



# 《现代控制理论》MOOC课程

## 1.3 状态向量的线性变换

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

## 系统的特征向量

对于 $n \times n$ 维矩阵 $A$ , 若存在一个不为零的 $n$ 维向量 $p_i$  和一个标量  $\lambda_i$ , 使得:

$$(A - \lambda_i I)p_i = 0$$

则称  $p_i$  为矩阵 $A$ 的特征值  $\lambda_i$  所对应的特征向量。

计算特征向量, 求是求解齐次代数方程

$$(A - \lambda_i I)p_i = 0$$

由齐次代数方程解的性质, 系数矩阵奇异时, 有无穷多组非零解。

一个特征根, 对应于无穷多个特征向量。

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

## 对角规范型

对于给定系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ , 设其特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为两两互异, 由它们的特征向量组成变换阵  $T = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ , 那么系统的状态方程在变换  $z = T^{-1}x$  下必可化为如下形式的对角规范型:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} z + \bar{B}u, \quad \bar{B} = T^{-1}B$$

证: 对系统进行线性变换  $z = T^{-1}x$

可得到一个新的状态方程  $\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

$$\begin{aligned} AT &= A[p_1, p_2, \cdots, p_n] = [Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n] = [\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n] \\ &= [p_1, p_2, \cdots, p_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

方程两边同乘  $T^{-1}$  可得:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{证毕}$$

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

## 讨论

➤ 在对角规范型下，各状态变量间实现了完全解耦，可表示为n个独立的状态变量方程。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \bar{B}u$$

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

➤ 若系统矩阵A为标准型，即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

则将状态方程变换为对角规范型的变换阵T为范德蒙德阵，即：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

证明：设系统矩阵 $A$ 的特征值 $\lambda_i$ 所对应特征向量为：

$$p_i = [p_{1i} \quad p_{2i} \quad \cdots \quad p_{ni}]^T$$

由特征向量的定义可得  $(A - \lambda_i I)p_i = 0$

将规范性系统矩阵代入：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\lambda_i & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = 0$$

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

将矩阵方程展开：

$$\begin{cases} -\lambda_i p_{1i} + p_{2i} = 0 \\ -\lambda_i p_{2i} + p_{3i} = 0 \\ \vdots \\ -\lambda_i p_{(n-1)i} + p_{ni} = 0 \\ -a_0 p_{1i} - a_1 p_{2i} - \cdots - (a_{n-1} + \lambda_i) p_{ni} = 0 \end{cases}$$

这是一个齐次方程，且其秩小于n，故其有无穷个解。

令  $p_{1i} = 1$  可得  $p_{2i} = \lambda_i, \cdots, p_{ni} = \lambda_i^{n-1}$

故状态方程变换为对角规范型的变换阵可表示为：

$$T = [p_1 \quad p_1 \quad \cdots \quad p_n] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{得证}$$



## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

例. 给定线性定常系统  $\dot{x} = Ax + Bu$  , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

将状态方程化为规范型。

解: ① 确定系统的特征值, 即

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

可得:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$

因为系统特征值不存在重根, 故系统的状态方程可化为对角规范型。

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

## ② 确定非奇异变换阵T

求取与特征值  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 1$  所对应的特征向量。

代入特征向量求解方程  $(A - \lambda_i I)p_i = 0$  , 当  $\lambda_1 = 2$  有:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{可得 } p_{11} = k \text{ (} k \neq 0 \text{ 的任意值), } p_{21} = p_{31} = 0$$

$$\text{取 } k = 1 \text{ 有: } p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{同理可得: } p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{由此可得: } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{求逆可得: } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

③ 求系数矩阵  $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

故系统状态方程的对角规范型为：

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$