\right) =& \sum_{\substack{t\geq 1\\ t\text{奇数}\\ l^t\mid m}} \sum_{\substack{d\mid \frac{m}{l^t}\\ d\geq 1}} \epsilon(d)\\
=& \sum_{k=0}^{a} \sum_{\substack{d\mid \frac{m}{l^{2k+1}}\\ d\geq 1}} \epsilon(d)\\
=& \sum_{k=0}^{a} \left(\sum_{t=0}^{2a-2k} \epsilon(l^t)\right) \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{t=0}^{2a_i} \epsilon(l_i^t)\right) \prod_{j=1}^{r} \left(\sum_{t=0}^{2b_j} \epsilon(p_j^t)\right)\\
=& (a+1)\prod_{j=1}^{r}(b_j+1).
\end{aligned}$$

用一样的等式可以证明两边的式子在$\mathbf{v}_l\left(F\left(m\right)\right)=0$的情况下相等. 接下来我们纯粹为了讨论方便假设$p_1,p_2>3$是两个模4余3的素数. 从而

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_l\left(J(-p_1,-p_2)\right) =& \sum_{\substack{0<x<\sqrt{p_1p_2},\\ x\text{奇数}}} \sum_{\substack{t\geq 1\\ t\text{奇数}\\ l^t\mid \frac{p_1p_2-x^2}{4}}} \sum_{\substack{d\mid \frac{p_1p_2-x^2}{4l^t}\\ d\geq 1}} \epsilon(d)\\
=& \sum_{\substack{t\geq 1\\ ,t\text{奇数}}} \sum_{d\geq 1} \epsilon(d)\cdot \#\{k\in\mathbb{Z}: 0<k<\sqrt{p_1p_2}, k^2\equiv p_1p_2 \pmod{4l^td}\}
\end{aligned}$$

而我们知道d较小时

$$\#\{k\in\mathbb{Z}: 0<k<\sqrt{p_1p_2}, k^2\equiv p_1p_2 \pmod{4l^td}\}\approx \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2l^td}N_{p_1p_2}(l^td)$$

其中

$$N_D(d)=\#\{k \pmod{2d}: k^2\equiv D \pmod{4d}\},\quad D=p_1p_2.$$

为了方便我们省略下标D，故设$\epsilon(l)=-1$且l不是p_1或者p_2，不难看出

$$N(l^t d)=N(ld)=\begin{cases}2N(d) & l\nmid d,\\ N(d) & l\mid d.\end{cases}$$

$$\mathbf{v}_l\left(J(-p_1,-p_2)\right)\approx\sqrt{D}\cdot\sum_{t\geq 1,t\text{奇数}}\frac{1}{2l^t}\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon(d)N(ld)}{d}=\sqrt{D}\cdot\frac{l}{2(l-1)(l+1)}\cdot\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon(d)N(ld)}{d}.$$

显然$\epsilon(d)$没有定义之时，$N(d)$可以肯定为0. 这里我们出现了一个条件收敛的级数，把它当成一个Dirichlet级数形式的和在$s\to 1^+$时的极限[1]，也就是

$$\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon(d)N(ld)}{d^s}=2\sum_{d\geq 1,l\nmid d}\frac{\epsilon(d)N(d)}{d^s}-\frac{1}{l^s}\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon(d)N(ld)}{d^s}.$$

而

$$\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon(d)N(d)}{d^s}=\sum_{d\geq 1,l\nmid d}\frac{\epsilon(d)N(d)}{d^s}-\frac{1}{l^s}\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon(d)N(ld)}{d^s}$$

故

$$\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon(d)N(ld)}{d^s}=\frac{2}{1-\frac{1}{l^s}}\cdot\sum_{d\geq 1}\frac{\epsilon(d)N(d)}{d^s}.$$

我们现在来复习一下上次我们提到的东西. 我们用一些组合计数的方法证明了

$$N(n)=\sum_{Q\in Q_D/\Gamma}r_Q^*(n).$$

其中$r_Q^*(n)$为n用二次型Q的primitive表示等价类数目. 换言之

$$r_Q^*(n)=\{(u,v)\in\mathbb{Z}^2/\operatorname{Aut}(Q):Q(u,v)=n,\gcd(u,v)=1\}.$$

当然这里$\#\operatorname{Aut}(Q)=2$只有恒等和$(u,v)\mapsto(-u,-v)$因为$D>0$.

