

# Tesina

Edoardo Annunziata – Scuola Superiore

42 ottobre 2015

## 1 Notazione bra-ket

### 1.1 Definizioni e proprietà

In un sistema meccanico classico, la determinazione di tutti i gradi di libertà fornisce una conoscenza completa del sistema stesso, ovvero la possibilità di calcolare lo stato del sistema in ogni istante di tempo, presente, passato o futuro. In meccanica quantistica, generalmente, ciò non è possibile: eseguendo più volte la misurazione della medesima grandezza fisica non è impossibile rilevare valori diversi. La descrizione più accurata che possiamo dare di un sistema è dunque di tipo *probabilistico*.

Sia  $\mathbb{C}^n$  lo spazio vettoriale dei vettori di numeri complessi  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto interno definito da:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i a_i^* b_i \quad (1)$$

Notiamo che  $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  è uno *spazio di Hilbert*. Sia  $\psi \in \mathcal{H}$  un vettore. Se  $\psi$  ha norma unitaria, ovvero se

$$\langle \psi, \psi \rangle = 1$$

allora  $\psi$  rappresenta uno *stato* del sistema fisico, e lo indichiamo  $|\psi\rangle$ . La richiesta che ciascuno dei vettori che consideriamo abbia norma 1 sarà, come vedremo, fondamentale per l'interpretazione probabilistica degli stati quantici. Chiamiamo un vettore di questo tipo *ket*. Sia ora per ogni  $\varphi \in \mathcal{H}$   $f_\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  la funzione tale che

$$f_\varphi(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle \quad (2)$$

È facile verificare che:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{H} \quad f_\varphi(\alpha + \beta) = f_\varphi(\alpha) + f_\varphi(\beta) \quad (3)$$

$$\forall \alpha \in \mathcal{H}, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad f_\varphi(\lambda \alpha) = \lambda f_\varphi(\alpha) \quad (4)$$

Questo significa che per ogni scelta di  $\varphi$ ,  $f_\varphi$  è un funzionale lineare da  $\mathcal{H}$  a  $\mathbb{C}$ ; indicheremo un funzionale lineare così costruito con la notazione  $\langle \varphi |$  e lo

chiameremo *bra*. L'insieme di tutti i *bra* costituisce lo spazio duale  $\mathcal{H}^*$  di  $\mathcal{H}$ . Adottiamo le seguenti abbreviazioni sintattiche:

$$\langle \varphi | (|\psi\rangle) = (\langle \varphi |) |\psi\rangle \stackrel{def}{=} \langle \varphi | \psi \rangle \quad (5)$$

La precedente notazione è, per definizione, il prodotto interno dei vettori  $\varphi$  e  $\psi$ , che equivale ovviamente ad un numero complesso. Considerare i *bra* ed i *ket* come entità distinte<sup>1</sup> ha il vantaggio di facilitare la manipolazione delle espressioni algebriche lineari.

Infatti, è facile verificare che, per linearità:

$$\langle \varphi | (c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle) = c_1 \langle \varphi | \psi_1 \rangle + c_2 \langle \varphi | \psi_2 \rangle \quad (6)$$

Analogamente, secondo le usuali definizioni di somma e moltiplicazione per scalare dei funzionali lineari nello spazio duale, si ha che:

$$(c_1 \langle \varphi_1 | + c_2 \langle \varphi_2 |) |\psi\rangle = c_1 \langle \varphi_1 | \psi \rangle + c_2 \langle \varphi_2 | \psi \rangle \quad (7)$$

È altrettanto immediato che:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle^* \quad (8)$$

Inoltre, per definizione:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (9)$$

Se  $|\psi\rangle$  è un *ket* e  $\langle \varphi |$  è un *bra* possiamo definire un prodotto esterno<sup>2</sup>, che denotiamo con  $|\psi\rangle \langle \varphi |$  come l'operatore lineare tale che:

$$(|\psi\rangle \langle \varphi |) (\alpha) = \langle \varphi | \alpha \rangle |\psi\rangle \quad (10)$$

Per la definizione precedente, notiamo che:

$$(|\varphi\rangle \langle \psi |) (|\chi\rangle) = (|\varphi\rangle) (\langle \psi | \chi \rangle) \quad (11)$$

Per cui adotteremo l'abbreviazione sintattica

$$|\varphi\rangle \langle \psi | \chi \rangle$$

per entrambe. Analogamente, si deve avere

$$(\langle \varphi |) (|\psi\rangle \langle \chi |) = \langle \varphi | \psi \rangle (\langle \chi |) \quad (12)$$

perché se applicate al vettore  $\langle \zeta |$  entrambe restituiscono il numero:

$$\langle \varphi | \psi \rangle \langle \chi | \zeta \rangle$$

---

<sup>1</sup>Questa notazione è stata introdotta dal fisico teorico inglese Paul Dirac nel 1939, e viene pertanto talvolta chiamata notazione di Dirac.

<sup>2</sup>I prodotti interno ed esterno sono talvolta chiamati in letteratura con i nomi *prodotto bra-ket* e *prodotto ket-bra* per via dei *bra* e *ket* giustapposti utilizzati per denotarli.

Per cui ometteremo le parentesi scrivendo:

$$\langle \varphi | \psi \rangle \langle \chi |$$

Dalla (11) e dalla (12) deriva che il prodotto interno ed il prodotto esterno hanno associatività mista, ovvero:

$$\langle \varphi | (| \psi \rangle \langle \chi | \zeta) \rangle = (\langle \varphi | \psi \rangle \langle \chi |) | \zeta \rangle \quad (13)$$

## 1.2 Stato generico e sovrapposizione di stati

Consideriamo una grandezza fisica  $G$  la cui misurazione fornisce i valori discreti  $S = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . È un postulato della teoria che a  $G$  sia associato un operatore  $\hat{G}$  sullo spazio  $\mathcal{H}$ , lineare ed autoaggiunto, ovvero tale che

$$\left( \langle \varphi | \hat{G} \right) | \psi \rangle = \langle \varphi | \left( \hat{G} | \psi \rangle \right) \stackrel{def}{=} \langle \varphi | \hat{G} | \psi \rangle \quad (14)$$

Notiamo che per qualsiasi operatore autoaggiunto  $\hat{S}$  deve valere:

$$\hat{S} | \psi \rangle = | \varphi \rangle \iff \langle \psi | \hat{S} = \langle \varphi | \quad (15)$$

Infatti:

$$\langle \psi | \hat{S} = \langle \varphi | \iff \langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \iff \langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \varphi \rangle \quad (16)$$

Ma interpretando  $\langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle$  come  $\left( \langle \psi | \hat{S} \right) | \psi \rangle$ :

$$\langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle = \langle \hat{S} \psi, \psi \rangle = \langle \psi, \hat{S} \psi \rangle^* = \langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle^* \quad (17)$$

A questo punto, sostituiamo la (17) nella (16):

$$\langle \psi | \hat{S} = \langle \varphi | \iff \langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle \iff \hat{S} | \psi \rangle = | \varphi \rangle \quad (18)$$

che è quello che volevamo dimostrare. Inoltre, analizzando la (17), scopriamo un altro fatto interessante, ovvero che se  $\hat{S}$  è un operatore autoaggiunto, allora  $\langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle$  è un numero reale, nessun numero complesso non reale può essere infatti uguale al suo coniugato.

Con un argomento analogo possiamo dimostrare in generale che se  $\hat{S}$  è un operatore, non necessariamente autoaggiunto, allora se  $\hat{S}^\dagger$  è il suo aggiunto, ovvero il vettore tale che:

$$\left( \langle \varphi | \hat{S} \right) | \psi \rangle = \langle \varphi | \left( \hat{S}^\dagger | \psi \rangle \right) \quad (19)$$

allora:

$$\hat{S} | \psi \rangle = | \varphi \rangle \iff \langle \psi | \hat{S}^\dagger = \langle \varphi | \quad (20)$$

Per il teorema spettrale, deve esistere una base  $B$  di  $\mathcal{H}$  che sia ortonormale e composta da autovettori di  $G$ . Si può supporre che  $G$  sia stato scelto

in maniera tale che gli autovalori associati agli autovettori in  $B$  siano gli elementi di  $S$ . In tal caso, indichiamo gli autovettori corrispondenti a  $g_1, g_2, \dots, g_n$  con  $|g_1\rangle, |g_2\rangle, \dots, |g_n\rangle$ . Siamo autorizzati a supporre che tali autovettori siano *ket* perché se costituiscono una base ortonormale devono necessariamente avere norma unitaria.

Consistentemente con la loro natura di grandezze fisiche, i  $g_i$  devono essere tutti reali. Per dimostrarlo, scriviamo l'equazione agli autovalori:

$$\hat{G} |g_i\rangle = g_i |g_i\rangle \quad (21)$$

e consideriamola applicata a  $\langle g_i|$ . Otteniamo:

$$\langle g_i | \hat{G} | g_i \rangle = \langle g_i | g_i \rangle g_i \quad (22)$$

Ma per quanto detto prima  $\langle g_i | \hat{G} | g_i \rangle \in \mathbb{R}$ , quindi, siccome

$$\langle g_i | g_i \rangle = 1$$

anche  $g_i \in \mathbb{R}$ , come volevamo dimostrare.

