《现代控制理论》MOOC课程

第四章　稳定性与李亚普诺夫方法

- 稳定性是控制系统最重要的特性。
- 李亚普诺夫奠定了稳定性理论的基础。
- 李亚普诺夫稳定性理论是研究系统稳定性的普遍方法。
- 系统的稳定性是相对系统的平衡状态而言的。

《现代控制理论》MOOC课程

4.1 李亚普诺夫关于稳定性的定义

一. 系统的平衡状态

对于一个不受外力作用的系统

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \ \ t \geq t_0$$

如果存在某个状态x_e，使$\dot{x}_e = f(x_e, t), = 0, \qquad \forall t \geq t_0$

成立，则称x_e为系统的一个平衡状态。

- 对于线性系统：$\dot{x} = Ax$ ， $Ax_e=0$

  当A非奇异，系统只有唯一的一个平衡状态，$x_e=0$

  当A奇异，则存在无穷多个平衡状态。

- 对于非线性系统通常存在多个平衡状态。

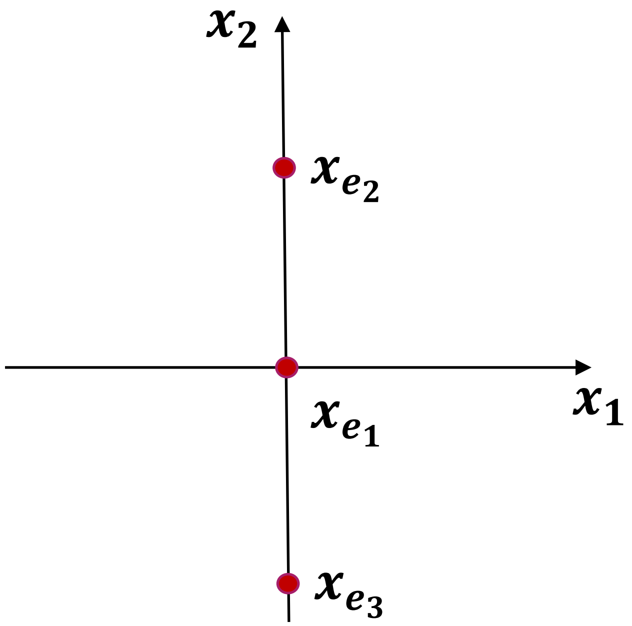
一. 系统的平衡状态

例如：对于非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3\end{cases}$$

其平衡状态为方程： $\begin{cases}x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 = 0\end{cases}$ 的解

可解得有三个平衡状态： $x_{e_1} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, x_{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, x_{e_3} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$



- **孤立的平衡状态**：如果平衡状态是彼此孤立的，即在某一平衡状态的任意小的邻域内不存在其它平衡状态，则称该平衡状态为孤立的平衡状态。

二. 稳定性的几个定义

1.李亚普诺夫意义下的稳定

若一不受外力作用的系统(自治系统)

$$\dot{x}=f(x,t),\quad x(t_0)=x_0,\ t\geq t_0$$

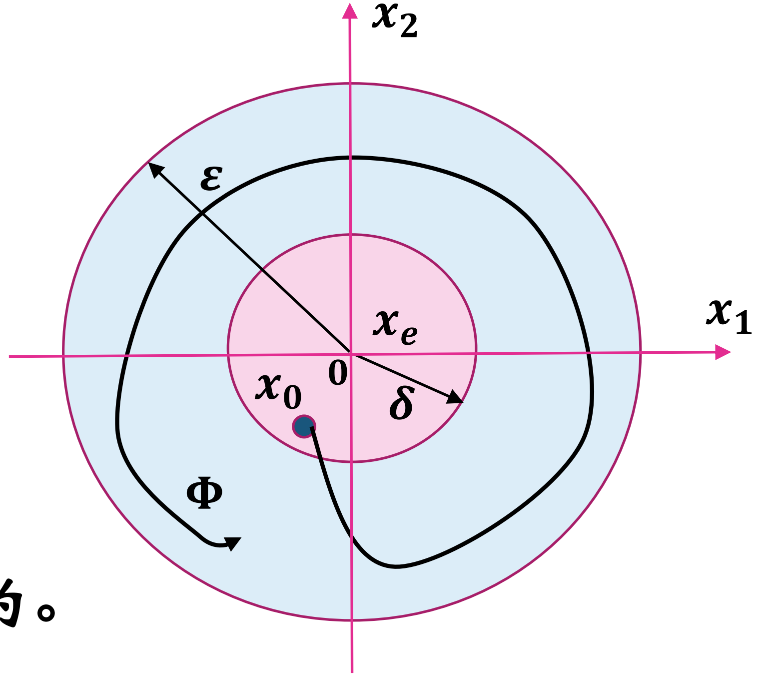
对任意选定的实数$\varepsilon>0$,都存在另一实数$\delta(\varepsilon,t_0)>0$,使得由满足不等式

