《现代控制理论》MOOC课程

6.2　求解最优控制的变分方法

一 泛函与泛函的变分

1. 泛函的定义

对于某一类函数集合$\{x(t)\}$中的每一个函数$x(t)$，均有一个确定的数 J与之对应，则称J为依赖于函数$x(t)$的泛函，记作：$J=J[x(t)]$

- $J[x(t)]$中的$x(t)$ 应理解为某一特定函数的整体，而不是对应于t的函数值。

例如泛函： $J=\int_0^1\left(x^2(t)+t\frac{dx(t)}{dt}\right)dt$

当 $x(t)=t$ 有：$J=\int_0^1(t^2+t)dt=\frac{5}{6}$

当 $x(t)=e^t$ 有：$J=\int_0^1(e^{2t}+te^t)dt=\left(\frac{1}{2}e^{2t}+te^t-e^t\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^2+1)$

2.泛函自变量的变分

泛函$J[x(t)]$的自变量函数$x(t)$与标称函数$x^*(t)$之间的差值函数:

$$\delta x = \delta x(t) = x(t) - x^*(t)$$

称为泛函自变量的变分，记作$\delta x(t)$或δx。

这样$x(t)$可表示为：$x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$

3.泛函的变分

- 泛函的增量

由自变量函数$x(t)$的变分$\delta x(t)$引起泛函$J[x(t)]$的增加值

$$\Delta J[x(t)] = J[x^*(t) + \delta x(t)] - J[x^*(t)]$$

称为泛函$J[x(t)]$的增量。

- **泛函的连续性**

对于任意给定的正数ε，可以找到这样一个正数δ，当$d(x,x^*)<\varepsilon$时，有

$$|J[x(t)]-J[x^*(t)]|<\delta$$

则称泛函$J[x(t)]$在$x^*(t)$处是连续的。

其中，$d(x,x^*)$表示在函数空间中$x(t)$与$x^*(t)$之间的距离：

$$d(x,x^*)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-x^*(t)|$$

- **泛函的变分**

泛函$J[x(t)]$增量$\Delta J[x(t)]$的线性主部称为泛函的一阶变分，简称泛函的变分，记作δJ

$$\Delta J=J[x^*(t)+\delta x(t)]-J[x^*(t)]=\left.\frac{dJ}{dx}\right|_{x^*}\delta x+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2J}{dx^2}\right|_{x^*}(\delta x)^2+R$$

其中，R是关于δx的高阶无穷小项。

泛函的变分定义为：$\delta J=\left.\frac{dJ}{dx}\right|_{x^*}\delta x$

泛函的变分引理

泛函的变分 $\delta J[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})]=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}$

$\Delta\alpha=\alpha-0=\alpha$

证明：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta J[x(t)+\alpha\delta x(t)]}{\Delta\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J[x(t)+\alpha\delta x(t)]-J[x(t)]}{\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{dJ}{dx}\bigg|_x\alpha\delta x+\frac{1}{2}\frac{d^2J}{dx^2}\bigg|_x(\alpha\delta x)^2+R\right\}$$

$$=\frac{dJ}{dx}\bigg|_x\delta x=\delta J$$

得证

例 计算 泛函$J=\int_0^1 x^2(t)dt$ 的变分

解：方法一，直接根据变分引理：

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^1[x(t)+\alpha\delta x(t)]^2dt\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\int_0^1 2[x(t)+\alpha\delta x(t)]\delta x(t)dt\bigg|_{\alpha=0}=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt$$

方法二，根据变分的定义：

$$\Delta J=\int_0^1[x(t)+\delta x(t)]^2dt-\int_0^1 x^2(t)dt=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt+\int_0^1(\delta x(t))^2dt$$

故增量的线性主部为：$\delta J=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt$

二 泛函的极值

1. 泛函极值的定义

如果泛函$J[x(t)]$在$x(t)=x^*(t)$的邻域内，其增量:

$$\Delta J = J[x(t)] - J[x^*(t)] \geq 0$$

或 $$\Delta J = J[x(t)] - J[x^*(t)] \leq 0$$

则称泛函$J[x(t)]$在$x(t)=x^*(t)$有极小值或极大值。

2. 泛函极值定理

若可微泛函$J[x(t)]$在函数$x(t)=x^*(t)$达到极值，则泛函$J[x(t)]$在$x(t)=x^*(t)$上的变分等于零，即

$$\delta J[x^*(t)]=0$$

证明：对于任意给定的$\delta x(t)$ 来说，$J[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]$ 是实变量α的函数。

泛函$J[x(t)]$在$x^*(t)$时达到极值，即函数$J[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]$在$\alpha=0$时达到极值，

所以它的导数在$\alpha=0$时应为零，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}=0$$

由变分引理　$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}=\delta J[x^*(t)]=0$

得证