Il fatto che  $B = (|g_1\rangle, |g_2\rangle, \dots, |g_n\rangle)$  sia ortonormale si può scrivere sinteticamente come:

$$\langle g_i | g_j \rangle = \delta_{ij} \quad (23)$$

Dove:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (24)$$

Uno stato quantico generico, espresso sotto forma di un *ket*  $|\psi\rangle$ , può dunque essere scritto nella forma:

$$|\psi\rangle = c_1 |g_1\rangle + c_2 |g_2\rangle + \dots = \sum_i c_i |g_i\rangle \quad (25)$$

Dove i coefficienti  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  dipendono dallo stato che stiamo considerando. La (25) può essere riscritta in una maniera più suggestiva che, come vedremo, consente una singolare interpretazione dal punto di vista fisico. Prendiamo uno dei *ket*  $|g_k\rangle$  e consideriamo il suo duale  $\langle g_k|$ . Applicando  $\langle g_k|$  ad entrambi i termini otteniamo:

$$\langle g_k | (|\psi\rangle) = \langle g_k | \left( \sum_i c_i |g_i\rangle \right) \quad (26)$$

Per la (6) abbiamo:

$$\langle g_k | \psi \rangle = \sum_i c_i \langle g_k | g_i \rangle \quad (27)$$

Che per la (23) diventa:

$$\langle g_k | \psi \rangle = c_k \quad (28)$$

A questo punto, per ogni  $k$ , sostituiamo la (28) nella (25). Abbiamo:

$$|\psi\rangle = |g_1\rangle \langle g_1 | \psi \rangle + |g_2\rangle \langle g_2 | \psi \rangle + \dots = \sum_i |g_i\rangle \langle g_i | \psi \rangle \quad (29)$$

Possiamo ottenere una interessante conclusione applicando  $\langle \psi |$  alla (29). Si ha infatti:

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | g_i \rangle \langle g_i | \psi \rangle \quad (30)$$

Ovvero, per la (8):

$$\sum_i |\langle g_i | \psi \rangle|^2 = 1 \quad (31)$$

Vista la relazione di dualità intercorrente tra i *ket* ed i *bra*, possiamo aspettarci di ottenere una relazione simile alla (29) che coinvolga i *bra* invece dei *ket*. Consideriamo un *bra* generico  $\langle \varphi |$ , ed applichiamo ad entrambi i lati dell'uguaglianza. Si ha:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_i (\langle \varphi | g_i \rangle \langle g_i | \psi \rangle) \quad (32)$$

Per linearità possiamo riscrivere la precedente come:

$$\langle \varphi | (|\psi\rangle) = \left( \sum_i \langle \varphi | g_i \rangle \langle g_i | \right) (|\psi\rangle) \quad (33)$$

Il termine in sommatoria nella (33) è un *bra* moltiplicato per uno scalare, dunque esso stesso un *bra*. Dal momento che la relazione espressa dalla (29) è generale e valida per un qualsiasi scelta di  $|\psi\rangle$ , anche la (33) deve valere per ogni  $|\psi\rangle$ . Ma questo significa che i due funzionali lineari

$$\langle \varphi |$$

e

$$\sum_i \langle \varphi | g_i \rangle \langle g_i |$$

assumono il medesimo valore se applicati sullo stesso vettore, e devono pertanto essere uguali. Possiamo quindi scrivere:

$$\langle \psi | = \langle \psi | g_1 \rangle \langle g_1 | + \langle \psi | g_2 \rangle \langle g_2 | + \dots = \sum_i \langle \psi | g_i \rangle \langle g_i | \quad (34)$$

Confrontando la (29) e la (34), possiamo verificare che i coefficienti di  $|\psi\rangle$  nella base  $B = (|g_1\rangle, |g_2\rangle, \dots |g_n\rangle)$  sono i complessi coniugati dei corrispondenti coefficienti di  $\langle \psi |$  nella base duale  $B^*$ .

### 1.3 Interpretazione fisica del formalismo

La notazione bra-ket, oltre ad essere un utile strumento matematico, rappresenta una chiave di interpretazione del significato fisico delle predizioni della meccanica quantistica. Come già detto, un vettore rappresentato da un *ket*  $|\psi\rangle$  contiene il massimo dell'informazione che possiamo conoscere riguardo ad un determinato stato.

Il numero complesso

$$\langle\varphi|\psi\rangle$$

viene interpretato come l' *ampiezza di probabilità* per una particella nello stato  $|\psi\rangle$  di trovarsi nello stato  $|\varphi\rangle$ . L' *ampiezza di probabilità* è collegata alla probabilità in modo analogo a come sono collegate l'ampiezza e l'intensità di un'onda: la grandezza fisica immediatamente percepibile è l'intensità, ma le interazioni sono descritte in termini di ampiezza.

La probabilità di trovare una particella nello stato  $\langle\varphi|$  quando viene effettuata una misurazione su una particella nello stato  $|\psi\rangle$  è data da:

$$\langle\varphi|\psi\rangle \langle\psi|\varphi\rangle = |\langle g_i|\psi\rangle|^2 \quad (35)$$

Notiamo che l'interpretazione data dalla (35) è consistente con la relazione formale espressa dalla (31). Infatti, se una grandezza fisica  $G$  può assumere i valori discreti  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , effettuando una misurazione di  $G$  su una particella nello stato  $|\psi\rangle$  possiamo non essere certi del risultato che otterremo, ma di certo dovremmo misurare uno dei  $g_i$ . In altre parole, detta  $p_i$  la probabilità di ottenere il valore  $g_i$  da tale misurazione, la somma di tutti i  $p_i$  non potrà che essere 1.

Un'ulteriore coincidenza con la realtà fisica si ottiene dall'analisi della (23). Difatti, una particella si trova nello stato  $|g_k\rangle$  se il suo valore della grandezza  $G$  è conosciuto essere  $g_k$ . Ci aspettiamo dunque che se  $i \neq j$  la probabilità di ottenere il valore  $g_i$  per  $G$  su una particella nello stato  $|g_j\rangle$  sia zero, e conseguentemente sia zero la relativa *ampiezza di probabilità*  $\langle g_i|g_j\rangle$ .

Analogamente, è lecito aspettarsi che l' *ampiezza di probabilità* di ottenere il valore  $g_i$  per  $G$  su una particella nello stato  $|g_i\rangle$  sia non-nulla. La scelta (convenzionale) di avere  $\langle g_i|g_j\rangle = 1$  è data dalla maggiore semplicità nel lavorare con una base ortonormale.

La visione probabilistica espressa dalla (35) suggerisce una ulteriore riflessione sul formalismo matematico che stiamo impiegando. Siano  $|\psi\rangle$  e  $|\psi'\rangle$  due *ket* che differiscono soltanto per un fattore di fase globale, in altre parole tali che:

$$|\psi'\rangle = e^{i\zeta} |\psi\rangle \quad (36)$$

Valutiamo la probabilità per una particella nello stato  $|\psi\rangle$  di trovarsi nello stato  $\langle\varphi|$  come:

$$\langle\varphi|\psi\rangle \langle\psi|\varphi\rangle = c^*c = |c|^2 \quad (37)$$

per qualche  $c \in \mathbb{C}$ . Sostituendo  $|\psi\rangle$  con  $|\psi'\rangle$  si ottiene:

$$\langle\varphi|\psi'\rangle\langle\psi'|\varphi\rangle = c^*e^{-i\zeta}ce^{i\zeta} = |c|^2 \quad (38)$$

Ovvero il medesimo valore ottenuto per  $|\psi\rangle$ . Dal momento che il nostro argomento non dipende dalla scelta di  $\langle\varphi|$ , deduciamo che due stati che differiscano soltanto per un fattore di fase globale hanno la stessa probabilità di trovarsi in qualsiasi stato: sono pertanto fisicamente indistinguibili.

La rappresentazione degli stati fisici come *ket* sarà dunque unica a meno di un fattore di fase globale.

L'interpretazione probabilistica della (35) ci consente di scrivere il *valore atteso* di una misurazione di  $G$  su uno stato  $|\psi\rangle$ , che indichiamo con  $\langle G \rangle$  come:

$$\langle G \rangle = \sum_i g_i |\langle g_i | \psi \rangle|^2 \quad (39)$$

Possiamo anche vedere che se  $G$  è una grandezza osservabile ed  $\hat{G}$  è l'operatore associato a quella osservabile, allora il valore atteso  $\langle G \rangle$  si può scrivere come

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Infatti, possiamo scrivere:

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \left( \sum c_i^* \langle g_i | \right) \hat{A} \left( \sum c_i | g_i \rangle \right) \quad (40)$$

Da cui, dal momento che i vari  $g_i$  sono autovettori di  $G$ :

$$\left( \sum c_i^* \langle a_i | \right) \left( \sum c_i g_i | g_i \rangle \right) \quad (41)$$

che è uguale a:

$$\sum |c_i|^2 = \langle G \rangle \quad (42)$$

Ovvero esattamente quello che volevamo determinare.

Scriveremo inoltre l'*incertezza* di  $G$ , che indichiamo con  $\Delta G$ , come la deviazione standard delle misurazioni. Dunque abbiamo:

$$(\Delta G)^2 = \langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle \quad (43)$$

Ovvero:

$$(\Delta G)^2 = \langle G^2 - 2G \langle G \rangle + \langle G \rangle^2 \rangle \quad (44)$$

Da cui:

$$(\Delta G)^2 = \langle G^2 \rangle - 2 \langle G \rangle \langle G \rangle + \langle G \rangle^2 \quad (45)$$

Infine:

$$(\Delta G) = \sqrt{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2} \quad (46)$$

## 2 Forme matriciali e operatori

### 2.1 Rappresentazione vettoriale degli stati

Come abbiamo visto precedentemente, uno stato arbitrario  $|\psi\rangle$  può essere scritto nella forma:

$$|\psi\rangle = |g_1\rangle \langle g_1|\psi\rangle + |g_2\rangle \langle g_2|\psi\rangle + \dots = \sum_i |g_i\rangle \langle g_i|\psi\rangle$$

Analogamente a come i vettori di un qualsiasi spazio vettoriale possono essere scritti, una volta scelta una base, esclusivamente in funzione dei loro coefficienti, possiamo fissare la base  $B = (|g_1\rangle, |g_2\rangle, \dots, |g_n\rangle)$  e rappresentare un ket  $|\psi\rangle$  con una matrice colonna:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle g_1|\psi\rangle \\ \langle g_2|\psi\rangle \\ \langle g_3|\psi\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\psi\rangle \end{pmatrix} \quad (47)$$

Essendo  $B$  una base ortonormale, evidentemente si avrà che per ciascuno dei componenti della base  $|g_k\rangle$ :

$$|g_k\rangle = \begin{pmatrix} \langle g_1|g_k\rangle \\ \langle g_2|g_k\rangle \\ \langle g_3|g_k\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|g_k\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \delta_{3k} \\ \dots \\ \delta_{nk} \end{pmatrix} = e_k \quad (48)$$

È possibile rappresentare in maniera analoga un *bra*? Una scelta naturale della base è la base duale di  $B$ ,  $B^*$ . Infatti, come abbiamo determinato dal raffronto delle (29), (34) i coefficienti di  $\langle\psi|$  in  $B^*$  saranno i complessi coniugati dei coefficienti di  $|\psi\rangle$  in  $B$ . È però più conveniente rappresentare i *bra* come matrici riga. Scrivendo:

$$\langle\varphi| = ( \langle\varphi|g_1\rangle \quad \langle\varphi|g_2\rangle \quad \langle\varphi|g_3\rangle \quad \dots \quad \langle\varphi|g_n\rangle ) \quad (49)$$

Possiamo rappresentare il prodotto interno  $\langle\varphi|\psi\rangle$  come prodotto della matrice riga che rappresenta  $\langle\varphi|$  e della matrice colonna che rappresenta  $|\psi\rangle$ , richiedendo ovviamente che la prima sia espressa in base  $B^*$  e la seconda in base  $B$ :

$$\langle\varphi|\psi\rangle = ( \langle\varphi|g_1\rangle \quad \langle\varphi|g_2\rangle \quad \langle\varphi|g_3\rangle \quad \dots \quad \langle\varphi|g_n\rangle )_{B^*} \begin{pmatrix} \langle g_1|\psi\rangle \\ \langle g_2|\psi\rangle \\ \langle g_3|\psi\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\psi\rangle \end{pmatrix}_B \quad (50)$$



È facile verificare che il prodotto tra le due matrici nella (50) è uguale per definizione al prodotto interno  $\langle \varphi, \psi \rangle$  definito nella (1).

