《现代控制理论》MOOC课程

3.6 线性系统的结构分解

一. 能控性分解

结论：对于不完全能控的n阶线性定常系统 $\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx\end{aligned}$

其能控性判据 $M=[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ 的秩为 $rankM=n_1 < n$

则存在非奇异变换 $x=R_C\tilde{x}$，将系统的状态空间表达式变换为按能控性分解的规范表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_c \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\tilde{B}_c \\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = [\tilde{C}_c \quad \tilde{C}_{\bar{c}}]\begin{bmatrix}\tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

其中，变换阵 R_C 按照如下方式选取，R_C 的前 n_1 个列向量为能控性判别阵M中任意 n_1 个线性无关的列向量，其余 $n-n_1$ 个列向量在确保 R_C 非奇异的情况下任意选取。

讨论

- 不完全能控系统可被分解能控部分和不能控部分，其能控部分的n_1阶子系统可表示为

$$\dot{\tilde{x}}_c = \tilde{A}_c\tilde{x}_c+\tilde{A}_{12}\tilde{x}_{\bar{c}}+\tilde{B}_c u$$
$$y_1 = \tilde{C}_c\tilde{x}_c$$

不能控的$n-n_1$阶子系统可表示为：

$$\dot{\tilde{x}}_{\bar{c}} = \tilde{A}_{\bar{c}}\tilde{x}_{\bar{c}}$$
$$y_2 = \tilde{C}_{\bar{c}}\tilde{x}_{\bar{c}}$$

- 由于 $det(sI-A) = det\left(sI-\tilde{A}\right) = det\begin{bmatrix} sI-\tilde{A}_c & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & sI-\tilde{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = det\left(sI-\tilde{A}_c\right)det(sI-\tilde{A}_{\bar{c}})$

故系统的特征值，被分为两部分。一部分为$\tilde{A}_c$的特征值，称为系统的能控振型；另一部分为$\tilde{A}_{\bar{c}}$的特征值，称为系统的不能控振型。输入只能改变能控振型的位置，而不能改变不能控振型的位置。

讨论

- 系统的不能控子系统是不受外部输入作用影响的子系统。
- 由于变换阵R_C的选取不是唯一的，因此能控性分解的结果也是不唯一的。

例：将如下系统按能控性进行结构分解：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

解：系统的能控性秩判别矩阵为：

$$M=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix}\qquad rankM=2\qquad \text{取 } R_c=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}\qquad R_C^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

做如下线性变换：$x = R_C\tilde{x}$ 得：

$$\bar{A} = R_C^{-1}AR_C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = R_C^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{C} = CR_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

得能控分解标准型为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

能控子系统为：

$$\dot{\tilde{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\tilde{x}_c + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\tilde{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\tilde{x}_c$$

不能控子系统为：

$$\dot{\tilde{x}}_{\bar{c}} = [1]\tilde{x}_{\bar{c}}$$

$$y_2 = [-1]\tilde{x}_{\bar{c}}$$

二. 能观性分解

结论：对于不完全能观的n阶线性定常系统 $\dot{x}=Ax+bu$, $y=Cx$

其能观性判据 $N=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 的秩为 $rankN=n_1<n$

则存在非奇异变换 $\tilde{x}=R_O x$，将系统的状态空间表达式变换为按能观性分解的规范表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_O \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_O & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{\bar{O}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_O \\ \tilde{x}_{\bar{O}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_O \\ \tilde{B}_{\bar{O}} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_O & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_O \\ \tilde{x}_{\bar{O}} \end{bmatrix}$$

其中，变换阵 R_O 按照如下方式选取，R_O 的前 n_1 个行向量为能观性判别阵N中任意 n_1 个线性无关的行向量，其余 $n-n_1$ 个行向量在确保 R_O 非奇异的情况下任意选取。

例：将如下系统按能观性进行结构分解：

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

解：系统的能观性秩判别矩阵为：

$$N=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad rankN=2\quad 取\ R_O=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad 得\ R_O^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

做线性变换： $\tilde{x}=R_O x$ 得

$$\bar{A}=R_O A R_O^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=R_O B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CR_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得能观性分解标准型为：

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_o\\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_o\\ \tilde{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_o\\ \tilde{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$

得能观子系统为：

$$\dot{\tilde{x}}_o=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\tilde{x}_o+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$$

$$y_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\tilde{x}_o$$

不能观子系统为：

$$\dot{\tilde{x}}_{\bar{o}}=[-1]\tilde{x}_{\bar{o}}+\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}\tilde{x}_o$$

三. 能控性和能观性分解

结论：对于不完全能控和不完全能观的n阶线性定常系统 $\dot{x} = Ax + bu$
$y = Cx$

通过非奇异线性变换，可实现系统结构的规范型分解，其规范分解的表达式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co} \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\bar{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

其中， $\tilde{x}_{co}$为能控且能观测状态，$\tilde{x}_{c\bar{o}}$为能控但不能观状态，$\tilde{x}_{\bar{c}o}$为不能控但能观状态，$\tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}$为不能控且不能观状态。

第三章 小结

- 能控、能观性是现代控制理论最重要、最基本的概念。应牢固掌握能控、能观性的定义、判据、标准型和结构分解，掌握能控、能观的对偶原理。
- 能控、能观指的是系统的状态能控、能观。能控性反映了外部控制对系统内部运动状态的可影响性，能观性则表征了系统内部运动状态通过外部输出的可反映性。
- 能控、能观性判据的证明是完美的，对于用数学方法解决工程问题有指导意义。
- 能控标准型和能观标准型是便于控制器和观测器综合的状态空间表达式的最简单形式。
- 线性系统的结构分解能够深刻揭示系统内部能控、能观性状态变量的结构。