《现代控制理论》MOOC课程

3.5 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

一.能控性与能观性的不变性

定理：在任意非奇异线性变换下，线性定常系统 $\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$ 的能控性和能观性不变。

证明:令P为n×n维非奇异线性矩阵，对系统作如下变换 $\tilde{x} = Px$，则系统状态方程为：

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

其中，$\tilde{A}=PAP^{-1}$，$\tilde{B}=PB$，$\tilde{C}=CP^{-1}$

由：$[\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]=[PB \quad PAB \quad \cdots \quad PA^{n-1}B]=P[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$

$$\begin{bmatrix}\tilde{C}\\ \tilde{C}\tilde{A}\\ \vdots\\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}CP^{-1}\\ CA\,P^{-1}\\ \vdots\\ CA^{n-1}\,P^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}P^{-1}$$

由于非奇异变换不改变矩阵的秩

故 $rank[\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]=rank[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ $\qquad rank\begin{bmatrix}\tilde{C}\\ \tilde{C}\tilde{A}\\ \vdots\\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$

即非奇异线性变换不改变系统的能控能观性。得证。

二. 能控标准I型变换

结论：对于完全能控的单输入单输出线性定常系统 $\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx\end{aligned}$ 存在线性非奇异变换 $x = T_{C1}\bar{x}$

其中：

$$T_{C1} = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] = [A^{n-1}b \quad A^{n-2}b \quad \cdots \quad b]\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_2Ab + a_1b$$

$$e_2 = A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_3Ab + a_2b$$

$$\vdots$$

$$e_{n-1} = Ab + a_{n-1}b$$

$$e_n = b$$

a_i （$i = 0, 1, \cdots,$ n-1）为系统特征多项式 $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ 的系数。

二. 能控标准I型变换

能够使状态空间表达式化成如下形式的能控标准型（I型）：$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}\bar{u}$

$\bar{y} = \bar{C}\bar{x}$

其中：

$$\bar{A} = T_{C1}{}^{-1}AT_{C1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{b} = T_{C1}{}^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = CT_{CI} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

$$\beta_0 = C(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_2Ab + a_1b)$$

$$\beta_1 = C(A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_3Ab + a_2b)$$

$$\vdots$$

$$\beta_{n-2} = C(Ab + a_{n-1}b)$$

$$\beta_{n-1} = Cb$$

二. 能控标准I型变换

证明： (1) 推导 $\bar{A}$

由 $\bar{A}=T_{C1}{}^{-1}AT_{C1}$ 可得 $T_{CI}\bar{A}=AT_{CI}=A[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n]=[Ae_1 \quad Ae_2 \quad \cdots \quad Ae_n]$

$Ae_1=A(A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+\cdots+a_2Ab+a_1b)=(A^nb+a_{n-1}A^{n-1}b+\cdots+a_2A^2b+a_1Ab+a_0b)-a_0b$

$=-a_0b=-a_0e_n$

$Ae_2=A(A^{n-2}b+a_{n-1}A^{n-3}b+\cdots+a_3Ab+a_2b)=(A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+\cdots+a_2Ab+a_1b)-a_1b=e_1-a_1e_n$

$\vdots$

$Ae_{n-1}=A(Ab+a_{n-1}b)=(A^2b+a_{n-1}Ab+a_{n-2}b)-a_{n-2}b=e_{n-2}-a_{n-2}e_n$

$Ae_n=Ab=(Ab+a_{n-1}b)-a_{n-1}b=e_{n-1}-a_{n-1}e_n$

由此：$T_{C1}\bar{A}=[-a_0e_n \quad e_1-a_1e_n \quad \cdots \quad e_{n-2}-a_{n-2}e_n \quad e_{n-1}-a_{n-1}e_n]$

二. 能控标准I型变换

$$T_{C1}\bar{A}=[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n]\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}=T_{C1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

故有：$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$

（2）推导 $\bar{b}$

由：$\bar{b}=T_{C1}{}^{-1}b$　　可得 $T_{C1}\bar{b}=b=e_n=[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=T_{CI}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　故　$\bar{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

二. 能控标准I型变换

（3）推导 $\bar{C}$

$$\bar{C} = CT_{C1} = C[A^{n-1}b \quad A^{n-2}b \quad \cdots \quad b]\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

可得

$$\beta_0 = C(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_2Ab + a_1b)$$

$$\beta_1 = C(A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_3Ab + a_2b)$$

$$\vdots$$

$$\beta_{n-2} = C(Ab + a_{n-1}b)$$

$$\beta_{n-1} = Cb$$

得证

二. 能控标准I型变换

例. 将下列状态空间表达式

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=[0 \quad 0 \quad 1]\,x$$

变换为能控标准I型。

解.判别系统的可控性

$$M=[B \quad AB \quad A^2B]=\begin{bmatrix}2 & 4 & 16\\ 1 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 12\end{bmatrix} \qquad rankM=3$$

