上次内容的总结：

- 有限群的有限维复表示有很多好的性质，主要体现在：
  1. 所有的表示都是酉表示.
  2. 所有的表示都是不可约表示的直和.
  3. 不可约表示的数量和共轭类的数量一样多.
  4. 不可约表示在酉表示意义下是正交的.
- 特征标唯一刻画了复表示（Frobenius），某种意义上描绘了有限群怎样"生活"在线性空间里.
- 我们提到了一些比较"显然"的表示构造手段，比如直和，张量积，对偶、但有一种比较不平凡而又有显著特征的表示是所谓的置换表示，也就是将群在集合上的作用直接向线性空间转化. 若这个作用 2-transitive，那么去掉一个1维平凡表示后这给出一个不可约表示.

（这是 Serre 书上 17 页的习题）

但一般而言 极大子群给出的对陪集作用仅 primitive，不一定给出 2-transitive 条件.

(例：最小非交换单群 A_5，其一个极大子群是 S_3，指标为10，对应置换表示裂为 $1+4+5$，也可看出这个作用不是 2-transitive，因为这10个"点"是 A_5 自然作用5个点的二元子集形成的"点对"集合！)

对于 A_n/S_n 要寻找 2-transitive 作用可以考虑"点"，而 $L_2(p)$ 这样的群这样的"点"其实是1维子空间（有些书上称之 Steinberg 表示）.

- 还有其他信息可以从特征标表中读出。除了幂零性、可解性、正规子群外，你可能还会见到：

1. 其他有趣的作用对象.（例：$Sp_6(2)$ 有一个7维的不可约表示（除了平凡表示外最小），实际上这是7维的格 E_7，它是 E_8 的一个子格.）
2. 来自其他"世界"的特产.（例：moonshine）
3. 最后一点，特征 p 的特征标表（Brauer 特征表）会更奇特，虽然有的时候和特征0很像.（例：去年暑假时和李思涵讨论后发现的呈等差数列的 $L_2(17)$ 的 char 17 表示维数，不可约的是 1、3、5、7、9、11、13、15、17）.

∘ 特征标并不能区分群！ D_8 和 Q_8 具有完全相同的特征标表，但这并非罕见现象，对于可解群或者更直接地，对于 2-group 这经常发生.

阶	群的同构类数量	特征标表数量
16	14	11
32	51	35
64	267	146
128	2328	904
256	56902	9501

甚至有 256 个互不同构的 256 阶群有着完全相同的特征标表（可能会让你惊讶）.

对于 D_8 和 Q_8，我们有 Schur indicator 还能略加区分，但对于这些 2-group，有所谓的 Brauer pair 现象，此时通过元素的幂次的"记忆"也无法区分它们了. 某种意义上 2-group 这样的例子是反面的极端.

∘ Schur indicator 的注记：我们简单提到了它是可取 +1、0、-1 的东西，用来区分实表示，分别对应于除环为 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$. ind = -1 极少发生，多为前两种情形. ind = 0 者和它的共轭成对出现. 对于奇阶群，由于 $\text{ind} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2)$ 此时即为 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \begin{cases}1, & \chi=1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$，于是除了平凡表示其余 ind 都为 0，这能推出 #共轭类 $\equiv |G| \bmod 16$.（也许可以用来速通你的考试题）

我们这次从上一次最后提到的内容开始，但我要介绍一些其他的东西作铺垫.

1 特征标的性质（作为数字）

在特征0时，对 $\forall g\in G$，$\chi(g)$ 是一个代数整数，因为它是一些单位根之和（对角化表示矩阵），并且若 g 为 m 阶元，则这是一些 m 阶单位根之和.

考虑 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})=\{\eta_i : 1\leqslant i\leqslant m,\ \gcd(i,m)=1\}$,

其中 η_i 为使得 $\eta_i(\zeta_m)=\zeta_m^i$ 的域自同构，事实上这可以延拓到 $\mathbb{C}$ 上，当然我们不需要太多就可以得到

$$\chi(g^j)=\eta_j(\chi(g)),\quad \forall j \text{ s.t. } \gcd(j,m)=1.$$

这可以导出

$$\boxed{\chi(g^p)\equiv\chi(g)^p \mod p},$$ 在 $\mathbb{C}$ 的代数整数环上.

如果 $\chi(g)\in\mathbb{Z}$ 右边还同余于 $\chi(g)$.

后面会用到

我们还不难知道

$$|\chi(g)| \leq \chi(1) \quad \Leftrightarrow \quad \rho(g) \in Z(\rho(G))$$

，换言之 $\rho(g)$ 如同纯量阵作用.

$$\chi(g) = \chi(1) \quad \Leftrightarrow \quad \rho(g) = \mathrm{id}.$$

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$$

（可能上次提及）

接下来我们有一个很有用的结论，设 $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ 是不可约表示，那么 $Z(\mathbb{C}G)$ 其实由形如 $\sum_{g\in C} g$，C 是某个共轭类，这样的元素张成，而 ρ 显然可以延拓为环同态 $\mathbb{C}G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$，那么限制在群代数中心上应给出一些 $Z(\mathrm{End}(V))$ 中元素也就是 $* \cdot \mathrm{id}_V$ 的形式，不难知道对于 $\sum_{g\in C} g$，其像为

$$\boxed{\frac{|C|\,\chi(g)}{\chi(1)}}$$

这是因为 $\sum_{g\in C}\rho(g)$ 的 trace 既是 $* \cdot \chi(1)$，又是 $\chi(g)\cdot|C|$.

