《现代控制理论》MOOC课程

2.4 线性时变系统的解

一. 时变系统状态方程解的特点

对于线性时变系统的状态空间表达式可以表示为：

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\quad x(t_0) = x_0,\quad t \in [t_0, t_\alpha]$$

$$y = C(t)x + D(t)u$$

为了求解时变系统的状态方程，先讨论一个时变的标量方程：

$$\dot{x} = a(t)x$$

解： $\dfrac{dx}{x} = a(t)dt$

对上式两边从 t_0 到 t 积分： $lnx(t) - lnx(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$

可得： $ln\left(\dfrac{x(t)}{x(t_0)}\right) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$ $\qquad x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}\, x(t_0)$

一. 时变系统状态方程解的特点

➢ 齐次方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 解为 $\boldsymbol{x}(t)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}\boldsymbol{x}(t_0)$ 成立的条件。

左边 $=\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{d}{dt}(e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}\boldsymbol{x}(t_0))=\frac{d}{dt}(e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau})\boldsymbol{x}(t_0)$

$$=\frac{d}{dt}(I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\cdots)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$=(A(t)+\frac{1}{2}A(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\frac{1}{2}(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau)A(t)+\cdots)\boldsymbol{x}(t_0)$$

右边 $=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(t)e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}\boldsymbol{x}(t_0)$

$$=\boldsymbol{A}(t)(I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\cdots)\boldsymbol{x}(t_0)$$

一. 时变系统状态方程解的特点

$$\text{右边} = \left(A(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \cdots\right)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\text{左边} = \left(A(t) + \frac{1}{2}A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)A(t) + \cdots\right)\boldsymbol{x}(t_0)$$

仅当 $A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)A(t)$ 时 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$

即方程解为：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}\boldsymbol{x}(t_0)$ 成立的条件为：$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)A(t)$

这个条件通常是不成立的。因此，时变系统的自由解通常不能写成封闭形式。

二. 线性时变系统的零输入响应

线性时变系统在零输入情况下，状态方程

$$\dot{x} = A(t)x \qquad x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$$

的解可表示为 $x(t) = \Phi(t,t_0)\, x(t_0)$

其中 $\Phi(t,t_0)$，称为线性时变系统的状态转移矩阵，是如下矩阵方程的解：

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0),\ \Phi(t_0,t_0) = I,\ t \geq t_0$$

$$\boxed{\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0),\ \Phi(t_0) = I,\ t \geq t_0}$$

证明：将 $x(t) = \Phi(t,t_0)\, x(t_0)$ 代入方程 $\dot{x} = A(t)x$ 可得：

$$\dot{\Phi}(t,t_0)x(t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)x(t_0)$$

故 $\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$

由 $x(t) = \Phi(t,t_0)\, x(t_0)$ 可得 $x(t_0) = \Phi(t_0,t_0)\, x(t_0)$。 故 $\Phi(t_0,t_0) = I$

得证

三. 状态转移矩阵的性质

1. 传递性 $\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)=\Phi(t_2,t_0)$

2. 可逆性 $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$

3. 初始时刻的状态转移矩阵 $\Phi(t_0,t_0)=I$

4. 微分性 $\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$

   系统矩阵和状态转移矩阵通常不满足可交换条件。

5. 唯一性

   当A(t)确定以后，$\Phi(t,t_0)$是唯一的。

四.线性时变系统非齐次状态方程的解

结论：线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ x(t_0)=x_0,\ t\in[t_0,t_\alpha]$$

且A(t)和B(t)的元素在 $t\in[t_0,t_\alpha]$ 时分段连续，则其解为：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\ \boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

证明：应用叠加定理，状态方程的解可以看作是初始状态的转移与控制激励状态的转移之和，即设其解具有如下形式：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\ \boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\ \boldsymbol{x_u}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\ (\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{x_u}(t))$$

将 $x(t)$ 代入系统的状态方程

左边 $=\dot{x}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)\ (\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{x_u}(t))+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}(t)$　　右边 $=A(t)x(t)+B(t)u(t)$

$$=A(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)(\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{x_u}(t))+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}(t)$$

$$=A(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}(t)$$

因此，有 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}(t)=B(t)u(t)$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)B(t)u(t)$$

对方程两边在$[t_0,\ t]$区间积分有 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}(t_0)$

于是有 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\,\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}(t)$

$$=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\,\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}(t_0)$$

$$=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\,\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}(t_0)$$

令 $t=t_0$ 可得 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}(t_0)=0$

故有 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\,\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$ 得证

由于通常情况下，封闭形式的状态转移矩阵很难求得，上式的意义不在于计算的应用，而在于系统理论研究中的应用。

第二章 小结

- 建立系统状态在状态空间中运动的基本概念。

- 推导建立了线性定常系统和线性时变系统状态方程的解析表达式：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t}-t_0)\boldsymbol{x}(t_{\boldsymbol{0}})+\int_{t_0}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\boldsymbol{d}\tau, \qquad t\geq t_0$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\ \boldsymbol{x}(t_{\boldsymbol{0}})+\int_{t_0}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{\Phi}(t,\ \tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\boldsymbol{d}\tau, \qquad t\in[t_0,t_\alpha]$$

- 状态转移矩阵的定义、性质和计算方法。