La (47) e la (49) ci consentono di scrivere anche il prodotto esterno definito nella (10) in maniera analoga come:

$$|\psi\rangle \langle \varphi| = \begin{pmatrix} \langle g_1|\psi\rangle \\ \langle g_2|\psi\rangle \\ \langle g_3|\psi\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\psi\rangle \end{pmatrix}_B \left( \begin{matrix} \langle \varphi|g_1\rangle & \langle \varphi|g_2\rangle & \langle \varphi|g_3\rangle & \dots & \langle \varphi|g_n\rangle \end{matrix} \right)_{B^*} \quad (51)$$

Svolgendo il prodotto ad RHS nella (51) otteniamo, come lecito aspettarsi da un operatore lineare, una matrice  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :

$$M_{ij} = \langle g_i|\psi\rangle \langle \varphi|g_j\rangle \quad (52)$$

Per verificare la consistenza di questa notazione, consideriamo un vettore  $|\zeta\rangle$  e calcoliamo  $M|\zeta\rangle$ :

$$M|\zeta\rangle = \begin{pmatrix} \langle g_1|\psi\rangle \sum_i \langle \varphi|g_i\rangle \langle g_i|\alpha\rangle \\ \dots \\ \langle g_k|\psi\rangle \sum_i \langle \varphi|g_i\rangle \langle g_i|\alpha\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\psi\rangle \sum_i \langle \varphi|g_i\rangle \langle g_i|\alpha\rangle \end{pmatrix} \quad (53)$$

La somma

$$\sum_i \langle \varphi|g_i\rangle \langle g_i|\alpha\rangle \quad (54)$$

si riscrive per linearità come

$$\langle \varphi| \sum_i |g_i\rangle \langle g_i|\alpha\rangle \quad (55)$$

Ma per la (29) si deve avere

$$\sum_i |g_i\rangle \langle g_i|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \quad (56)$$

Quindi la (55) diventa

$$\sum_i \langle \varphi|g_i\rangle \langle g_i|\alpha\rangle = \langle \varphi|\alpha\rangle \quad (57)$$

Sostituendo la (57) nella (53):

$$M |\zeta\rangle = \begin{pmatrix} \langle g_1|\psi\rangle \langle \varphi|\alpha\rangle \\ \dots \\ \langle g_k|\psi\rangle \langle \varphi|\alpha\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\psi\rangle \langle \varphi|\alpha\rangle \end{pmatrix} = \langle \varphi|\alpha\rangle \begin{pmatrix} \langle g_1|\psi\rangle \\ \dots \\ \langle g_k|\psi\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\psi\rangle \end{pmatrix} \quad (58)$$

Quest'ultima si riscrive come:

$$M |\zeta\rangle = \langle \varphi|\alpha\rangle |\psi\rangle \quad (59)$$

la quale conferma che  $M$  si comporta effettivamente come l'operatore prodotto esterno definito nella (10).

Più in generale, consideriamo il problema della rappresentazione in forma matriciale di un operatore lineare qualsiasi  $\hat{A}$ . Scriviamo l'equazione generica:

$$\hat{A} |\psi\rangle = |\phi\rangle \quad (60)$$

Come già ampiamente giustificato, data una base  $B = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  possiamo scrivere:

$$|\psi\rangle = \sum_i |g_i\rangle \langle g_i|\psi\rangle \quad (61)$$

Sostituendo la precedente nella (60):

$$\hat{A} \left( \sum_i |g_i\rangle \langle g_i|\psi\rangle \right) = |\phi\rangle \quad (62)$$

Applicando un  $\langle g_k|$ :

$$\left( \sum_i \langle g_k|\hat{A}|g_i\rangle \langle g_i|\psi\rangle \right) = \langle g_k|\phi\rangle \quad (63)$$

La (63) si può riscrivere come:

$$M \begin{pmatrix} \langle g_1|\psi\rangle \\ \langle g_2|\psi\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\psi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1|\phi\rangle \\ \langle g_2|\phi\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\phi\rangle \end{pmatrix} \quad (64)$$

Dove

$$M_{ij} = \langle g_i|\hat{A}|g_j\rangle \quad (65)$$

Ma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1|\psi\rangle \\ \langle g_2|\psi\rangle \\ \dots \\ \langle g_n|\psi\rangle \end{pmatrix} = |\psi\rangle \quad (66)$$

e

$$\begin{pmatrix} \langle g_1 | \varphi \rangle \\ \langle g_2 | \varphi \rangle \\ \dots \\ \langle g_n | \varphi \rangle \end{pmatrix} = |\varphi\rangle \quad (67)$$

Abbiamo dunque dedotto che un generico operatore  $\hat{A}$  può essere scritto come una matrice

$$M_{ij} = \langle g_i | \hat{A} | g_j \rangle \quad (68)$$

Possiamo trovare anche un altro interessante risultato. Infatti, per quanto stabilito nella (15), se  $\hat{A}$  è autoaggiunto e soddisfa:

$$\hat{A} |\psi\rangle = |\varphi\rangle$$

deve necessariamente valere anche:

$$\langle \psi | \hat{A} = \langle \varphi |$$

Prendiamo ora il prodotto della prima con  $\langle \chi |$ :

$$\langle \chi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \chi | \varphi \rangle \quad (69)$$

E il prodotto della seconda con  $|\chi\rangle$ :

$$\langle \psi | \hat{A} | \chi \rangle \quad (70)$$

Ora siccome  $\langle \chi | \varphi \rangle = \langle \chi | \varphi \rangle^*$  abbiamo

$$\langle \psi | \hat{A} | \chi \rangle = \langle \chi | \hat{A} | \psi \rangle^* \quad (71)$$

Dal momento che la (71) vale per ogni scelta di  $(\langle \chi |, \langle \psi |)$ , vale in particolare per due generici stati  $(g_i, g_j)$ , abbiamo dunque:

$$\langle g_i | \hat{A} | g_j \rangle = \langle g_j | \hat{A} | g_i \rangle^* \quad (72)$$

Essendo i due termini esattamente gli elementi delle matrici associate, deduciamo che la rappresentazione matriciale di un operatore autoaggiunto è uguale alla sua coniugata trasposta, consistentemente con la nomenclatura impiegata dall'algebra lineare.

## 2.2 Operatori identità e proiezione

Sia  $|\psi\rangle$  scritto nella base  $B = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ . Assumiamo il corrispondente  $\langle \psi |$  scritto nella base  $B^*$ . Per ogni  $k$  consideriamo l'operatore

$$\hat{P}_k = |g_k\rangle \langle g_k|$$

È facile calcolare:

$$\hat{P}_k |\psi\rangle = |g_k\rangle \langle g_k| \sum_i |g_i\rangle \langle g_i| \psi\rangle \quad (73)$$

Infatti, portando  $|g_k\rangle \langle g_k|$  nella sommatoria si ha:

$$\hat{P}_k |\psi\rangle = \sum_i |g_k\rangle \langle g_k| g_i\rangle \langle g_i| \psi\rangle \quad (74)$$

Ovvero:

$$\hat{P}_k |\psi\rangle = \sum_i \delta_{ki} |g_k\rangle \langle g_i| \psi\rangle = |g_k\rangle \langle g_k| \psi\rangle \quad (75)$$

In maniera completamente analoga possiamo calcolare:

$$\langle \psi| \hat{P}_k = \langle \psi| g_k\rangle \langle g_k| \quad (76)$$

Abbiamo mostrato che  $\hat{P}_k$  estrae la componente di  $|\psi\rangle$  lungo  $|g_k\rangle$  (o la componente di  $\langle \psi|$  lungo  $\langle g_k|$  nel caso duale): lo chiameremo quindi *operatore proiezione*. Consideriamo ora la definizione di  $\hat{P}_k$

$$\hat{P}_k = |g_k\rangle \langle g_k|$$

e sommiamola su  $k$ . Otteniamo:

$$\sum_i \hat{P}_k = \sum_i |g_k\rangle \langle g_k| \quad (77)$$

Applichiamo ora ad entrambe le parti dell'uguaglianza un vettore  $|\psi\rangle$ :

$$\left( \sum_i \hat{P}_k \right) |\psi\rangle = \sum_i |g_k\rangle \langle g_k| \psi\rangle \quad (78)$$

RHS della (78) è, per la (29), il vettore  $|\psi\rangle$ :

$$\left( \sum_i \hat{P}_k \right) |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (79)$$

Dalla (79) deduciamo che l'operatore  $\left( \sum_i \hat{P}_k \right)$  lascia immutato il *ket* a cui viene applicato. Analoghi calcoli ci portano a scrivere:

$$\langle \psi| \left( \sum_i \hat{P}_k \right) = \langle \psi| \quad (80)$$

da cui si osserva che la medesima relazione vale per i *bra*.  $\left( \sum_i \hat{P}_k \right)$  è pertanto l'operatore identità, che indichiamo con  $\hat{1}$ :

$$\hat{1} = \left( \sum_i \hat{P}_k \right) = \sum_i |g_k\rangle \langle g_k|$$

Le rappresentazioni matriciali dei *ket* e dei *bra* che abbiamo dato precedentemente, ci consentono di scrivere facilmente anche gli operatori proiezione ed identità sotto forma di matrice. Scrivendo infatti la (51) con  $|\psi\rangle = |g_k\rangle$ ,  $\langle\varphi| = \langle g_k|$  abbiamo:

$$|g_k\rangle \langle g_k| = \begin{pmatrix} \langle g_1|g_k\rangle \langle g_k|g_1\rangle & \langle g_1|g_k\rangle \langle g_k|g_2\rangle & \dots & \langle g_1|g_k\rangle \langle g_k|g_n\rangle \\ \langle g_2|g_k\rangle \langle g_k|g_1\rangle & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ \langle g_n|g_k\rangle \langle g_k|g_1\rangle & & & \langle g_n|g_k\rangle \langle g_k|g_n\rangle \end{pmatrix} \quad (81)$$

ovvero la matrice che vale 0 ovunque, 1 sul  $k$ -esimo elemento della diagonale principale. Quindi,

$$\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \hat{P}_n = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

L'operatore identità può allora essere scritto semplicemente come:

$$\hat{1} = \sum_k \hat{P}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = I_n \quad (83)$$