表示的 degree

进一步这是 $\boxed{\text{代数整数}}$，因为它落在$Z(\mathbb{Z}G)$这个f.g. $\mathbb{Z}$-模的像中，而$\mathbb{C}$中的f.g. $\mathbb{Z}$-模内的数均是代数整数.（记号略有混淆因为中心Z和整数$\mathbb{Z}$用了一个字母）.

直接推论：上次言而未证的关系：$\chi(1) \mid |G|$，χ不可约

使用行正交关系：

$$|G| = \sum_{C} |C| \, \chi(g)\overline{\chi(g)}$$

$g \in C$为代表元，两边同除以$\chi(1)$.

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = \sum_{C} |C| \cdot \frac{\chi(g)\overline{\chi(g)}}{\chi(1)}$$

代数整数

代数整数

整数（因为已是有理数）.

注：对$\mathbb{R}$或char p不成立.（例：$G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$作用在$\mathbb{R}^2$上）.

接下来我们已经准备好证明 Burnside 定理.

2 应用: Burnside定理.

(Burnside) 形如 p^*q^* 阶群是可解的. (p,q 为素数)

通过归纳法, 只要证 $|G|=p^m q^n$ 时

$$G \text{ 单} \Rightarrow G \text{ 循环}.$$

通过 Sylow 定理可以看出 G 有一个大小为 p^* 的共轭类 ($*\neq 0$).

因此只要证:

G 单, 有一个大小为素数幂的共轭类, 则 G 循环.

Burnside 注意到可以证明以下引理:

若 $\rho: G\to GL(V)$ 为不可约表示, χ 为特征标, C 为一个满足 $\gcd(\chi(1),|C|)=1$ 的共轭类, 那么对 $g\in C$, $\rho(g)\in Z(\rho(G))$ 或 $\chi(g)=0$.

证明: $a\chi(1)+b|C|=1$, $a,b\in\mathbb{Z}$.

两边乘上 $\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$, 得

$$\underbrace{a\chi(g)+\frac{b\chi(g)|C|}{\chi(1)}}_{\text{代数整数}}=\frac{\chi(g)}{\chi(1)} \longleftarrow \text{代数整数}.$$

若 $\left|\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\right| = 1$，那么 $\rho(g) \in Z(\rho(G))$.

若 $\left|\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\right| < 1$. 设 m 为 g 的阶，则 $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\xi_m)$，那么 $c = \prod_{\gamma \in Gal(\mathbb{Q}(\xi_m)/\mathbb{Q})} \gamma\left(\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\right)$

为代数整数且在 Gal 作用下不变，是整数. 但 $\gamma(\chi(g)) = \chi(g^j)$，故 $|c| < 1$，

故 $\chi(g) = 0$ 是唯一可能. 我们开始证明引理，

□

回到 Burnside 定理，设 $|C| = p^k$，取 $1 \neq g \in C$，由于 G 是单群，

$Z(\rho(G)) = 1$ 只要 ρ 是非平凡不可约表示，考虑其对应的特征标 χ. 那么要么

$p \mid \chi(1)$，要么 $\chi(g) = 0$. 故由行正交关系产生矛盾.

$$0 = \sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(g)\chi(1) = \underbrace{1}_{\text{来自平凡表示}} + \underbrace{\sum_{\substack{\chi \in Irr(G) \\ p \mid \chi(1)}} \chi(g)\chi(1)}_{\text{被 } p \text{ 整除}}$$

3 其他构造表示的方法

首先我们来谈张量积. 首先有一个同构:

$$\tau: V\otimes V \longrightarrow V\otimes V$$
$$v_i\otimes v_j \longmapsto v_j\otimes v_i$$

$\tau^2=id_V$ 且由于 char $\neq 2$, 故 τ 可对角化, 因此 V 可以被写成两个特征子空间之和.

$$S^2V=\{x\in V\otimes V : \tau(x)=x\}, \quad \Lambda^2V=\{x\in V\otimes V : \tau(x)=-x\}.$$

事实上这也是子表示. 如果要选取 [redacted] 一组 $\mathbb{C}$-基, 那么 S^2V 的一组基可以是 $\frac{1}{2}(v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i)$ $(i\leq j)$, Λ^2V 的一组基可以是 $\frac{1}{2}(v_i\otimes v_j-v_j\otimes v_i)$ $(i<j)$.

设 v_i 就是 g 作用在 V 上的一组对角基, 且 $g\cdot v_i=\xi_i v_i$.

故
$$g\cdot\frac{1}{2}(v_i\otimes v_j-v_j\otimes v_i)=\xi_i\xi_j\cdot\frac{1}{2}(v_i\otimes v_j-v_j\otimes v_i).$$

$$\chi_{\Lambda^2V}(g)=\sum_{i<j}\xi_i\xi_j=\frac{1}{2}\Big(\big(\sum_i\xi_i\big)^2-\sum_i\xi_i^2\Big)=\frac{1}{2}\left(\chi(g)^2-\chi(g^2)\right).$$

类似可得
$$\chi_{S^2V}(g)=\frac{1}{2}\left(\chi(g)^2+\chi(g^2)\right).$$

注记： 对于 $V^{\otimes m}$ 可能有更复杂的分解，比如

$$V^{\otimes 3} = V^{[3]} \oplus V^{[1^3]} \oplus 2V^{[2,1]}$$

可能特征标长成这样……

$$\chi^{[3]}(g) = \frac{1}{6}\left(\chi(g)^3 + 3\chi(g^2)\chi(g) + 2\chi(g^3)\right),$$

$$\chi^{[1^3]}(g) = \frac{1}{6}\left(\chi(g)^3 - 3\chi(g^2)\chi(g) + 2\chi(g^3)\right),$$

$$\chi^{[2,1]}(g) = \frac{1}{3}\left(\chi(g)^3 - \chi(g^3)\right).$$

这样的公式可以仿照 S_n 的特征标写.（这也是用分拆记号的原因）

这种通过 $\otimes$ 造出的表示通常十分巨大，具有很大的 norm 从而得不到不可约表示. 比如 $\dim V = n$ 时， $\dim S^2V = \frac{1}{2}n(n+1)$， $\dim \Lambda^2 V = \frac{1}{2}n(n-1)$ 已是平方量级， $V^{\otimes 3}$ 拆出的分解则有立方量级的维数，所以并不便直接使用.

