《现代控制理论》MOOC课程

2.3 线性定常系统非齐次状态方程的解

一. 零状态响应

结论： 给定初始状态为零的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad t \geq 0$$

其中，x为n维状态向量，u为r维输入向量，A和B分别为n×n和n×r常阵，那么系统的零状态响应可表示为：

$$x_{0x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \qquad t \geq 0$$

证明： $$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) = e^{-At}(-A)x + e^{-At}\dot{x} = e^{-At}(\dot{x} - Ax) = e^{-At}Bu(t)$$

对上式两边从0到t进行积分，得到 $$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

由初值条件 $x(0) = 0$，等式两边左乘 e^{At} 即得：

$$x_{0x}(t) = e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{At}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

得证

二. 线性定常系统非齐次状态方程的解

同时考虑初始状态 x_0 和外部输入 u 作用的线性定常系统的运动规律，即状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu,\quad x(0) = x_0,\quad t \geq 0$$

的解可以表示为零输入响应和零状态响应的叠加，即

$$x(t) = x_{0u}(t) + x_{0x}(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \qquad t \geq 0$$

或写为更一般的形式：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \qquad t \geq t_0$$

三. 线性定常系统的响应

1. 脉冲响应：$u(t) = K\delta(t)$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BK\delta(\tau)d\tau$$

$$= e^{At}x_0 + \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}\delta(\tau)d\tau\right)BK = e^{At}x_0 + e^{At}BK$$

2. 阶跃响应：$u(t) = K1(t)$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BK1(\tau)\,d\tau = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BK\,d\tau = e^{At}x_0 + e^{At}\left(\int_0^t e^{-A\tau}\,d\tau\right)BK$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}\left(\int_0^t de^{-A\tau}\right)(-A^{-1})BK = e^{At}x_0 + e^{At}\left(e^{-At} - I\right)(-A^{-1})BK$$

$$= e^{At}x_0 + \left(e^{At} - I\right)A^{-1}BK = e^{At}x_0 + A^{-1}\left(e^{At} - I\right)BK$$

三. 线性定常系统的响应

令 $t-\tau=\mu$

则 $\mathrm{d}\tau=-d\mu$

3. 斜坡响应：$u(t)=Kt1(t)$

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BK\tau 1(\tau)\,d\tau=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BK\tau d\tau=e^{At}x_0-\int_t^0 e^{A\mu}BK(t-\mu)d\mu$$

$$=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A\tau}BK(t-\tau)d\tau=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A\tau}BKtd\tau-\int_0^t e^{A\tau}BK\tau d\tau$$

$$=e^{At}x_0+A^{-1}\left(e^{At}-I\right)BKt-A^{-1}\left[\int_0^t \tau de^{A\tau}\right]BK$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$=e^{At}x_0+A^{-1}\left(e^{At}-I\right)BKt-A^{-1}\tau e^{A\tau}BK\Big|_0^t+A^{-1}\left[\int_0^t e^{A\tau}d\tau\right]BK$$

$$=e^{At}x_0+\left[A^{-2}\left(e^{At}-I\right)-A^{-1}t\right]BK$$