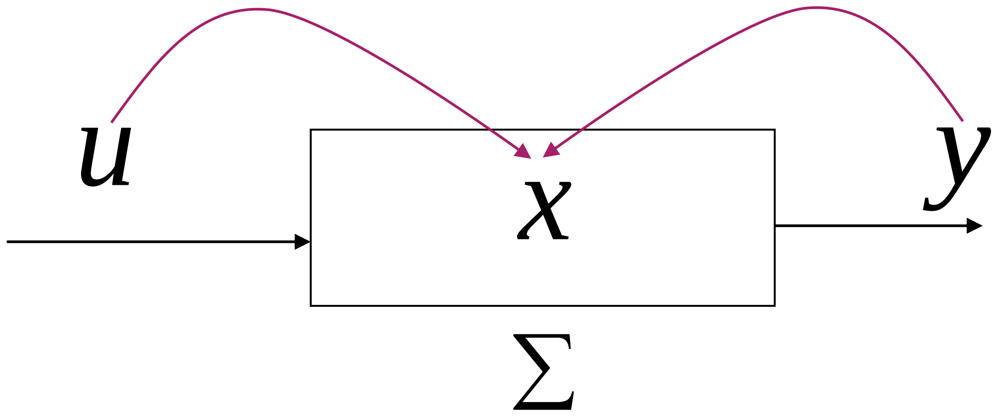
《现代控制理论》MOOC课程

第三章 线性控制系统的能控性和能观性

- 线性定常系统的能控性
- 线性定常系统的能观性
- 线性时变系统的能控性与能观性
- 能控性与能观性的对偶关系
- 状态空间表达式的能控能观标准型
- 线性系统的结构分解

能控性和能观性是现代控制理论中两个非常重要的概念，是反馈控制与最优控制的基础。



- 系统的能控、能观指的是系统的状态能控、能观。
- 如果通过控制量u可使系统的每一个状态变量由初始状态到达指定的终端状态，那么就称系统是能控的；
- 如果可通过系统的输出反映每一个状态的变化，则称系统是能观的。

《现代控制理论》MOOC课程

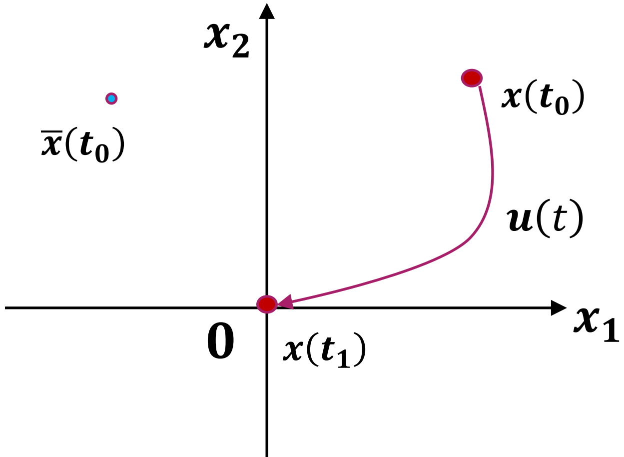
3.1 线性定常系统的能控性

一. 能控性的定义

能控： 若存在一个无约束的容许控制 $u(t)$，能在有限时间区间内 $t\in[t_0,t_1]$，使系统由某一非零的初始状态 $x(t_0)$，转移到指定的终端状态 $x(t_1)=0$，则称系统的状态 $x(t_0)$ 是能控的。

完全能控： 若系统在状态空间中的所有非零状态均能控，则称系统是完全能控的。

不完全能控： 若系统在状态空间中至少存在一个非零状态是不能控的，则称系统是不完全能控的。



二 线性定常系统的能控性判别

- 由系统完全能控的定义，若系统在状态空间中任一非零的初始状态，均能找到一个容许控制，使系统在有限的时间内转移到平衡状态，则称系统是完全能控的。

- 对于任一给定的非零初始状态 $x(0)=x_0\neq\mathbf{0}$，要寻找一个容许控制 $u(t)$，使系统在有限时间 t_1 时刻，转移到平衡状态，即

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{e}^{At_1}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^{t_1}\boldsymbol{e}^{A(t_1-t)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{d}t=\mathbf{0}$$

