



《现代控制理论》MOOC课程

第六章 最优控制

最优控制问题的数学描述

求解最优控制的变分方法

极小值原理

动态规划法

线性二次型最优控制问题

- 最优控制理论所要解决的问题：
按照控制对象的动态特性，选择一个容许控制，使得被控对象按照技术要求运行，并使给定的性能指标达到最优值。
- 最优控制的数学问题：
从数学观点来看，最优控制问题就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题。
- 最优控制的基本内容：
经典变分法；
极小值原理；
动态规划；



《现代控制理论》MOOC课程

6.1 最优控制问题的数学描述

一. 最优控制问题的实例

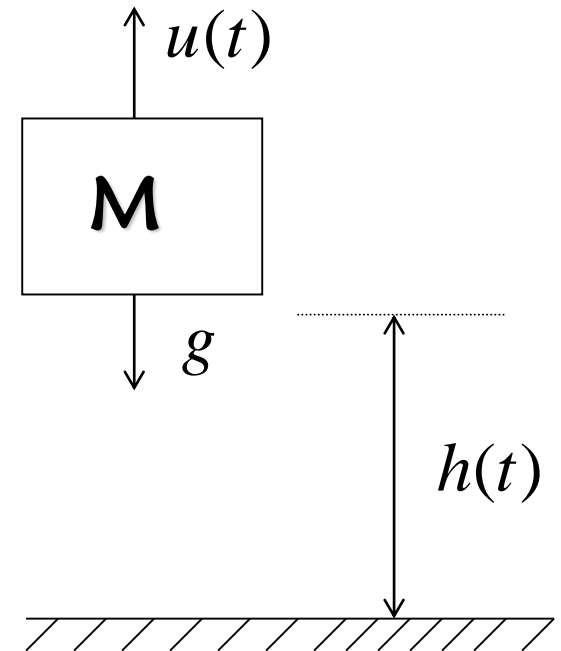
例1: 最速升降问题

设有一质量为 M 的物体，其内部有一控制器，可以产生一个作用力 $u(t)$ 控制物体上下运动。作用力满足约束条件 $|u(t)| \leq C$ 。若物体在 t_0 时刻，离地面的高度为 h_0 ，垂直运动的速度为 v_0 。寻找作用力 $u(t)$ ，使物体最快地到达地面，且到达地面的速度为零。物体运动的速度 $|v(t)| \leq v_{max}$ 。

建模：受控系统的状态方程

令 $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = \dot{h}(t) = v(t)$

系统的状态方程为：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{u(t)}{M} - g \end{cases} \quad (6-1)$$


一. 最优控制问题的实例

初始条件为: $x_1(t_0) = h_0, x_2(t_0) = v_0$

现在的问题是, 寻找一个 $u(t)$, 且满足 $|u(t)| \leq C$, 使物体在最短时间内由状态 (h_0, v_0) , 转移到 $(0, 0)$ 。且 $|v(t)| \leq v_{max}$ 。

问题例1: 对于给定的动态系统 (6-1), 寻找满足约束条件 $|u(t)| \leq C$ 的最优控制 $u(t)$, 使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

取得极小值, 且满足如下约束条件:

$$|x_2(t)| \leq v_{max}$$

$$x_1(t_f) = 0, x_2(t_f) = 0$$

二. 最优控制问题的一般提法

用数学语言描述最优控制问题，应包括以下几个方面的内容：

1. 受控系统的数学模型

用状态方程描述： $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$

2. 受控系统的始端和终端条件，即状态方程的边界条件：

对最优控制问题始端条件通常是已知的： $x(t_0) = x_0$

终端条件可以用一个目标集表示： $\Omega_f = \{x(t_f); g_1[x(t_f)] = 0, g_2[x(t_f)] \leq 0\}$

3. 容许控制

控制量受客观条件限制所能取值的范围： $u(t) \in U, U = \{u(t); \varphi(x, u) \leq 0\}$

4. 性能指标

(1) 积分型性能指标: $J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt$

反映控制过程中对系统性能的要求。

(2) 终值型性能指标: $J = \Phi[x(t_f), t_f]$

反映了系统状态在终端时刻的性能。

(3) 复合型性能指标: $J = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt$

反映了控制过程和终端时刻对系统性能的要求。

若: $\Phi[x(t_f), t_f]$, $L[x(t), u(t), t]$ 为二次型函数, 则性能指标可表示为二次型性能指标:

$$J = \frac{1}{2} x(t_f)^T P x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt$$

最优控制问题的一般提法：

已知受控系统的状态方程： $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$

及给定的始端条件 $x(t_0) = x_0$ 和规定的目标集 $\Omega_f = \{x(t_f); g_1[x(t_f)] = 0, g_2[x(t_f)] \leq 0\}$

在容许控制集合 U 中，寻找控制向量 $u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$

使系统由给定的初始状态出发，在 $t_f > t_0$ 时刻转移到规定的目标集，并使性能指标：

$$\min J = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt$$

最优控制问题是在多种约束条件下寻找控制 $u^*(t)$ ，使某个性能指标 J 取得极小值。由于 J 为函数 $x(t), u(t)$ 的函数，即泛函。最优控制问题可归结为求某个泛函的条件极值问题。