《现代控制理论》MOOC课程

3.2 线性控制系统的能观性

一. 能观性的定义

能观： 对于线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu\,,\quad x(0) = x_0,\quad t \geq 0$$
$$y = Cx + Du$$

存在一有限的观测时间 $t_1 > t_0$，使根据 $[t_0, t_1]$ 期间的输出 $y(t)$，能唯一地确定系统在 t_0 时刻的状态 $x(t_0)$，则称状态 $x(t_0)$ 是能观测的。

完全能观： 若系统的每一个非零状态都是能观测的，则称系统完全能观。

不能观： 如果取时刻 t_0 的一个非零初始状态 $x(t_0)$，存在一个有限时刻 $t_1 > t_0$ 使对所有的 $t \in [t_0, t_1]$ 有 $y(t) \equiv 0$ 则称状态 $x(t_0)$ 是不能观的。

二 线性定常系统的能观性判据

➢ 由于能观所表示的是输出反映状态变量的能力，与控制作用无直接关系，因此在分析能观性时，可令 $u(t) \equiv 0$，此时系统的状态方程为：

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

1. Gram(格拉姆)矩阵判据

线性定常系统 $\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$

$$y = Cx$$

完全能观的充要条件是：存在时刻 $t_1 > 0$，使如下定义的Gram矩阵为非奇异。

$$W_o[0, t_1] = \int_0^{t_1} (Ce^{At})^T (Ce^{At})\, dt$$

$$W_c[0, t_1] = \int_0^{t_1} (e^{-At}B)(e^{-At}B)^T\, dt$$

证明：充分性：已知 $W_o[0,t_1]$非奇异，证明系统应完全能观。

由于 $W_o[0,t_1]$非奇异，故 $W_o^{-1}[0,t_1]$ 存在，因此可根据系统在$[0,t_1]$上的已知输出$y(t)$来构造如下函数：

$$W_o^{-1}[0,t_1]\int_0^{t_1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{At})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{d}t = W_o^{-1}[0,t_1]\int_0^{t_1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{At})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{d}t = W_o^{-1}[0,t_1]\int_0^{t_1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{At})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{At}\boldsymbol{x_0}\boldsymbol{d}t$$

$$= W_o^{-1}[0,t_1]\int_0^{t_1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{At})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{At})\,\boldsymbol{d}t\boldsymbol{x_0} = W_o^{-1}[0,t_1]W_o[0,t_1]\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}$$

这表明在 $W_o[0,t_1]$ 非奇异的条件下，系统任意的非零初始状态都可以通过系统在 $[0,t_1]$ 上的输出获得，因此系统完全能观。 充分性得证

必要性：已知系统应完全能观，证明非奇异。

反证法。反设 $W_o[0,t_1]$奇异，但系统能观。

由于 $W_o[0,t_1]$ 奇异，则必存在某个非零的向量 $\overline{x}_0$，使 $\overline{x}_0^T W_o[0,t_1]\overline{x}_0 = 0$ 成立。

$$\overline{x}_0^T W_o[0,t_1]\overline{x}_0 = \overline{x}_0^T \int_0^{t_1} (Ce^{At})^T (Ce^{At})\, dt\, \overline{x}_0 = \int_0^{t_1} (Ce^{At}\overline{x}_0)^T (Ce^{At}\overline{x}_0)\, dt = \int_0^{t_1} \big(y(t)\big)^T y(t) dt$$

$$= \int_0^{t_1} \|y(t)\|^2 dt = 0$$

故 $y(t) = Ce^{At}\overline{x}_0 = \mathbf{0}$ $\quad \forall t \in [0, t_1]$

即非零状态 $\overline{x}_0$ 是不可观的。反设不成立。必要性得证

得证

2. 秩判据

线性定常系统完全能观的充要条件是：$(n\times m)\times m$ 阶能观性矩阵 $N=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 的秩 $rankN=n$

3. PBH判据

线性定常系统完全能观的充要条件是，对矩阵A的所有特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$

$$rankN=\begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix}=n \qquad i=1,2,\cdots,n$$

均成立。

4. 规范型判据

线性定常系统完全能观的充要条件是：

(1) 当系统矩阵A的特征值为两两互异时，系统状态方程经线性变换导出的对角规范型

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\bar{x} \qquad \bar{y}=\bar{C}\bar{x}=[\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \cdots \quad \bar{c}_n]$$

中 $\bar{c}_i\neq 0$ ，即 $\bar{C}$中不包含元素全为零的列。

(2) 当系统矩阵A的特征值存在重根时，系统状态方程经线性变换导出的约当标准型

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_l \end{bmatrix} \tilde{x} \qquad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} = [\tilde{c}_1 \quad \cdots \quad \tilde{c}_i \quad \cdots \quad \tilde{c}_l]$$

设特征值 λ_i 的代数重数为 σ_i，几何重数为 α_i

1）若 $\sigma_i=1$，则 λ_i 对应的输出矩阵列 $\tilde{c}_i$ 不全为0；

2）若 $\sigma_i>1, \alpha_i=1$，则 λ_i 对应的输出矩阵 $\tilde{c}_i$ 的第一列不全为0；

3）若 $\alpha_i>1$，则 λ_i 对应的每一个约当子块第一列对应的输出矩阵列组成的矩阵 $[\tilde{c}_{1_{i1}} \quad \tilde{c}_{1_{i2}} \quad \cdots \quad \tilde{c}_{1_{i\alpha_i}}]$ 均为列线性无关。

例. 已知系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}x$$

试判别其能观性。

解： $rankN=rank\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}0 & 6\\ 0 & 30\end{bmatrix}=1$ 故系统不完全能观。

例. 已知系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 7\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

试判别其能观性。

解：由于C中不包含全为0的列，故系统完全能观。