### 3 Particelle di spin $\frac{1}{2}$

Avendo stabilito un formalismo matematico che ci consenta di operare sui fenomeni fisici, passiamo a considerare alcuni casi semplici. Nel 1922, Otto Stern e Walther Gerlach effettuarono un esperimento che fornì evidenza diretta di uno degli strani fenomeni osservabili nel mondo microscopico. L'apparato sperimentale era costituito da un forno in cui veniva fatto evaporare argento, facendo uscire un fascio di particelle da un foro praticato sulla superficie. Il fascio veniva fatto passare attraverso un magnete con il campo orientato lungo l'asse  $z$ , e veniva poi analizzata la distribuzione del momento angolare di spin lungo l'asse  $z$ ,  $S_z$ . Secondo le predizioni della fisica classica, dovremmo osservare una distribuzione continua di valori per  $S_z$ , ma le misurazioni rilevarono invece che i valori assunti erano soltanto due,  $+\hbar/2$  e  $-\hbar/2$ . Essendo  $S_z$  una grandezza fisica che assume valori discreti, possiamo modellare una particella di spin  $\frac{1}{2}$  secondo il formalismo descritto fino a questo punto. Indicheremo gli stati

$$|S_z = +\hbar/2\rangle \quad |S_z = -\hbar/2\rangle$$

con, rispettivamente:

$$|+z\rangle \quad |-z\rangle$$

Possiamo quindi, ad esempio, scrivere uno stato generico  $|\psi\rangle$  di una particella come:

$$|\psi\rangle = |+z\rangle \langle +z|\psi\rangle + |-z\rangle \langle -z|\psi\rangle \quad (84)$$

In forma vettoriale, con la scelta ovvia della base  $B_z = \{|+z\rangle, |-z\rangle\}$ :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle +z|\psi\rangle \\ \langle -z|\psi\rangle \end{pmatrix}_{B_z} \quad (85)$$

Naturalmente la scelta della base non è unica. Ad esempio, un osservatore che misurasse lo spin  $S_x$  lungo l'asse  $x$  dovrebbe ottenere risultati paragonabili. Se scegliamo  $B_x = \{|+x\rangle, |-x\rangle\}$  dobbiamo avere analogamente:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle +x|\psi\rangle \\ \langle -x|\psi\rangle \end{pmatrix}_{B_x} \quad (86)$$

### 3.1 Operatori di rotazione

Supponiamo di considerare una particella che possieda spin  $S_z = +\hbar/2$ . Possiamo ruotarla sul piano  $xz$  in maniera tale che al termine dell'operazione lo spin sia orientato sull'asse  $x$ , ovvero la particella sia diventata tale da avere  $S_x = +\hbar/2$ . Consideriamo dunque un *operatore di rotazione*  $\hat{R}(\frac{\pi}{2}j)$ , che agisce sul ket  $|+z\rangle$  in maniera tale che:

$$|+x\rangle = \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) |+z\rangle \quad (87)$$

Per la (20) abbiamo anche:

$$\langle +x| = \langle +z| \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \quad (88)$$

Notiamo che  $\hat{R}(\frac{\pi}{2}j)$  non è autoaggiunto, infatti se fosse  $\hat{R}(\frac{\pi}{2}j) = \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j)$  dovremmo avere:

$$1 = \langle +x|+x\rangle = \left( \langle +z| \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) \right) \left( \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) |+z\rangle \right) = \langle +z| \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) |+z\rangle \quad (89)$$

Ma se  $\hat{R}(\frac{\pi}{2}j)$  effettua una rotazione di 90 gradi attorno all'asse  $y$ , allora applicato due volte effettuerà una rotazione di 180 gradi. Allora:

$$1 = \langle +z| \hat{R}(\pi j) |+z\rangle \quad (90)$$

Dal momento che stiamo parlando di rotazioni sul piano  $xy$ ,

$$\hat{R}(\pi j) |+z\rangle = |-z\rangle \quad (91)$$

che, sostituita nella (90) ci porta a:

$$1 = \langle +z | -z \rangle = 0 \quad (92)$$

che è assurdo.

Applicando la (87) e la (88), possiamo scrivere:

$$1 = \langle +x | +x \rangle = \left( \langle +z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \right) \left( \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | +z \rangle \right) = \langle +z | +z \rangle = 1 \quad (93)$$

Da cui deduciamo che l'operatore di rotazione è l'inverso del suo aggiunto. In altre parole, se  $\hat{R}(\frac{\pi}{2}j)$  esegue una rotazione intorno all'asse  $y$  di 90 gradi in senso orario,  $\hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j)$  compie la medesima rotazione in senso antiorario.

### 3.2 Generatore di rotazioni

Consideriamo ora rotazioni attorno all'asse  $z$ . Supponiamo inoltre di effettuare una rotazione di un angolo infinitesimo  $d\vartheta$ . Una maniera più utile di esprimere l'operatore di rotazione infinitesimale è la seguente:

$$\hat{R}(d\vartheta k) = 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{J}_z d\vartheta \quad (94)$$

Dove abbiamo introdotto un nuovo operatore  $\hat{J}_z$  a cui richiediamo ovviamente di essere tale da rendere RHS nella (95) tendente a 1 per  $d\vartheta$  che tende a 0. Dimosteremo ora che l'operatore  $\hat{J}_z$  è autoaggiunto. Prendendo la forma aggiunta della precedente, possiamo scrivere:

$$\hat{R}^\dagger(d\vartheta k) = 1 + \frac{i}{\hbar} \hat{J}_z^\dagger d\vartheta \quad (95)$$

dove, secondo la usuale convenzione, denotiamo  $\hat{J}_z^\dagger$  l'operatore aggiunto di  $\hat{J}_z$ . L'operatore di rotazione deve necessariamente soddisfare:

$$1 = \hat{R}^\dagger(d\vartheta k) \hat{R}(d\vartheta k) = \left( 1 + \frac{i}{\hbar} \hat{J}_z^\dagger d\vartheta \right) \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{J}_z d\vartheta \right) \quad (96)$$

Svolgendo:

$$1 + \frac{i}{\hbar} \left( \hat{J}_z^\dagger - \hat{J}_z \right) d\vartheta + O(d\vartheta^2) = 1 \quad (97)$$

Dal momento che  $d\vartheta$  è infinitesimo, possiamo ignorare termini di ordine superiore al primo, la (97) è dunque soddisfatta solo per  $\hat{J}_z = \hat{J}_z^\dagger$ . Avendo descritto una rotazione di un angolo infinitesimo  $d\vartheta$ , possiamo scrivere rotazioni per ogni angolo finito  $\vartheta$  come somma di un numero infinito di rotazioni infinitesime usando:

$$d\vartheta = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\vartheta}{N}$$

Possiamo quindi riscrivere l'operatore di rotazione  $\hat{R}(\vartheta k)$  come:

$$\hat{R}(\vartheta k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\vartheta}{N} \right) \right]^N \quad (98)$$

Espandendo RHS in serie di Taylor, possiamo stabilire infine:

$$\hat{R}(\vartheta k) = e^{-i\hat{J}_z \vartheta / \hbar} \quad (99)$$

Potremmo chiederci ora quale sia l'effetto di una rotazione intorno all'asse  $z$  del *ket*  $|+z\rangle$ . Fisicamente, l'effetto di una tale rotazione è evidente: esattamente come un vettore fatto ruotare attorno ad uno stato parallelo a quest'ultimo, lo stato deve rimanere invariato. Come abbiamo discusso precedentemente, due stati che differiscano solamente per un fattore di fase sono considerati identici, dunque ci aspettiamo che valga la seguente relazione:

$$\hat{R}(\vartheta k) |+z\rangle = e^{i\zeta} |+z\rangle \quad (100)$$

Mostreremo che la precedente è valida solo se

$$\hat{J}_z |+z\rangle = c |+z\rangle \quad (101)$$

dove  $c$  è una costante, ovvero se  $|+z\rangle$  è un autovettore di  $\hat{J}_z$ . Espandendo l'esponenziale nella (99) in serie di Taylor si ha:

$$\hat{R}(\vartheta k) |+z\rangle = \left( 1 - \frac{i\vartheta \hat{J}_z}{\hbar} + \frac{1}{2!} \left( -\frac{i\vartheta \hat{J}_z}{\hbar} \right)^2 + \dots \right) |+z\rangle \quad (102)$$

Supponiamo per assurdo che la (101) sia falsa. Dunque,  $\hat{J}_z$  deve essere diverso da  $c |+z\rangle$ , ovvero deve contenere un termine diverso da  $|+z\rangle$ , ad esempio  $|+x\rangle$ . Ma allora i primi due termini della successione risulterebbero valere  $|+z\rangle$  più un termine in  $|+x\rangle$ , che non può essere eliminato perchè termini che contengono potenze diverse di  $\vartheta$  sono linearmente indipendenti tra loro.

Si può mostrare che l'autovalore associato ad un tale autostato corrisponde esattamente al valore  $S_z$ , misurato dagli esperimenti di Stern-Gerlach, in formule:

$$\hat{J}_z |\pm z\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm z\rangle \quad (103)$$

Se la precedente è vera, allora vale:

$$\hat{J}_z^2 |+z\rangle = \hat{J}_z \frac{\hbar}{2} |+z\rangle = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2 |+z\rangle \quad (104)$$

e così via. Dalla (102) otteniamo

$$\hat{R}(\varphi k) |+z\rangle = \left[ 1 - \frac{i\varphi}{2} + \frac{1}{2!} \left( -\frac{i\varphi}{2} \right)^2 + \dots \right] |+z\rangle = e^{-i\varphi/2} |+z\rangle \quad (105)$$



in cui lo stato iniziale risulta moltiplicato per un fattore di fase globale, esattamente quello che ci aspetteremmo dal momento che lo stato non deve cambiare. Il valore della fase è determinato dall'autovalore corrispondente a  $|+z\rangle$ . Per mostrare che deve essere  $\hbar/2$ , consideriamo la rotazione dello stato a spin down  $|-z\rangle$  intorno all'asse  $z$ , ovvero  $\hat{R}(\varphi k) |-z\rangle$ . Con un ragionamento analogo a quello che ci ha portato a concludere che  $|+z\rangle$  è autostato di  $\hat{J}_z$ , possiamo affermare che anche  $|-z\rangle$  lo deve essere. Possiamo inoltre assumere che i due autovalori debbano essere diversi. Se così non fosse, applicando l'operatore di rotazione  $\hat{R}(\varphi k)$  allo stato:

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-z\rangle \quad (106)$$

non lo ruoterebbe, dal momento che  $|+z\rangle$  e  $|-z\rangle$  acquisirebbero lo stesso fattore di fase, e dunque anche  $|+x\rangle$  sarebbe moltiplicato per il medesimo fattore, rimanendo quindi invariato. Ma ruotando  $|+x\rangle$  di un angolo  $\varphi$  attorno all'asse  $z$  ci aspetteremmo che lo stato cambiasse. Provando:

$$\hat{J}_z |-z\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-z\rangle \quad (107)$$

La (102) ci dà:

$$\hat{R}(\varphi k) |-z\rangle = \left[ 1 + \frac{i\varphi}{2} + \frac{1}{2!} \left( \frac{i\varphi}{2} \right)^2 + \dots \right] |-z\rangle = e^{i\varphi/2} |-z\rangle \quad (108)$$

Da cui, per la (105) e la (108):

$$\hat{R}(\varphi k) |+x\rangle = \frac{e^{-i\varphi/2}}{\sqrt{2}} |+z\rangle + \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{2}} |-z\rangle \quad (109)$$

Raccogliendo:

$$e^{-i\varphi/2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+z\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} |-z\rangle \right) \quad (110)$$

che è uno stato chiaramente diverso rispetto al precedente per  $\varphi \neq 0$ . In particolare, se poniamo  $\varphi = \pi/2$ , otteniamo

$$\hat{R}(\frac{\pi}{2} k) = e^{-i\pi/4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+z\rangle + \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}} |-z\rangle \right) \quad (111)$$

Ovvero:

$$e^{-i\pi/4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |-z\rangle \right) = e^{-i\pi/4} |+y\rangle \quad (112)$$

Dal momento che due stati che differiscono solamente per una fase globale sono identici, vediamo che ruotando lo stato  $|+z\rangle$  di un angolo retto in senso antiorario attorno all'asse  $z$  genera lo stato  $|+y\rangle$ .

