《现代控制理论》MOOC课程

1.3 状态向量的线性变换

状态空间空间表达式的非唯一性

系统特征值的不变性

对角线规范型和约当规范型

一. 状态空间空间表达式的非唯一性

- 状态变量是足以完全表征系统运动状态的最小个数的一组变量
- 状态变量是相互独立的
- 同一系统状态变量的个数是唯一确定的
- 同一系统状态变量的选取是非唯一的

- 同一系统不同状态向量之间必然存在一种线性变换的关系

一. 状态空间空间表达式的非唯一性

同一系统不同状态向量之间必然存在一种线性变换的关系。

证明：

反设：x、z为同一系统的两个不同状态向量，但x、z之间不存在线性变换关系

由x、z之间不存在线性变换关系。

则向量x中至少存在一个变量x_i，不能用向量z各分量的线性组合来表示，即独立于z向量的各分量。

因为，变量x_i和向量z的各分量都是状态变量，故要完全表征系统的动态行为向量z至少还要增加一个分量x_i，即向量z不是系统的状态向量。

反设不成立。故，同一系统不同状态向量之间必然存在一种线性变换的关系。

一. 状态空间空间表达式的非唯一性

设一给定的n阶系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \qquad x(0) = x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

对于任意给定的n×n阶非奇异阵T，作如下变换：

$$z = T^{-1}x$$

则z也一定是给定系统的另一个状态向量。

由 $z = T^{-1}x$ 可得 $x = Tz$,代入状态空间表达式为：

$$\begin{aligned} T\dot{z} &= ATz + Bu \qquad Tz(0) = x_0 \\ y &= CTz + Du \end{aligned}$$

一. 状态空间空间表达式的非唯一性

状态方程和初值两端同乘T的逆：

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$
$$y = CTz + Du$$

则有系统新的状态空间表达式:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \qquad z(0) = z_0$$
$$y = \bar{C}z + \bar{D}u$$

其中， $\bar{A} = T^{-1}AT$，$\bar{B}$=$T^{-1}B$， $\bar{C}$=CT，$\bar{D}$=D ， $z_0 = T^{-1}x_0$

由于T是任意非奇异阵，故系统的状态空间表达式是非唯一的。

一. 状态空间空间表达式的非唯一性

例. 某系统的状态空间表达式为： $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} x$

作如下变换，$x = Tz = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} z$。 求变换后系统的状态空间表达式。

解： $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$z(0) = T^{-1} x(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

一. 状态空间空间表达式的非唯一性

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{CT} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix}$$

变换后系统的状态空间表达式为：

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{z}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

二. 系统特征根的不变性

系统的特征值

定义：系统状态空间表达式中系统矩阵A的特征值称为系统的特征值。

- 系统特征值也就是系统矩阵特征方程$|\boldsymbol{\lambda I}-\boldsymbol{A}|=0$ 的根。

- 将特征方程写成多项式的形式：

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

显然对n阶系统有n个特征值。

二. 系统特征根的不变性

系统特征值的不变性

非奇异线性变换不改变系统的特征值。

证明：非奇异线性变换前： $|\lambda I - A| = 0$ 非奇异线性变换后： $\left|\lambda I - T^{-1}AT\right| = 0$

而： $\left|\lambda I - T^{-1}AT\right| = \left|\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT\right| = \left|T^{-1}\lambda T - T^{-1}AT\right| = \left|T^{-1}(\lambda I - A)T\right|$

因为矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积，矩阵逆的行列式等于矩阵行列式的倒数，所以有：

$$\left|T^{-1}(\lambda I - A)T\right| = \left|T^{-1}\right| |\lambda I - A| |T| = |\lambda I - A|$$

即 $|\lambda I - A| = \left|\lambda I - T^{-1}AT\right|$ 证毕