# 《现代控制理论》MOOC课程

## 3.4 能控与能观性的对偶关系

## 一. 对偶系统的定义

### 1. 线性时变对偶系统

对于线性时变系统∑1： $\dot{x}_1 = A(t)x_1 + B(t)u_1$
$y_1 = C(t)x_1$

则定义如下构成的线性时变系统∑2： $\dot{x}_2 = -A^T(t)x_2 + C^T(t)u_2$
$y_2 = B^T(t)x_2$

称为系统∑1的对偶系统。

其中，$x_1$，$x_2$ 为n维状态向量；$u_1$，$u_2$ 分别为r维和m维控制向量；$y_1$，$y_2$ 分别为m维和r维输出向量。

## 2. 线性定常对偶系统

对于线性定常系统$\sum 1$：
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= Ax_1 + Bu_1 \\ y_1 &= Cx_1\end{aligned}$$

则定义如下构成的线性定常系统：

$$\sum 2:\quad \begin{aligned}\dot{x}_2 &= -A^T x_2 + C^T u_2 \\ y_2 &= B^T x_2\end{aligned}$$

或

$$\sum 2:\quad \begin{aligned}\dot{x}_2 &= A^T x_2 + C^T u_2 \\ y_2 &= B^T x_2\end{aligned}$$

称为系统的$\sum 1$对偶系统。

其中，$x_1$，$x_2$为n维状态向量；$u_1$，$u_2$分别为r维和m维控制向量；$y_1$，$y_2$分别为m维和r维输出向量。

## 二. 线性时变系统的对偶原理

### 1. 互为对偶的两系统的状态转移矩阵互为转置逆

系统$\sum 1$与系统$\sum 2$是互为对偶系统，系统$\sum 1$、$\sum 2$的状态转移矩阵分别为$\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)$，$\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)$

则如下关系式成立：$\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}_1^T(t_0,t)$

证明： 对系统$\sum 1$有：$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_1(t,t_0)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)$， $\boldsymbol{\Phi}_1(t_0,t_0)=I$

对系统$\sum 2$有：$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_2(t,t_0)=-\boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)$， $\boldsymbol{\Phi}_2(t_0,t_0)=I$

由： $\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_1^{-1}(t,t_0)=I$

对上式两边求导可得：$\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_1^{-1}(t,t_0)]=0$

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_1(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_1^{-1}(t,t_0)+\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\Phi}}_1^{-1}(t,t_0)=0$$

$$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_1^{-1}(t,t_0)+\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\Phi}}_1^{-1}(t,t_0)=0$$

$$\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\Phi}}_1(t_0,t)=0$$

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_1(t_0,t)=-\boldsymbol{\Phi}_1(t_0,t)\boldsymbol{A}(t)$$

对上式取转置可得：$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_1^T(t_0,t)=-\boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{\Phi}_1^T(t_0,t)$　　由已知可得：$\boldsymbol{\Phi}_1^T(t_0,t_0)=I$

由于$-A^T(t)$是$\sum 2$系统的系统矩阵，故 $\boldsymbol{\Phi}_1^T(t_0,t)$也是系统$\sum 2$的状态转移矩阵。

由状态转移矩阵的唯一性可得：$\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}_1^T(t_0,t)$

得证

## 2. 对偶原理

若系统∑1与系统∑2是互为对偶系统，则系统∑1的能控性等价于系统∑2能观性，系统∑1的能观性等价于系统∑2能控性。

证明：对系统∑1，其能控性Gram矩阵可表示为：

$$W_{\Sigma 1c}[t_0,t_1]=\int_{t_0}^{t_1}[\boldsymbol{\Phi}_1(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)][\boldsymbol{\Phi}_1(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)]^T\boldsymbol{d}t=\int_{t_0}^{t_1}[\boldsymbol{\Phi}_2^T(t,t_0)\boldsymbol{B}(t)][\boldsymbol{\Phi}_2^T(t,t_0)\boldsymbol{B}(t)]^T\boldsymbol{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)]^T[\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)]\boldsymbol{d}t=W_{\Sigma 2o}[t_0,t_1]$$

即∑1系统的能控性等价于∑2的能观性。

同理可证∑1系统的能观性等价于∑2的能控性。 得证

## 三. 线性定常系统的对偶原理

### 1. 互为对偶的两系统的状态转移矩阵互为转置逆

对于线性定常系统$\sum 1$：$[A,B,C]$

- 当对偶系统$\sum 2$表示为：$[-A^T, C^T, B^T]$

系统$\sum 1$、$\sum 2$的状态转移矩阵分别为$\boldsymbol{\Phi}_1(t-t_0)$、$\boldsymbol{\Phi}_2(t-t_0)$

则有：$\boldsymbol{\Phi}_1(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$，　$[\boldsymbol{\Phi}_1^T(t-t_0)]^{-1}=e^{A^T(t_0-t)}$

$$\boldsymbol{\Phi}_2(t-t_0)=e^{-A^T(t-t_0)}=e^{A^T(t_0-t)}=\boldsymbol{\Phi}_1^T(t_0-t)$$

满足状态转移矩阵互为转置逆的性质。

- 当对偶系统$\sum 2$表示为：$[A^T, C^T, B^T]$

则有：$\boldsymbol{\Phi}_2(t-t_0)=e^{A^T(t-t_0)}=\boldsymbol{\Phi}_1^T(t-t_0)\neq\boldsymbol{\Phi}_1^T(t_0-t)$ 即不满足状态转移矩阵互为转置逆的性质。

## 2. 对偶原理

若系统∑1与系统∑2是互为对偶系统，则系统∑1完全能控等价于系统∑2完全能观，系统∑1完全能观等价于系统∑2 完全能控。

**证明：**

- 当对偶系统∑2表示为：$[-A^T, C^T, B^T]$

$$W_{\Sigma 2O}[t_0,t_1] = \int_{t_0}^{t_1} [B^T e^{-A^T(t-t_0)}]^T [B^T e^{-A^T(t-t_0)}]\, dt = \int_{t_0}^{t_1} [e^{A(t_0-t)}B][e^{A(t_0-t)}B]^T dt = W_{\Sigma 1c}[t_0,t_1]$$

$$W_{\Sigma 2c}[t_0,t_1] = \int_{t_0}^{t_1} [e^{-A^T(t_0-t)}C^T][e^{-A^T(t_0-t)}C^T]^T dt = \int_{t_0}^{t_1} [Ce^{A(t-t_0)}]^T [Ce^{A(t-t_0)}]\, dt = W_{\Sigma 1O}[t_0,t_1]$$

即系统∑1完全能控等价于系统∑2完全能观，系统∑1完全能观等价于系统∑2完全能控。

得证

## 2. 对偶原理

➢ 当对偶系统∑2表示为：$[A^T, C^T, B^T]$

$$M_{\Sigma 2} = [C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = N_{\Sigma 1}^T$$

$$N_{\Sigma 2} = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{(n-1)} \end{bmatrix} = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1} B]^T = M_{\Sigma 1}^T$$

故有：$rank(M_{\Sigma 2}) = rank(N_{\Sigma 1}^T) = rank(N_{\Sigma 1})$

$rank(N_{\Sigma 2}) = rank(M_{\Sigma 1}^T) = rank(M_{\Sigma 1})$

得证