较小的时候这里有一个例子. $G = M_{12}$ 是一个可以 5-transitive 作用在 12 个点上的群. 因此可以通过置换表示拆出一个 11 维表示.

这个 11 维表示做 S^2V、Λ^2V 这样的操作后得到 55、54 维的表示，它们是不可约的.（good luck）

拾遗：上次提到的 Schur indicator 也可以用 S^2V 和 Λ^2V 来看.

当 $V\cong V^*$ 时 $(\chi_{V\otimes V},1)=1$，否则为 0（可以直接用 Schur 引理算）.

而 $\chi_{V\otimes V}=\chi_{S^2V}+\chi_{\Lambda^2V}$，故

$$\mathrm{ind}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2)=(\chi_{S^2V}-\chi_{\Lambda^2V},1)=\begin{cases}1, & (\chi_{S^2V},1)=1\\ 0, & V\not\cong V^*\\ -1, & (\chi_{\Lambda^2V},1)=-1\end{cases}$$

换言之 ind = 1 $\Leftrightarrow$ V 上有对称双线性型

ind = 0 $\Leftrightarrow$ NONE

ind = −1 $\Leftrightarrow$ V 上有反对称双线性型

故另一种看法是，Schur indicator 在尝试分类 V 上的双线性型.

接下来我们介绍诱导表示。由于这一段非我讲述，我将只陈述基本事实，不会涉及大部分概念。

如果给定群同态 $H \to G$，那么一个 G-表示自然可以看成一个 H-表示。当 H 是 G 的子群时，这种方式被称为限制 Res，做法就是复合映射。

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[rr, bend right, dashed, "H\text{-rep.}"'] & G \arrow[r, "G\text{-rep.}"] & GL(V) \end{tikzcd}$$

现在问题是，如果有一个 H 的表示，如何得到 G 的表示？答案是我们可以这么做，采用某种类似 $\boxed{\text{伴随函子}}$ 的手段（no details here）。比如记

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}H & & \mathbb{C}G \\ \| & & \| \\ R & \longrightarrow & S \end{array}$$

，那么可以有 $W \to \mathrm{Hom}_R(S, W)$ 或 $W \to S \otimes_R W$ 两种伴随

因此有两种被称为诱导表示（induced rep.），分别是 $\begin{cases} \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(\mathbb{C}G, W) \end{cases}$

如果 $H \subset G$ 且 $[G:H] < \infty$ 那么 $\boxed{\mathbb{C}G \text{ 是 f.g. 自由 } \mathbb{C}H \text{ 模}}$ 所以两者典范同构。

此时它表现良好，因为两种伴随等价，所以通过同调代数的一些知识你会得到正合性
所以我们不用担心任何事情.

(对于担心的人可以看下面一部分，不担心的人可以跳过.)

若 H 不是 G 子群，有同调代数中经典反例.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \to & 1 \\ \| & & \| \\ H & & G \\ \| & & \\ \langle\sigma\rangle & & \\ \sigma^2=1 & & \end{array}$$

那么 $W \to \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$，这事实上得到了 $\dfrac{W}{(1-\sigma)W}$.

而 $W \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(\mathbb{C}G, W)$，这事实上得到了 W 在 σ 作用下不动子空间.

二者可以不同，经典反例是 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ 这个正合列，我们设 σ 以 (-1) 乘的方式作用在两个 $\mathbb{Z}$ 上.

$W \to \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$ 作用下：

$$\overset{\text{NOT INTO}}{\boxed{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

$W \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(\mathbb{C}G, W)$ 作用下：

$$0 \to 0 \to \underset{\text{NOT ONTO}}{\boxed{0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}}$$

