# 《现代控制理论》MOOC课程

## 3.3 线性时变系统的能控性与能观性

## 一. 线性时变系统能控性的定义

对于线性时变系统： $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ， $x(t_0) = x_0$， $t, t_0 \in J$

$y = C(t)x + D(t)u$

**能控：** 若存在一个无约束的容许控制 $u(t)$ ，能在有限时间区间内 $t \in [t_0, t_1]$，使系统由某一非零的初始状态 $x(t_0)$，转移到终端状态 $x(t_1) = 0$，则称系统在 $t_0$ 时刻的状态 $x(t_0)$ 是能控的。

**完全能控：** 若系统在状态空间中的所有非零点，在时刻 $t_0$ 均能控，则称系统在时刻 $t_0$ 是完全能控的。

**不完全能控：** 若系统在状态空间中至少存在一个非零状态在 $t_0$ 不能控，则称系统在时刻 $t_0$ 是不完全能控的。

## 二 线性时变系统的能控性判据

### 1. Gram(格拉姆)矩阵判据

线性时变系统： $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}$ ， $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$， $t,t_0\in \boldsymbol{J}$

在$t_0$时刻为完全能控的充要条件是，存在一个有限的时刻 $t_1\in J$， $t_1>t_0$ ，使如下定义的GRAM矩阵：

$$W_c[t_0,t_1]=\int_{t_0}^{t_1}[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)][\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)]^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{d}t$$

为非奇异。

## 2. 秩判据

线性时变系统： $\dot{x}=A(t)x+B(t)u$，$x(t_0)=x_0$，$t,t_0\in J$

在$t_0$时刻为完全能控的充分条件是，矩阵$A(t)$和$B(t)$是(n-1)阶连续可微的，且存在一个有限的时刻 $t_1\in J$，$t_1>t_0$，使如下定义的能控性判别矩阵

$$M(t_1)=[M_0(t_1)\quad M_1(t_1)\quad \cdots\quad M_{n-1}(t_1)]$$

的秩$rankM(t_1)=n$。其中，n为系统矩阵的维数；

$$M_0(t)=B(t)$$

$$M_{k+1}(t)=-A(t)M_k(t)+\frac{d}{dt}M_k(t)\qquad k=0,1,\cdots,n-2$$

例. 设线性时变系统的状态方程为：$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$ 判断系统的能控性。

解： $M_0(t)=B(t)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

$$M_1(t)=-A(t)M_0(t)+\dot{M}_0(t)=-\begin{bmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t\\ 0\end{bmatrix}$$

$$M(t)=[M_0(t)\quad M_1(t)]=\begin{bmatrix}0 & -t\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$rankM(t)=2$$

故当$t>0$时，系统完全能控。

## 三. 线性时变系统能观性的定义

对于线性时变系统： $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$， $x(t_0) = x_0$， $t, t_0 \in J$

$y = C(t)x + D(t)u$

**能观：** 存在一有限的观测时间 $t_1 > t_0$， 使根据 $[t_0, t_1]$期间的输出 $y(t)$， 能唯一地确定系统在时刻 $t_0$ 的状态$x(t_0)$， 则称系统在时刻$t_0$ 的状态$x(t_0)$是能观测的。

**完全能观：** 若系统的每一非零状态在时刻$t_0$ 都是能观测的， 则称系统在时刻$t_0$是完全能观。

**不能观：** 如果取时刻$t_0$的一个非零初始状态$x(t_0)$， 存在一个有限时刻 $t_1 > t_0$ 使对所有的$t \in [t_0, t_1]$有 $y(t) \equiv 0$ 则称系统在 $t_0$ 时刻的状态 $x(t_0)$是不能观的。

## 四 线性时变系统的能观性判据

### 1. Gram(格拉姆)矩阵判据

线性时变系统：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\mathrm{t})\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$，$t, t_0 \in \boldsymbol{J}$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(\mathrm{t})\boldsymbol{x}$

在$t_0$时刻为完全能观的充要条件是，存在一个有限的时刻 $t_1 \in \boldsymbol{J}$，$t_1 > t_0$ ，使如下定义的GRAM矩阵：

$$W_o[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} [\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)]^{\boldsymbol{T}} [\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)]\, \boldsymbol{d}t$$

为非奇异。

## 2. 秩判据

线性时变系统：$\dot{x} = A(\mathrm{t})x$，$x(t_0) = x_0$，$t, t_0 \in J$

$y = C(\mathrm{t})x$

在$t_0$时刻为完全能观的充分条件是，矩阵$A(\mathrm{t})$和$B(\mathrm{t})$是(n-1)阶连续可微的，且存在一个有限的时刻 $t_1 \in J$，$t_1 > t_0$，使如下定义的能观性判别矩阵

$$N(t_1) = \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix}$$

的秩$rankN(t_1) = n$ 。

其中，n为系统矩阵的维数； $N_0(t) = C(t)$

$$N_{k+1}(t) = N_k(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_k(t) \qquad k=0,1,\cdots,n-2$$

例. 设线性时变系统的 $A(t)$、$C(t)$ 为：

$$A(t)=\begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} \qquad C(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

判断系统的能观性。

解： $$N_0(t)=C(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_1(t)=N_0(t)A(t)+\dot{N}_0(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t & 1 & t^2 \end{bmatrix}$$

$$N_2(t)=N_1(t)A(t)+\dot{N}_1(t)=\begin{bmatrix} t & 1 & t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t^2+1 & 2t & 2t+t^4 \end{bmatrix}$$

故 $N(t)=\begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2+1 & 2t & 2t+t^4 \end{bmatrix}$

只要 $t>0$,有$rankN=3$ ，故系统完全能观。