《现代控制理论》MOOC课程

2.2 状态转移矩阵

一. 状态转移矩阵的定义

定义：对于给定的线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 其中，x为n维状态向量

称满足如下矩阵微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t-t_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t-t_0), \quad \boldsymbol{\Phi}(t_0) = \boldsymbol{I}, \quad t \geq t_0$$

的n×n维解阵 $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$ 为系统的状态转移矩阵。

求解矩阵微分方程可得，状态转移矩阵为： $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0) = \boldsymbol{e}^{A(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$

当 $t_0 = 0$ 时，状态转移矩阵可表示为： $\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{e}^{At}, \quad t \geq 0$

- 系统的零输入响应可用状态转移矩阵表示：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0), \quad t \geq t_0 \quad \text{或} \quad \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{e}^{At}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0), \quad t \geq 0$$

- 状态转移矩阵的物理意义：

$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$就是在零输入条件下将时刻 t_0 的状态 x_0 转移到时刻t的状态 $x(t)$ 的一个线性变换。

二. 状态转移矩阵的性质

1. 分解性 $\boldsymbol{\Phi}(t+\tau)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(\tau)$

证明：由状态转移矩阵的物理意义：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-(-\tau))\boldsymbol{x}(-\tau)=\boldsymbol{\Phi}(t+\tau)\boldsymbol{x}(-\tau)$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(0-(-\tau))\boldsymbol{x}(-\tau)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(\tau)\,\boldsymbol{x}(-\tau)$$

故有： $\boldsymbol{\Phi}(t+\tau)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(\tau)$

从-τ到t的转移，可以看作是从-τ 转移到0，再从0转移到t的组合。

2. 可逆性 $[\boldsymbol{\Phi}(t)]^{-1}=\boldsymbol{\Phi}(-t)$

证明： 由性质1

$$\boldsymbol{\Phi}(t-t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(-t)=\boldsymbol{I} \quad \text{故有：} \quad [\boldsymbol{\Phi}(t)]^{-1}=\boldsymbol{\Phi}(-t)$$

状态转移矩阵的逆意味着状态向量按时间的逆向转移。

即从0状态到t状态转移的逆，等于从t状态到0状态的转移。

二. 状态转移矩阵的性质

3. 传递性 $\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_0)$

一个转移过程可以分解为若干个小的转移过程。即从t_0到t_2的转移等于从 t_0 转移到t_1，再从 t_1 转移到 t_2。

证明：由状态转移矩阵的物理意义：

$$x(t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$x(t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

故有：$\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_0)$

4. 倍时性 $[\boldsymbol{\Phi}(t)]^k=\boldsymbol{\Phi}(kt)$

状态转移矩阵的k次方等于该转移矩阵的时间自变量扩大k倍。

证明：由性质1

$$[\boldsymbol{\Phi}(t)]^k=\boldsymbol{\Phi}(t)\cdots\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(kt)$$

二. 状态转移矩阵的性质

5. 微分性和交换性 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A\Phi}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{A}$

状态转移矩阵与矩阵A的乘积是可以互换的。

证明： 由矩阵指数函数的性质

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}^{At}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{At} = \boldsymbol{e}^{At}\boldsymbol{A}$$

故有： $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A\Phi}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{A}$

6. 唯一性

系统的状态转移矩阵唯一地由系统的系统矩阵决定。

由状态转移矩阵的定义 $\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0)$，$\Phi(t_0) = \boldsymbol{I}$，$t \geq t_0$

其唯一的参数就是系统矩阵。

三. 状态转移矩阵的算法

状态转移矩阵实质上就是矩阵指数函数，其求解方法与矩阵指数函数相同。

例：已知线性定常系统的状态转移矩阵$\Phi(t)$为：

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t}+e^{3t})\\ -e^{-t}+e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{3t})\end{bmatrix}$$

求系统矩阵。

解：由状态转移矩阵的定义：$\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)$，$\Phi(0)=\boldsymbol{I}$，$t\geq 0$

解法1：由 $A=\dot{\Phi}(t)\Phi(t)^{-1}$ 计算

解法2：由 $A=\dot{\Phi}(t)\Phi(t)^{-1}\big|_{t=0}=\dot{\Phi}(t)\big|_{t=0}$

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(-e^{-t}+3e^{3t}) & \frac{1}{4}(e^{-t}+3e^{3t})\\ e^{-t}+3e^{3t} & \frac{1}{2}(-e^{-t}+3e^{3t})\end{bmatrix}$$

$$A=\dot{\Phi}(t)\big|_{t=0}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$