Problem 0.1. 对$x \geq z \geq z \geq \geq 1$令$\Psi_0(x,y,z)$为不含$[y,z)$中素因子的整数$n \leq x$的个数。

1. 用*Ératosthène*筛法证明
$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\Psi_0(x,y,z) = \prod_{y<p\leq z}(1-\frac{1}{p}).$$

证明. 显然。 □

2. 用纯粹*Brun*方法证明，存在正绝对常数c，使得对于
$$1 \leq y \leq z \leq e^{c\log x/\log\log x}$$
一致地有$(x\to\infty)$
$$\Psi_0(x,y,z) \sim x\prod_{y<p\leq z}(1-\frac{1}{p}).$$

证明. 令$P = \prod_{y<p\leq z} p$。

不难知道
$$\Psi_0(x,y,z) \leq \sum_{d|P,\omega(d)\leq 2h}\mu(d)[\frac{x}{d}] \leq x\prod_{y<p\leq z}(1-\frac{1}{p}) + R_1 + R_2,$$
其中，
$$R_1 = x\sum_{d|P,\omega(d)>2h}\frac{1}{d}, R_2 = \sum_{d|P,\omega(d)\leq 2h}1.$$
不难证明适当取参数后
$$R_1 + R_2 \ll \frac{x}{(\log z)^3}, z \leq x^{1/10\log\log z}.$$
不断改进h于是这就得到了
$$\Psi_0(x,y,z) = x\prod_{y<p\leq z}(1-\frac{1}{p})(1+O((\log z)^{-2}))$$
对于一切$1 \leq y \leq z \leq x^{1/10\log\log x}$一致地成立。当然，我们为了能够得到对于$x$一致地结果，我们不妨假设$z < \log x$。对于$z < \log x$的情形，我们无需使用Brun筛法便可以解决。
$$\Psi_0(x,y,z) = \sum_{d|P}\mu(d)[\frac{x}{d}] = x\prod_{y<p\leq z}(1-\frac{1}{p}) + O(2^{\pi(z)})$$
$$= x\prod_{p\leq\sqrt{x}}(1-1/p)(1+O(x^{\log 2-1})$$

□

3. 承认素数定理，证明这个结论对于$1 \leq y < z \leq \sqrt{x}$不能一致成立。

证明. 取$y=1, z=\sqrt(x)$。假定素数定理成立我们知道

$$\pi(x)-\pi(\sqrt{x})+1\sim\frac{x}{\log x}.$$

然而，根据Mertens公式我们知道

$$x\prod_{p\le\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})\sim 2e^{-\gamma}\frac{x}{\log x}.$$

□

Problem 0.2. *1. 证明形如n^2+1的素数$p\le x$的个数$S(x)$满足*

$$S(x)\ll\sqrt{x}\prod_{p\le x, p\equiv 1 \pmod 4}(1-\frac{2}{p}).$$

证明. 我们首先来定义一个乘性函数$\rho(d)$为：

$$\rho(2)=1, \rho(2^v)=2(v\ge 2), \rho(p^v)=2(p\equiv 1 \pmod 4), \rho(p^v)=0(p\equiv 3 \pmod 4))$$

这对应于$n^2+1\equiv 0 \pmod d$的解的个数。

选取筛级$z=x^{1/3}$，筛列$\mathcal{A}=\{n^2+1:n\le\sqrt{x-1}$，$\mathcal{P}$为全体素数，根据组合筛法基本引理可以知道

$$S(x)\le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)+z\ll\sqrt{x}\prod_{p\le z, p\equiv 1 \pmod 4}(1-\frac{1}{p})\asymp\prod_{p\le x, p\equiv 1 \pmod 4}(1-\frac{1}{p})$$

最后一处等号又是因为Mertens公式。 □

2. 用Dirichlet定理

$$\sum_{p\le x, p\equiv 1 \pmod 4}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\log\log x+O(1)$$

来计算上式。

证明.

$$S(x)\ll\frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

用此法进一步可以验证殆素数在n^2+1这样的数字中占有与$(1/\log x)$同阶的密度。只需要调整筛级为$x^{1/B}$，但B的最优值我们不再给出（因为我也不会）。这方面我记得Iwaniec最好的改进可以到2。是否有无穷多个n^2+1为素数为公开问题。 □