$$\|x_0-x_e\|<\delta(\varepsilon,t_0)$$

的任一初始状态出发的受扰运动都满足不等式

$$\|\Phi(t;x_0,t_0)-x_e\|<\varepsilon,\qquad t\geq t_0$$

则称孤立平衡状态x_e为李亚普诺夫意义下的稳定状态。



- 若δ的取值与t_0无关,则称这个孤立平衡状态是**一致稳定**的。

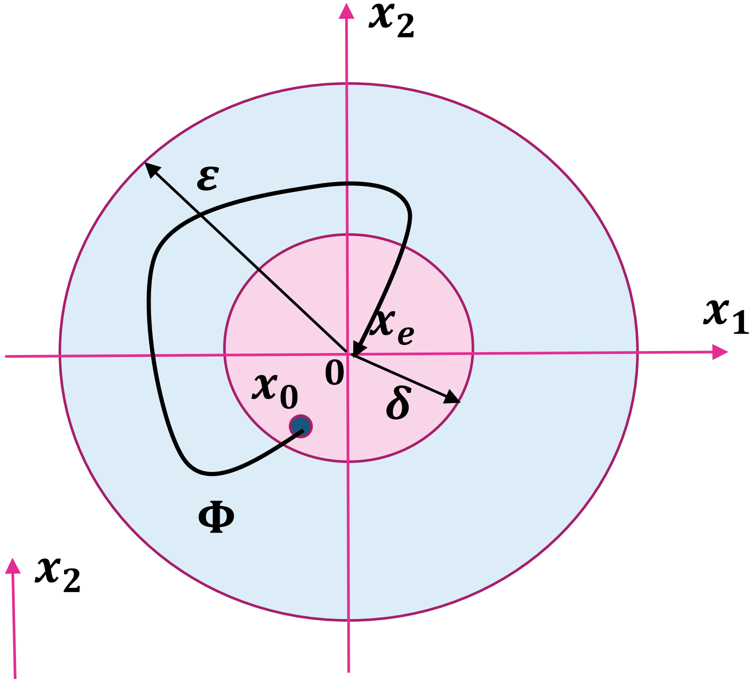
二. 稳定性的几个定义

2. 渐进稳定

若平衡状态 x_e是李亚普诺夫意义下的稳定状态，且满足

$$\lim_{t\to\infty}\|\Phi(t;x_0,t_0)-x_e\|=0$$

则称孤立平衡状态x_e为渐进稳定的。

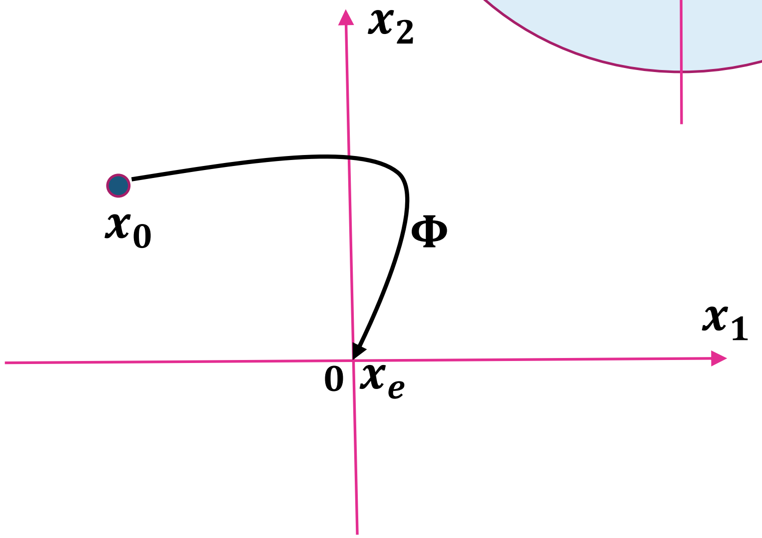


3. 大范围渐进稳定

若平衡状态 x_e是李亚普诺夫意义下的稳定状态，且对系统的任一非平衡初始状态均满足

$$\lim_{t\to\infty}\|\Phi(t;x_0,t_0)-x_e\|=0$$

则称孤立平衡状态x_e为大范围渐进稳定的。



- 李雅普诺夫意义下的渐进稳定等于工程意义下的稳定。

二. 稳定性的几个定义

4. 不稳定

若一不受外力作用的系统（自治系统）