根据上次的结果

$$\sum_{n\geq 1}\frac{N(n)}{n^s}=\sum_{n\geq 1}\sum_{Q\in Q_D/\Gamma}\frac{r_Q^*(n)}{n^s}=\zeta(2s)^{-1}\sum_{n\geq 1}\sum_{Q\in Q_D/\Gamma}\frac{r_Q(n)}{n^s}=\zeta(2s)^{-1}\sum_{n\geq 1}\frac{\sum_{d|n}\chi_D(d)}{n^s}=\frac{\zeta(s)L(s,\chi_D)}{\zeta(2s)}$$

最后一个等号是因为Q是二次型故$Q(du,dv)=d^2Q(u,v)$因此会出现一个$\zeta(2s)^{-1}$的因子. 然后再去使用类数公式自然就可以得到这个Dirichlet级数在$s=1$处的值. 这次局势有变，我们需要稍微调整一下. 想法是一致的，就是构造出卷积的结构，然后进行分解出L-函数的乘积. 所谓卷积就是

$$f*g(n)=\sum_{km=n}f(m)g(k)=\sum_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d}).$$

那么假如可以任意交换求和顺序有

$$\sum_{n\geq 1}\frac{f*g(n)}{n^s}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}\sum_{km=n}f(m)g(k)=\sum_{m\geq 1,k\geq 1}\frac{f(m)g(k)}{(mk)^s}=\sum_{m\geq 1}\frac{f(m)}{m^s}\sum_{k\geq 1}\frac{g(k)}{k^s}.$$

可以看到，

$$\sum_{Q\in Q_D/\Gamma}r_Q(n)=\sum_{d|n}\chi_D(d)=\mathbf{1}*\chi_D(n).$$

[1]防止我的数学分析A3老师发出尖叫诅咒我不能交换求和顺序！$s>1$的时候这个级数绝对收敛是因为$N(d)$大小取决于$(\mathbb{Z}/4d\mathbb{Z})^*$能分解成多少个不同的偶循环群，而这直接与$d$有多少个不同的素因子相关，而一个$d$这么大的数最多也只有$\log d$这个量级大小的不同的素因子，所以他现在不能扣我分了.

其中$\mathbf{1}(n)=1$为常数函数，那么其对应的Dirichlet级数就是

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}=\zeta(s).$$

类似地，

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\chi_D(n)}{n^s}=L(s,\chi_D).$$

那么这里我们有没有类似的妙手呢？

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\epsilon(n)N(n)}{n^s}\sum_{n\geq 1}\sum_{Q\in Q_D/\Gamma}\frac{\epsilon(n)r_Q^*(n)}{n^s}=\zeta(2s)^{-1}\sum_{n\geq 1}\sum_{Q\in Q_D/\Gamma}\frac{\epsilon(n)r_Q(n)}{n^s}$$

要想来分解这个Dirichlet级数我们就要仔细思考一下

$$\sum_{Q\in Q_D/\Gamma}\epsilon(n)r_Q(n)=\epsilon(n)\sum_{d|n}\chi_D(d)$$

有没有可能的分解？

稍加思考，不难看出

$$\epsilon(n)\sum_{d|n}\chi_D(d)=\epsilon(n)\sum_{d|n}\chi_{-p_1}(d)\chi_{-p_2}(d)=\sum_{d|n}\chi_{-p_1}(d)\chi_{-p_2}(\frac{n}{d}).$$

先考虑n不被p_1和p_2整除的情况. 此时只有$\chi_{-p_1}(n)=\chi_{-p_2}(n)$时才会定义$\epsilon(n)$等于这个共同的值，否则的话左边这个和就是0了，这是我们之前得到的结论. 如果这两个值不等，那么显然右边的和也是0. 因此解决了良定问题. 并且由于这个时候$\epsilon(n)\chi_{-p_2}(d)=\epsilon(n)\chi_{-p_2}(n)\cdot\chi_{-p_2}(\frac{n}{d})=\chi_{-p_2}(\frac{n}{d})$. （注意这些特征都是$\pm 1$）由于等式两边都是一个完全积性函数，只需要再来看$n=p_1$或者$n=p_2$的情形，不妨考虑前者. 我们知道

$$\epsilon(p_1)\sum_{d|p_1}\chi_D(d)=\epsilon(p_1)=\left(\frac{-p_2}{p_1}\right)=\chi_{-p_2}(p_1)=\sum_{d|p_1}\chi_{-p_1}(d)\chi_{-p_2}(d).$$

于是我们得到了如下分解

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\epsilon(n)N(n)}{n^s}=\frac{L(s,\chi_{-p_1})L(s,\chi_{-p_2})}{\zeta(2s)}$$

接下来我们只需要使用我们多次提到的类数公式.

$$\frac{L(1,\chi_{-p_1})L(1,\chi_{-p_2})}{\zeta(2)}=\frac{\pi^2}{w_1w_2\sqrt{D}}h(-p_1)h(-p_2)\cdot\frac{6}{\pi^2}=6\cdot\frac{h(-p_1)h(-p_2)}{\sqrt{D}}.$$

通过一番操作之后就得到了

$$\mathbf{v}_l\approx\frac{6l^2}{(l-1)^2(l+1)}h(-p_1)h(-p_2).$$

但这个结果是错的!

