



《现代控制理论》MOOC课程

1.2 状态空间表达式的建立

三. 依据传递函数或高阶微分方程建立状态空间表达式

单输入单输出系统实现方法一

由系统的传递函数可得：

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s) \quad m \leq n$$

1. 当 $m < n$

引入中间变量
$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s)$$

进而可得
$$\tilde{Y}(s) (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) = U(s)$$

$$Y(s) = \tilde{Y}(s) (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)$$

拉氏微分定理

拉氏微分定理：

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(n-k)}(0)$$

当初始条件为0时：

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$$

拉氏反变换：

$$L^{-1}[s^n F(s)] = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = f^{(n)}(t)$$

取拉式反变换可得：

$$y = b_m \tilde{y}^{(m)} + b_{m-1} \tilde{y}^{(m-1)} + \dots + b_1 \tilde{y}^{(1)} + b_0 \tilde{y} \quad (1)$$

$$\tilde{y}^{(n)} + a_{n-1} \tilde{y}^{(n-1)} + \dots + a_1 \tilde{y}^{(1)} + a_0 \tilde{y} = u \quad (2)$$

选取状态变量为：

$$x_1 = \tilde{y}, x_2 = \tilde{y}^{(1)}, \dots, x_n = \tilde{y}^{(n-1)} \quad (3)$$

可得状态方程为：

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = \tilde{y}^{(n)} = -a_{n-1} \tilde{y}^{(n-1)} - \dots - a_1 \tilde{y}^{(1)} - a_0 \tilde{y} + u = -a_{n-1} x_n - \dots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u$$

可得输出方程为：

$$y = b_m x_{m+1} + b_{m-1} x_m + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

状态空间表达式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0]x$$

特点:

- 系统矩阵A的前n-1行为次对角单位阵，最后一行由传递函数分母的系数，也就是系统特征多项式的系数取相反号组成。
- 输入矩阵b，最后一个元素为1，其余元素均为0。
- 能控标准I型。

2. 当 $m = n$

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s) \\
 &= \left(b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + \dots + (b_1 - b_n a_1) s + (b_0 - b_n a_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right) U(s) \quad (1)
 \end{aligned}$$

引入中间变量 $\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s)$

将中间变量 $\tilde{Y}(s)$ 代入 (1) 式可得

$$Y(s) = ((b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + \dots + (b_1 - b_n a_1) s + (b_0 - b_n a_0)) \tilde{Y}(s) + b_n U(s)$$

取拉氏反变换

$$y = (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + (b_1 - b_n a_1) \tilde{y}^{(1)} + (b_0 - b_n a_0) \tilde{y} + b_n u \quad (1)$$

$$\tilde{y}^{(n)} + a_{n-1} \tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_1 \tilde{y}^{(1)} + a_0 \tilde{y} = u \quad (2)$$

同样选取状态变量为: $x_1 = \tilde{y}, x_2 = \tilde{y}^{(1)}, \cdots, x_n = \tilde{y}^{(n-1)}$

状态空间表达式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \quad \cdots \quad (b_1 - b_n a_1) \quad (b_0 - b_n a_0)] \mathbf{x} + b_n u$$

例：系统的动态特性由下列微分方程描述

$$(1). \ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = \dot{u} + 2u$$

$$(2). \ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$$

列写其相应的状态空间表达式。

解：(1) 对微分方程取拉氏变换，可得

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3} U(s)$$

$$\text{设} \quad \tilde{Y}(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3} U(s)$$

$$\text{则有} \quad Y(s) = (s+2) \tilde{Y}(s)$$

取拉氏反变换，有：

$$\begin{cases} \tilde{y}^{(3)} + 5\tilde{y}^{(2)} + 7\tilde{y}^{(1)} + 3\tilde{y} = u \\ y = \tilde{y}^{(1)} + 2\tilde{y} \end{cases}$$

选取状态变量： $x_1 = \tilde{y}, x_2 = \tilde{y}^{(1)}, x_3 = \tilde{y}^{(2)}$

$$\text{则：} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \tilde{y}^{(3)} = -5x_3 - 7x_2 - 3x_1 + u$$

$$y = x_2 + 2x_1$$

可得状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \quad 1 \quad 0]x$$

单输入单输出系统实现方法一

1.2 状态空间表达式的建立

例：系统的动态特性由下列微分方程描述

$$(1). \ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = \dot{u} + 2u$$

$$(2). \ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$$

列写其相应的状态空间表达式。

解：(2)状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [2 \quad 3 \quad 1]x$$

第(1)小题状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [2 \quad 1 \quad 0]x$$

➤ 在实现问题中，传递函数的分母决定系统的状态方程，而传递函数的分子决定系统的输出方程。