《现代控制理论》MOOC课程

4.5 李亚普诺夫方法在非线性系统中的应用

一. 雅克比矩阵法（克拉索夫斯基法）

考虑n维非线性系统： $\dot{x}=f(x)$

$f(x)$对 $x_i(i=1,2,\cdots)$连续可微，系统的雅可比矩阵为

$$J(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

系统在平衡状态 $x_e=0$,渐近稳定的充分条件为：对任意正定的实对称阵P，使下列矩阵

$$Q(x)=-J^T(x)P-PJ(x)$$ 为正定。

且 $V(x)=f^T(x)Pf(x)$是系统的一个李亚普诺夫函数。

如果，当 $\|x\|\rightarrow\infty$，有$V(x)\rightarrow\infty$，则系统在平衡状态是大范围渐近稳定的。

证明：由于P为对称正定阵，故$V(x)=f^T(x)Pf(x)$为正定。

$$\dot{V}(x)=\dot{f}^T(x)Pf(x)+f^T(x)P\dot{f}(x)$$

$$=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\dot{x}\right)^T Pf(x)+f^T(x)P\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\dot{x}\right)$$

$$=(J(x)f(x))^T Pf(x)+f^T(x)P(J(x)f(x))$$

$$=f^T(x)J^T(x)Pf(x)+f^T(x)PJ(x)f(x)$$

$$=f^T(x)(J^T(x)P+PJ(x))f(x)$$

$$=-f^T(x)Qf(x)$$

由于，Q为正定，故$\dot{V}(x)$为负定。

由李亚普诺夫稳定性判据，系统在平衡状态渐近稳定。 得证

例：设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

试确定系统在平衡状态 $x_e = 0$ 渐近稳定。

解：对系统方程，有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

其雅可比矩阵为

$$J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$

则 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1+3x_2^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1+3x_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -2 & 2+6x_2^2\end{bmatrix}$

其主子行列式：$\Delta_1=6>0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}6 & -2\\ -2 & 2+6x_2^2\end{vmatrix}=8+36x_2^2>0$

故 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})>0$，系统在平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的。

由于当 $\|\boldsymbol{x}\|\rightarrow\infty$，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rightarrow\infty$，故系统在平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是大范围渐近稳定的。

关于雅可比矩阵法的说明

1. 定理是系统在平衡状态渐近稳定的充分条件，若$Q(x)$不是正定的，则不能得出任何结论， 此时该法无效。

2. $Q(x)$正定的必要条件是$J(x)$的主对角线上的所有元素均不为零，即$(\partial f_i(x)/\partial x_i) \neq 0$要求状态方程的第$i$个方程含有$x_i$这个状态分量，否则不能用雅可比矩阵法。

二. 变量梯度法

- 变量梯度法依据的基本事实：如果存在一个特定的李亚普诺夫函数$V(x)$并能够证明给定系统的平衡状态为渐近稳定，则该李亚普诺夫函数的梯度必定存在且唯一。

- 设给定n维系统 $\dot{x}=f(x)$，平衡状态为 $x_e=\mathbf{0}$

  若此系统存在李亚普诺夫函数$V(x)$，则其梯度为

$$\nabla V(x)=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla V_1\\ \nabla V_2\\ \vdots\\ \nabla V_n\end{bmatrix}$$

二. 变量梯度法

- 设$V(x)$是 x 的显函数，但不是t的显函数，则$\dot{V}(x)$可表示为：

$$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}) = \frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \nabla V^T \dot{\boldsymbol{x}}$$

故 $$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^t \dot{V}(\boldsymbol{x})dt = \int_0^t \nabla V^T \dot{\boldsymbol{x}}dt = \int_0^x \nabla V^T d\boldsymbol{x} = \int_0^x [\nabla V_1(x) \quad \nabla V_2(x) \quad \cdots \quad \nabla V_n(x)] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

- 为使该线积分与积分路径无关，要求∇V的旋度为零，即$rot(\nabla V) = 0$

即满足$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n)$ 即要求$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \nabla \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}$ 为对称阵。

这样，$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x)dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x)dx_2 + \cdots \int_0^{x_n} \nabla V_n(x)dx_n$

二. 变量梯度法

应用变量梯度法分析系统稳定性的步骤如下：

1. 假定$\nabla V(x)$的形式为：

$$\nabla V(x)=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

2. 由$\dot{V}(x)=\nabla V^T\dot{x}$确定系数待定的$\dot{V}(x)$。

3. 由$\dot{V}(x)$负定或至少半负定及$rot(\nabla V)=0$确定∇V的系数a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$。

4. 计算：$V(x)=\int_0^{x_1}\nabla V_1(x)dx_1+\int_0^{x_2}\nabla V_2(x)dx_2+\cdots\int_0^{x_n}\nabla V_n(x)dx_n$

5. 确定使$V(x)>0$的渐近稳定范围。

例：设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2\end{cases}$$

试确定系统在平衡状态 $x_e = 0$ 渐近稳定。

解：设李亚普诺夫函数$V(x)$的梯度为：$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$

则$\dot{V}(x)$为：$\dot{V}(x) = \nabla V^T \dot{x} = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2]\begin{bmatrix} -x_1 + 2x_1x_2^2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$

$$= -a_{11}x_1^2 + 2a_{11}x_1^2x_2^2 - a_{12}x_1x_2 + 2a_{12}x_1x_2^3 - a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_2^2$$

由$rot(\nabla V) = 0$的条件得：$\dfrac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = a_{12} = \dfrac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = a_{21}$

取 a_{11}=1，a_{22}=2，$a_{,12}=a_{21}=0$，则$\dot{V}(\boldsymbol{x})=-x_1^2+2x_1^2x_2^2-2x_2^2=-x_1^2-2x_2^2(1-x_1^2)$

故若 $1-x_1^2>0$ ，则$\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$

而$V(\boldsymbol{x})=\int_0^{x_1}\nabla V_1(x)dx_1+\int_0^{x_2}\nabla V_2(x)dx_2=\int_0^{x_1}x_1dx_1+\int_0^{x_2}2x_2dx_2=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2>0$

故在$1-x_1^2>0$范围内，系统在 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 处是渐近稳定的。

第四章 小结

- 系统的稳定性是相对系统的平衡状态而言的。
- 内部稳定(特征值)和外部稳定(输入有界输出有界)
- 李亚普诺夫意义下的稳定，渐近稳定，大范围渐近稳定，不稳定的定义。
- 李亚普诺夫稳定性主判据，辅助判据，不稳定判据；均是充分条件。
- 线性系统的李亚普诺夫方程判据是充分必要条件。
- 构建李亚普诺夫函数没有统一的方法，雅克比矩阵法，变量梯度法均只能适应于某些特定的系统。