**Riccati方程解的爆破时间** 本题考虑Riccati方程初值问题

$$y' = x^2 + y^2, y(0) = \alpha$$

的解$y_\alpha$. 我们的目标是证明下面的结果：

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists b_\alpha > 0, \text{s.t.} y_\alpha$ 在 $[0, b_\alpha)$ 上存在，并且满足

$$\lim_{x \to b_\alpha -} y_\alpha(x) = +\infty.$$

此外$b_\alpha$关于$\alpha \in \mathbb{R}$严格递减.

1. 证明，对于任意的$\alpha > 0$，存在$b_\alpha$使得上述初值问题的解$y_\alpha$存在，并且满足

$$\lim_{x \to b_\alpha -} y_\alpha(x) = +\infty.$$

证明. 考虑初值问题

$$y' = y^2, y(0) = \alpha$$

的解. 不难看出其解应当为$y_\alpha^*(x) = \frac{1}{1/\alpha - x}$. 根据比较定理，$y_\alpha > y_\alpha^*$应当在$y_\alpha(x)$在0右侧的存在区间上成立. 由于$y_\alpha^*(x)$在0右侧存在区间为$[0, 1/\alpha)$，由于根据Picard定理显然$y_\alpha$在某个0的邻域上存在，故根据延伸定理存在$0 < b_\alpha \leq 1/\alpha$满足要求. □

2. 证明，$\frac{\pi}{4} \leq b_1 \leq 1$.

证明. 已经证明得到了$b_1 \leq 1$，下面证明$b_1 \geq \frac{\pi}{4}$. 仍然使用比较定理. 在$(x, y) \in (0, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R}$上我们知道$x^2 + y^2 \leq y^2 + (\frac{\pi}{4})^2$，而初值问题

$$y' = y^2 + (\frac{\pi}{4})^2, y(0) = 1$$

的解为

$$\phi(x) = \tan(\frac{\pi x}{4} + \arctan(\frac{4}{\pi})) \cdot \frac{\pi}{4}.$$

然而，

$$(\frac{\pi}{4})^2 + \arctan(\frac{4}{\pi}) = 1.52187285 < 1.57079633 = \frac{\pi}{2}.$$

因此事实上$\phi(x)$在$x \in (0, \frac{\pi}{4})$上有限，故$1 \leq y_1(x) \leq \phi(x)$在其上也有限. □

3. 证明，$\lim_{\alpha \to +\infty} b_\alpha = 0$.

证明. 证明更精确的结论. 假设我们希望证明

$$b_\alpha \geq \frac{C}{\alpha}.$$

考虑初值问题

$$y' = \frac{C^2}{\alpha^2} + y^2, y(0) = \alpha,$$

它的解为

$$\psi(x) = \frac{C}{\alpha} \tan(\frac{Cx}{\alpha} + \arctan \frac{\alpha^2}{C}).$$

接下来我们假设

$$\arctan \frac{\alpha^2}{C} + \frac{C^2}{\alpha^2} < \frac{\pi}{2}.$$

注意到

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + O(x^{-5}). \quad (x \to \infty)$$

因此

$$\arctan\frac{\alpha^2}{C}+\frac{C^2}{\alpha^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{C^2-C}{\alpha^2}+O_C(\frac{1}{\alpha^6}).$$

故先固定$0<C<1$时假设成立，然后再让$\alpha\to\infty$，$\psi(x)$在$[0,\frac{C}{\alpha}]$上是有限的. 根据比较定理，$b_\alpha\geq\frac{C}{\alpha}$ 对$0<C<1$和充分大的$\alpha$都成立.

$$\varliminf_{\alpha\to\infty} b_\alpha\cdot\alpha\geq 1.$$

而根据第1题的结论，

$$b_\alpha\leq\frac{1}{\alpha}.$$

于是我们有

$$b_\alpha=\frac{1}{\alpha}+o(\frac{1}{\alpha}).$$

□

4. 考虑如下方程

$$u''+x^2u=0.$$

假设$u(x)\in C^2(\mathbb{R})$是方程的解且满足$(u(0),u'(0))\neq(0,0)$，那么存在相空间上的坐标表示，即$\exists\rho(x)\in C^2(\mathbb{R}),\theta(x)\in C^2(\mathbb{R})$ s.t.

