《现代控制理论》MOOC课程

5.2　极点配置问题

一. 状态反馈的极点配置问题

给定n阶线性定常受控系统： $\dot{x} = Ax + Bu$， $x(0) = \mathbf{0}$， $t \geq 0$

$$y = Cx$$

确定状态反馈控制$u = -Kx + v$，使得所导出的状态反馈闭环系统

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv$$

的极点为期望值$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\}$。

二. 状态反馈极点可配置的条件

定理：线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = \mathbf{0}, \quad t \geq 0$$

$$y = Cx$$

可通过状态反馈 $u = -Kx + v$ 任意配置全部极点的充要条件是系统完全能控。

证明：充分性(只讨论单输入单输出系统)

已知系统为完全能控，证明可任意配置极点。

即通过状态反馈必成立$det[\lambda I-(A-BK)]=f(\lambda^*)$

其中，$f(\lambda^*)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^*)=\lambda^n+a_{n-1}^*\lambda^{n-1}+\cdots+a_1^*\lambda+a_0^*$

由于系统完全能控，故必存在非奇异变换$x=T_{C1}\bar{x}$，使系统变换为能控标准I型：

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}\bar{u}$$
$$\bar{y}=\bar{C}\bar{x}$$

其中

$$\bar{A}=T_{C1}{}^{-1}AT_{C1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\qquad \bar{B}=T_{C1}{}^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\qquad \bar{C}=CT_{CI}=[\beta_0\quad \beta_1\quad \cdots\quad \beta_{n-1}]$$

取 $\bar{K}=KT_{C1}=[\bar{k}_0\quad \bar{k}_1\quad \cdots\quad \bar{k}_{n-1}]=[a_0^*-a_0\quad a_1^*-a_1\quad \cdots\quad a_{n-1}^*-a_{n-1}]$

于是

$$\bar{A}-\bar{B}\bar{K}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0^*-a_0 & a_1^*-a_1 & \cdots & a_{n-1}^*-a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0^* & -a_1^* & \cdots & -a_{n-1}^*\end{bmatrix}$$

这说明在能控标准I型下，状态反馈$\bar{K}$已将闭环系统极点配置到期望的位置。
那么$\bar{K}$与K之间的关系是什么？由于非奇异线性变换不改变系统的特征值，即

$$\begin{aligned}\det[\lambda I-(A-BK)]&=\det[sI-{T_{C1}}^{-1}(A-BK)T_{C1}]\\&=\det[sI-{T_{C1}}^{-1}AT_{C1}+({T_{C1}}^{-1}B)(KT_{C1})]\\&=\det[sI-(\bar{A}-\bar{B}\bar{K})]\end{aligned}$$

其中，$KT_{C1}=\bar{K}$，即 $K=\bar{K}{T_{C1}}^{-1}$

这说明对于任意给定的期望极点$\{\lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ \cdots,\ \lambda_n^*\}$，都可以找到状态反馈矩阵

$K=\bar{K}{T_{C1}}^{-1}$使上式成立，即可任意配置系统的闭环极点。 充分性得证。

必要性：已知极点可配置，证明系统完全能控。

反证法，已知极点可任意配置，反设系统不完全能控。

由于系统不完全能控，故存在非奇异线性变换阵R_C，对系统进行能控性分解而导出：

$$\tilde{A} = R_C^{-1} A R_c = \begin{bmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = R_C^{-1} B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

且对任一状态反馈矩阵$K = [k_1 \quad k_2]$， $\tilde{K} = K R_c = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2]$ 有

$$det[\lambda I - (A - BK)] = det[\lambda I - R_C{}^{-1}(A - BK)R_C] = det[\lambda I - R_C{}^{-1} A R_C + (R_C{}^{-1} B)(K R_C)]$$

$$= det \begin{bmatrix} \lambda I - \tilde{A}_c + \tilde{B}_c \tilde{k}_1 & -\tilde{A}_{12} + \tilde{B}_c \tilde{k}_2 \\ 0 & \lambda I - \tilde{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = det\left(\lambda I - \tilde{A}_c + \tilde{B}_c \tilde{k}_1\right) det(\lambda I - \tilde{A}_{\bar{c}})$$

这表明状态反馈不能改变系统不能控部分的特征值，系统不能任意配置全部极点。这与系统可任意配置极点的已知条件矛盾，故反设不成立。

即系统是完全能控的，必要性得证。

三.单输入单输出系统状态反馈极点配置的算法

算法1 给定线性定常系统$\dot{x}=Ax+Bu$和一组期望的闭环极点$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\}$确定状态反馈矩阵K，实现极点配置的算法如下：