La conclusione è sorprendente: il generatore di rotazioni intorno all'asse  $z$ , se applicato agli stati  $|+z\rangle$  e  $|-z\rangle$ , risulta essere una costante per lo stato stesso; gli autovalori per i due autostati sono i valori della componente  $z$  del momento angolare intrinseco che caratterizza quegli stati.

### 3.3 Rappresentazione matriciale di $\hat{J}_z$

Evidentemente, anche l'operatore  $\hat{J}_z$  può essere espresso in forma matriciale. Grazie alle formule precedenti possiamo facilmente valutare:

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} \langle +z | \hat{J}_z | +z \rangle & \langle +z | \hat{J}_z | -z \rangle \\ \langle -z | \hat{J}_z | +z \rangle & \langle -z | \hat{J}_z | -z \rangle \end{pmatrix} \quad (113)$$

Da cui:

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} (\hbar/2) \langle +z | +z \rangle & (-\hbar/2) \langle +z | -z \rangle \\ (\hbar/2) \langle +z | -z \rangle & (-\hbar/2) \langle -z | -z \rangle \end{pmatrix} \quad (114)$$

Ovvero:

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} \quad (115)$$

La matrice è diagonale, ed ovviamente gli autovalori sono gli elementi della diagonale perchè stiamo usando una base di autovettori ortogonali. A questo punto, le relazioni  $\hat{J}_z | +z \rangle = (\hbar/2) | +z \rangle$  e  $\hat{J}_z | -z \rangle = (-\hbar/2) | -z \rangle$  possono essere espresse semplicemente come:

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (116)$$

e

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (117)$$

Possiamo inoltre scrivere:

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (118)$$

Da cui, scrivendo gli operatori in forma esplicita:

$$\hat{J}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{P}_{|+z\rangle} - \frac{\hbar}{2} \hat{P}_{|-z\rangle} = \frac{\hbar}{2} | +z \rangle \langle +z | - \frac{\hbar}{2} | -z \rangle \langle -z | \quad (119)$$

### 3.4 Cambiamenti di base

Consideriamo l'aggiunto dell'operatore di rotazione,  $\hat{R}^\dagger(\vartheta)$ . Supponiamo di applicare tale operatore ad un ket qualsiasi  $|\psi\rangle$  per causare una sua trasformazione:

$$|\psi'\rangle = \hat{R}^\dagger(\vartheta)|\psi\rangle$$

Come abbiamo visto, deve valere:

$$\hat{R}^\dagger(\vartheta)\hat{R}(\vartheta) = 1 \quad (120)$$

Ovvero:

$$\hat{R}^\dagger(\vartheta) = \hat{R}(-\vartheta) \quad (121)$$

Possiamo scrivere  $|\psi'\rangle$  nella tradizionale forma vettoriale, scegliendo la base  $B_z = \{|+z\rangle, |-z\rangle\}$ :

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \langle +z|\hat{R}^\dagger(\vartheta)|\psi\rangle \\ \langle -z|\hat{R}^\dagger(\vartheta)|\psi\rangle \end{pmatrix}_{B_z} \quad (122)$$

Ma invece di interpretare l'operatore  $\hat{R}^\dagger$  come applicato al *ket* alla sua destra, lo considereremo agente sul *bra* alla sua sinistra. Dal momento che:

$$|\pm x\rangle = \hat{R}(\frac{\pi}{2}j)|\pm z\rangle \quad (123)$$

Se  $\hat{R}^\dagger(\vartheta)$  è l'aggiunto di  $\hat{R}(\vartheta)$  allora:

$$\langle \pm x| = \langle \pm z|\hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \quad (124)$$

Quindi possiamo scrivere:

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \langle +z|\psi'\rangle \\ \langle -z|\psi'\rangle \end{pmatrix}_{B_z} = \begin{pmatrix} \langle +z|\hat{R}^\dagger(\vartheta)|\psi\rangle \\ \langle -z|\hat{R}^\dagger(\vartheta)|\psi\rangle \end{pmatrix}_{B_z} = \begin{pmatrix} \langle +x|\psi'\rangle \\ \langle -x|\psi'\rangle \end{pmatrix}_{B_z} \quad (125)$$

Possiamo notare che l'ultimo termine a destra della (125) è esattamente  $|\psi\rangle$  scritto in base  $B_x = \{|+x\rangle, |-x\rangle\}$ . Supponiamo ora di avere un vettore  $|\psi\rangle$  scritto in base  $B_x$ . Inserendo l'operatore identitario scritto in base  $B_z$  otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \langle +x|\psi\rangle \\ \langle -x|\psi\rangle \end{pmatrix}_{B_x} = \begin{pmatrix} \langle +x|+z\rangle & \langle +x|-z\rangle \\ \langle -x|+z\rangle & \langle -x|-z\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle +z|\psi\rangle \\ \langle -z|\psi\rangle \end{pmatrix}_{B_z} \quad (126)$$

Svolgendo i conti si ha:

$$= \begin{pmatrix} \langle +z|\hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j)|-z\rangle & \langle +z|\hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j)|+z\rangle \\ \langle -z|\hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j)|-z\rangle & \langle -z|\hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j)|+z\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle +z|\psi\rangle \\ \langle -z|\psi\rangle \end{pmatrix}_{B_z} \quad (127)$$

Chiameremo  $S^\dagger(\frac{\pi}{2}j)$  la matrice:

$$\begin{pmatrix} \langle +z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle & \langle +z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle \\ \langle -z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle & \langle -z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle \end{pmatrix}$$

Possiamo facilmente verificare che  $S^\dagger(\frac{\pi}{2}j)$  è la rappresentazione in base  $B_z$  dell'operatore  $\hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j)$ .

Possiamo in maniera completamente analoga svolgere la trasformazione inversa, partendo da un vettore scritto in base  $B_z$  ed andando ad inserire l'operatore identità in base  $B_x$ . Questa volta la matrice che caratterizza la trasformazione sarà:

$$\begin{pmatrix} \langle +z | \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle & \langle +z | \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle \\ \langle -z | \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle & \langle -z | \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle \end{pmatrix}$$

La chiameremo  $S(\frac{\pi}{2}j)$ . Possiamo facilmente verificare che  $S(\frac{\pi}{2}j)$  rappresenta, sempre in base  $B_z$ , l'operatore  $\hat{R}(\frac{\pi}{2}j)$ . Per la (120) si deve avere:

$$S(\frac{\pi}{2}j)S^\dagger(\frac{\pi}{2}j) = I \quad (128)$$

Consideriamo ora un vettore generico  $\hat{A}$ . La sua rappresentazione in base  $B_x$  è:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \langle +x | \hat{A} | +x \rangle & \langle +x | \hat{A} | -x \rangle \\ \langle -x | \hat{A} | +x \rangle & \langle -x | \hat{A} | -x \rangle \end{pmatrix}$$

La matrice precedente si può riscrivere come:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \langle +z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \hat{A} \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | +z \rangle & \langle +z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \hat{A} \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle \\ \langle -z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \hat{A} \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | +z \rangle & \langle -z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \hat{A} \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | -z \rangle \end{pmatrix} \quad (129)$$

Prendiamo ora

$$\hat{A} = \hat{A}I = \hat{A} \begin{pmatrix} \langle +z | +z \rangle & \langle +z | -z \rangle \\ \langle -z | +z \rangle & \langle -z | -z \rangle \end{pmatrix} \quad (130)$$

Consideriamo per semplicità l'elemento  $\hat{A}_{11}$ , gli altri saranno completamente analoghi. Si ha:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= \langle +z | \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) | +z \rangle \hat{A} \langle +z | \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) | +z \rangle \\ &+ \langle +z | -z \rangle \hat{R}^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \hat{A} \hat{R}(\frac{\pi}{2}j) \langle +z | +z \rangle \end{aligned} \quad (131)$$

Il secondo addendo è zero, possiamo allora scrivere:

$$\hat{A}_{B_x} = S^\dagger(\frac{\pi}{2}j) \hat{A}_{B_z} S(\frac{\pi}{2}j) \quad (132)$$

Fisicamente, abbiamo eseguito una *trasformazione passiva*: invece di ruotare uno stato tenendo fissi gli assi del sistema di riferimento, lo stato è rimasto fisso e gli stati sono stati ruotati.

## 4 Momento angolare

### 4.1 Noncommutatività dei generatori di rotazione

Consideriamo un vettore tridimensionale  $A$ , ed un secondo vettore,  $A'$ , ottenuto mediante una rotazione di  $A$  di un angolo  $\varphi$  attorno all'asse  $z$ . Se chiamiamo  $\vartheta$  l'angolo tra la proiezione di  $A$  sul piano  $xy$  e l'asse  $y$ , possiamo scrivere le componenti di  $A'$  in funzione di  $\varphi, \vartheta$  e delle componenti di  $A$ .

