# 《现代控制理论》MOOC课程

1.4　从状态空间表达式求传递函数矩阵

## 一. 传递函数矩阵的定义

定义：对于多输入－多输出线性定常系统，输入向量为 $\boldsymbol{u}=[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r]^T$，输出向量为 $\boldsymbol{y}=[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]^T$，且假定初始状态为零。$\hat{\boldsymbol{u}}_i(s), \hat{\boldsymbol{y}}_i(s)$ 分别表示 $u_i, y_i$ 的拉氏变换，$w_{ij}(s)$表示第j个输入端到第i个输出端的传递函数，系统的输入输出关系可描述为：

$$\begin{cases} \hat{y}_1(s) = w_{11}(s)\hat{u}_1(s) + w_{12}(s)\hat{u}_2(s) + \cdots + w_{1r}(s)\hat{u}_r(s) \\ \hat{y}_2(s) = w_{21}(s)\hat{u}_1(s) + w_{22}(s)\hat{u}_2(s) + \cdots + w_{2r}(s)\hat{u}_r(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_m(s) = w_{m1}(s)\hat{u}_1(s) + w_{m2}(s)\hat{u}_2(s) + \cdots + w_{mr}(s)\hat{u}_r(s) \end{cases}$$

写成向量形式：

$$\hat{\boldsymbol{y}}(s)=\begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_m(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_{11}(s) & \cdots & w_{1r}(s) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{m1}(s) & \cdots & w_{mr}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_r(s) \end{bmatrix}=\boldsymbol{W}(s)\hat{\boldsymbol{u}}(s)$$

称 $W(s)$为系统的传递函数矩阵。

## 二. 由状态空间表达式导出传递函数矩阵

结论：对应于状态空间描述

$$\dot{x}=Ax+Bu \qquad x(0)=0$$
$$y=Cx+Du$$

其传递函数矩阵为：$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$

并且，当D≠0时，$W(s)$为真有理分式矩阵，当D=0时，$W(s)$为严格真有理分式矩阵，

且有：$\lim\limits_{s\to\infty} W(s)=D$

证明：对状态空间表达式取拉氏变换：
$$sX(s)=AX(s)+BU(s)$$
$$Y(s)=CX(s)+DU(s)$$

由状态方程的拉氏变换表达式可得：$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$

代入输出方程的拉氏变换表达式可得：$Y(s)=(C(sI-A)^{-1}B+D)U(s)$

故传递函数矩阵为：$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$

## 二. 由状态空间表达式导出传递函数矩阵

对于传递函数矩阵：　$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$

考虑：　$(sI-A)^{-1}=adj(sI-A)/det(sI-A)$

且伴随矩阵 $adj(sI-A)$ 每个元素多项式的最高次幂都小于 $det(sI-A)$ 的最高次幂，故

$$\lim_{s\to\infty}(sI-A)^{-1}=0$$

因此有：$\lim_{s\to\infty}W(s)=D$

故当D≠0时，$W(s)$为真有理分式；

当D＝0时，$W(s)$为严格真有理分式；

## 三. 传递函数矩阵的唯一性

一个系统的状态空间表达式是非唯一的，但其传递函数矩阵是唯一的。

证明：原系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

其所对应的传递函数矩阵为：

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

设 $z = T^{-1}x$，可得系统的另一个状态空间表达式为：

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$$
$$y = CTz + Du$$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

其对应的传递函数矩阵：

$$\widetilde{W}(s) = CT\left(sI - T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}B + D = CT\left[T\left(sI - T^{-1}AT\right)\right]^{-1}B + D = C(T^{-1})^{-1}\left[T\left(sI - T^{-1}AT\right)\right]^{-1}B + D$$

