《现代控制理论》MOOC课程

第二章 系统状态空间表达式的解

线性定常齐次状态方程的解

状态转移矩阵

线性定常非齐次状态方程的解

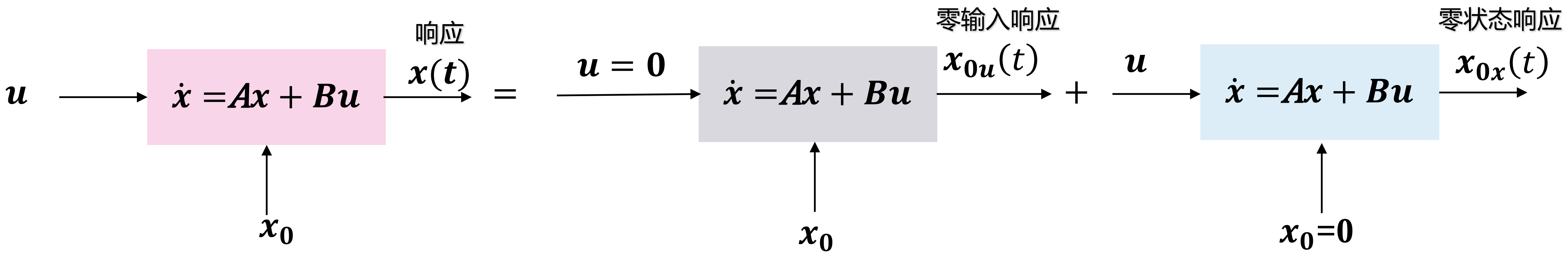
线性时变系统状态方程的解

- 控制系统状态空间表达式的解，就是求解系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du$$

在给定初始条件 $x(0) = x_0$ 和控制输入 $u(t)$ 共同作用下，状态向量和输出向量的随时间变化的运动规律 $x(t), y(t)$。

- 线性系统一定满足叠加原理。系统在初始状态 x_0 和控制输入 $u(t)$ 共同作用下的运动状态 $x(t)$，可以分解为由初始状态 x_0 和控制输入 $u(t)$ 分别单独作用产生的运动状态 $x_{0u}(t)$ 和 $x_{0x}(t)$ 的叠加，即 $x(t) = x_{0u}(t) + x_{0x}(t)$