$$u(x)=\rho(x)\sin\theta(x),u'(x)=\rho(x)\cos\theta(x).$$

且$\theta(0)\in[0,\pi)$（你不需要证明这一点）. 证明$\theta(x)$满足

$$\theta'=1+(x^2-1)\sin^2\theta.$$

证明. 注意到

$$u'(x)=(\rho(x)\sin\theta(x))'=\rho'(x)\sin\theta(x)+\rho(x)\cos\theta(x)\theta'(x)=\rho\cos\theta(x).$$

$$u''(x)=(\rho(x)\cos\theta(x))'=-\rho(x)\sin\theta(x)\theta'(x)+\rho'(x)\cos\theta(x)=-x^2\cdot u(x)=-x^2\rho(x)\sin\theta(x)$$

第一条方程乘以$\cos\theta$与第二条方程乘以$\sin\theta$相减，得到

$$\rho\cdot(\theta'-\cos^2\theta-x^2\sin^2\theta)=0.$$

如果$\rho(x_0)=0$对某个$x_0$成立，那么$u(x_0)=u'(x_0)=0$对某个$x_0$成立,，那么那么根据Picard定理$u\equiv u'\equiv 0$. 故$\rho$恒不为0，故可以得到

$$\theta'=1+(x^2-1)\sin^2\theta.$$

□

5. 证明对于任意$\theta_0\in[0,\pi)$，初值问题

$$\theta'=1+(x^2-1)\sin^2\theta,\theta(0)=\theta_0$$

的解在$[0,\infty)$上存在. 并且对于任意的$A>\theta_0$，存在$x>0$ s.t. $\theta(x)=A$.

证明. 首先要证得解在$[0,\infty)$上的存在性. 由解的延伸定理，对区域$D=[0,a]\times\mathbb{R}$使用解的延伸定理，可以得到或者解可以延伸到$x=a$上，或者$\exists b\leq a$ s.t. $\theta(x)$在$[0,b)$上存在，且

$$|\lim_{x\to b-}\theta(x)|=+\infty.$$

而若$b \le 1$

$$\theta_0 \le \lim_{x\to b-}\theta(x) \le \theta_0 + b.$$

而$b > 1$时

$$\theta_0 + \frac{1}{3} \le \lim_{x\to b-}\theta(x) \le \theta_0 + 1 + \frac{b^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

这不可能. 所以前者成立，即解在$[0,a]$上存在，那么解在$[0,\infty)$上存在. $x \ge 1$时$\theta'(x) \ge 1$，故$x \in [1,\infty)$上$\theta(x)$单调递增，且$\lim_{x\to\infty}\theta(x) = +\infty$. 故对任意$A \in [\theta(1), +\infty)$结论成立，对于$x \in [0,1]$，它可取遍$[\min\{\theta(0),\theta(1)\}, \max\{\theta(0),\theta(1)\}]$中的值. □

6. 假设$\theta_1(x)$和$\theta_2(x)$分别是方程的解，初值满足$0 \le \theta_1(0) < \theta_2(0) < \pi$. 记它们第一次达到$\pi$的时间分别为$x_1$和$x_2$，即

$$x_i = \inf\{x > 0 : \theta_i(x) = \pi\}, \quad i = 1, 2.$$

证明，$x_1 > x_2$.

