高斯概率密度估计

假设 $\{X_i\}_{i=1\sim N} \in C$

X_i 是一维：

$$p(x|c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma}}$$

$$u = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (X_i - u)^2$$

假设 x_i 是多维高斯分布 (d维)

$$p(x|C) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-u)^T \Sigma^{-1} (x-u)\right]$$

待求参数：$\underset{d\times d}{\Sigma}$ ， $\underset{d\times 1}{u}$

(协方差矩阵)

已知 $\{X_i\}_{i=1\sim N}$，求 Σ 和 u

构造目标函数 (极大似然法 Maximum Likelihood)

$$E(u,\Sigma) = \sum_{i=1}^{N} \ln p(x_i|C)$$

假设① 所有 $\{X_i\}_{i=1\sim N}$ 独立同分布 (i.i.d)

②设定 u, Σ, 使 $\{X_i\}_{i=1\sim N}$ 概率最大

$$E(u,\Sigma) = -\frac{Nd}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-u)^T \Sigma^{-1}(x_i-u)$$

$$2 \sum_{i=1} (x_i - u) \Sigma \; (x_i \ldots$$

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - u)\right) = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial \Sigma} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial (\Sigma^{-1})} \Rightarrow$$

$$\frac{N}{2}\Sigma^{T} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - u)(x_i - u)^T = 0$$

$$\Rightarrow \Sigma^{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - u)(x_i - u)^T$$

$$\Downarrow$$

$$\Sigma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - u)(x_i - u)^T$$

得到: $u = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ (均值 u)

$\Sigma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - u)(x_i - u)^T$ (协方差矩阵 Σ)

① 假设 X 的概率分布的具体形式 $p(X|C)$. 在这个具体形式中有一些待定参数

② 用极大似然法构造优化目标函数

③ 解 ② 中优化问题 获得待求参数.