零输入响应

定义为只有初始状态作用即$x_0 \neq 0$，而无输入作用即 $u \equiv 0$时系统的状态响应$x_{0u}(t)$。

零输入响应 $x_{0u}(t)$就是自治方程

$$\dot{x} = Ax,\quad x(0) = x_0$$

在非平衡初始状态 x_0 作用下的自由解。

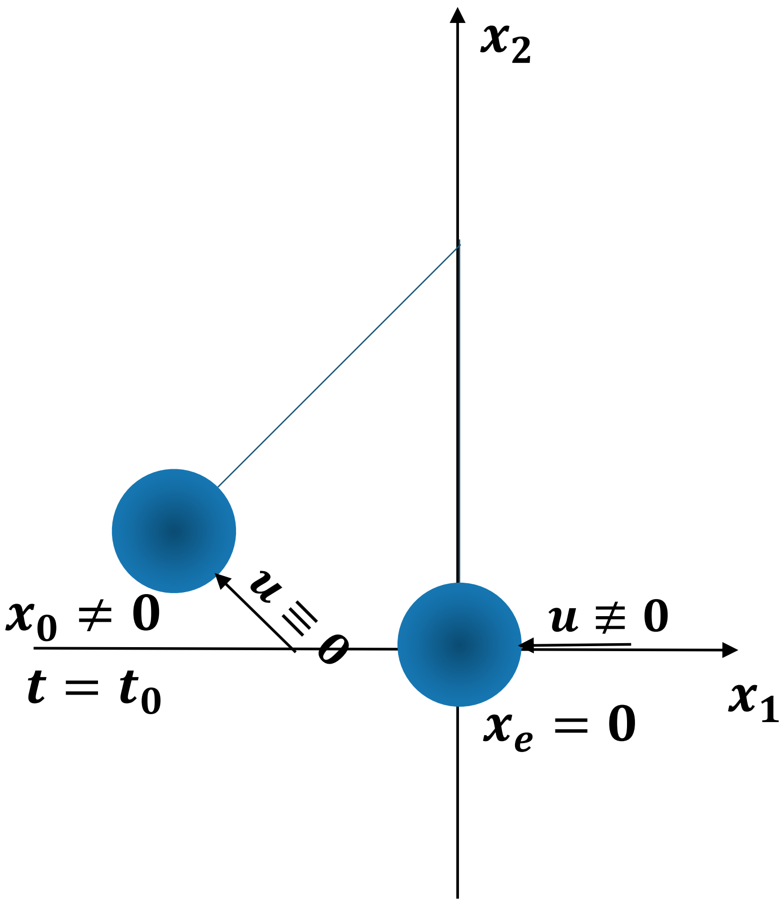
零状态响应

定义为只有输入作用即 $u \neq 0$，而无初始状态作用即$x_0 = 0$时系统的状态响应$x_{0x}(t)$。

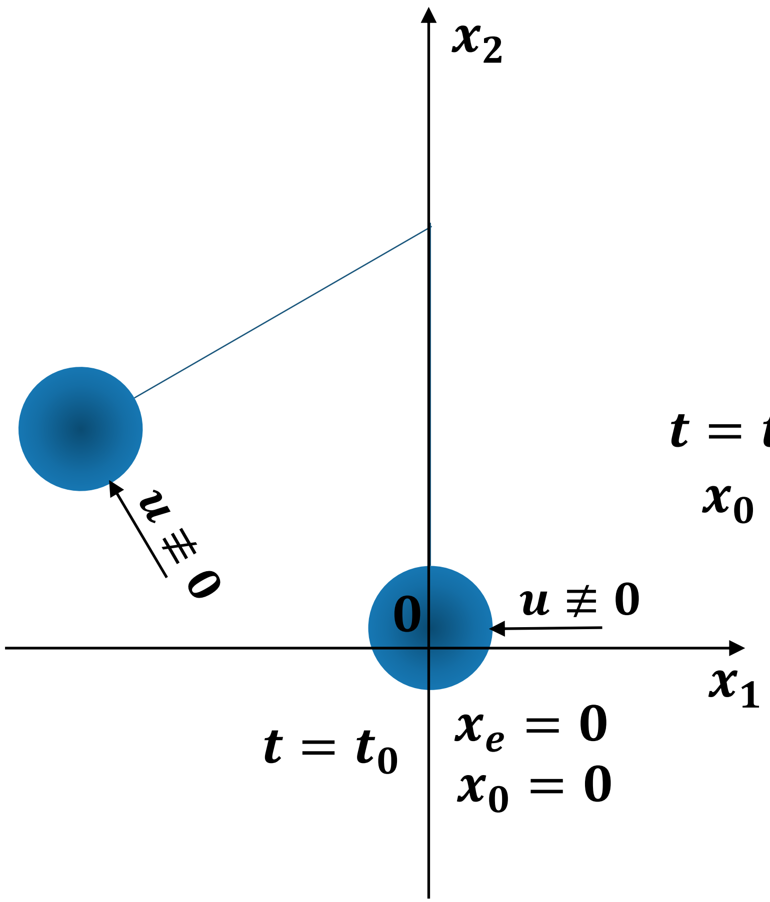
零状态响应 $x_{0x}(t)$就是状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu,\quad x(0) = 0$$