证明. 我们只需要证明$\theta_2(x) > \theta_1(x)$对于$x \in [0,\infty)$恒成立. 由于$\theta_2(0) > \theta_1(0)$，假如不是这样，那么$\exists \bar{x}$ s.t. $\theta_2(\bar{x}) = \theta_1(\bar{x})$，那么根据Picard定理，$\theta_2(x) \equiv \theta_1(x)$，产生矛盾. □

7. 对于$\alpha \in \mathbb{R}$，记$u_\alpha(x)$为初值问题

$$u'' + x^2 u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -\alpha$$

的解. 并且记

$$x_\alpha = \inf\{x > 0 : u_\alpha(x) = 0\},$$

为$u_\alpha(x)$在$\mathbb{R}_{>0}$上的第一个零点. 证明$x_\alpha < +\infty$.

证明. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$我们都能得到一个$\theta_0 \in (0,\pi)$满足$\sin\theta(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \cos\theta(0) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. 对$A = \pi$使用第5题结论即可. □

8. 证明，如果$\alpha_1 < \alpha_2$，那么$x_{\alpha_1} > x_{\alpha_2}$.

证明. $\alpha_1 < \alpha_2$时显然$\theta_1(0) > \theta_2(0)$. 再使用第6题结论. □

9. 证明，$-\frac{u_\alpha'(x)}{u_\alpha(x)}$是初值问题

$$y' = x^2 + y^2, y(0) = \alpha$$

的解. 即当$0 \le x < x_\alpha$时，$y_\alpha(x) = -\frac{u_\alpha'(x)}{u_\alpha(x)}$.

证明. 不难算得$y_\alpha(0) = -\frac{u_\alpha'(0)}{u_\alpha(0)} = \alpha$. 且

$$y_\alpha' = \frac{-u_\alpha'' u_\alpha + (u_\alpha')^2}{u_\alpha^2} = \frac{(u_\alpha')^2}{u_\alpha^2} + x^2 = y_\alpha^2 + x^2.$$

□

10. 证明开头说的结果.

证明. 对于$\alpha > 0$的我们的结果已经得到了证明. $\alpha \le 0$时，对应的$\theta(0) \in (0, \frac{\pi}{2}]$. 再次使用第7题的结果，可以知道，存在$x_\alpha = \inf\{x > 0 : u_\alpha(x) = 0\}$. 那么我们知道$y_\alpha$在0的右侧的存在区间是$[0, x_\alpha)$. □

11. 设$w(x)$是初值问题

$$u'' + x^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

的解，记

$$c = \inf\{x > 0 : u_\alpha(x) = 0\}$$

为$w(x)$在$\mathbb{R}_{>0}$上的第一个零点. 证明，$0 < c < +\infty$，并且

$$\lim_{\alpha \to -\infty} b_\alpha = c.$$

证明. 当$\alpha \to -\infty$时，注意到$b_\alpha$单调递增. 而根据上述结果，$b_\alpha = x_\alpha$. 注意到这个问题的解对应着的$\theta(0) = 0$. 再根据第6题的结果，不难知道$b_\alpha < c$. 故极限存在且小于等于$c$. 再在$[0, c]$区间上，根据解对初值的连续依赖性，对任意$\epsilon > 0$存在$\alpha < 0$ s.t. $\forall 0 < \theta_0 < \delta$ s.t. $|\theta(x, \theta_0) - \eta(x)| < \epsilon, \forall x \in [0, c]$. 其中$\theta(x, \theta_0)$为问题在$\theta(0) = \theta_0$这个条件下的解，$\eta(x)$为问题在$\theta(0) = 0$这个条件下的解. 那么$\pi \geq \theta(b_\alpha, \theta_0) \geq \pi - \epsilon$. 注意到根据第5题的结果$\eta(2.5) \leq 2.75 < \pi$. 故$c > 2.5$. 由于$x \in [1, c]$上均有$\theta'(x, \theta_0) \geq 1$，那么就必然有$0 < c - b_\alpha < \epsilon$. 令$\epsilon \to 0$就可以得到

$$\lim_{\alpha \to -\infty} b_\alpha = c.$$

□

## 非自治系统的稳定性

1. 设常数$a > 0, f(t, y), \partial f / \partial y$关于$(t, y) \in [0, \infty) \times (-k, k)$连续，$k$是一个常数. 并且$f$关于$0 \leq t < \infty$一致成立

$$f(t, y) = o(|y|), \quad |y| \to 0.$$

设$b(t)$关于$0 \leq t < \infty$连续，并且$\lim_{t \to \infty} b(t) = 0$. 如果$t_0$充分大. 证明，存在$\delta > 0$ s.t. $\forall |y_0| < \delta$，方程

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b(t)y + f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

的解$y = y(t)$在$[t_0, \infty)$上存在，且始终满足$\lim_{t \to \infty} |y(t)| = 0$.