$$= C\left[T\left(sI - T^{-1}AT\right)T^{-1}\right]^{-1}B + D$$

$$= C(sI - T)^{-1}B + D = W(s)$$

即非奇异线性变换不改变系统的传递函数矩阵，同一系统的传递函数矩阵是唯一的。

## 四. 组合系统的状态空间表达式和传递函数矩阵

由两个或两个以上的子系统按照一定方式联接构成的系统称为组合系统。组合系统的基本组合方式可分为串联、并联和反馈三种类型。

### 构建组合系统数学模型的基本思路

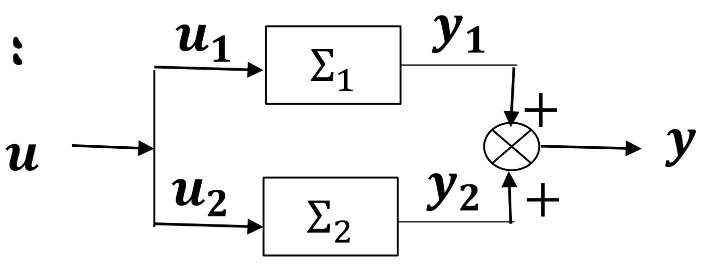
- 确定子系统可组合的条件，即确定各子系统联接的输入输出维数是否匹配。
- 找出联接的各子系统间、子系统与组合系统间的输入输出关系。
- 根据各子系统与组合系统的输入输出关系，导出组合系统的状态空间表达式与传递函数矩阵。

## 四. 组合系统的传递函数矩阵

### 子系统并联

考虑两个子系统： $\Sigma_i$: $\begin{matrix} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \\ y_i = C_i x_i + D_i u_i \end{matrix} \quad (i = 1, 2)$

经并联构成组合系统$\Sigma_p$，如下图所示：




- 子系统 $\Sigma_1$ 和$\Sigma_2$ 可并联的条件： $dim(u_1) = dim(u_2)$, $\quad dim(y_1) = dim(y_2)$
- 并联系统与子系统的输入、输出关系：$u = u_1 = u_2$, $\quad y = y_1 + y_2$
- 由并联系统与子系统的输入输出关系导出系统的状态空间表达式：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u \\ y &= y_1 + y_2 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} u$$

## 四. 组合系统的传递函数矩阵

- 并联系统的传递函数矩阵：

子系统的传递函数矩阵为：$w_i(s) = C_i(sI - A_i)^{-1}B_i + D_i \qquad i = 1, 2$

由并联系统与子系统的输入、输出关系：$u = u_1 = u_2, \qquad y = y_1 + y_2$

可得： $y(s) = y_1(s) + y_2(s) = w_1(s)u(s) + w_2(s)u(s) = (w_1(s) + w_2(s))u(s)$

故并联组合系统的传递函数为：

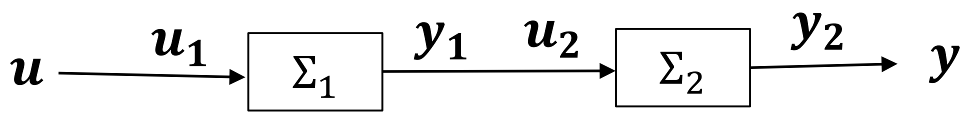
$$w(s) = w_1(s) + w_2(s)$$

## 四. 组合系统的传递函数矩阵

### 子系统串联

两个子系统： $\Sigma_i$: $\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i \\ y_i &= C_i x_i + D_i u_i\end{aligned} \quad (i = 1, 2)$

经串联构成组合系统 $\Sigma_s$ ，如下图所示：




同理可推导出，串联系统的状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1 \\ B_2 D_1\end{bmatrix} u$$

$$y = [\, D_2 C_1 \quad C_2 ]\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + [\, D_1 D_2 ] u$$

串联系统的传递函数矩阵为：

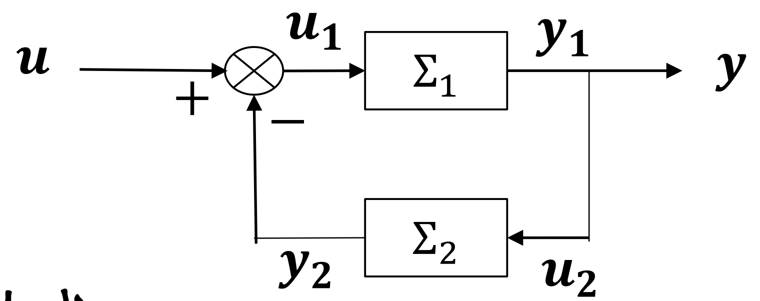
$$w(s) = w_1(s) w_2(s)$$

# 四. 组合系统的传递函数矩阵

## 子系统的反馈联接

两个子系统：
$$\Sigma_i: \begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i \\ y_i &= C_i x_i \end{aligned} \qquad (i=1,2)$$

经反馈联接构成组合系统 $\Sigma_f$，如下图所示：




同理可推导出，反馈联接系统的状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

反馈系统的传递函数矩阵为：

$$w(s) = [I + w_1(s)w_2(s)]^{-1}\, w_1(s)$$