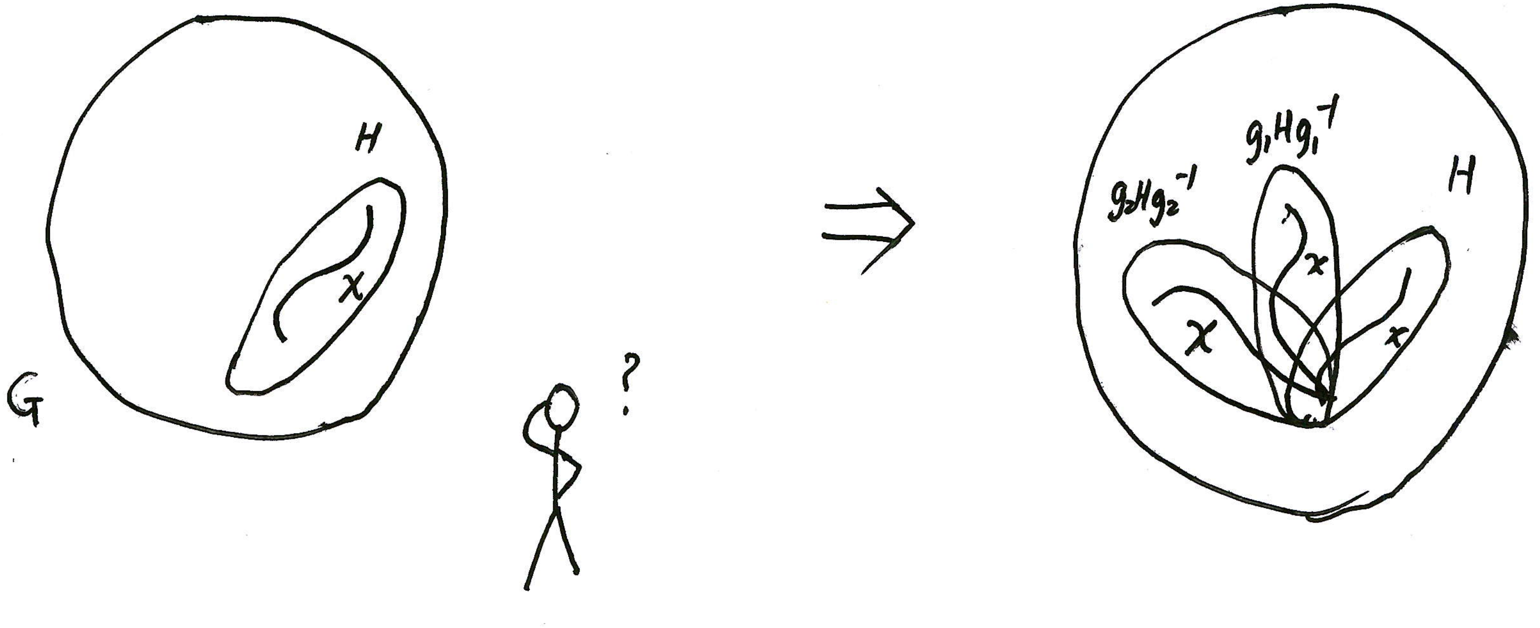
我们得到了某种(上)同调的衍生物.

(跳过部分结束)

我们现在需要一个计算诱导表示的特征标的公式，我将直接给出一个便于想象的方法帮助你记住它，但是关于细节，以及其他性质的证明，

it will be left to next speaker. ☺

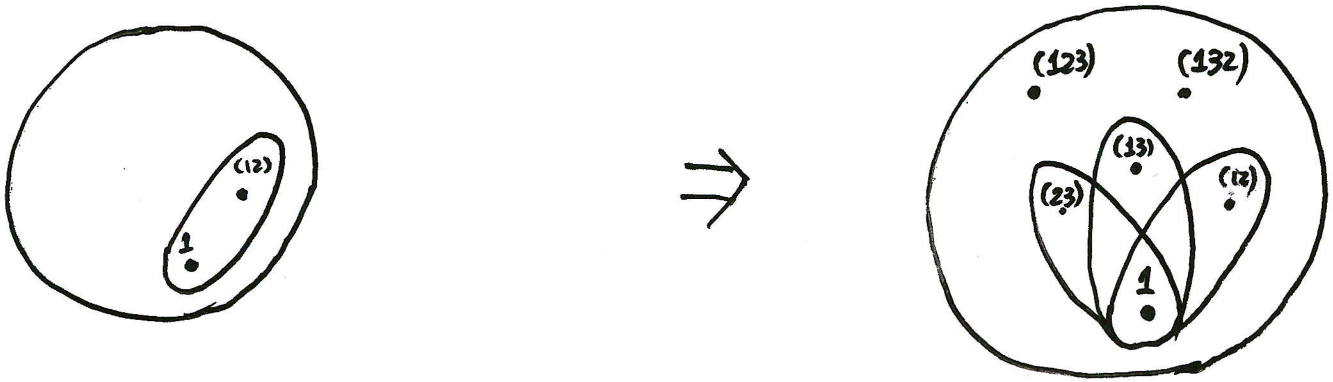
我们说过，特征标其实是某种类函数（class function），在一个共轭类上取值相同。那么从一个“小群”的类函数“过渡”到“大群”的类函数，某种意义上我们需要将其在“大群”中共轭，旋转一下，再加起来得到一个“大群”的类函数。这可能要选取一组完整的陪集代表元，但显然与选取是无关的。（no details, since ——）

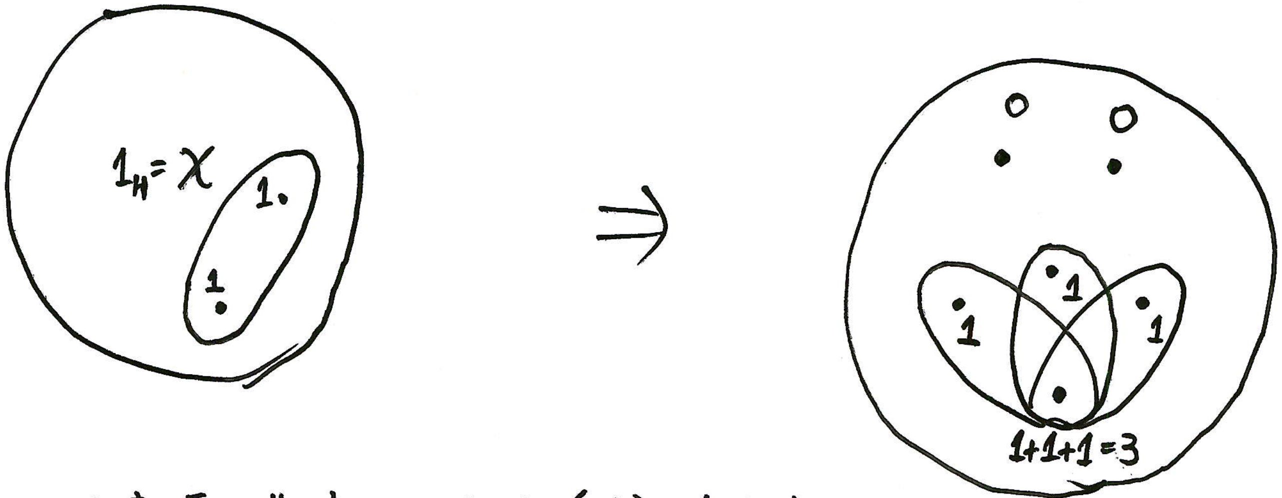


Ind χ's IMAGE

（原谅我的绘图…）

最简单的例子： $G = S_3$.　$H = C_2 \subset S_3$，比如 $H = \langle (12) \rangle$，我们想诱导 1_H.

