Proposition 0.1 (于品讲义p.305).

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

不是关于x的初等函数。

1 原函数的初等表示:理论基础

1.1 基本工具：Liouville定理

我们将要使用的主要工具是Liouville的一个的定理，这是纯代数的结果。

Theorem 1.1 (Liouville). *假设 K 是一个初等函数域，$f \in K$，那么存在初等函数 F 使得 $F' = f$ 当且仅当存在常数 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{C}$，存在函数 $R_0, R_1, \cdots, R_m \in K$，使得*

$$f = R_0' + \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{R_k'}{R_k}.$$

通过这个定理我们可以得到如下推论。

Corollary 1.2. *假设 $f, g \in \mathbb{C}(X)$ 是有理函数，那么函数 $f(x)e^{g(x)}$ 具有初等的原函数当且仅当存在有理函数 $R \in \mathbb{C}(X)$ 使得*

$$R' + g'R = f.$$

1.2 Liouville定理的应用方法

在讲义中上述推论的证明分为几个部分。我们将会在$K = \mathbb{C}(x, e^g)$=$\mathbb{C}(X, Y)$中工作。

此处于品讲义上对记号也没有特别说明但有必要指出接下来有时将$\mathbb{C}(X, Y)$仅仅视为分式域有的时候又使用了$Y = e^{g(x)}$这一条件。

于是有

$$f(x)e^{g(x)} = R_0'(x, e^{g(x)}) + \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{R_k'(x, e^{g(x)})}{R_k(x, e^{g(x)})},$$

其中 $R_k(X, Y) = \dfrac{P_k(X, Y)}{Q_k(X, Y)}$，这里 P_k 和 Q_k 是 $\mathbb{C}$-系数的二元多项式。给定一个二元的多项式 $P(X, Y)$，我们通过将它写成

$$P(X, Y) = p_n(X)Y^n + \cdots + p_1(X)Y + p_0(X)$$

在第一个部分里，我们可以利用$\mathbb{C}(X)[Y]$的性质假定诸$R_k(X, Y)$是不可约多项式。

在第二个部分里，我们可以利用$e^{g(x)}$的自身性质来证明$f(x)$和$e^{g(x)}$是代数无关的，换言之

$$P(x, e^{g(x)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(X, Y) \equiv 0,$$

在第三个部分里我们要分析相应的由代数无关性给出的方程，并通过对其结构的分析来逐步得到$R_k(X, Y)$的具体形状。

具体的证明过程于品讲义上有因此在此不再叙述，我们重点在于把其证明分解为必要的三个步骤，接下来我们也会模仿其证明的结构。

2 对数版本的推论的相关证明

2.1 证明概述

我们想要证明的新的推论如下。

Corollary 2.1. 假设 $f \in \mathbb{C}(X)$ 是有理函数，那么函数 $\frac{f(x)}{\log x}$ 具有初等的原函数当且仅当存在复常数c使得

$$f(x) = \frac{c}{x}$$

看起来这个推论和上一个推论从形式上看不是很像但是我们仍然会按照相似的步骤去进行考虑。

证明的第一部分可以说是完全相同的，因为并没有用到所谓的Y的性质，只不过把在于品讲义中的那个指数版本的推论中出现的$e^{g(x)}$替换为了$\log x$。

对于证明的第二部分，本来看起来我们需要证明有关于$\log x$的一个代数无关的定理，但是因为我们有了指数版本的代数无关的定理，所以我们省去了不少麻烦。

因为我们有

$$P(x, e^x) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(X, Y) \equiv 0,$$

所以我们有

$$P(x, \log x) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(X, Y) \equiv 0,$$

对于证明的第三个部分，我们要分析由代数无关性给出的方程，这也是证明里唯一需要讨论的部分。

2.2 第三部分的证明

我们在这一部分里首先给出相应的由代数无关性给出的方程，然后分析其可能的解。我们引入如下的记号。

$$\begin{aligned} D(R_k(X,Y)) &= D(Y^N + \sum_{\ell<N} r_\ell(X) Y^\ell) \\ &= \big(\frac{N}{X} + r_{N-1}(X)'\big) Y^{N-1} + \sum_{0<\ell<N} \big(\frac{r_\ell(X)'}{X} + r_{\ell-1}(X)\big) Y^{\ell-1}. \end{aligned}$$

证明. 我们需要分析如下方程。

$$\frac{f(X)}{Y} - \frac{D(P(X,Y))Q(X,Y) - P(X,Y)D(P(X,Y))}{Q(X,Y)^2} + \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{D(R_k(X,Y))}{R_k(X,Y)} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (\star)$$

