《现代控制理论》MOOC课程

5.5　状态观测器

一. 状态观测器的定义

定义：考虑n维线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu,\ \ x(0) = x_0, t \geq 0$

$$y = Cx$$

其中，x不能直接测量，输出y和控制u是可以测量的。则称以y和u为输入，且其输出$\hat{x}(t)$满足如下关系式$\lim\limits_{t\to\infty} \hat{x}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$的一个n维线性定常系统为全维状态观测器。

二. 全维状态观测器的实现

1.根据系统已知的系数矩阵A、B和C，按和原系统相同的结构形式，复制一个基本系统。

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu,\ \ \hat{x}(0) = \hat{x}_0, t \geq 0$$

当使初始状态$\hat{x}_0$=x_0，则理论上可实现所有的$t > 0$均成立$\hat{x}(t) = x(t)$即实现完全的状态重构；

- 但是，这种开环型的状态观测器是难以实际应用的。因为：

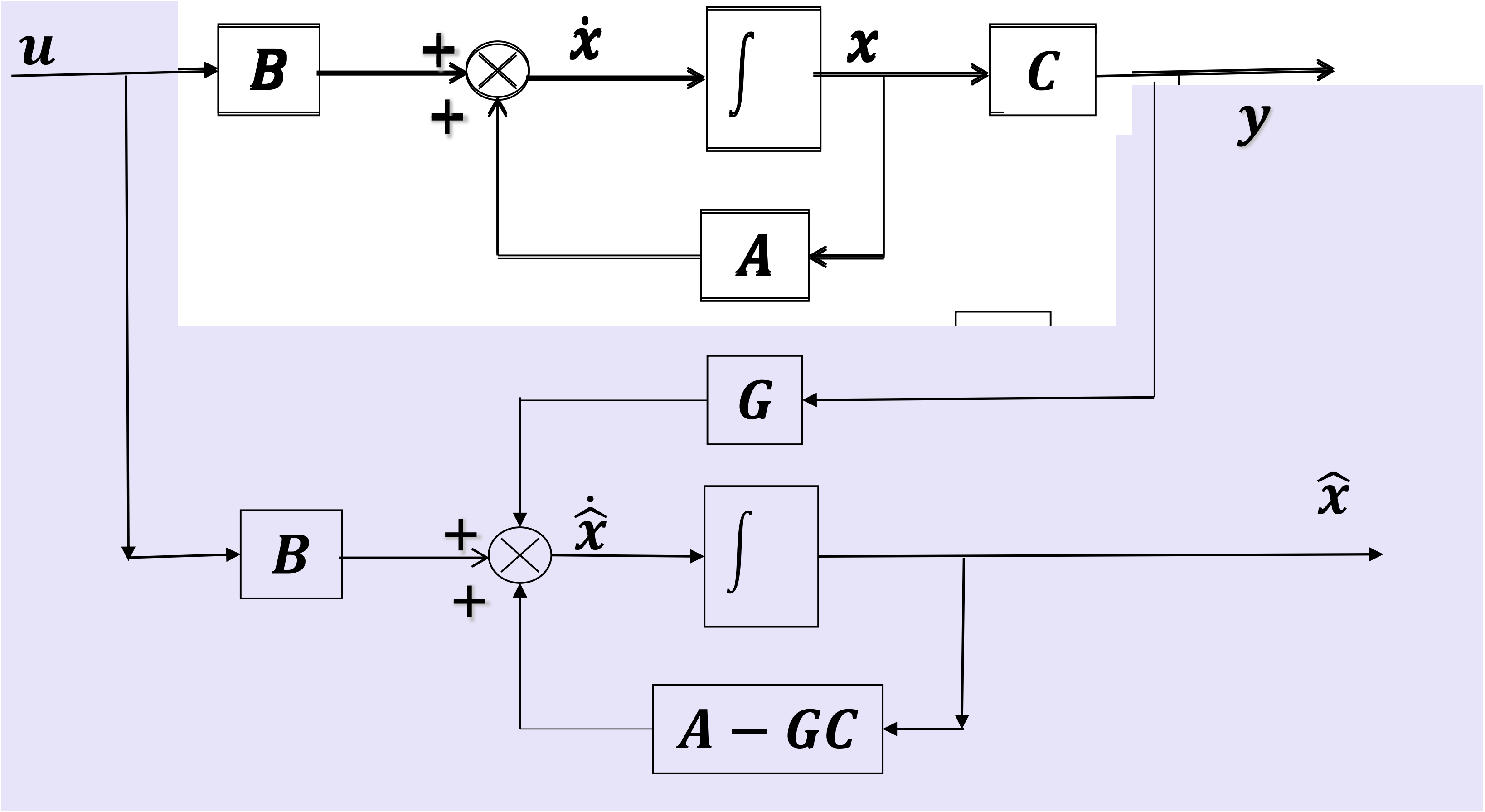
  第一，每次用这种观测器前都必须设置初始状态，这显然是不方便的；

  第二，如果系统矩阵A包含不稳定的特征值，那么即使$\hat{x}_0$和x_0 间有很小的偏差，则随着时间的推移偏差将愈来愈大。

2. 取原系统输出y和复制系统输出$\hat{y}$之差作为修正变量，并将其经增益矩阵G反馈到复制系统中的积分器输入端，构成一个闭环系统。即

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x}) = (A - GC)\hat{x} + Gy + Bu$$

