《现代控制理论》MOOC课程

6.2.3 有约束条件的变分问题 (2)

- **哈密尔顿函数的重要性质：**

沿着最优轨迹的哈密尔顿函数对时间的全导数等于对时间的偏导数：$\dfrac{dH}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial t}$

当哈密尔顿函数不显含时间变量时，沿着最优轨迹的哈密尔顿函数为常数：$H=C$

证明： $H=L+\lambda^T f$

$$\frac{dH}{dt}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\dot{x}+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\dot{u}+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\dot{\lambda}+\frac{\partial H}{\partial t}$$

当系统取得极值时有：

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\dot{x}+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\dot{\lambda}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)=0$$

故：
$$\frac{dH}{d\,t}=\frac{\partial H}{\partial\,t}$$

当H不显含t时有： $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=0$ 　　即： $H=C$

这一性质可用于判断系统的最优轨迹是否正确。

例：已知一阶受控系统 $\dot{x}=u,\quad x(t_0)=x_0$ 性能指标函数为

$$J=\frac{1}{2}C\,x^2(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}u^2dt$$

其中常数 $C>0$ ，求使 J 为极小值的最优控制 $u(t)$

解： $H=\frac{1}{2}u^2+\lambda\,u$ 　　由 $\frac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda=0$ 得 $\lambda=-u$

解协状态方程：

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \lambda(t_f) = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}Cx^2(t_f)\right)}{\partial x(t_f)} = Cx(t_f)$$

得： $\lambda = Cx(t_f)$

代入状态方程：

$$\dot{x} = u = -\lambda = -C\,x(t_f)$$

$$x(t_0) = x_0$$

故： $x(t) = x_0 - C\,x(t_f)\,t + C\,x(t_f)\,t_0$

令 $t = t_f$ 可得： $x(t_f) = \dfrac{x_0}{1 + C(t_f - t_0)}$

进而得： $u = -\lambda = -\lambda(t_f) = -Cx(t_f) = -\dfrac{C\,x_0}{1 + C(t_f - t_0)}$