证明. 取$t_0$充分大 s.t. $\forall t > t_0, |b(t)| < \frac{a}{3}$. 再取$\delta > 0$ s.t. $|f(t, y)| < \frac{a}{3}|y|, |y| < \delta$. 考虑方程以$y(t_0) = y_0$为初值的解，其中$|y_0| < \delta$. 在存在区间且$|y| < \delta$的时间内有

$$\frac{dy}{dt} = -ay(t) + b(t)y(t) + f(t, y(t)).$$

即

$$e^{at} y(t) = e^{at_0} y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{as} (b(s)y(s) + f(s, y(s))) ds.$$

故

$$e^{at} |y(t)| \leq e^{at_0} |y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} e^{as} (\frac{a}{3}|y(s)| + \frac{a}{3}|y(s)|) ds.$$

根据Gronwall不等式

$$e^{at} |y(t)| \leq e^{at_0} |y_0| e^{\frac{2}{3}a(t - t_0)}$$

故

$$|y(t)| \leq |y_0| e^{\frac{1}{3}a(t_0 - t)}.$$

于是可以看出$y(t)$在$[t_0, \infty)$上存在，且始终满足$|y(t)| < \infty$. □

2. 设$n$阶常数矩阵$A$的所有特征值的实部都小于$\alpha \in \mathbb{R}$，设$\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$是一个$[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$上的向量值连续函数，并且满足

$$|\mathbf{g}(t, y)| \leq h(t)|\mathbf{y}|.$$

其中$h(t)$是一个$[0, \infty)$上的连续函数，证明方程

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$$

的任一解$\mathbf{y}(t)$满足估计

$$|\mathbf{y}(t)| \leq C|\mathbf{y}(0)|e^{\alpha t + CH(t)},$$

其中$H(t) = \int_0^t h(s)ds, C > 0$是一个与解$\mathbf{y}(t)$无关的常数.

证明. 不难知道

$$\|e^{At}\| \leq Ce^{\alpha t}.$$

原式可以化为积分方程

$$e^{-At}\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{-As}\mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s))ds.$$

故

$$|\mathbf{y}(t)| \leq Ce^{\alpha t}|\,\mathbf{y}(0)| + \int_0^t Ce^{\alpha(t-s)}h(s)|\,\mathbf{y}(s)|ds.$$

两边同时除以$e^{\alpha t}$得到

$$e^{-\alpha t}|\,\mathbf{y}(t)| \leq C|\,\mathbf{y}(0)| + \int_0^t Ch(s)(e^{-\alpha s}|\,\mathbf{y}(s)|)ds.$$

由Gronwall不等式知道

$$|\,\mathbf{y}(t)| \leq C|\,\mathbf{y}(0)|e^{\alpha t + CH(t)}.$$

□

3. 设$n$阶常数矩阵$A$的所有特征值都有负的实部，$n$阶矩阵$B(t)$在$[0, \infty)$上连续，且满足

$$\int_0^\infty \|B(t) - A\|dt < \infty.$$

证明，方程组

$$\frac{d\,\mathbf{x}}{dt} = B(t)\,\mathbf{x}$$

的零解渐近稳定.

证明. 取$\mathbf{g}(t, x) = (B(t) - A)\,\mathbf{x}, h(t) = \|B(t) - A\|$，利用第2题的结果有

$$|x(t)| \leq C|x(0)|e^{\alpha t + CH(t)}.$$

注意到$\alpha < 0$且$H(t)$是有界的，所以$x(t) \to 0$. □