$$\dot{x} = f(x,t),\qquad x(t_0) = x_0,\qquad t \geq t_0$$

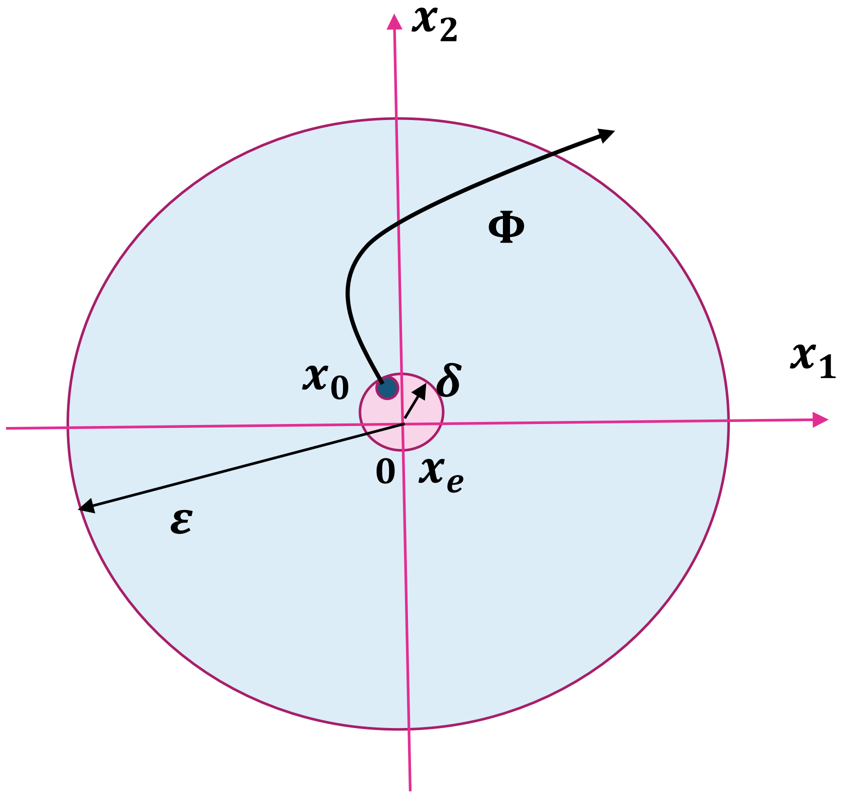
若对于不管取多么大的有限实数 $\varepsilon > 0$，都不可能找到相应的实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得由满足不等式:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon, t_0)$$

的任一初始状态出发的受扰运动都不满足不等式

$$\|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon,\qquad t \geq t_0$$

则称孤立平衡状态 x_e 为李亚普诺夫意义下的不稳定状态。



《现代控制理论》MOOC课程

4.2 李亚普诺夫第一法

- 李亚普诺夫第一法的基本思想是通过系统状态方程的解来判断系统的稳定性，因此这种方法又称为间接方法。

1. 外部稳定（输出稳定）

给定系统一个有界输入（扰动），判断系统的输出是否有界，若系统的输出是有界的，则称系统在该输入（扰动）下是稳定的。

2. 内部稳定（状态稳定）

只需求出系统矩阵A的所有特征值（对于非线性系统，在平衡状态附近一次线性化），若系统所有特征值均有负实部，则系统是稳定，否则系统是不稳定的。