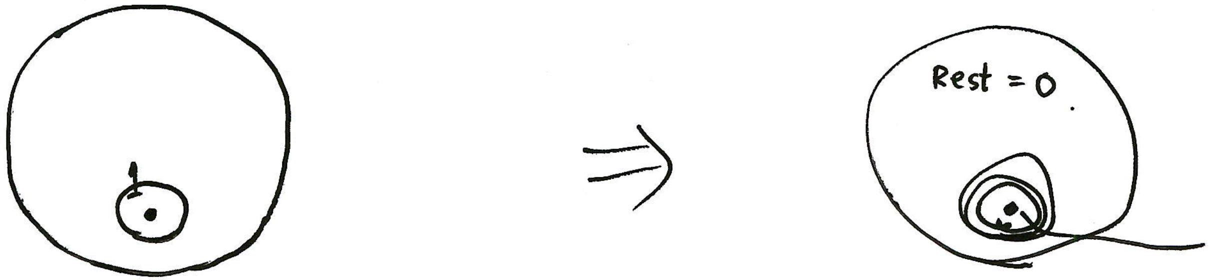




Ind χ:

1A	2A	3A
3	1	0

正则表示其实也可以看成诱导表示，不过诱导的是平凡子群的1维表示罢了（如图）.



$1+1+1+\cdots+1 = |G|$.

4 计算I： A_5 和 $L_3(2) \simeq L_2(7)$，known construction.

我们用上面的方式，将会显式构造两个最小的非交换单群的特征标表。A_5 的5维表示上次我们已经在一个10维置换表示分解中看到，但对群论更熟悉的人可能知道 $A_5 \simeq L_2(5)$，所以其实作用在6个点上，或者也可以观察到 A_5 有6个 Sylow 5-子群从而显式写出这个作用不用那个同构。但今天我想做的是，

利用 S^2V、Λ^2V、Ind 这样的工具构造未知表示。

A_5 的共轭类如下： （箭头代表 $g \mapsto g^2$ 方向）

	60	4	3	5	5
	1A	2A	3A	5A	5B
有一个平凡表示，χ_1	1	1	1	1	1
	$[1^5]$	$[2^2,1]$	$[3,1^2]$	$[5_A]$	$[5_B]$
通过置换表示，拆出置换表示的一个4维子表示，数不动点数-1，χ_V	4	0	1	-1	-1

这些数字是 centraliser 大小，之所以不写共轭类大小纯粹是出于方便，$|C| = \frac{|G|}{|\text{centraliser}|}$ 在 $|G|$ 大的时候对很多共轭类太大了（如果你不是写 Abel 群特征标表或者二面体群特征标表的疯子）

为了算 S^2V、Λ^2V 特征标，需要记住 $g \mapsto g^2$ 对共轭类的影响。

	60	4	3	5	5
	1A	2A	3A	5A	5B
χ_1	1	1	1	1	1
$\chi_V=\chi_4$	4	0	1	-1	-1
~~χ_{S^2V}~~	~~10~~	~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~χ_{Λ^2V}~~	~~6~~	~~-2~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
$\chi_{S^2V}-\chi_V-\chi_1 = \chi_5$	5	1	-1	0	0
χ_2	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt5}{2}$	$\frac{1-\sqrt5}{2}$
χ_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt5}{2}$	$\frac{1+\sqrt5}{2}$

最后，χ_2 和 χ_3 的特征标中出现了无理数，这会不好直接构造，这时我们利用正交性，可以确定余下的系数.

注记：S^2V 这里确定和点对的10维表示字面上对应，如果你尝试诱导表示Ind，你会得到Pieri规则的类似物，而像两个特征标乘起来如何分解，这是Littlewood-Richardson规则.

使用公式

$$\chi_{S^2V}(g)=\frac{1}{2}\left(\chi(g^2)+\chi(g)^2\right)$$

$$\chi_{\Lambda^2V}(g)=\frac{1}{2}\left(-\chi(g^2)+\chi(g)^2\right)$$

可得.（计算练习）

而 $(\chi_{S^2V},\chi_1)=(\chi_{S^2V},\chi_V)=1$

故应考虑 S^2V 子表示，特征标形如 $\chi_5=\chi_{S^2V}-\chi_V-\chi_1$，这是不可约的，因为其norm $(\chi_5,\chi_5)=1$.（计算练习）

而 $(\chi_{\Lambda^2V},\chi_{\Lambda^2V})=2$，norm为2说明

$\chi_{\Lambda^2V}=\chi_2+\chi_3$ 其中 χ_2,χ_3 不可约，但由于列正交性，我们知道必须有 $\dim\chi_2=\dim\chi_3=3$，事实上这时有表示的分裂（split）现象，一个较大的群的不可约表示限制下来不是不可约的. 其实在 $S_5=A_5.2$ 里，5A和5B是一个共轭类，所以共轭类也发生了分裂.