Innanzitutto, dal momento che la rotazione avviene attorno all'asse  $z$ , è evidente che:

$$A'_z = A_z \quad (133)$$

Dal momento che  $A'$  deve essere uguale in modulo ad  $A$  e vale la (133), anche il moduli delle proiezioni di  $A, A'$  sul piano  $xy$  devono essere uguali. Possiamo quindi calcolare  $A'_x$  come:

$$A'_x = |A|_{xy} \cos \alpha \quad (134)$$

Dove  $\alpha$  è l'angolo tra l'asse  $x$  ed  $A'$  proiettato sul piano  $xy$ . Esplicitamente:

$$A'_x = \cos(\varphi + \vartheta) \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = (\cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta) \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (135)$$

Da cui:

$$A'_x = A_x \cos \varphi - A_y \sin \varphi \quad (136)$$

In maniera analoga si calcola:

$$A'_y = \sin(\vartheta + \varphi) \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = (\sin \varphi \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \varphi) \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (137)$$

Ovvero:

$$A'_y = A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \quad (138)$$

Mettendo a sistema la (133), la (136), e la (138) otteniamo:

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (139)$$

La matrice che ruota il vettore di un angolo  $\varphi$  attorno all'asse  $z$  è quindi data da:

$$S(\varphi k) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (140)$$

Sostituendo in maniera ciclica  $x, y, z$ , otteniamo anche espressioni per le matrici di rotazione intorno agli assi  $x$  ed  $y$ :

$$S(\varphi i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (141)$$

$$S(\varphi j) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (142)$$

Per verificare la non-commutatività delle rotazioni, prendiamo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine delle precedenti per un piccolo angolo  $\Delta\varphi$ :

$$S(\Delta\varphi i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \Delta\varphi^2/2 & -\Delta\varphi \\ 0 & \Delta\varphi & 1 - \Delta\varphi^2/2 \end{pmatrix} \quad (143)$$

$$S(\Delta\varphi j) = \begin{pmatrix} 1 - \Delta\varphi^2 & 0 & \Delta\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta\varphi & 0 & 1 - \Delta\varphi^2 \end{pmatrix} \quad (144)$$

E calcoliamo:

$$S(\Delta\varphi i)S(\Delta\varphi j) - S(\Delta\varphi j)S(\Delta\varphi i) = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\varphi^2 & 0 \\ \Delta\varphi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (145)$$

da cui deduciamo che gli operatori di rotazione non commutano. Se eliminiamo tutti i termini oltre il secondo ordine, allora:

$$S(\Delta\varphi^2 k) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\varphi^2 & 0 \\ -\Delta\varphi^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (146)$$

possiamo allora scrivere anche:

$$S(\Delta\varphi i)S(\Delta\varphi j) - S(\Delta\varphi j)S(\Delta\varphi i) = S(\Delta\varphi^2 k) - I \quad (147)$$

Quest'ultima relazione è significativa per dedurre il commutatore dei generatori di rotazione. Infatti, per la definizione di generatore di rotazioni abbiamo:

$$\hat{R}(\varphi i) = e^{-i\hat{J}_x\varphi/\hbar} \quad \hat{R}(\varphi j) = e^{-i\hat{J}_y\varphi/\hbar} \quad (148)$$

Dunque, prendendo l'espansione al secondo ordine degli operatori e sostituendoli nella (147) abbiamo:

$$\begin{aligned}
& - \left( 1 - \frac{i\hat{J}_x\Delta\varphi}{\hbar} - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{J}_x\Delta\varphi}{\hbar} \right)^2 \right) \left( 1 - \frac{i\hat{J}_y\Delta\varphi}{\hbar} - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{J}_y\Delta\varphi}{\hbar} \right)^2 \right) \\
& - \left( 1 - \frac{i\hat{J}_y\Delta\varphi}{\hbar} - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{J}_y\Delta\varphi}{\hbar} \right)^2 \right) \left( 1 - \frac{i\hat{J}_x\Delta\varphi}{\hbar} - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{J}_x\Delta\varphi}{\hbar} \right)^2 \right) \\
& = \left( 1 - \frac{i\hat{J}_z\Delta\varphi^2}{\hbar} \right) - 1
\end{aligned} \tag{149}$$

Uguagliando gli unici termini al secondo ordine che rimangono si ottiene:

$$\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x = i\hbar\hat{J}_z \tag{150}$$

Ovvero:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z \tag{151}$$

Naturalmente, valgono anche le analoghe alla precedente ottenute per rotazione ciclica degli indici:

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x \tag{152}$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y \tag{153}$$

## 4.2 Operatori commutativi

Consideriamo due operatori lineari autoaggiunti  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  che soddisfino

$$[\hat{A}, \hat{B}] \stackrel{def}{=} \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \tag{154}$$

Supponiamo che esista un unico stato  $|a\rangle$  che sia autovettore di  $\hat{A}$  con autovalore  $a$ :

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle \tag{155}$$

Applicando  $\hat{B}$  ad entrambi i lati della (155) otteniamo

$$\hat{B}\hat{A}|a\rangle = \hat{B}a|a\rangle \tag{156}$$

Per la (154) e per linearità di  $\hat{B}$  possiamo scrivere:

$$\hat{A}\hat{B}|a\rangle = a\hat{B}|a\rangle \tag{157}$$

che interpretiamo come:

$$\hat{A}(\hat{B}|a\rangle) = a(\hat{B}|a\rangle) \tag{158}$$

La (158) ci dice che lo stato  $\hat{B}|a\rangle$  è un autostato dell'operatore  $\hat{A}$  con autovalore  $a$ . Ma avevamo supposto che ci fosse uno solo di questi stati, concludiamo quindi che deve necessariamente essere:

$$\hat{B} |a\rangle = b |a\rangle \quad (159)$$

dove  $b$  è una costante, dal momento che se  $|a\rangle$  soddisfa la (155), anche  $b|a\rangle$  per ogni  $b$  la soddisfa analogamente. La (159) ci dice però che  $|a\rangle$  è anche un autostato di  $\hat{B}$ , con autovalore  $b$ . Per denotare uno stato di questo tipo, utilizzeremo la notazione  $|a, b\rangle$  e diremo che  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  hanno l'autostato  $|a, b\rangle$  in comune.

Se esiste più di un autostato dell'operatore  $\hat{A}$  con autovalore  $a$ , ci troviamo in un caso *degenere*. In un caso *degenere*, si possono sempre trovare combinazioni lineari degli stati degeneri di  $\hat{A}$  che sono autostati dell'operatore  $\hat{B}$ , implicando che due operatori lineari autoaggiunti che commutano hanno sempre un insieme completo di autostati in comune. Questo risultato è una conseguenza del teorema spettrale.

Come abbiamo visto, i generatori di rotazioni su diversi assi non commutano, ma l'operatore:

$$\hat{J}^2 = \hat{J} \cdot \hat{J} = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 \quad (160)$$

commuta con ciascuno dei generatori. Per dimostrarlo, prendiamo ad esempio il generatore  $\hat{J}_z$ . Utilizzeremo l'identità

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C} \quad (161)$$

Scriviamo:

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2] = [\hat{J}_z, \hat{J}_x^2] + [\hat{J}_z, \hat{J}_y^2] \quad (162)$$

Per la (161),  $[\hat{J}_z, \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2]$  si scrive come:

$$\hat{J}_x [\hat{J}_z, \hat{J}_x] + [\hat{J}_z + \hat{J}_x] \hat{J}_x + \hat{J}_y [\hat{J}_z, \hat{J}_y] + [\hat{J}_z + \hat{J}_y] \hat{J}_y \quad (163)$$

che diventa:

$$i\hbar (\hat{J}_x \hat{J}_y + \hat{J}_y \hat{J}_x - \hat{J}_y \hat{J}_x - \hat{J}_x \hat{J}_y) = 0 \quad (164)$$

Ora, dal momento che l'operatore  $\hat{J}^2$  commuta con  $\hat{J}_z$ , devono avere autostati in comune. Siano i ket  $|\lambda\rangle$ ,  $|m\rangle$  tali che;

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |\lambda, m\rangle &= \lambda \hbar^2 |\lambda, m\rangle \\ \hat{J}_z |\lambda, m\rangle &= m \hbar |\lambda, m\rangle \end{aligned} \quad (165)$$

Dove le dimensioni sono esplicitamente indicate, in maniera tale che  $\lambda$  ed  $m$  risultino adimensionali. Quindi,  $|\lambda, m\rangle$  è uno stato per cui la misurazione della componente  $z$  del momento angolare restituisce il valore  $m\hbar$ , mentre il modulo quadro del momento angolare risulta essere  $\lambda\hbar^2$ . Possiamo anche vedere che



$\lambda \geq 0$ , consistentemente con l'interpretazione per cui  $\lambda\hbar^2$  sia il modulo quadro del momento angolare. Applichiamo  $\langle \lambda, m |$  ad entrambi i lati della (165):

$$\langle \lambda, m | \hat{J}^2 | \lambda, m \rangle = \lambda\hbar^2 \langle \lambda, m | \lambda, m \rangle \quad (166)$$

Come per ogni stato,  $\langle \lambda, m | \lambda, m \rangle = 1$ . Scomponendo LHS, otterremo termini analoghi a:

$$\langle \lambda, m | \hat{J}_x^2 | \lambda, m \rangle \quad (167)$$

che possiamo vedere come:

$$\left( \langle \lambda, m | \hat{J}_x \right) \left( \hat{J}_x | \lambda, m \rangle \right) \quad (168)$$

Non possiamo essere certi che esista un *ket* normalizzato  $|\psi\rangle$  tale che:

$$\hat{J}_x | \lambda, m \rangle = |\psi\rangle \quad (169)$$

ma certamente si può scrivere:

$$\hat{J}_x | \lambda, m \rangle = c |\varphi\rangle \quad (170)$$

Dal momento che vale la precedente, come dimostrato nella (18):

$$\langle \lambda, m | \hat{J}_x = c^* \langle \varphi | \quad (171)$$

Combinando le due precedenti la (168) diventa:

$$(c^* \langle \varphi |) (c | \varphi \rangle) = c^* c \langle \varphi | \varphi \rangle \geq 0 \quad (172)$$

La disuguaglianza mostrata nella (172) vale chiaramente anche per gli altri generatori di rotazione. Questo conclude il nostro argomento e dimostra che deve essere necessariamente  $\lambda \geq 0$ .