1. 判断系统的能控性，若系统完全能控则继续下一步。

2. 计算受控系统矩阵A的特征多项式，即 $det(\lambda I-A)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$

3.计算由期望极点$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\}$所确定的特征多项式

$$f(\lambda^*)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^*)=\lambda^n+a_{n-1}^*\lambda^{n-1}+\cdots+a_1^*\lambda+a_0^*$$

4. 计算变换为能控标准型后系统的状态反馈矩阵：$\bar{K}=[a_0^*-a_0 \quad a_1^*-a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}^*-a_{n-1}]$

5.计算Ⅰ型能控标准型变换阵

$$T_{C1} = [A^{n-1}b \quad A^{n-2}b \quad \cdots \quad b]\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

6.计算状态反馈矩阵 $K = \bar{K}{T_{C1}}^{-1}$ 。

例：受控系统的状态方程如下：$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$

求状态反馈矩阵K使系统的闭环极点为 $\lambda_{1,2} = -1 \pm j2$

解：(1)判断系统的可控性

系统的能控性秩判别矩阵：$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$， $rankM = 2$

满秩，系统是完全能控的，可由状态反馈任意配置系统的闭环极点。

（2）原开环系统的特征多项式为：

$$f_0(\lambda) = det(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 3 \\ -4 & \lambda+9 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 30$$

（3）闭环系统的期望特征多项式为：

$$f_k(\lambda^*) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

（4）能控标准型变换后的反馈矩阵：

$$\overline{\boldsymbol{K}} = [a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1] = [5 - 30 \quad 2 - 11] = -[25 \quad 9]$$

（5）I型能控标准型变换阵

$$\boldsymbol{T_{C1}} = [\boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-9} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{11} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{24} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{14} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{T_{C1}^{-1}} = -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -14 & 24 \end{bmatrix}$$

（6）状态反馈增益

$$\boldsymbol{K} = \overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T_{C1}}^{-1} = -[25 \quad 9]\left(-\frac{1}{18}\right)\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -14 & 24 \end{bmatrix} = [-5.6 \quad 7.8]$$

算法2 给定线性定常系统 $\dot{x}=Ax+Bu$ 和一组期望的闭环极点$\{\lambda_1^*，\lambda_2^*，\cdots，\lambda_n^*\}$确定状态反馈矩阵K，实现极点配置的算法如下：

1.计算由期望极点$\{\lambda_1^*，\lambda_2^*，\cdots，\lambda_n^*\}$所确定的特征多项式

$$f(\lambda^*)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^*)=\lambda^n+a_{n-1}^*\lambda^{n-1}+\cdots+a_1^*\lambda+a_0^*$$

2. 计算状态反馈闭环系统的特征多项式：$det[\lambda I-(A-BK)]=0$

3. 令状态反馈特征多项式与期望特征多项式相等，得到状态反馈阵K。

例：受控系统的状态方程如下：$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$

求状态反馈矩阵K使系统的闭环极点为 $\lambda_{1,2} = -1 \pm j2$

解：(1)判断系统的可控性

系统的能控性秩判矩阵：$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，　$rankM = 2$

满秩，系统是完全能控的，可由状态反馈任意配置系统的闭环极点。

(2) 闭环系统的期望特征多项式为：

$$f_k(\lambda^*) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

(3) 设状态反馈阵为：$K = [k_1 \quad k_2]$，则状态反馈控制系统的特征多项式为：

$$|\lambda I - (A - BK)| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \right) \right| = \lambda^2 + (11 + 3k_1 + k_2)\lambda + (30 + 24k_1 + 14k_2) = 0$$

比较期望特征多项式可得：$11 + 3k_1 + k_2 = 2$

$30 + 24k_1 + 14k_2 = 5$

解得：$K = [k_1 \quad k_2] = [-5.6 \quad 7.8]$

四. 输出反馈的极点配置问题

1. 利用非动态输出反馈$u = -Kx + v$，不能任意地配置系统的全部极点。

以单输入单输出系统为例，设受控系统的传递函数为$W_0(s)$，则输出反馈系统的传递函数为：
$$W_h(s) = \frac{W_0(s)}{1 + HW_0(s)}$$

因此，闭环系统的根轨迹方程为：$1 + HW_0(s) = 0$

当H从0到∞变化时，就得到了闭环系统的根轨迹。

因此，无论H怎样变化，系统的特征根总是在根轨迹上。即极点不能任意配置。

2. 如果在引入输出反馈的同时，引入动态补偿器，将可对输出反馈系统的全部极点实现任意配置。