- 现在的问题是系统要满足什么条件，这样的控制才存在。

1. Gram(格拉姆)矩阵判据

线性定常系统： $\dot{x} = Ax + Bu$， $x(0) = x_0$， $t \geq 0$

为完全能控的充分必要条件为，存在时刻 $t_1 > 0$ 使如下定义的GRAM矩阵

$$W_c[0, t_1] = \int_0^{t_1} (e^{-At}B)(e^{-At}B)^T \, dt$$

为非奇异。

证：充分性，若 $W_c[0, t_1]$ 非奇异，则系统应完全能控。

对于任一非零初始状态 $x_0 \neq 0$ 构造一个控制 $u(t) = -(e^{-At}B)^T W_C^{-1}[0, t_1] x_0$

在 $u(t)$ 作用下，系统在时刻 t_1 的状态 $x(t_1)$ 为：

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B u(t) dt \quad = e^{At_1} x_0 - \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B (e^{-At}B)^T W_C^{-1}[0, t_1] x_0 dt$$

1. Gram(格拉姆)矩阵判据

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{e}^{At_1}\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{e}^{At_1}[\int_0^{t_1}(\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B})^T\boldsymbol{d}t]W_C^{-1}[0,t_1]\boldsymbol{x_0}$$

$$=\boldsymbol{e}^{At_1}\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{e}^{At_1}W_C\ [0,t_1]W_C^{-1}[0,t_1]\boldsymbol{x_0}\quad=\boldsymbol{0}$$

这表明对于任一初始状态$\boldsymbol{x_0}\neq\boldsymbol{0}$，总存在控制$\boldsymbol{u}(t)$，在时刻 t_1 ，使系统状态转移到$\boldsymbol{x}(t_1)=0$

即系统是完全能控的。充分性得证

必要性：若系统完全能控，则$W_c[0,t_1]$非奇异。

采用反证法，反设系统完全能控，但$W_c[0,t_1]$奇异。

由于$W_c[0,t_1]$奇异，故存在某个非零状态$\bar{x}_0$，使$\bar{x}_0{}^TW_c[0,t_1]\,\bar{x}_0=0$

因此有 $\bar{x}_0{}^TW_c[0,t_1]\,\bar{x}_0=\bar{x}_0{}^T\int_0^{t_1}(\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B})^T\,\boldsymbol{d}t\,\bar{x}_0=\int_0^{t_1}\bar{x}_0{}^T(\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B})^T\bar{x}_0\boldsymbol{d}t$

$$=\int_0^{t_1}\bar{x}_0{}^T((e^{-At}B)^T)^T(e^{-At}B)^T\bar{x}_0dt$$

$$(r\times n)(n\times n)(n\times 1)\rightarrow r\times 1$$

$$=\int_0^{t_1}[B^Te^{-A^Tt}\bar{x}_0]^T[B^Te^{-A^Tt}\bar{x}_0]dt=\int_0^{t_1}\left\|B^Te^{-A^Tt}\bar{x}_0\right\|^2dt=0$$

因此有：$B^Te^{-A^Tt}\bar{x}_0\equiv 0 \qquad t\in[0,t_1]$

再由系统完全能控，故存在控制使系统由非零初始状态 $\bar{x}_0$ ，转移到零，即

$$x(t_1)=e^{At_1}\bar{x}_0+\int_0^{t_1}e^{A(t_1-t)}Bu(t)dt=e^{At_1}\bar{x}_0+e^{At_1}\int_0^{t_1}e^{-At}Bu(t)dt=0$$

故有：$\bar{x}_0=-\int_0^{t_1}e^{-At}Bu(t)dt$

$$\|\bar{x}_0\|^2=\bar{x}_0{}^T\bar{x}_0=\left[-\int_0^{t_1}e^{-At}Bu(t)dt\right]^T\bar{x}_0=-\int_0^{t_1}u^T(t)B^Te^{-A^Tt}\bar{x}_0dt=0$$

可得：$\bar{x}_0=0$ ，这与 $\bar{x}_0\neq 0$ 的假设矛盾，故反设不成立；

即 $W_c[0,t_1]$ 非奇异。 必要性得证 得证

2. 秩判据

线性定常系统完全能控的充要条件是矩阵 $M=[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ 的秩 $rankM=n$ 。