由于诸$R_k(X,Y)$ 是不可约的，并且$R_k(X,Y)$的Y-次数高于$D(R_k(X,Y))$，因此不可被约去。为了消去分母，我们若寄希望于$\frac{f(X)}{Y}$,那么立刻要有

$$R_k(X,Y) = Y, D(R_k(X,Y)) = \frac{1}{X}$$

否则，我们只能寄希望于$\dfrac{D(P)Q - PD(Q)}{Q^2}$这一项。

然而，如果假设$Q(X,Y)=R_k(X,Y)^s\widetilde{Q}(X,Y)$，其中 $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，$\widetilde{Q}(X,Y)$（以及 $P(X,Y)$）和 $R_k(X,Y)$ 互素，那么

$$\begin{aligned}\frac{D(P)Q-PD(Q)}{Q^2}&=\frac{D(P)}{R_k^s\widetilde{Q}}-\frac{P}{R_k^{2s}\widetilde{Q}^2}\big(sR_k^{s-1}D(R_k)\widetilde{Q}+R_k^sD(\widetilde{Q})\big)\\&=\underbrace{\frac{D(P)}{R_k^s\widetilde{Q}}-\frac{PD(\widetilde{Q})}{R_k^s\widetilde{Q}^2}}_{\text{分母上贡献了 } R_k^t \text{ 的项，其中 } t\leqslant s}-\frac{sP\widetilde{Q}D(R_k)}{R_k^{s+1}}\end{aligned}$$

此时，最后一项在分母上贡献了 R_k 的因子是 $s+1\geqslant 2$ 是最高的，这是不能消去的。

故我们可以直接假设

$$R_k(X,Y)=Y,D(R_k(X,Y))=\frac{1}{X}$$

成立，那么乍一看很恐怖的R_k那一串化简之后只剩一项就是

$$-c\frac{1}{XY}$$

那么将$Q(X,Y)$分解为不可约多项式的乘积，同理Q也只能是Y。

故我们得到

$$\frac{f(X)}{Y}-\frac{D(P)Y-\frac{P}{X}}{Y^2}-c\frac{1}{XY}=0$$

那么得到$P=0$与

$$f(X)=\frac{c}{X}$$

这就证得了结论。

□

3 进一步的讨论

3.1 第一个副产品：$\frac{\sin x}{x}$的原函数非初等

Proposition 3.1 (于品讲义p.305).

$$\int\frac{\sin x}{x}dx$$

不是关于x的初等函数。

证明. 我们只需使用上面的推论。

通过变量替换(如何替换留作习题)，我们可以得到$\frac{\sin x}{x}$具有初等的原函数当且仅当

$$\int\frac{1-\frac{1}{t^2}}{\log t}dt$$

是初等函数，而这与上面的推论矛盾。 □

3.2 进一步的推论

读者也许会尝试证明如下命题：

Proposition 3.2. *假设 $f, g \in \mathbb{C}(X)$ 是有理函数，那么函数 $\frac{f(x)}{\log g(x)}$ 具有初等的原函数当且仅当存在复常数c使得*

$$f(x) = \frac{cg'(x)}{g(x)}$$

当然这个命题本身无法再由指数版本的代数无关性直接推出来。因为一般来说一个多项式的根甚至不能由根式求出来了。因此我们可能会想到根据代数基本定理，$\log g(x)$可以被写为$\log(x-\alpha_i)$的线性组合，其中$\alpha_i \in \mathbb{C}$ 那么我们需要证明这里存在一个超越扩张。当然我们这里可以利用对数函数的性质来做到这一点，这给出了一个不同的证明方式。[1] 事实上我们可以证明更强的引理而不仅仅是证明$\log g(x)$是超越的。

Lemma 3.3 (对数版本的代数无关性引理)**.** *假定我们在多域$K = \mathbb{C}(x, \log(x-\alpha_1), \log(x-\alpha_2), \ldots, \log(x-\alpha_n))$中工作,其中诸$\alpha_i \in \mathbb{C}$是不同的,那么不存在$K$上非平凡多项式使得其在$\log(x-\beta)$处对一切$x \in \mathbb{C}$恒等于零。其中$\beta$ 是一个与诸α_i不同的数。(这里的取值映射可以看作是在一个更大的域里面进行的操作)*

证明. 用反证法，我们假定这个非平凡多项式对应的恒等式为

$$\log(x-\beta)^N + \sum_{\ell<N} r_\ell(X)(\log(x-\beta))^\ell \equiv 0$$

把它改写成

$$\log(x-\beta) \equiv -\sum_{\ell<N} r_\ell(X)(\log(x-\beta))^{\ell-N+1}$$

β 是等式左边的函数的极点，而不是等式右边的函数的极点，矛盾。 □

之后我们只需要将符号稍作变换，用$\frac{g'(X)}{g(X)}$替换$\frac{1}{x}$，其余部分可以全盘照抄上面的讨论。具体的细节留给读者补充（其实一开始我证明的就是这个版本）。

[1]我们有必要指出，此处我们不严格地处理了一些细节，对数函数作为复函数是多值的，但这并不影响我们的讨论。