### 4.3 Operatori di scala

Introduciamo due operatori:

$$\hat{J}_+ \quad e \quad \hat{J}_-$$

dove  $\hat{J}_+$  è definito come:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$$

Notiamo che non sono autoaggiunti, infatti:

$$\hat{J}_+^\dagger = \hat{J}_x^\dagger - i\hat{J}_y^\dagger = \hat{J}_-$$

L'utilità degli operatori deriva dalle loro relazioni di commutazione con  $\hat{J}_z$ , infatti:

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = [\hat{J}_z, \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_y \pm i(-i\hbar\hat{J}_x) = \pm\hbar\hat{J}_\pm \quad (173)$$

Utilizzando la precedente, possiamo calcolare:

$$\hat{J}_z\hat{J}_+|\lambda, m\rangle = (\hat{J}_+\hat{J}_z + \hbar\hat{J}_+)|\lambda, m\rangle \quad (174)$$

che diventa:

$$\hat{J}_z\hat{J}_+|\lambda, m\rangle = (\hat{J}_+m\hbar + \hbar\hat{J}_+)|\lambda, m\rangle \quad (175)$$

raccogliendo:

$$\hat{J}_z(\hat{J}_+|\lambda, m\rangle) = (m+1)\hbar(\hat{J}_+|\lambda, m\rangle) \quad (176)$$

Questo mostra che  $\hat{J}_+|\lambda, m\rangle$  è un autostato di  $\hat{J}_z$  con autovalore  $(m+1)\hbar$ .  
Con analoghi calcoli possiamo far vedere che:

$$\hat{J}_z(\hat{J}_-|\lambda, m\rangle) = (m-1)\hbar(\hat{J}_-|\lambda, m\rangle) \quad (177)$$

Ovvero che  $\hat{J}_-|\lambda, m\rangle$  è un autostato di  $\hat{J}_z$  con autovalore  $(m-1)\hbar$ . Intuitivamente, i due operatori “scalano” lo stato su cui operano di un livello, e sono pertanto detti “di scala”. Notiamo che, come lecito aspettarsi,  $\hat{J}_\pm|\lambda, m\rangle$  sono ancora autostati dell’operatore  $\hat{J}^2$  con autovalore  $\lambda\hbar^2$ . Infatti, siccome

$$[\hat{J}^2, J_x] = 0 \quad e \quad [\hat{J}^2, J_y] = 0 \quad (178)$$

Gli operatori  $\hat{J}_+, \hat{J}_-$  comutano con  $\hat{J}^2$ , quindi:

$$\hat{J}^2(\hat{J}_\pm|\lambda, m\rangle) = \hat{J}_\pm\hat{J}^2|\lambda, m\rangle = \lambda\hbar^2(\hat{J}_\pm|\lambda, m\rangle) \quad (179)$$

#### 4.4 Spettro degli autovalori

Possiamo ora determinare gli autovalori  $\lambda$  ed  $m$ . Un vincolo di natura fisica ci è dato dal fatto che il quadrato della proiezione del momento angolare su ciascuno degli assi non deve eccedere il modulo di  $\hat{J}^2$ . Dal momento che:

$$\langle\lambda, m|(\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2)|\lambda, m\rangle \geq 0 \quad (180)$$

abbiamo:

$$\langle\lambda, m|(\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2)|\lambda, m\rangle = (\lambda - m^2)\hbar^2\langle\lambda, m|\lambda, m\rangle \geq 0 \quad (181)$$

che implica:

$$m^2 \leq \lambda \quad (182)$$

Che è consistente con l’intuizione fisica concordando con la (165). Sia ora  $j$  il massimo possibile valore per  $m$ . Dobbiamo avere:

$$\hat{J}_+ |\lambda, j\rangle = 0 \quad (183)$$

La precedente è necessaria perché altrimenti  $\hat{J}_+$  creerebbe uno stato  $|\lambda, j+1\rangle$ , violando la nostra assunzione per cui  $j$  è il massimo autovalore per  $\hat{J}_z$ . Calcoliamo:

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = (\hat{J}_x - i\hat{J}_y) (\hat{J}_x + i\hat{J}_y) \quad (184)$$

da cui:

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + i [\hat{J}_x, \hat{J}_y] \quad (185)$$

svolgendo il commutatore:

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z \quad (186)$$

Possiamo vedere, applicando la (186), che:

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ |\lambda, j\rangle = (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) |\lambda, j\rangle \quad (187)$$

che si riscrive come:

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = (\lambda - j^2 - j) \hbar^2 |\lambda, j\rangle = 0 \quad (188)$$

La precedente implica che:

$$\lambda = j(j+1) \quad (189)$$

Analogamente, se definiamo  $j'$  come il minimo valore possibile per  $m$  dovremo avere:

$$\hat{J}_- |\lambda, j'\rangle = 0 \quad (190)$$

Notiamo che:

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ \hat{J}_- &= (\hat{J}_x + i\hat{J}_y) (\hat{J}_x - i\hat{J}_y) \\ &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - i [\hat{J}_x, \hat{J}_y] \\ &= \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z \end{aligned} \quad (191)$$

Da cui possiamo dedurre:

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ \hat{J}_- |\lambda, j'\rangle &= (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z) |\lambda, j'\rangle \\ &= (\lambda - j'^2 + j') \hbar^2 |\lambda, j'\rangle = 0 \end{aligned} \quad (192)$$

Quindi, deve essere:

$$\lambda = j'^2 - j' \quad (193)$$

Mettendo insieme la (189) e la (193) si ottiene:

$$j'^2 - j = j^2 + j \quad (194)$$

Gli unici valori che soddisfano la precedente sono:

$$j' = j + 1 \quad \vee \quad j' = -j$$

Ma la prima contraddirebbe la nostra assunzione per cui  $j$  è il massimo valore possibile per  $m$ . Dunque il minimo valore possibile per  $m$  è  $-j$ . Consideriamo ora lo stato:

$$|\lambda, j\rangle$$

Se applichiamo l'operatore  $\hat{J}_-$  un numero sufficiente di volte, dobbiamo necessariamente raggiungere lo stato

$$|\lambda, -j\rangle$$

Se così non fosse, dovremmo raggiungere uno stato diverso da  $-j$ , poniamo  $h$ , per cui valga  $\hat{J}_- |\lambda, h\rangle = 0$ , che è assurdo, perchè come abbiamo mostrato l'unico valore possibile per  $j'$  è  $-j$ . Dal momento che dobbiamo poter passare da  $j$  a  $-j$  in un numero finito ed intero di passi, dobbiamo avere:

$$\exists k \in \mathbb{N} : \quad j - (-j) = 2j = k \quad (195)$$

In altre parole,  $j = k/2$  per qualche  $k$  intero. I valori possibili per  $j$  sono dunque limitati e dati da:

$$j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\} \quad (196)$$

mentre i valori possibili di  $m$  sono dati da:

$$m \in \{j, j-1, j-2, \dots, -j\} \quad (197)$$

Dal momento che i generatori di rotazione corrispondono agli operatori di spin, li indicheremo con  $S_x, S_y, S_z$ . Nell'utilizzare questa notazione, convenzionalmente si indicano gli stati come:

$$|s, m\rangle$$

invece che come

$$|\lambda, m\rangle$$

Prendendo  $s$  tale che  $s(s+1) = \lambda$  in maniera da avere:

$$\hat{S}^2 |s, m\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s, m\rangle \quad (198)$$

In questo modo i valori di  $s$  corrispondono allo spin totale della particella, ad esempio, i due stati

$$|+z\rangle \quad |-z\rangle$$

che abbiamo utilizzato come base nella rappresentazione dei *ket* si scrivono in questa notazione come:

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

## 5 Sistemi di due particelle a spin 1/2

Passiamo ora a considerare un sistema di due particelle, ciascuna con spin  $\frac{1}{2}$ . Sistemi di questo tipo sono estremamente comuni, ad esempio l'interazione di un protone e di un elettrone. La scelta più naturale della base di riferimento è quella di rappresentare gli stati con il valore di  $S_z$  per ciascuna delle particelle:

$$|+z, +z\rangle \quad |+z, -z\rangle \quad |-z, +z\rangle \quad |-z, -z\rangle \quad (199)$$

Un'altra scelta possibile è, ad esempio, indicare lo stato della prima particella con il suo valore di  $S_x$ , quello della seconda con il valore di  $S_z$ :

$$|+z, +x\rangle \quad |+z, -x\rangle \quad |-z, +x\rangle \quad |-z, -x\rangle \quad (200)$$

Siccome entrambi gli insiemi formano delle basi dello spazio dei *ket*, siamo in grado di sovrapporre gli stati della prima per ottenere quelli della seconda. Ad esempio:

$$|+x, +z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+z, +z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-z, +z\rangle \quad (201)$$

Un altro modo di effettuare la trasformazione è quello di applicare i generatori di rotazione per ciascuna delle particelle. Indicheremo i generatori della prima particella che, come abbiamo visto, coincidono con gli operatori associati al momento angolare con:

$$\hat{S}_1 = \hat{S}_{1x}i + \hat{S}_{1y}j + \hat{S}_{1z}k \quad (202)$$

E similmente per la seconda particella. Dal momento che possiamo ruotare le due particelle indipendentemente l'una dall'altra, i due generatori devono commutare:

$$[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = 0 \quad (203)$$

### 5.1 Composizione dei momenti angolari di due particelle a spin 1/2

Vogliamo risolvere il problema del momento angolare per un sistema di due particelle. Detti  $S_1, S_2$  gli operatori di spin delle due particelle, questo equivale a determinare gli autostati di:

$$\hat{S}^2 = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2)^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1\hat{S}_2 \quad (204)$$

e di:

$$\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \quad (205)$$

Come abbiamo visto, possiamo scrivere (usando la notazione  $(s, m)$  che abbiamo introdotto):

$$\hat{S}^2 |s, m\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s, m\rangle \quad (206)$$

e

$$\hat{S}_z |s, m\rangle = m\hbar |s, m\rangle \quad (207)$$

Dal momento che:

$$\hat{S}_1^2 |\pm z, \pm z\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)\hbar^2 |\pm z, \pm z\rangle \quad (208)$$

e

$$\hat{S}_1^2 |\pm z, \pm z\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)\hbar^2 |\pm z, \pm z\rangle \quad (209)$$

possiamo vedere che gli autostati di  $2\hat{S}_1\hat{S}_2$  sono anche autostati di  $S^2$ . Consideriamo ora i seguenti stati:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} | +z, +z \rangle \\ | +z, -z \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | -z, +z \rangle \\ | -z, -z \rangle \end{pmatrix} \quad (210)$$

Si può mostrare che ciascuno di essi è autostato di  $2\hat{S}_1\hat{S}_2$  con autovalore  $\hbar/2$ . Saranno dunque anche autostati di  $\hat{S}^2$  con autovalore:

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \right] \hbar^2 = 2\hbar^2 \quad (211)$$

Lo stato:

$$\frac{1}{2} | +z, -z \rangle - \frac{1}{2} | -z, +z \rangle \quad (212)$$

è invece autostato di  $2\hat{S}_1\hat{S}_2$  con autovalore  $-3/2\hbar$ , il suo autovalore associato a  $\hat{S}^2$  sarà dunque:

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{3}{2} \right] \hbar^2 = 0 \quad (213)$$

Nella notazione  $(s, m)$  abbiamo dunque:

$$|1, 1\rangle = | +z, +z \rangle \quad (214)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+, -z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-z, +z\rangle \quad (215)$$

$$|1, -1\rangle = |-z, -z\rangle \quad (216)$$

e

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+, -z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-z, +z\rangle \quad (217)$$

## 5.2 Paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen e disuguaglianze di Bell

Consideriamo una particella a spin-0 a riposo, e supponiamo che decada in due particelle, ciascuna a spin- $\frac{1}{2}$ . Perchè la quantità di moto totale sia conservata, le due particelle devono muoversi in direzioni opposte. Inoltre, perchè il momento angolare totale sia conservato, le due particelle devono trovarsi nello stato  $|0, 0\rangle$ . Supponiamo che due sperimentatori  $A$  e  $B$  siano posizionati sulle traiettorie delle due particelle, con lo scopo di effettuare una misura dello spin  $S_z$  sulle relative particelle. Dal momento che, come abbiamo visto, lo stato  $|0, 0\rangle$  si scrive:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+, -z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-z, +z\rangle$$

Dalla precedente possiamo vedere che se  $A$  esegue una misurazione, ha il 50% di probabilità di trovare  $S_{1z} = \hbar/2$  e il 50% di probabilità di trovare  $S_{1z} = -\hbar/2$ . La medesima situazione si verifica, ovviamente, se gli sperimentatori decidono di misurare lo spin lungo altri assi. Siccome lo stato globale del sistema deve essere necessariamente  $|0, 0\rangle$ , la misurazione di  $S_z$  determina globalmente lo stato del sistema. In altre parole, conoscendo il risultato della misura di  $A$ , siamo in grado di prevedere con certezza quale sarà il valore rilevato da  $B$ . Il fatto sconcertante è che l'argomento che abbiamo mostrato fa alcuna assunzione sul modo in cui le particelle interagiscono: anche se la particella misurata da  $B$  fosse in una posizione sconosciuta da  $A$ , una singola misura determina lo stato di *entrambe*, in netta contraddizione con il *principio di località* ovvero l'assunzione, completamente ragionevole nella nostra esperienza ed adottata anche nella fisica classica, che un oggetto sia influenzato soltanto dalle sue immediate vicinanze e non da altri oggetti molto distanti nello spazio. Quest'ultimo punto in particolare venne interpretato come completamente irragionevole dai fisici dell'epoca, si tentò infatti di superare il paradosso per mezzo delle cosiddette *teorie delle variabili nascoste*.

