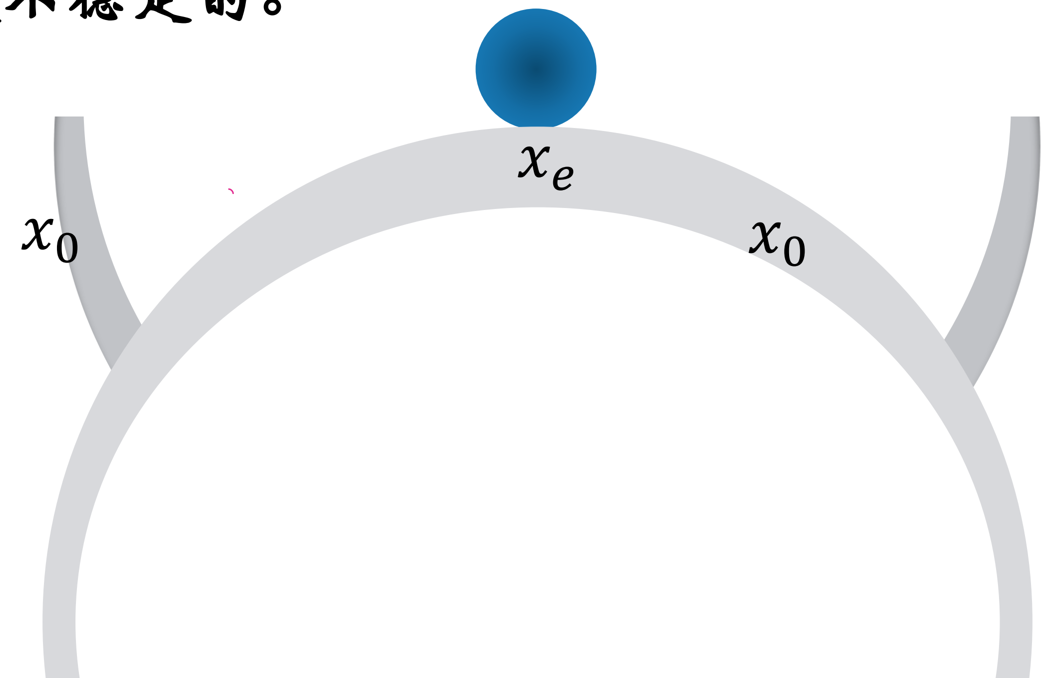
《现代控制理论》MOOC课程

4.3 李亚普诺夫第二法

李亚普诺夫第二法是基于这样一个基本的物理事实：

- 如果一个系统经受一个扰动，当扰动消失后，系统储存的能量将随着时间的推移而逐渐衰减，直至趋于平衡状态，系统的能量趋于极小值，那么这个平衡状态就是渐近稳定的
- 若当扰动消失后，系统的能量不再增加，那么这个平衡状态就是李亚普诺夫意义下的稳定；
- 若当扰动消失后，系统不断从外界吸收能量，系统的储能随着时间的推移不断增加，那么这个平衡状态就是不稳定的。



一. 预备知识

1.标量函数$V(x)$符号性质的几个定义

(1). 如果对于在域 Q 中的所有非零向量x,有 $V(x) > 0$, 且在$x = 0$有$V(x) = 0$, 则在域 Q 内称标量函数 $V(x)$ 为正定。

例如： $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$

(2). 如果标量函数 $V(x)$除了在原点及某些状态等于零外，在域 Q 中的所有其它状态都为正，则标量函数 $V(x)$ 为半正定。

例如：$V(x) = (x_1 + x_2)^2$

(3). 如果标量函数 $-V(x)$是正定的，则标量函数 $V(x)$为负定。

例如： $V(x) = -(x_1^2 + 2x_2^2)$

一. 预备知识

(4). 如果标量函数 $-V(x)$ 是半正定的，则标量函数 $V(x)$ 为半负定。

例如：$V(x)=-(x_1+x_2)^2$

(5). 如果在域 Q 内，不论 Q 多么小，$V(x)$ 既可为正值也可为负值。则标量函数 $V(x)$ 称为不定。

例如：$V(x)=x_1x_2+x_2^2$

2. 二次型函数的符号性质

设 $V(x)$ 是一个二次型函数，即 $V(x)=x^TPx$，其中 P 为对称阵。当 $x\neq 0$ 时，$V(x)>0$，则 $V(x)$ 是正定的，因而矩阵 P 是正定的。

- 判断 $V(x)$ 为正定的准则为 P 的所有主子行列式均大于零。
- 判断 $V(x)$ 为负定的准则为 P 的各阶主子行列式 Δ_i 满足：

Δ_i: i =偶数, $\Delta_i>0$；i =奇数，$\Delta_i<0$；

二. 李亚普诺夫稳定性判据

定理(**李雅普诺夫稳定性主判据**)：设系统的状态方程为：$\dot{x}=f(x)$

若存在一个具有连续一阶导数的标量函数$V(x)$且满足:

(1) $V(x)$是正定的；

(2) $\dot{V}(x)$是负定的；

则系统在平衡状态$x_e=0$是渐进稳定的。

(3) 除满足条件(1)、(2)外，若 $\|x\|\to\infty$，有$V(x)\to\infty$，则系统在平衡状态$x_e=0$是大范围渐进稳定的。

例：对于非线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

试判别其平衡状态 $x_e = 0$ 的稳定性。

解：取正定标量函数: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$V(x)$对时间的导数为： $\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2\,(x_1^2 + x_2^2)$

