《现代控制理论》MOOC课程

第二章 系统状态空间表达式的解

三. 矩阵指数函数的计算方法

方法一 根据矩阵指数函数的定义：$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$ 直接计算。

方法二 将A阵化为对角标准型或约当标准型求解

1. A的特征值不存在重根

若A的n个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不存在重根，则在求出使A阵实现对角化

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

的变换阵 T^{-1}、T 后，即有指数函数矩阵： $e^{At}=T\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}T^{-1}$

证明：

$$由\ T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\quad 可得\ A=T\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}T^{-1}$$

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(T\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}T^{-1}\right)^k t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}T\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}^k T^{-1}t^k$$

$$=T\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k t^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_2^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k t^k\end{bmatrix}T^{-1}=T\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}T^{-1}$$

得证

2. A的特征值存在重根

若A的l组不同特征值为：λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_l，代数重数分别为σ_1，σ_2，$\cdots$，$\sigma_l(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_l=n)$

且几何重数均为1，则在求出使A阵为约当标准型：

$$J=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix} \quad 其中\ J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad 为\ \sigma_i\times\sigma_i\ 维矩阵$$

的变换阵 T^{-1}、T后，即有指数函数矩阵：

$$e^{At}=T\begin{bmatrix} e^{J_1t} & & & \\ & e^{J_2t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_lt} \end{bmatrix}T^{-1} \quad 其中\ e^{J_it}=e^{\lambda_it}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(\sigma_i-1)!}t^{\sigma_i-1} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(\sigma_i-2)!}t^{\sigma_i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

证明：证明的思路与1相同,略去。

三. 矩阵指数函数的计算方法

方法三 拉氏变换法：$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$

$$L\left(\frac{t^k}{k!}\right)=\frac{1}{s^{k+1}}$$

证明：由矩阵指数函数的定义： $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$

取拉氏变换

$$L(e^{At})=\frac{1}{s}I+\frac{1}{s^2}A+\frac{1}{s^3}A^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{s^{(k+1)}}A^k$$

$$=s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(s^{-1}A\right)^k=s^{-1}\left(I-s^{-1}A\right)^{-1}$$

$$=(sI-A)^{-1}$$

$$1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$$

取拉氏反变换

得证

三. 矩阵指数函数的计算方法

方法四 应用凯莱－哈密尔顿定理将e^{At}表示为一个多项式

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=a_0(t)I+a_1(t)\boldsymbol{A}+a_2(t)A^2+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1}$$

若A的特征值两两互异，则多项式的系数可按下式计算：

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

若A的n个特征值为：λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_l，代数重数分别为σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_l，几何重数均为1，

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ \vdots \\ a_{\sigma_1}(t) \\ \vdots \\ a_{(\sum_{k=1}^{l-1}\sigma_k)+1}(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{1\sigma_1} \\ \vdots \\ p_{11} \\ \vdots \\ p_{l\sigma_l} \\ \vdots \\ p_{l1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{(\sigma_1-1)!}t^{\sigma_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{(\sigma_l-1)!}t^{\sigma_l-1}e^{\lambda_l t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_l t} \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{cases} p_{i1}=[1 \quad \lambda_i \quad \lambda_i^2 \quad \cdots \quad \lambda_i^{n-1}] \\ p_{i2}=\dfrac{dp_{i1}}{d\lambda_i} \\ \vdots \\ p_{i\sigma_i}=\dfrac{1}{(\sigma_i-1)!}\dfrac{d^{(\sigma_i-1)}p_{i1}}{d\lambda_i^{(\sigma_i-1)}} \end{cases}$$

方法四

凯莱－哈密尔顿定理

设 $A \in R^{n \times n}$ ，其特征多项式为：

$$D(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

则矩阵A必满足其特征多项式，即

$$\boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

方法四

证明：由凯莱－哈密尔顿定理 A^n 可表示为 A^{n-1}、A^{n-2}、…、A、I 的线性组合，即

$$\boldsymbol{A}^n = -a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} - \cdots - a_1\boldsymbol{A} - a_0\boldsymbol{I}$$

进而有：

$$\boldsymbol{A}^{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}(-a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} - \cdots - a_1\boldsymbol{A} - a_0\boldsymbol{I}) = -a_{n-1}\boldsymbol{A}^n - a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-1} - \cdots - a_1\boldsymbol{A}^2 - a_0\boldsymbol{A}$$

$$= -a_{n-1}(-a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} - \cdots - a_1\boldsymbol{A} - a_0\boldsymbol{I}) - a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-1} - \cdots - a_1\boldsymbol{A}^2 - a_0\boldsymbol{A}$$

$$= (a_{n-1}^2 - a_{n-2})\boldsymbol{A}^{n-1} + (a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3})\boldsymbol{A}^{n-3} + \cdots + (a_{n-1}a_1 - a_0)\boldsymbol{A} + a_{n-1}a_0\boldsymbol{I}$$

这样 $\boldsymbol{A}^{n+1}$、$\boldsymbol{A}^{n+2}$、… 均可表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1}$、$\boldsymbol{A}^{n-2}$、…、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{I}$的线性组合。