$L_3(2) \simeq L_2(7)$ 有两种书写方式，我们都将其写出．做法是利用矩阵的 Jordan 标准型．

注意，$L_2(7)$ 是 $PSL_2(7)$ 的缩写，也就是 $PSL_2(7) \simeq SL_2(7)/\{\pm I\}$，所以两个矩阵差一个负号对应同一个元素．

	168	8	3	4	7	7
	1A	2A	3A	4A	7A	7B
rep. as $L_2(7)$	$\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}2+2i&\\&2-2i\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$
rep. as $L_3(2)$	$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\&\omega&\\&&\omega^2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha&&\\&\alpha^2&\\&&\alpha^2+\alpha\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha+1&&\\&\alpha^2+1&\\&&\alpha^2+\alpha+1\end{pmatrix}$

$i^2+1=0$

i in $\mathbb{F}_{49}$

$\omega^2+\omega+1=0$

$\omega \in \mathbb{F}_4$.

$\alpha^3+\alpha+1=0$

$\alpha \in \mathbb{F}_8$

$\pm\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $\pm\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ 看似具有同样的 Jordan 标准型，但在 $L_2(7)$ 中它们不共轭．

当然，Jordan 标准型是代数闭域中的模型，$L_2(7)$ 中没有 $\pm\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$，但我不喜欢有理标准型（你可以试着挑一个真正的代表元）．

$L_3(2)$ 中要小心：$1=-1$．

（如果你对有限域不熟悉，就把它们想象成某种形式上的记号，就像 $\sqrt{2}$ 表示 $x^2-2=0$ 的根）

和之前一样，由于我们可以将 1 维子空间当作“点”，虽然 $L_3(2)$ 也可以作用在 2 维子空间上，但这只是 3 维空间里 1 维子空间的对偶，可以看出二者给出相同的表示．这时候注意到 $\mathbb{F}_7^2$ 有 8 个 1 维子空间而 $\mathbb{F}_2^3$ 有 7 个 1 维子空间．

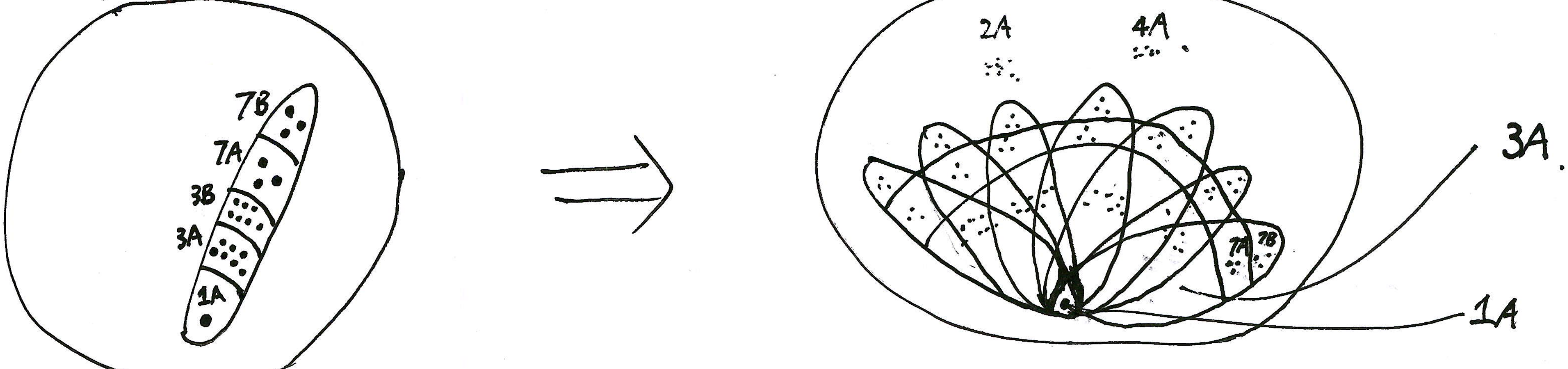
	1A	2A	3A	4A	7A	7B	
	168	8	3	4	7	7	
χ_1	1	1	1	1	1	1	
χ_4	6	2	0	0	-1	-1	由7个点作用给出
χ_5	7	-1	1	-1	0	0	由8个点作用给出
χ_6	8	0	-1	0	1	1	诱导表示
χ_2	3	-1	0	1	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	split
χ_3	3	-1	0	1	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	

所以这给出了7维和6维的不可约表示，这是因为使用线性代数可以给出转移矩阵，验证 2-transitive.（如果你考虑的是4维空间里的2维子空间，这个方法失效，因为两个2维子空间之交可能0维也可能1维（若不同）。但这时仍 primitive）

接下来写特征标仍 = #不动点 − 1. 这里的不动点是不变子空间. 但要注意，你应当是基域上的向量.

我们注意到 $L_3(2)\simeq L_2(7)$ 可以作用在8个点上，

考虑极大子群 7:3，它是某个点的稳定子群，我们希望将它的一个特征标诱导为整个群的特征标. 我们有两种选择，一个是平凡特征标，一个是那个 C_3 部分的1维特征标.（虽然还有3维特征标，但难写一点也太大了）如果用之前的图示，大致是这样：



7:3 里有两个3阶元共轭类，放在 $L_3(2)\simeq L_2(7)$ 都是同一个，所以诱导时两者都有贡献，但7阶元不是如此。如果诱导的是 χ:

1	3A	3B	7A	7B
1	ω^2	ω	1	1

，ω 为3次单位根，那么 $\mathrm{Ind}\,\chi(3A)=\omega^2+\omega=-1$，$\mathrm{Ind}\,\chi(7A)=\mathrm{Ind}\,\chi(7B)=1$。此时得到的 χ_6:

1A	2A	3A	4A	7A	7B
8	0	-1	0	1	1

的确不可约，若你选择了平凡表示来诱导，则结果为 χ':

1A	2A	3A	4A	7A	7B
8	0	2	0	1	1

全是正数和0，与 χ_1 不可能正交所以肯定不是不可约的，仔细计算得 [redacted] $\chi'=\chi_1+\chi_5$.

