《现代控制理论》MOOC课程

4.4 李亚普诺夫方法在线性系统中的应用

一. 线性定常系统的渐近稳定性判据

定理：对于给定的没有外界输入的线性定常系统：$\dot{x} = Ax$，$x(0) = x_0$，$t \geq 0$ 在平衡状态 $x_e = 0$ 渐近稳定的充要条件为：对于任意给定的一个实正定对称矩阵Q，必存在唯一的实正定对称矩阵P，满足如下李亚普诺夫方程：

$$A^T P + PA = -Q$$

证明：充分性

P为正定实对称阵且满足李亚普诺夫方程，则系统在 $x_e = 0$ 渐近稳定。

取 $V(x) = x^T Px$，由于$P = P^T > 0$，故$V(x)$为正定。

则 $\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = (Ax)^T Px + x^T P(Ax) = x^T A^T Px + x^T PAx$

$$= x^T (A^T P + PA)x = -x^T Qx$$

由于Q为正定对称矩阵，故$\dot{V}(x)$负定；

由李亚普诺夫稳定性判据，系统在平衡状态 $x_e = 0$ 是渐近稳定的。

充分性得证

一. 线性定常系统的渐近稳定性判据

证明必要性

系统在 $x_e = 0$ 为渐近稳定，Q为正定对称阵,则P为唯一满足李亚普诺夫方程的对称正定阵。

考虑如下矩阵微分方程：$\dot{X} = A^T X + XA, \quad X(0) = Q, \quad t \geq 0$

易知其解矩阵为：$X(t) = e^{A^T t} Q e^{At}, \quad t \geq 0$

对矩阵方程由$t = 0$至 $t \to \infty$ 求取积分，可得：$X(\infty) - X(0) = A^T \int_0^\infty X dt + (\int_0^\infty X dt)A$

由于系统在 $x_e = 0$ 为渐近稳定，即$X(\infty)=0$

令 $P = \int_0^\infty X dt$ ，则矩阵方程可表示为李雅普诺夫方程：$A^T P + PA = -Q$

即P为李亚普诺夫方程的解。

由于$X(t)$存在且唯一及$X(\infty)=0$，故P存在且唯一。

一. 线性定常系统的渐近稳定性判据

由： $P^T=\int_0^\infty X^T dt=\int_0^\infty (e^{A^Tt}Qe^{At})^T dt=\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt=P$

可知： P为对称阵。

对任意 $x_0\neq 0$，有： $x_0{}^TPx_0=x_0{}^T[\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt]\ x_0=\int_0^\infty (e^{At}x_0)^TQ(e^{At}x_0)dt$

由于Q为正定对称阵，故有$Q=N^TN$， N为非奇异矩阵。

这样$x_0{}^TPx_0=\int_0^\infty (e^{At}x_0)^TN^TN(e^{At}x_0)dt=\int_0^\infty (Ne^{At}x_0)^T(Ne^{At}x_0)dt$

$$=\int_0^\infty \|Ne^{At}x_0\|^2dt>0$$

故P为正定。即P为唯一的满足李雅普诺夫方程的对称正定阵。必要性得证。 得证

关于线性定常系统李亚普诺夫判据的几点说明

1. 为何不直接根据李亚普诺夫判据给定正定矩阵P，通过判断 $Q=-(A^TP+PA)$ 的符号性质，来判定系统的渐近稳定性。

   给定P，计算Q的方法，相当于直接应用李亚普诺夫稳定性主判据。一般意义下的李亚普诺夫判据只是充分条件而非必要条件，若不满足判据则不能判定系统是否稳定。

   而应用李亚普诺夫方程，给定Q，计算P。则能一次就判定系统是稳定或不稳定。

2. 线性系统中的李亚普诺夫方程为充要条件，对于任意给定的实正定对称矩阵Q，若根据李亚普诺夫方程得到矩阵P，当$P>0$系统是大范围渐近稳定的；当$P<0$时，系统是不稳定的；当P半正定或不定时，系统不是渐近稳定的，但系统是否李亚普诺夫稳定还需进一步判别。

3. 给定的Q只要求正定对称，最简单的是取I，而后求解 $n(n+1)/2$ 阶的代数方程组。

例：对于线性系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

试判别其稳定性。

解：采用线性定常系统的李亚普诺夫判据

令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}, \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$。

由李雅普诺夫方程$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$ 可得： $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}$

其主子行列式：$\Delta_1=\mathbf{1.5}>\mathbf{0}$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}1.5 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{vmatrix}=1.25>0$

故$\boldsymbol{P}$为正定对称阵，系统是渐近稳定的。

二. 线性时变系统的渐近稳定性判据

定理：对于给定的没有外界输入的线性时变系统：

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \ t \geq 0, \quad t_0 \geq 0$$

在平衡状态 $x_e = 0$ 渐近稳定的充要条件为：对于任意给定的一个实对称，一致正定矩阵 $Q(t)$，必存在唯一的实正定,一致对称矩阵 $P(t)$，满足如下李亚普诺夫方程：

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - Q(t) \quad , \qquad t \geq t_0$$

证明略，思路与线性定常系统相同。