故有：$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \cdots = a_0(t)I + a_1(t)\boldsymbol{A} + a_2(t)A^2 + \cdots + a_{n-1}(t)A^{n-1}$

若A的特征值不存在重根，则有

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{\lambda_1 t} & & & \\ & \boldsymbol{e}^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1} = a_0(t)I + a_1(t)\boldsymbol{A} + a_2(t)A^2 + \cdots + a_{n-1}(t)A^{n-1}$$

方法四

$$T^{-1}A^2T=(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}=a_0(t)\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}+a_1(t)\boldsymbol{T}^{-1}A\boldsymbol{T}+a_2(t)\boldsymbol{T}^{-1}A^2\boldsymbol{T}+\cdots+a_{n-1}(t)\boldsymbol{T}^{-1}A^{n-1}\boldsymbol{T}$$

$$=a_0(t)\boldsymbol{I}+a_1(t)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}+a_2(t)\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}+\cdots+a_{n-1}(t)\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & & & \\ & \lambda_2^{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

比较等式两边可得：

$$\begin{cases} a_0(t)+a_1(t)\boldsymbol{\lambda_1}+a_2(t)\boldsymbol{\lambda_1^2}+\cdots+a_{n-1}(t)\boldsymbol{\lambda_1^{n-1}}=\boldsymbol{e^{\lambda_1 t}} \\ a_0(t)+a_1(t)\boldsymbol{\lambda_2}+a_2(t)\boldsymbol{\lambda_2^2}+\cdots+a_{n-1}(t)\boldsymbol{\lambda_2^{n-1}}=\boldsymbol{e^{\lambda_2 t}} \\ \vdots \\ a_0(t)+a_1(t)\boldsymbol{\lambda_n}+a_2(t)\boldsymbol{\lambda_n^2}+\cdots+a_{n-1}(t)\boldsymbol{\lambda_n^{n-1}}=\boldsymbol{e^{\lambda_n t}} \end{cases}$$

解得

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

对于有重根的情况，可类似地方法证明。

得证。

例1 设系统矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

按照矩阵指数函数的定义和拉氏变换法求 e^{At} 。

解：(1) 用定义计算

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots=\boldsymbol{I}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^{\boldsymbol{2}}t^2+\cdots=\begin{bmatrix}1-t^2+\cdots & t-1.5t^2+\cdots\\ -2t+3t^2+\cdots & 1-3t+\cdots\end{bmatrix}$$

(2) 用拉氏变换法计算

$$(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}\qquad (\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})^{-\boldsymbol{1}}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{L}^{-\boldsymbol{1}}\left[(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})^{-\boldsymbol{1}}\right]=\boldsymbol{L}^{-\boldsymbol{1}}\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

例2 用标准型法计算系统矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ 的 e^{At}

解：矩阵A的特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda^3-3\lambda-2)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$$

解得系统特征根为：$\lambda_1=2(\sigma_1=1),\quad \lambda_2=-1(\sigma_2=2)$

$$\lambda_1\text{的几何重数}\ \alpha_1=3-\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{\lambda_1 I}-\boldsymbol{A})=3-\boldsymbol{rank}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 2\end{bmatrix}=3-2=1$$

$$\lambda_2\text{的几何重数}\ \alpha_2=3-\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{\lambda_2 I}-\boldsymbol{A})=3-\boldsymbol{rank}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix}=3-2=1$$

计算特征根对应的特征向量和广义特征向量：

将$\lambda_1=2$，代入特征向量计算公式$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})p_i=0$

可得 $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ 解得 $\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$

将$\lambda_2=-1$，代入特征向量计算公式$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})p_i=0$

可得 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{bmatrix}=\mathbf{0}$　　解得 $\begin{bmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

将$\lambda_2=-1$，代入广义特征向量计算公式$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})p_i=p_{i-1}$

可得 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$　　解得 $\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

故变换阵为：$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -1 & 0\\4 & 1 & -1\end{bmatrix}$　　故变换阵的逆为：$\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & -5 & 2\\6 & 3 & -3\end{bmatrix}$

$$e^{At}=T\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} \end{bmatrix}T^{-1}$$

而$\lambda_2=-1$的约当块矩阵指数函数为：

$$e^{J_2 t}=e^{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}t}=\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

这样，系统的矩阵指数函数为：

$$e^{At}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} e^{2t}+(8+6t)e^{-t} & 2e^{2t}+(-2+3t)e^{-t} & e^{2t}-(1+3t)e^{-t} \\ 2e^{2t}-(2+6t)e^{-t} & 4e^{2t}+(5-3t)e^{-t} & 2e^{2t}+(-2+3t)e^{-t} \\ 4e^{2t}+(-4+6t)e^{-t} & 8e^{2t}+(-8+3t)e^{-t} & 4e^{2t}+(5-3t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

例3. 用凯莱－哈密尔顿法计算系统矩阵的矩阵指数函数e^{At}

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$$

解：矩阵A的特征方程为

$|\lambda I-A|=(\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6)$ **解的系统的特征值为** $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_{,3}=-3$

$$\begin{bmatrix}a_0(t)\\ a_1(t)\\ a_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & -3 & 9\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\\ e^{-3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t}\\ \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\\ \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

于是：

$$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+a_2(t)A^2=\begin{bmatrix}3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t}+8e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$