其结构可表示如下：



三. 全维状态观测器极点配置的条件

定理：考虑n维线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu,\quad x(0) = x_0, t \geq 0$

$$y = Cx$$

完全能观，则必可由如下描述的状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Gy + Bu \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

来重构系统状态，并且必可通过选择增益矩阵G而实现任意配置$A - GC$的全部特征值。

证明：取$\tilde{x} = x - \hat{x}$，则有

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A - GC)\hat{x} - Gy - Bu = (A - GC)(x - \hat{x})$$

只要使矩阵$(A - GC)$的特征值具有负的实部，那么一定可以做到使

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = 0 \qquad 即 \qquad \lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

因此，状态能否重构的关键在于能否找到增益矩阵G，使矩阵$(A - GC)$的极点任意配置。

因为系统$\{A,B,C\}$完全能观，故根据对偶定理，其对偶系统$\{A^T,C^T,B^T\}$完全能控。

根据极点配置的充要条件，对于任意给定的n个特征值$\{\lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ \cdots,\ \lambda_n^*\}$，必可找到一个实常数阵$K$，使下式成立：

$$det[\lambda I-(A^T-C^TK)]=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^*)$$

由于矩阵转置特征值不变，即

$$(A^T-C^TK) \text{ 与 } (A^T-C^TK)^T=(A-K^TC)$$

具有相同的特征值。

故当取 $G=K^T$ 时有：

$$det[\lambda I-(A-GC)]=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^*)$$

即可任意配置矩阵$(A-GC)$的特征值，故必可使系统稳定，从而可实现状态观测。

四. 全维状态观测器的设计步骤

算法：给定需状态估计的系统 $\dot{x} = Ax + Bu,\quad x(0) = x_0, t \geq 0$
$y = Cx$

为完全能观，使设计的状态观测器有一组期望的极点$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\}$，则设计全维状态观测器的步骤如下：

1. 导出对偶系统$\{A^T, C^T, B^T\}$

2. 应用极点配置算法，对系统$\{A^T, C^T, B^T\}$确定状态反馈矩阵K，使下式成立

$$det[\lambda I - (A^T - C^T K)] = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i^*)$$

3. 取$G = K^T$

4. 计算$(A - GC)$，则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Gy + Bu \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

而 $\hat{x}$，即为x的估计状态。

五. 降维状态观测器

由于系统的输出y总是能观测的。若系统能观，且输出向量y的维数是q，则状态向量中的q个分量可由输出y直接获得。那么设计的状态观测器只需观测其余$n-q$个状态分量，这样的观测器称为**降维观测器**。

算法 降维观测器的设计步骤

给定需估计状态的系统$\{A,B,C\}$，已知$rank\mathrm{C}=\mathrm{q}$，且$\{A,C\}$为完全能观，则其$n-q$维降维观测器可按如下步骤设计：

1. 定义$n\times n$维矩阵$P=\begin{bmatrix}C\\R\end{bmatrix}$ 其中，R为使P非奇异的$(n-q)\times n$常阵。

计算P的逆，并将其分块表示 $Q=P^{-1}=[Q_1 \quad Q_2]$

其中，Q_1，Q_2分别为$\mathrm{n}\times q$和$\mathrm{n}\times(n-q)$矩阵。显然有：

$$PQ=\begin{bmatrix}C\\R\end{bmatrix}[Q_1 \quad Q_2]=\begin{bmatrix}CQ_1 & CQ_2\\RQ_1 & RQ_2\end{bmatrix}$$ 即$CQ_1=I_q$，$CQ_2=0$

2. 对需估计状态的系统，进行非奇异变换$\overline{x}=Px$，可导出

$$\dot{\overline{x}}=PAP^{-1}\overline{x}+PBu=\overline{A}\overline{x}+\overline{B}\overline{u}$$
$$y=CP^{-1}\overline{x}=C\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\end{bmatrix}\overline{x}=\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}\overline{x}$$

令 $\overline{x}=\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}$ 其中$\overline{x}_1$和$\overline{x}_2$分别为q和$n-q$维，则上式可表示为：

$$\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1\\ \dot{\overline{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}=\overline{x}_1$$

由于$y=\overline{x}_1$可直接利用无需重构，只需重构$n-q$维的分量。

3. 导出$\overline{x}_2$分量的状态方程和输出方程

$$\dot{\overline{x}}_2 = \overline{A}_{22}\overline{x}_2 + (\overline{A}_{21}y + \overline{B}_2u)$$

$$\dot{y} - \overline{A}_{11}y - \overline{B}_2u = \overline{A}_{12}\overline{x}_2$$

令 $\overline{u} = \overline{A}_{21}y + \overline{B}_2u$, $w = \dot{y} - \overline{A}_{11}y - \overline{B}_2u$

则上式可表示为

$$\dot{\overline{x}}_2 = \overline{A}_{22}\overline{x}_2 + \overline{u}$$
$$w = \overline{A}_{12}\overline{x}_2$$

系统$\{\overline{A}_{22}, \overline{A}_{12}\}$为完全能观的充要条件为$\{A, C\}$完全能观。

4. 对$n-q$维子系统，构造全维观测器。

5. 进行状态变换。