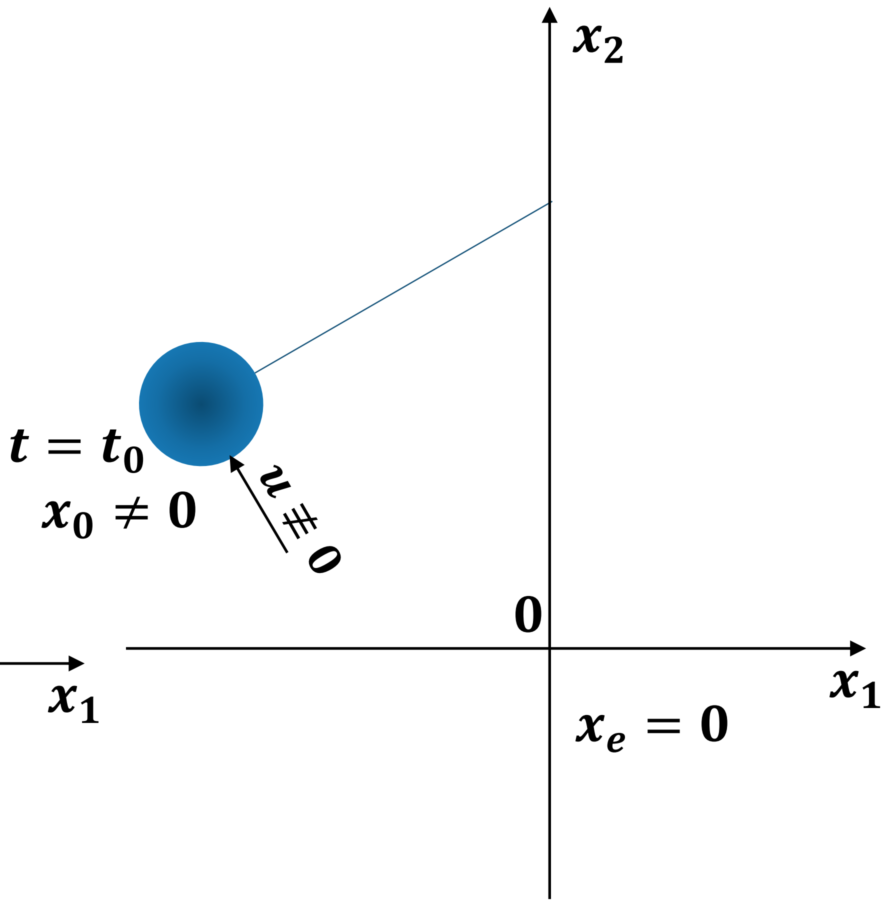
在平衡初始状态时，输入 u 激励作用下的强迫运动。



零输入响应



零状态响应



响应

《现代控制理论》MOOC课程

2.1 线性定常齐次状态方程的解

一。系统的零输入响应

线性定常系统齐次状态方程

$$\dot{x} = Ax,\quad x(0) = x_0,\quad t \geq 0 \qquad (2-1)$$

的解，即系统的零输入响应 $x_{0u}(t)$ 为：

$$x_{0u}(t) = e^{At}x_0,\qquad t \geq 0$$

式中，e^{At} 为系统矩阵A的矩阵指数函数：

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

证明：令方程(2 – 1)的解为系数向量待定的一个幂级数，即

$$x_{0u}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \qquad （2-2）$$

其必满足方程(2 – 1)，将上式代入方程(2 – 1)可得

$$b_1 + 2b_2\,t + 3b_3\,t^2 \cdots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)$$

比较可得：$b_1 = Ab_0$，$\quad b_2 = \frac{1}{2}Ab_1 = \frac{1}{2}A^2 b_0$，$\cdots$，$b_k = \frac{1}{k!}A^k b_0$，$\quad\cdots$

将求得的待定系数，代入（2－2）式可得：

$$x_{0u}(t) = (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots)b_0$$

由初始条件$x_{0u}(0) = x_0$可得 $b_0 = x_0$ ，故

$$x_{0u}(t) = (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots)x_0 = e^{At}x_0$$

得证

线性定常系统零输入响应的几点说明

- 如果t取某个固定值，零输入响应就是状态空间中由初始状态 x_0经线性变换阵 e^{At} 所导出的一个变换点。系统的自由运动就是由初始状态 x_0出发，并由各个时刻的变换点$x(t)$所组成的一条轨线；
- 零输入响应轨线的形态由矩阵指数函数唯一地确定；

- 线性定常系统渐进稳定的充要条件是：$\lim\limits_{t\to\infty} e^{At}=0$

  系统渐进稳定的条件是：当时 $t\to\infty$，自由运动的轨迹将趋于系统的平衡状态 $x_e=0$，即状态空间的原点。

- 求解零输入响应的核心是计算矩阵指数函数 e^{At}

- 当 $x(t_0)=x_0$,$t_0\neq 0$时，零输入响应表达式更一般的形式：

$$x_{0u}(t)=e^{A(t-t_0)}\,x_0 \qquad t\geq t_0$$

二. 矩阵指数函数的性质

由矩阵指数函数的定义：

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

可得以下一些基本性质：

1. $\lim\limits_{t\to 0} e^{At} = I$

2. 令 t 和 τ 为两个时间变量，则必成立：$e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau} = e^{A\tau}e^{At}$

证明：$e^{At}e^{A\tau}=\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots\right)\left(I + A\tau + \frac{1}{2!}A^2\tau^2 + \cdots\right) = I + A(t+\tau) + \frac{1}{2!}A^2(t+\tau)^2 + \cdots = e^{A(t+\tau)}$

3. 矩阵指数函数的逆：$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

证明： 因为 $e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = I$

所以 $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$

4. 矩阵指数函数 e^{At} 对t的导数为：$\dfrac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$

证明：$\dfrac{d}{dt}(e^{At}) = A + A^2t + \dfrac{1}{2!}A^3t^2 + \cdots + \dfrac{1}{(k-1)!}A^kt^{(k-1)} + \cdots$

$$=A(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^{(k-1)}t^{(k-1)} + \cdots) = Ae^{At}$$

$$= \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^{(k-1)}t^{(k-1)} + \cdots\right)A = e^{At}A$$

5. 设有n×n维常阵A和B，如果A和B是可交换的，即AB=BA，则必成立：

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$$

由定义，用数学归纳法可证明。

6. 矩阵指数函数的积： $(e^{At})^m = e^{A(mt)}$, $\quad m = 0, 1, 2, \cdots$

由性质2，可证明。