注意到还剩下两个特征标，它们的计算和 A_5 中展示的一样，需要将一个 $PGL_2(7)\simeq PSL_2(7).2$ 中的表示裂成两块，也可以用正交性计算。

注记：所谓的 $GL_2(p)$ 或者 $GL_2(q)$ 的表示理论经常出现在标准教科书中。这里的讨论已经是一种雏形，唯一与教科书不同之处在于我进行了"欺骗"。$GL_2(p)$ 中有一个巨大的 $(p-1)$ 维表示的 suit 被称为尖表示 (cuspidal rep.)，如果要"显式"构造它，可能需要辛群中 Weil 表示构造的技巧，等等，总之还没有出现在我们的工具库里。但对于 $L_2(7)$，由于它与 $L_3(2)$ 的例外同构，这可以被视为置换表示构造出的表示。所谓的"例外"一词来源于事实，它们似乎只在较小的维度和特定的基域中发生。

(另外，我们的记号 7:3 是 $C_7\rtimes C_3$ 这个半直积记号的另一种写法，因为 $\rtimes$ 太繁琐了)

5 计算 II：如何计算 M_{11} 的特征标表？（假设你完全不懂有限群论）

在介绍这节前，我们先给出一种哲学。有一些用来计算群的特征标表的算法，可以按照一定的方式工作，这里的方式往往需要：

- 你知道这个群 G 的一些元素，并了解它们对应的共轭类。
- 甚至你要知道一些 G 中的乘法信息，这里我想说的是所谓的 multiplication coefficients.

但是，一些很大的群（比如大魔群 M），其特征标表并非如此算出来的，事实上，完全不同。甚至于，这些群本身的构造比计算它们的特征标表还困难。（这会让人有点哲学上的不安，你不知道这是不是一个群，怎么可以谈论它的"特征标表"！）往往在实际中，我们只要知道这个群 G 的阶 $|G|$，加上某些 centralizer 的信息，就足以确定特征标表，甚至在群的存在性被证明之前。

我们不能在此手算和 M 那么大的群的特征标表因为那对于人手来说过于困难。我们选取最小的散在单群，也就是 Mathieu 群 M_{11}。我们将只用到如下事实：

M_{11} 是一个可迁作用在11个点上的，7920阶的单群。（这里的作用实际上是4-transitive的，但我们只要知道它可迁就可以了）

首先，根据 Jordan 的定理，一个作用在 11 个点上的可迁子群，若有一个元素形如 $(5,1^6)$ 作用，那么它必为 A_{11} 或 S_{11}. 故 M_{11} 的 Sylow 5-子群必由两个 5-循环乘积的元素（形如 $(5^2,1)$）生成，故在 A_{11} 中 centralizer 大小为 25，因而在 M_{11} 中 self-centralizing（$25 \nmid 7920$）. 而 S_{11} 中的 Sylow 11-子群也 self-centralizing，故 M_{11} 中也是如此.

接下来我们仅仅假定 G 是一个满足以下条件的有限群：

$$\boxed{|G| = 7920, \quad C_G(P_{11}) = P_{11}, \quad C_G(P_5) = P_5.}$$

其中可以说本质上用到最多的信息就是 $|G| = 7920$.（P_p 表示 G 的一个 Sylow p-子群）

KEY IDEA:

$\boxed{\text{列正交关系 + 同余关系}}$ 对特定共轭类的特征标加以限制.

[redacted]

这里我们选取的就是 11阶元和5阶元.

注记：Jordan 这个定理我没听过，但并不困难也不是重点.

首先 $N_G(P_{11})/C_G(P_{11}) \le \mathrm{Aut}(P_{11}) \simeq C_{10}$. 由Sylow第三定理，可得 $|N_G(P_{11})|=55$（如果你还记得，Sylow第三定理是说，由于Sylow p-子群都共轭，故其数量为 $\frac{|G|}{|N_G(P_p)|}$，Sylow第三定理断言这是一个模p余1的整数（本质上第一定理是它的推论）），故G中的11阶元裂成两个共轭类，记为11A、11B，并且 11B (11A) 实际上包含 11A (resp., 11B) 中元素的平方和逆. 对5阶元用同样的论证得 $|N_G(P_5)|=20$，因而5阶元仅为一个共轭类，记为5A. 重复第1节中的论证，考虑Galois作用后有：

对所有G中的特征标，在5A这个共轭类中取有理值，而在 11A (11B) 中取 $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ 中的值. 考虑11A和11B的正交性，至少有一对特征标在 11A (11B) 中取值为复共轭且非实数.

由于5A和1A的正交性，应恰有5个G中特征标在5A上不为0，这是因为 $\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \chi(5A)^2 = 5$，故或为5个1或为 $1+2^2$，但有一个1一定对应于平凡表示 χ_1. 进一步，如果你还记得，由于 $\chi(5A)$ 是一个整数，

$$\boxed{\chi(5A) \equiv \chi(1) \bmod 5}$$

对于 11A，由于 $\sum\limits_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} |\chi(11A)|^2 = 11$，故若设那一对非实数特征标为 $c,\bar{c}$，那么

由于左边至少为 $\underbrace{1}_{\text{来自平凡表示}}+2|c|^2+\underbrace{*}_{\substack{\text{其他}\chi\\ |\chi(11A)|^2}}$，故 $|c|^2\leq 5$. 考虑 $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ 中 norm ≤ 5 的代数整数，知 $c\in\left\{\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}\right\}$ 并且一定 $|c|^2=3$. 而 $1+2\cdot 3=7$，还差 4，此时不可能还剩其他的非实数特征标对了，只能是 5 个 $+1$ 或 -1 或者 1 个 $+2$ 或 -2，加上一系列为 0 项. 我们也有：$\boxed{\chi(11A)\equiv\chi(1) \mod 11}$.