其中，n为系统矩阵A的维数。

证： 充分性：$rankM=n$ ，则系统完全能控

反证法。反设 $rankM=n$，但系统不完全能控。

根据Gram矩阵判据，由于系统不完全能控，有 $W_c[0,t_1]$奇异。

因此存在一个非零的n维向量 α 使 $\alpha^T W_c[0,t_1]\,\alpha=0$

因此有 $\alpha^T W_c[0,t_1]\alpha = \int_0^{t_1} [\alpha^T \boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B}][\alpha^T \boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B}]^T \boldsymbol{dt} = \boldsymbol{0}$

可得 $\alpha^T \boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B} \equiv 0 \qquad t \in [0,t_1]$

对等式 $\alpha^T e^{-At} B = 0$ 求导直至n－1次，可得：$\alpha^T e^{-At} B = 0,\ \alpha^T e^{-At} AB = 0, \cdots, \alpha^T e^{-At} A^{n-1} B = 0$

令t＝0，可得 $\alpha^T B = 0,\ \alpha^T AB = 0, \cdots, \alpha^T A^{n-1} B = 0$

故 $\alpha^T [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = 0, \quad \alpha^T M = 0$

由于α为非零向量，故M行向量线性相关，即rankM<n，这与已知矛盾，故系统完全能控充分性得证。

必要性：若系统完全能控，则rankM=n

反设系统完全能控，但rankM<n

由于rankM<n，故M行向量线性相关，因此必存在一个n维非零向量，使

$\alpha^T [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = 0$，即 $\alpha^T A^i B = 0,\ i=0,1,2,\cdots, n-1$

由凯莱－哈密尔顿定理 $A^n, A^{n+1}, \cdots$ 均可表示为$I, A, \cdots, A^{n-1}$的线性组合，故可导出

$$\alpha^T A^i B = 0,\ i=0,1,2,\cdots$$

从而对于任意 $t_1>0$ 有 $\pm\alpha^T\frac{\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{t}^i}{i!}\boldsymbol{B}=0,\quad t\in[0,t_1],\quad i=0,1,2,\cdots$

因此， $\alpha^T\left[I-At+\frac{\mathbf{1}}{2!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{t}^2-\frac{\mathbf{1}}{3!}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{t}^3+\cdots\right]\boldsymbol{B}=\alpha^Te^{-At}\boldsymbol{B}=0$

故有， $\int_0^{t_1}[\alpha^T\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B}][\alpha^T\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B}]^T\boldsymbol{d}t=\mathbf{0}$ $\quad\alpha^T\{\int_0^{t_1}[\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B}][\boldsymbol{e}^{-At}\boldsymbol{B}]^T\boldsymbol{d}t\}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

$\alpha^TW_c[0,t_1]\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

即 $W_c[0,t_1]$ 奇异，故系统不完全能控，这与已知条件矛盾，反设不成立。于是有 rankM=n。必要性得证。

得证

例. 已知系统的状态方程为：$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & 1\\ 1 & 7 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[u]$

试判别其能控性。

解：其能控性判别矩阵为：$M=[B \quad AB \quad A^2B]$

$$B=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & 1\\ 1 & 7 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \qquad A^2B=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & 1\\ 1 & 7 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 7\\ 2\end{bmatrix}$$

故：$M=\begin{bmatrix}2 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 7\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ $\qquad rankM=rank\begin{bmatrix}2 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 7\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=3$

所以系统完全能控。

例. 已知系统的状态方程为：$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$

试判别其能控性。

解：其能控性判别矩阵为：$M=[B \quad AB \quad A^2B]$

$$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix} \qquad A^2B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\\2&1\end{bmatrix}$$

故：$M=\begin{bmatrix}0&1&1&1&2&1\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&2&1\end{bmatrix}$ $\quad rankM=rankMM^T=rank\begin{bmatrix}8&3&8\\3&3&3\\8&8&8\end{bmatrix}=2$

所以系统不完全能控。

3. PBH秩判据

线性定常系统完全能控的充要条件是，对系统矩阵的所有特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$：

$$rank[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=n,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