由于$V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，故系统在平衡状态$x_e = 0$是渐近稳定的。

由于当$\|x\| \to \infty$, 有$V(x) \to \infty$，故系统在平衡状态$x_e = 0$是大范围渐近稳定的。

例：对于线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

试判别其平衡状态 $x_e = 0$ 的稳定性。

解：取正定标量函数: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$V(x)$对时间的导数为： $\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2$

由于$x_1 = 0$，$x_2 = 0$时有，$\dot{V}(x) = 0$；

$x_1 \neq 0$，$x_2 = 0$时有，$\dot{V}(x) = 0$； $\dot{V}(x)$为半负定

$x_2 \neq 0$时有，$\dot{V}(x) < 0$

由于李亚普诺夫第二稳定性判别定理，只是充分条件，而非必要条件，故据此并不能判定系统在平衡状态不稳定。

重新选取正定标量函数: $V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2+2x_1^2+x_2^2]$

$V(\boldsymbol{x})$对时间的导数为: $\dot{V}(\boldsymbol{x})=(x_1+x_2)(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+2x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=-(x_1^2+x_2^2)$

显然$\dot{V}(\boldsymbol{x})$负定。

由于$V(\boldsymbol{x})$正定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$负定，故系统在平衡状态$\boldsymbol{x}_e=\mathbf{0}$是渐近稳定的。

由于当$\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$, 有$V(\boldsymbol{x})\to\infty$，故系统在平衡状态$\boldsymbol{x}_e=\mathbf{0}$是大范围渐近稳定的。

二. 李亚普诺夫稳定性判据

定理(李雅普诺夫稳定性辅助判据)：设系统的状态方程为：$\dot{x} = f(x)$

若存在一个具有连续一阶导数的标量函数$V(x)$且满足:

(1) $V(x)$是正定的；

(2) $\dot{V}(x)$是半负定的；

(3) 对于任意初始状态$x(t_0) \neq 0$, 在$t \geq t_0$,除$x = 0$时, 有$\dot{V}(x) = 0$外，$\dot{V}(x)$不恒等于零。

则系统在平衡状态$x_e = \mathbf{0}$是渐进稳定的。

(4) 除满足条件(1)、(2)、 (3)外, 若 $\|x\| \to \infty$, 有$V(x) \to \infty$，则系统在平衡状态$x_e = \mathbf{0}$是大范围渐进稳定的。

- $\dot{V}(x)$半负定，说明在$t \geq t_0$的某些时刻，系统的“能量”不再减少；$\dot{V}(x)$不恒等于零，表明系统“能量”不再减少的状态不能保持，即系统会继续减少能量，直到平衡状态。

例：对于线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

试判别其平衡状态 $x_e = 0$ 的稳定性。

解：取正定标量函数:$V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$V(x)$对时间的导数为：$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2$

由于$x_1 = 0$，$x_2 = 0$时有，$\dot{V}(x) = 0$；

$x_1 \neq 0$，$x_2 = 0$时有，$\dot{V}(x) = 0$；　　$\dot{V}(x)$为半负定

$x_2 \neq 0$时有,$\dot{V}(x) < 0$

只要x_2不恒等于0，$\dot{V}(x)$就不恒等于0。

由状态方程：$\dot{x}_2=-x_1-x_2$ 可知：

只要 $x_1 \neq 0$ 即使 $x_2=0$ ，$\dot{x}_2$ 也不会等于0，即 x_2 不会恒等于0。

$\dot{V}(x)=0$ 只是暂时出现在某一时刻。

故系统在平衡状态 $x_e=0$ 是渐近稳定的。

由于当 $\|x\| \to \infty$，有 $V(x) \to \infty$，故系统在平衡状态 $x_e=0$ 是大范围渐近稳定的。

二. 李亚普诺夫稳定性判据

定理(李雅普诺夫不稳定性判据)：设系统的状态方程为：$\dot{x} = f(x)$

若存在一个具有连续一阶导数的标量函数$V(x)$且满足:

(1) $V(x)$是正定的；

(2) $\dot{V}(x)$是正定的；

则系统在平衡状态$x_e = 0$是不稳定的。

例：系统的状态方程为：
$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

试判别其平衡状态 $x_e = 0$ 的稳定性。

解：取正定标量函数:$V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$V(x)$对时间的导数为：$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)$

由于$V(x)$正定，$\dot{V}(x)$也正定，故系统在平衡状态x_e是不稳定的。

关于李亚普诺夫第二法的几点说明

1. 李亚普诺夫函数是一个标量函数；是一个正定函数；对于一个给定系统，李亚普诺夫函数不是惟一的。

2. 不仅对于线性系统，而且对于非线性系统，它都能给出关于大范围内稳定的信息。

3. 李亚普诺夫稳定性定理只是充分条件；对于一个特定系统，若不能找到一个合适的李亚普诺夫函数来判定系统的稳定性，则不能给出该系统稳定性的任何信息。

4. 李亚普诺夫稳定性理论没有提供构造李亚普诺夫函数的一般方法；李亚普诺夫函数最简单的形式是二次型函数。