接下来我们要：

- 列出已知的 $\chi(11A)$ 的可能：$\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$、$\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$、$1$、$-1$、$2$、$-2$、$0$.
- 寻找对应于各可能的 $\chi(11A)$ 的 $\chi(1)$ 的可能值，注意到还有限制：

$$\chi(1)^2\leq \underset{\substack{\shortparallel\\ 7920}}{|G|},\quad \chi(1)\,\Big|\,\underset{\substack{\shortparallel\\ 7920}}{|G|},\quad \chi(1)\equiv\chi(11A) \mod 11,\quad \chi(1)\equiv\chi(5A) \mod 5$$

因而 $\chi(1)\equiv\pm 1, 0 \mod 5$.

- $\chi(1) \mod 5$ 得 $\chi(5A)$.

这样得到大表.

$\chi(11A)$	$\chi(1)$	$\chi(5A)$
$\frac{1\pm\sqrt{11}}{2}$	6	1
$\frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$	5 16 60	0 1 0
1	1 45	1 0
-1	10	0
2	24	-1
-2	9 20	-1 0
0	11 44 55 66	1 -1 0 1

接下来使用还未用到的两个正交性，分别是 1A 和 11A 的正交，11A 和 5A 的正交.

（略去大量的 tedious calculation）

最后得到了这样的表格.

	1A	5A	11A	11B
χ_1	1	1	1	1
χ_2	10	0	-1	-1
χ_3	10	0	-1	-1
χ_4	10	0	-1	-1
χ_5	11	1	0	0
χ_6	16	1	c	$\bar{c}$
χ_7	16	1	$\bar{c}$	c
χ_8	44	-1	0	0
χ_9	45	0	1	1
χ_{10}	55	0	0	0

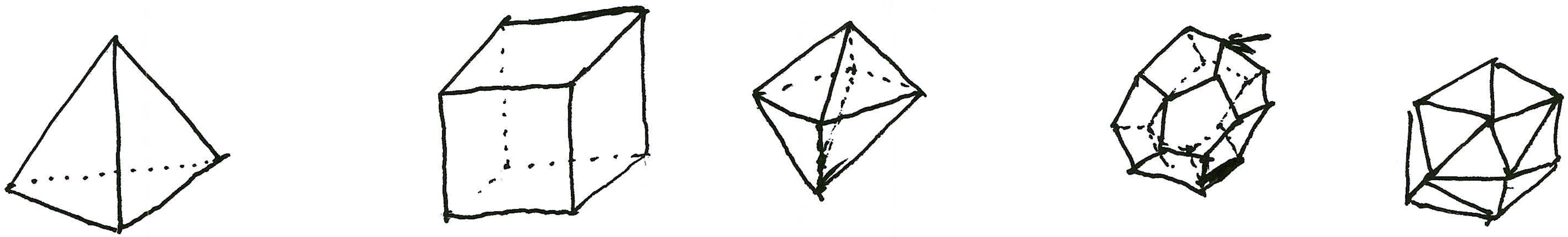
后续的计算还能继续，大致接下来要猛攻 2 阶元也就是 involution，最后写出各个 χ_i 在其上的值，最后慢慢填起整个表（我想没人想继续看）

$\left(c = \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)$

最后得到的表可以在ATLAS中查到，我不会写出.

补记： 1. 一个我听到的故事是，Conway计算了Leech lattice的自同构群，得到了一个阶是 8315553613086720000 的群，他认为也许这个群或商掉 $\{\pm1\}$ 是单群，然后他打电话给Thompson告诉了他这个群的阶，然后Thompson二十分钟回了电话说他是对的.

2. 一个有趣的事情是，如果你考虑 $SL_2(\mathbb{C})$ 的子群，换言之是有2维忠实表示的群，如果限制在有限群上，自然你只要考虑 SU_2 的子群（都是酉表示），但 $SU_2/\{\pm1\} \cong SO_3(\mathbb{R})$，所以以人类的"实数"视角看它们更像3维世界里的群. 其分类与李代数里的ADE还是什么东西，不重要，有关系. 有循环的、二面体的，还有你熟知的 SO_3 里的几个怪物.



A_4 S_4 A_5

当然，$SU_2/\{\pm 1\} = SO_3$，所以其实你需要它们的二重覆叠.（A_5 当然没有2维表示，如果你还记得）. 在 Lux & Pahlings 172页的一个习题是：

G 为 perfect group，$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 忠实且 $\chi(1)=2$. 证明 $Z(G) \cong C_2$ 且 $G/Z(G) \cong A_5$.

当然你可以尝试写出 $2\text{-}A_5$ 的特征标表，你会发现，χ 的 ind $= -1$.

（是的，我说了 ind $= -1$ 很少见，但对于二重覆叠来说情况通常相反.）

3. $\chi(1) \mid |G|$ 有加强版：$\chi(1) \mid [G:Z(G)]$，此定理可见 Serre 的书.

但 Ito 有更强的定理：若 N 为 G 的 Abel 正规子群，$\chi(1) \mid [G:N]$.

THANK YOU

ywy 72

2025/4/6 18:22