均成立。

证明：必要性：若系统完全能控，则 $rank[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=n$ ，成立；

反设系统完全能控，但存在某个特征值 λ_i ，有 $rank[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]<n$

故必存在一个非零向量 α ，使 $\alpha^T[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=0$ 成立。即：

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}^T\qquad \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

由此可得：$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}=0,\cdots,\alpha^T\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}=\lambda_i^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

进一步可得： $\boldsymbol{\alpha}^T[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{\alpha}^T M=0$

由于向量 α 不为0，故 $rankM<n$，系统不完全能控，这与反设矛盾，故反设不成立。

即系统完全能控必有：$rank[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=n,\ i=1,2,\cdots,n$ 成立。　　必要性得证

充分性：若 $rank[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=n, i=1,2,\cdots,n$ 成立，则系统完全能控；

证略：需用能控性分解的知识。

例. 已知系统的状态方程为：$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 9\end{bmatrix}[u]$

试判别其能控性。

解：系统的特征根为 $\lambda_1=-7$，$\lambda_2=-5$，$\lambda_3=-1$

$$rank[\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=rank\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 9\end{bmatrix}=3$$

$$rank[\lambda_2 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=rank\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 9\end{bmatrix}=2$$

$$rank[\lambda_3 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=rank\begin{bmatrix}6 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 9\end{bmatrix}=3$$

所以系统不完全能控。

4. 规范型判据

线性定常系统完全能控的充要条件为：

1). 当系统矩阵A的特征值为两两互异时，系统状态方程经线性变换导出的对角规范型：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \vdots \\ \bar{B}_n \end{bmatrix} u$$

式中，$\bar{B}_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$，即 $\bar{B}$ 中不包含元素全为零的行。

2). 当系统矩阵A的特征值存在重根时，系统状态方程经线性变换导出的约当标准型：

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_l \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_i \\ \vdots \\ \tilde{B}_l \end{bmatrix} u$$

设特征值 λ_i 的代数重数为 σ_i，几何重数为 α_i

λ_i 对应的第 k 个约当子块的维数为 r_{ik}

则约当规范型的具体结构可表示为如下形式：

$$J_i=\begin{bmatrix} J_{i1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{ik} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{i\alpha_i} \end{bmatrix}$$

$$J_{ik}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_l \end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_i \\ \vdots \\ \tilde{B}_l \end{bmatrix}u$$

$$\tilde{B}_i=\begin{bmatrix} \tilde{B}_{i1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{ik} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{i\alpha_i} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{ik}=\begin{bmatrix} \bar{b}_{1_{ik}} \\ \bar{b}_{2_{ik}} \\ \vdots \\ \bar{b}_{r_{ik}} \end{bmatrix}$$

1）若 $\sigma_i=1$，则 λ_i 对应的输入矩阵 $\tilde{B}_i$ 不全为0；

2）若 $\sigma_i>1, \alpha_i=1$，则 λ_i 对应的输入矩阵 $\tilde{B}_i$ 的最后一行不全为0；

3）若 $\alpha_i>1$，则 λ_i 对应的每一个约当子块最后一行对应的输入矩阵行组成的矩阵 $\begin{bmatrix} \bar{b}_{r_{i1}} \\ \bar{b}_{r_{i2}} \\ \vdots \\ \bar{b}_{r_{i\alpha_i}} \end{bmatrix}$ 均为行线性无关。

证明：

1. 对角规范型判据

$$M=[\bar{B} \quad J\bar{B} \quad \cdots \quad J^{n-1}\bar{B}]=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \lambda_1\bar{B}_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 & \lambda_2\bar{B}_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\bar{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{B}_n & \lambda_n\bar{B}_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\bar{B}_n \end{bmatrix}$$

若 $\bar{B}$ 存在全为0的行，则 M 阵也存在全为0的行。则rankM<n，根据秩判据，系统不完全能控。故系统完全能控的充要条件为：

$$\bar{\boldsymbol{B}}_i \neq 0, \qquad i=1,2,\cdots,n$$

2.对约当规范型判据

应用PBH秩判据 $rank[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=n$, 可导出约当规范型完全能控的充要条件。