系统完全能控

计算系统的特征多项式：$\det(\lambda I-A)=\lambda^3-9\lambda+2=0$

可得 $a_0=2, a_1=-9, a_2=0$

二. 能控标准I型变换

可得：

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&9&0\end{bmatrix}\qquad \bar{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT_{C1}=C\begin{bmatrix}A^2b & Ab & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\a_2&1&0\\a_1&a_2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16&4&2\\8&6&1\\12&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-9&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}$$

有能控标准I型为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&9&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\qquad y=\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}x$$

三. 能控标准II型变换

结论：对于完全能控的单输入单输出线性定常系统 $\dot{x}=Ax+bu$，$y=Cx$

存在线性非奇异变换 $x=T_{C2}\overline{x}$，$T_{C2}=[b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b]$

能够使状态空间表达式化成如下形式的能控标准型（II型）：

$$\dot{\overline{x}}=\overline{A}\overline{x}+\overline{b}\overline{u}$$
$$\overline{y}=\overline{C}\overline{x}$$

其中：

$$\overline{A}=T_{C2}{}^{-1}AT_{C2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \overline{b}=T_{C2}{}^{-1}b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i （$i=0,1,\cdots$，n-1）为系统特征多项式 $|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ 的系数。

三. 能控标准II型变换

$$\bar{C} = CT_{C2} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \qquad \beta_0 = Cb, \beta_1 = CAb, \ \cdots, \ \beta_{n-1} = CA^{n-1}b$$

证明： （1）推导 $\bar{A}$

由 $\bar{A} = T_{C2}^{-1}AT_{C2}$ 可得 $T_{C2}\bar{A} = AT_{C2} = A[b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b] = [Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^nb]$

由凯莱－哈密尔顿定理：$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_2A^2 - a_1A - a_0I$

$$\text{故 } A^nb = -a_{n-1}A^{n-1}b - \cdots - a_2A^2b - a_1Ab - a_0b = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b]\begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T_{C2}\bar{A} = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{故} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

三. 能控标准II型变换

（2）推导 $\bar{b}$

由：$\bar{b} = T_{C2}{}^{-1}b$　　可得 $T_{C2}\bar{b} = b = e_1 = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n]\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = T_{C2}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$　故　$\bar{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

（3）推导 $\bar{C}$

$$\bar{C} = CT_{C2} = C[b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b] = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

$\beta_0 = \mathrm{C}b, \beta_1 = \mathrm{C}Ab, \cdots, \beta_{n-1} = \mathrm{C}A^{n-1}b$

得证

三. 能控标准II型变换

例. 将下列状态空间表达式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

变换为能控标准II型。

解. 判别系统的可控性

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \qquad rankM=3$$ 系统完全能控

计算系统的特征多项式：$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 9\lambda + 2 = 0$

可得 $a_0 = 2, a_1 = -9, a_2 = 0$

三. 能控标准II型变换

可得：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT_{C2} = C[b \quad Ab \quad A^2b] = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} = [1 \quad 2 \quad 12]$$

有能控标准II型为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = [1 \quad 2 \quad 12]x$$

四. 能观标准I型变换

结论：对于完全能观的单输入单输出线性定常系统 $\dot{x}=Ax+bu$，$y=Cx$

存在线性非奇异变换 $\bar{x}=T_{o1}x$ ， $T_{o1}=N=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

能够使状态空间表达式化成如下形式的能观标准I型：

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{b}\bar{u}$$
$$\bar{y}=\bar{C}\bar{x}$$

其中：

$$\bar{A}=T_{o1}AT_{o1}{}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{b}=T_{o1}b=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{C}=CT_{o1}{}^{-1}=[1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

五. 能观标准II型变换

结论：对于完全能观的单输入单输出线性定常系统 $\dot{x}=Ax+bu$，$y=Cx$

存在线性非奇异变换 $\bar{x}=T_{o2}x$，$T_{o2}=\begin{bmatrix}1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1\\ 0 & 1 & \cdots & a_3 & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CA^{n-1}\\ \vdots\\ CA\\ C\end{bmatrix}$

能够使状态空间表达式化成如下形式的能观标准II型：

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{b}\bar{u}$$
$$\bar{y}=\bar{C}\bar{x}$$

其中：

$$\bar{A}=T_{o2}AT_{o2}{}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}\qquad \bar{b}=T_{o2}b=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}\qquad \bar{C}=CT_{o2}{}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$