

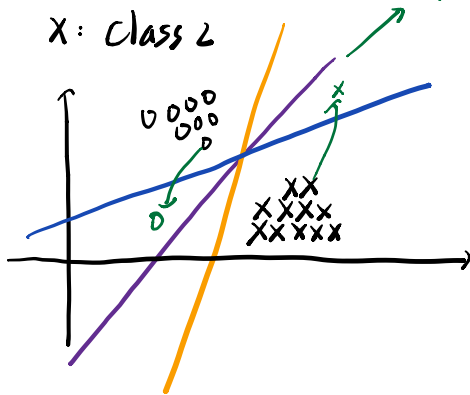
支持向量机 (Support Vector Machine)

Vapnik

① 线性模型

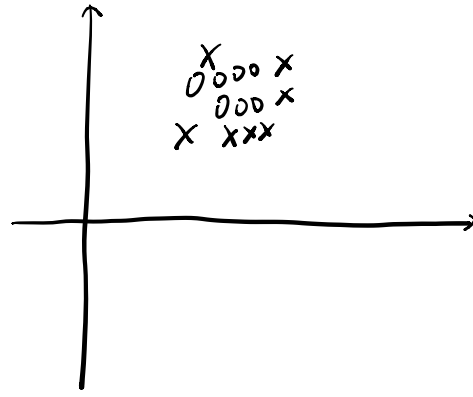
0: Class 1

X: Class 2



线性可分

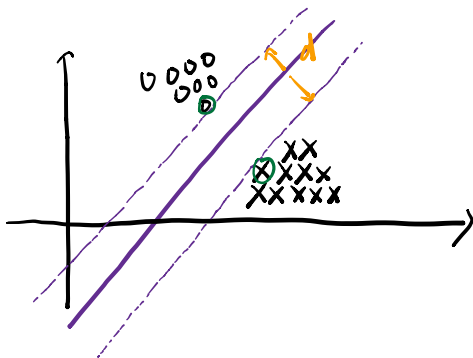
(Linear Separable)



非线性可分

(Non-linear Separable)

Vapnik:



d : 间隔 (Margin)

将平行线擦到的向量叫 **支持向量** (Support Vector)

定义:

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{bmatrix}$$

① 训练数据及标签 $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$

\downarrow 向量 \downarrow 标签

$$y_i = +1 \text{ 或 } -1$$

② 线性模型: (w, b) $w^T x + b = 0$

\downarrow 向量 \downarrow 常数

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

超平面 / Hyperplane

③ 一个训练集 **线性可分** 是指

$$\{(x_i, y_i) \mid i=1 \sim n\}$$

$\exists w, b$ 使得:

对 $\forall i=1 \sim n$ 有:

④. 若 $y_i = +1$ 则 $w^T x_i + b \geq 0$

⑤. 若 $y_i = -1$ 则 $w^T x_i + b < 0$ (公式1)

$$y_i [w^T x_i + b] \geq 0$$

优化问题: (凸优化问题—二次归约问题)

最小化 (Minimize):

$$\|w\|^2 = w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2$$

限制条件 (Subject to):

$$y_i [w^T x_i + b] \geq 1 \quad (i=1 \sim n)$$

改成 $\geq 1/n$

事实1: $w^T x + b = 0$ 与 $a w^T x + a b = 0$ 是同平面

$$a \in \mathbb{R}^+$$

若 (w, b) 满足公式1 则 (aw, ab) 也满足公式1

事实2: 点到平面距离公式

$$\text{平面: } w_1x + w_2y + b = 0$$

则 (x_0, y_0) 到此平面距离:

$$d = \frac{|w_1x_0 + w_2y_0 + b|}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$$

向量 x_0 到超平面 $w^T x + b = 0$ 的距离

$$d = \frac{|w^T x_0 + b|}{\|w\|}$$

我们可以用 a 去缩放 $(w, b) \rightarrow (aw, ab)$

最终使在支持向量 x_0 上有 $|w^T x_0 + b| = 1$

此时: 支持向量与平面的距离 $d = \frac{1}{\|w\|}$

二次规划问题 (Quadratic Programming)

① 目标函数 (Object Function) 二次项

② 限制条件 - 一次项

(要么无解)
(要么只有一个极值)