现以一实例加以说明，取7维系统

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & 1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & & \\ & & & \lambda_3 & 1 & & \\ & & & & \lambda_3 & & \\ & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & \lambda_3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[B_{11}]\\ [B_{21}]\\ \begin{bmatrix}B_{31}\\B_{32}\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[b_{1_{11}}]\\ \begin{bmatrix}b_{1_{21}}\\b_{2_{21}}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1_{31}}\\b_{2_{31}}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}b_{1_{32}}\\b_{2_{32}}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\\b_6\\b_7\end{bmatrix}$$

系统特征根类型为：

λ_1 为单根，$\sigma_1=1$，$\alpha_1=1$，对应的输入矩阵为B矩阵的第一行 $b_1=b_{1_{11}}$

λ_2 为二重根，$\sigma_2=2$，$\alpha_2=1$，只有一个约当块，其约当块最后行对应的输入矩阵行为$b_3=b_{2_{21}}$

λ_3 为四重根，$\sigma_1=4$，$\alpha_3=2$，有二个约当块，每个约当块最后一行对应的输入矩阵行组成的矩阵为：$\begin{bmatrix}b_5\\b_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{2_{31}}\\b_{2_{32}}\end{bmatrix}$

当 $\lambda = \lambda_1$ 时：

$$[\lambda_1 I - A, B] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & b_{1_{11}} \\ & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & & & & & b_{1_{21}} \\ & & \lambda_1 - \lambda_2 & & & & & b_{2_{21}} \\ & & & \lambda_1 - \lambda_3 & -1 & & & b_{1_{31}} \\ & & & & \lambda_1 - \lambda_3 & & & b_{2_{31}} \\ & & & & & \lambda_1 - \lambda_3 & -1 & b_{1_{32}} \\ & & & & & & \lambda_1 - \lambda_3 & b_{2_{32}} \end{bmatrix}$$

只要 $b_1 = b_{1_{11}} \neq 0$，　$rank[\lambda_1 I - A, B] = 7$

当 $\lambda = \lambda_2$ 时：

$$[\lambda_2 I - A, B] = \begin{bmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & & & & & & & b_{1_{11}} \\ & 0 & -1 & & & & & b_{1_{21}} \\ & & 0 & & & & & b_{2_{21}} \\ & & & \lambda_2 - \lambda_3 & -1 & & & b_{1_{31}} \\ & & & & \lambda_2 - \lambda_3 & & & b_{2_{31}} \\ & & & & & \lambda_2 - \lambda_3 & -1 & b_{1_{32}} \\ & & & & & & \lambda_2 - \lambda_3 & b_{2_{32}} \end{bmatrix}$$

只要 $b_3 = b_{2_{21}} \neq 0$，　$rank[\lambda_2 I - A, B] = 7$

4. 规范型判据

当 $\lambda=\lambda_3$ 时：

$$[\lambda_3 I - A, B]=\begin{bmatrix} \lambda_3-\lambda_1 & & & & & & & b_{1_{11}} \\ & \lambda_3-\lambda_2 & -1 & & & & & b_{1_{21}} \\ & & \lambda_3-\lambda_2 & & & & & b_{2_{21}} \\ & & & 0 & -1 & & & b_{1_{31}} \\ & & & & 0 & & & b_{2_{31}} \\ & & & & & 0 & -1 & b_{1_{32}} \\ & & & & & & 0 & b_{2_{32}} \end{bmatrix}$$

只要 $rank\begin{bmatrix} b_{2_{31}} \\ b_{2_{32}} \end{bmatrix}=2$ 　就有 $rank[\lambda_3 I - A, B]=7$

由PBH判据，三个特征值对应的秩判别矩阵的秩均等于系统维数时，系统完全能控。

4. 规范型判据

例. 已知系统的状态方程为：

1. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\\9\end{bmatrix}[u]$$

2. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}[u]$$

3. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\4&0\\7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1&0\\0&-4&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\\3\end{bmatrix}[u]$$

5. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1&0\\0&-4&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&2\\0&0\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

6. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

1, 5不完全能控，2,3,4,6完全能控。

4. 规范型判据

例. 已知系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\\ \dot{x}_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & & & \\ & -2 & & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & -3 & 1 & \\ & & & & & -3 & \\ & & & & & & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$ 均线性无关，系统完全能控。