正确的答案应该是这个值的2倍.

$$\mathbf{v}_l\approx\frac{12l^2}{(l-1)^2(l+1)}h(-p_1)h(-p_2)$$

思考一下为什么！主项刚好是结果的一半，这并不寻常. 我们说了只有$\epsilon(l)=-1$的l才会有$\mathbf{v}_l\neq 0$，那么$\epsilon(l)=1$的那些素数l呢？$N(d)$变成0了吗，当然不是！但这个时候公式仍然成立. 而这个时候，你就在本来没有$\mathbf{v}_l$的地方凭空

多出了一个$\frac{6l^2}{(l-1)^2(l+1)}h(-p_1)h(-p_2)$. 所以这个$\frac{6l^2}{(l-1)^2(l+1)}h(-p_1)h(-p_2)$是一个$\epsilon(l)$分别为$\pm1$的情形的一个“统计平均值”. [2]

根据这个公式，当$h(-p_1)=h(-p_2)=1$时，$\mathbf{v}_l$当$l=2,3,5,7$的时候应该分别接近于$16,\frac{27}{4}\approx7,\frac{25}{8}\approx3,\frac{49}{24}\approx2$. 当然，前提是$\epsilon(l)=-1$. 这个可以被已经有的计算所验证. 所以这个分解的“外形”与类数$h(-p_1),h(-p_2)$的关系更大，而不是p_1,p_2本身的绝对大小. 以上都是类数为1的例子，也许我们要给出一个类数不为1的例子说服自己计算是可行的. 幸好，Berwick已经帮我们算出了这些j函数的值，我们把所有的验证留作练习题.

习题 7.3. 已知$j(z_{-23})=-125(5\alpha^2+11\alpha+7)^3$，其中$\alpha^3-\alpha-1=0$. 对于$J(-7,-23)$验证上面的分解.

习题的答案.

$$j(z_{-7})-j(z_{-23})=-3375+125(5\alpha^2+11\alpha+7)^3=5^3\cdot7\cdot(5\alpha^2+11\alpha+4)(33\alpha^2+46\alpha+27).$$

由于

$$x=5\alpha^2+11\alpha+4\implies x^2=186\alpha^2+223\alpha+126,x^3=4757\alpha^2+6369\alpha+3665=22x^2+133x+361\implies N(x)=19^2.$$

$$y=33\alpha^2+46\alpha+27\implies y^2=4987\alpha^2+6609\alpha+3765,y^3=727479\alpha^2+963703\alpha+549154=147y^2-170y+289\implies N(y)=17^2.$$

而我们知道

$\lvert x\rvert$	$\frac{7\cdot23-x^2}{4}$	$F(\frac{7\cdot23-x^2}{4})$
1	$2^3\cdot5$	5^4
3	$2\cdot19$	19^2
5	$2\cdot17$	17^2
7	$2^2\cdot7$	7^3
9	$2^2\cdot5$	5^3
11	$2\cdot5$	5^2

这就验证了公式.

以上我们给出了全部计算的细节. 证明虽然不是过于冗长的，但是要占用更多的版面，我们暂且不提.

8 计算入门5：trace的计算与第二恒等式

对于一个代数整数，最常见的与之关联的两个整数，一个是norm，另一个就是trace. 后者的计算出现的晚了一点. 事实上，与第二个类数的恒等式的得出有点关系. 这里的计算也需要一些惊人的注意力. 此时还有一个同样的问题.

（任意）模函数的特殊值天生具有这样类似的特性吗？

对于norm来说我们关注它的分解，这个问题的回答应该是“不是”，你应当关注的是

（任意）模函数的差的norm.

[2]这里我们没有给出这个2倍的证明.