Il concetto fondamentale alla base di una teoria a variabili nascoste è che a differenza dell'interpretazione convenzionale della meccanica quantistica, ogni particella porti con sé una serie di variabili che determinano univocamente il risultato della misura di qualsiasi grandezza fisica sulla particella stessa.

Prendendo ad esempio la situazione descritta dal paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen, nella teoria che abbiamo finora esposto, ciascuna delle due

particelle generate dal decadimento non ha uno spin definito: le misure di  $S_z$  non sono univocamente determinate un istante prima della misura; sono al contrario fissate dal procedimento di misura stesso. Infatti, un *ket* di stato non rappresenta una miscela statistica di stati, ma una predizione di natura probabilistica sugli esiti delle misure.

In una teoria a variabili nascoste, associamo a ciascuna particella il valore che otterremmo misurando, ad esempio  $S_x$  o  $S_z$ . Dal momento che gli spin  $S_x$ ,  $S_z$  possono essere misurati indipendentemente e forniscono valori  $\hbar/2$  e  $-\hbar/2$ , per ogni particella abbiamo quattro casi:

$$\{+z, +x\} \quad \{+z, -x\} \quad \{-z, +x\} \quad \{-z, -x\} \quad (218)$$

Dove  $\{\cdot, \cdot\}$  indica i valori dello spin lungo  $z$  ed  $x$  rispettivamente. Una particella che sia, ad esempio, di tipo  $\{+z, -x\}$  avrà *sempre*  $S_z = +\hbar/2$  e  $S_x = -\hbar/2$ . Dai risultati della meccanica quantistica possiamo immediatamente dedurre che uno sperimentatore non può misurare contemporaneamente  $S_x$  ed  $S_z$  sulla medesima particella dal momento che i due operatori non commutano. Per evitare un'immediata contraddizione tra le due teorie, imponiamo che la misura di uno dei due valori implichi la rinuncia a misurare l'altro: il risultato della misura è predeterminato da variabili appunto "nascoste" che possiamo determinare soltanto una alla volta.

Se consideriamo le due particelle ottenute dal decadimento di una particella a spin-0, per la conservazione del momento angolare avremo quattro possibilità per i tipi delle due particelle:

$$\begin{array}{ll} \{+z, +x\} & e \quad \{-z, -x\} \\ \{+z, -x\} & e \quad \{-z, +x\} \\ \{-z, +x\} & e \quad \{+z, -x\} \\ \{-z, -x\} & e \quad \{+z, +x\} \end{array} \quad (219)$$

Vogliamo dimostrare che questo modello produce risultati contraddittori rispetto a quelli della meccanica quantistica. Consideriamo una variante del precedente esperimento in cui due sperimentatori  $A$ ,  $B$  eseguono misurazioni su tre assi  $a, b, c$ , complanari ma non ortogonali. Ogni particella apparterrà ad uno dei tipi

$$\{\pm a, \pm b, \pm c\}$$

dove la terna denota lo spin ( $\pm\hbar/2$ ) su ciascuno degli assi. Per la conservazione del momento angolare, il decadimento genera una particella  $p_1$  di tipo  $\{\pm a, \pm b, \pm c\}$ , la corrispondente particella  $p_2$  dovrà essere di tipo  $\{\mp a, \mp b, \mp c\}$ . Supponiamo di far ripetere il decadimento di una particella a spin-0  $N$  volte. Abbiamo 8 casi per le particelle  $p_1, p_2$  che supponiamo verificarsi per  $N_1, N_2, \dots, N_8$  volte:



	$p_1$	$p_2$	
$N_1$	$\{+a, +b, +c\}$	$\{-a, -b, -c\}$	
$N_2$	$\{+a, +b, -c\}$	$\{-a, -b, +c\}$	
$N_3$	$\{+a, -b, +c\}$	$\{-a, +b, -c\}$	
$N_4$	$\{+a, -b, -c\}$	$\{-a, +b, +c\}$	
$N_5$	$\{-a, +b, +c\}$	$\{+a, -b, -c\}$	
$N_6$	$\{-a, +b, -c\}$	$\{+a, -b, +c\}$	
$N_7$	$\{-a, -b, +c\}$	$\{+a, +b, -c\}$	
$N_8$	$\{-a, -b, -c\}$	$\{+a, +b, +c\}$	

(220)

Supponiamo che  $A$ ,  $B$  eseguano due misurazioni su assi scelti casualmente ma diversi tra di loro. Vogliamo determinare la probabilità che  $A$ ,  $B$  rilevino valori opposti.

Innanzitutto, notiamo che se ci troviamo nei casi  $N_1$  o  $N_8$  la probabilità è 1: per qualsiasi scelta della coppia di assi su cui effettuare la misurazione i risultati saranno opposti.

Per ciascuno dei casi  $N_2, \dots, N_7$ , consideriamo la misurazione effettuata da  $A$ . Ci sono due assi  $x_1, x_2$  su cui il valore di spin è  $s$ , ed uno ( $x_3$ ) su cui vale  $-s$  per  $s \in \{\hbar/2, -\hbar/2\}$ . Secondo le regole del nostro esperimento, se  $A$  sceglie  $x_3$ ,  $B$  deve scegliere  $x_1$  o  $x_2$ ; ma siccome  $A$  avrebbe misurato  $s$  su ciascuno di questi,  $B$  dovrà misurare  $-s$ . Ne consegue che se  $A$  sceglie  $x_3$ ,  $A$  e  $B$  misureranno valori uguali. Supponiamo invece che  $A$  scelga uno tra  $x_1$  ed  $x_2$ , senza perdita di generalità  $x_1$ .  $B$  può scegliere con probabilità  $1/2$   $x_2$  o  $x_3$ . Se sceglie  $x_2$  misurerà  $-s$ , valore opposto a quello di  $A$ , se sceglie  $x_3$  misurerà invece  $s$ , cioè lo stesso valore. Riassumendo, la probabilità che  $A$  e  $B$  trovino valori diversi nei casi  $N_2, \dots, N_7$  è data da:

$$\Pr(N_{2 \rightarrow 7}) = \frac{1}{3} \times 0 + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad (221)$$

Utilizzando la precedente possiamo scrivere la probabilità globale come:

$$\Pr(N_{1 \rightarrow 8}) = \frac{\sum_i N_i \Pr(N_i)}{\sum_i N_i} \quad (222)$$

Notiamo che:

$$\Pr(N_{1 \rightarrow 8}) = \frac{1}{N} \left( N_1 + N_8 + \sum_{i=2}^7 \frac{1}{3} N_i \right) \quad (223)$$

da cui:

$$\Pr(N_{1 \rightarrow 8}) \geq \frac{1}{N} \left( \frac{N_1}{3} + \frac{N_8}{3} + \sum_{i=2}^7 \frac{1}{3} N_i \right) = \frac{1}{N} \left( \frac{N}{3} \right) = \frac{1}{3} \quad (224)$$

Vediamo ora la predizione della meccanica quantistica in una situazione analoga. Rappresentiamo lo stato  $|0, 0\rangle$  come:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | +a, -a\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} | -a, +a\rangle \quad (225)$$

L'ampiezza di probabilità di trovare la particella  $p_1$  con  $S_{1a} = -\hbar/2$  e la particella  $p_2$  con  $S_{2b} = \hbar/2$  è data:

$$\langle -a, +b|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -a, +b| +a, -a\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -a, +b| -a, +a\rangle \quad (226)$$

Il primo termine è zero, abbiamo quindi:

$$\langle -a, +b|0, 0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle -a, +b| -a, +a\rangle = -\frac{1}{2} (\langle -a| -a\rangle_1) (\langle +b| +a\rangle_2) \quad (227)$$

Evidentemente  $\langle -a| -a\rangle_1 = 1$ , quindi:

$$\langle -a, +b|0, 0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle +b| +a\rangle \quad (228)$$

Se  $|n\rangle$  forma un angolo  $\vartheta$  con l'asse  $z$  vale:

$$\langle +z| +n\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (229)$$

Quindi:

$$\langle +b| +a\rangle = \cos \frac{\vartheta_{ab}}{2} \quad (230)$$

La probabilità effettiva di trovare le particelle nello stato  $| -a, +b\rangle$  è dunque

$$|\langle +a, -b|0, 0\rangle|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_{ab}}{2} \quad (231)$$

In maniera completamente analoga:

$$|\langle -a, +b|0, 0\rangle|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_{ab}}{2} \quad (232)$$

Dunque, la probabilità complessiva di ottenere spin di segno opposto misurando lo spin lungo  $a$  di  $p_1$  e lungo  $b$  di  $p_2$  è data da:

$$2 \times \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_{ab}}{2} = \cos^2 \frac{\vartheta_{ab}}{2} \quad (233)$$

Supponiamo di prendere gli assi  $a, b, c$  ruotati di 120 gradi l'uno rispetto all'altro. Allora, la situazione è completamente simmetrica a quella che abbiamo descritto precedentemente per ogni possibile scelta di assi distinti. Valutando la (233) per  $\vartheta_{ab} = \pi/3$  si ottiene:

$$\cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \quad (234)$$

L'equazione precedente è in completo disaccordo con la predizione effettuata dalla teoria a variabili nascoste che abbiamo sviluppato fino ad ora: una delle due deve essere sbagliata ed un esperimento in laboratorio può decidere quale delle due sia in errore.