但对于trace我们暂时还不知道应该关心什么. 因为我们似乎看不出什么规律出来. 你可以此时再去看一下第6页的表. 2002年，Zagier又从中看出了规律来. 因为这些系数也与一个模形式q-展开的系数有关！注意到

$$g(\tau)=\theta_1(\tau)\frac{E_4(4\tau)}{\eta(4\tau)^6}=q^{-1}-2+248q^3-492q^4+4119q^7-7256q^8+\cdots$$

是一个权为3/2的亚纯模形式. $\theta_1(\tau)$的定义与θ基本一致，为$\theta_1(\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}$是一个权为2的模形式. E_4和η定义也与之前一致. 毫无疑问上述模形式都是经典的.

现在我们用$B(d)$来表示$g(\tau)$的q-展开中q^d的系数. 那么我们将会得到以下列表.

d	3	4	7	8	11	12	15	16	19	20	23
$B(d)$	248	-492	4119	-7256	33512	-53008	192513	-287244	885480	-1262512	3493982

接下来就是见证奇迹的时刻.

而此时如果我们记$\mathbf{t}(d)=\sum_{Q_{-d}/\Gamma}\frac{J(\alpha_Q)}{w_Q}$. 这里我们颠倒了一下符号改用$d>0$表示一个模4余3或者0的正整数. 那么我们将会看到

$$\mathbf{t}(3)=\frac{0-744}{3}=-248,\mathbf{t}(4)=\frac{1728-744}{2}=492,\mathbf{t}(7)=-3375-744=-4119.$$

再往后看，你将会看到

d	3	4	7	8	11	12	15	16	19	20	23
$\mathbf{t}(d)$	-248	492	-4119	7256	-33512	53008	-192513	287244	-885480	1262512	-3493982

定理 8.1. $g(\tau)=\sum_{d\geq -1}B(d)q^d$的$q$-展开的系数恰好满足

$$\mathbf{t}(d)=-B(d).\forall d>0,d\equiv 0\ or\ 3\pmod 4.$$

直接证明定理8.1的两边相等显然是不明智的. 我们需要使用模形式的技巧. 首先我们先来观察一下. $g(\tau)$是一个3/2权的模形式，并且仅有$d\equiv 0$或者3模4的时候q^d前面的系数才不是0. 这可以推出$g\theta|U_4$是一个权2的模形式，其中U_4是算子$\sum c_nq^n\mapsto\sum c_{4n}q^n$，进而由于其全纯所以就是0. 类似的原因，$[g,\theta]|U_4$也是一个权4的模形式，其中$[g,\theta](\tau)=g'(\tau)\theta(\tau)-3g(\tau)\theta'(\tau)$，因此是$E_4(\tau)$的倍数. 这两个条件可以被写为

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}}B(4n-r^2)=0,\quad\sum_{r\in\mathbb{Z}}r^2B(4n-r^2)=240\sigma_3(n).$$

其中我们假设$\sigma(0)=1/240$. 我们根据这个等式就可以递推计算$B(d)$，比如$B(-1)=240\sigma_3(0)=1$，然后有$B(0)=-2B(-1)=-2,B(3)=240\sigma_3(1)-4B(0)=248,B(4)=-2B(3)-2B(0)=-492$. 那么我们只需要证明如下结果就可以得到定理8.1.

定理 8.2. 对于所有$n\geq 1$有

$$\sum_{|r|<2\sqrt{n}}\mathbf{t}(4n-r^2)=\begin{cases}-4 & if\ n\ is\ \square,\\ 2 & if\ 4n+1\ is\ \square,\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

并且

$$\sum_{1\leq r<2\sqrt{n}}r^2\mathbf{t}(4n-r^2)=-240\sigma_3(n)+\begin{cases}-8n & if\ n\ is\ \square,\\ 4n+1 & if\ 4n+1\ is\ \square,\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

第一个就对应于Hurwitz-Kronecker类数关系，而第二个等式就是我们上次提到的第二个类数满足的关系式. 第二个等式的证明更加复杂，我们同样将不会证明其结论（因为我也不会证明）.

写在最后

我没有系统学过模形式，所以这一段可能写的错漏百出. 本文的内容都源自Zagier原书（≈“抄”），对其理解也完全是按照我自己的手工计算结果，还请读者指正. 对于Gross-Zagier的理论或者代数几何上的解释，我也一概不知，希望读者提供进一步的意见.

参考文献

[1] Gross, Benedict H.; Zagier, Don B. (1984), *"On Singular Moduli"*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1985, 191-220

[2] Zagier, Don B. , *Traces of Singular Moduli*. `https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/tex/TracesSingModuli/fulltext.pdf`

[3] Zagier与Gross的通讯，1983. `https://www.mpim-bonn.mpg.de/webfm_send/144`

[4] Bruinier, Geer, Harder, Zagier (2008), *The 1-2-3 of Modular Forms – Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway*, Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.