《现代控制理论》MOOC课程

5.4　系统解耦问题

一. 解耦的定义

对于m个输入m个输出的线性定常系统$\sum(A,B,C)$其传递函数为：

$$W(s)=\begin{bmatrix} w_{11}(s) & \cdots & w_{1m}(s) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{m1}(s) & \cdots & w_{mm}(s) \end{bmatrix}$$

即输入输出有如下关系：
$$\begin{cases} y_1(s) = w_{11}(s)u_1(s) + w_{12}(s)u_2(s) + \cdots + w_{1m}(s)u_m(s) \\ y_2(s) = w_{21}(s)u_1(s) + w_{22}(s)u_2(s) + \cdots + w_{2m}(s)u_m(s) \\ \vdots \\ y_m(s) = w_{m1}(s)u_1(s) + w_{m2}(s)u_2(s) + \cdots + w_{mm}(s)u_m(s) \end{cases}$$

设计控制器，使多变量输入输出系统实现每一个输出仅受相应的一个输入控制，每一个输入也仅能控制相应的一个输出。即构造控制器使系统的传递函数变为非奇异对角规范型

即：$W_k(s)=\begin{bmatrix} \bar{W}_{11}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{W}_{mm}(s) \end{bmatrix}$ 则称这样的系统是解耦的，相应的控制为**解耦控制**。

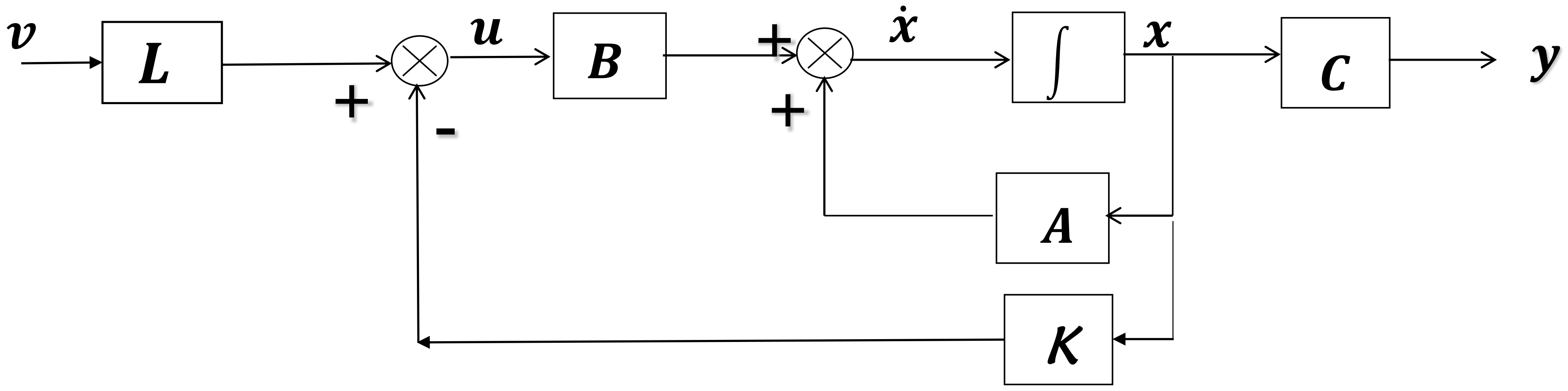
二. 状态反馈解耦问题的描述

对于多输入－多输出的线性定常系统：$\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx$$

假定 (1) 系统输出变量个数p与输入变量个数q相等，即$p = q$；

(2) 控制规律采用状态反馈和输入变换相结合，即$u = -Kx + Lv$



(3) 输入变换阵L为非奇异，即$\det L \neq 0$

寻找输入变换和状态反馈矩阵对$\{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{K}\}$，使得所导出的状态反馈系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{BLv}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}$$

的传递函数矩阵 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{KL}}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{sI} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{BL}$ 为非奇异对角有理分式矩阵。

即$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{KL}} = diag[W_{11}(s), W_{22}(s), \cdots, W_{pp}(s)]$ 其中$W_{ii}(s) \neq 0, i = 1,2,\cdots,p$

三. 传递函数矩阵的两个结构特征量

1.特征量的定义

设$\boldsymbol{W}(s)$为$p\times p$阶的传递函数矩阵， $\boldsymbol{W}_i(s)$为其第i行传递函数向量

即 $\boldsymbol{W}_i(s)=[W_{i1}(s),W_{i2}(s),\cdots,W_{ip}(s)]$

σ_{ij}为$W_{ij}(s)$的分母多项式的阶数和分子多项式阶数之差，则定义

- $\boldsymbol{W}(s)$的第一个特征量d_i(结构特性指数)为：$d_i=\min\{\sigma_{i1},\sigma_{i2},\cdots,\sigma_{ip}]-1,\ \ i=1,2,\cdots,p$

- $\boldsymbol{W}(s)$的第二个特征量E_i (结构特性向量）为：$\boldsymbol{E}_i=\lim\limits_{s\to\infty}s^{d_i+1}\boldsymbol{W}_i(s),\qquad i=1,2,\cdots,p$

2. 特征量的性质

(1). 与传递函数矩阵$W(s)$相对应的状态空间表达式为$\{A,B,C\}$，且C_i为C的第i个行向量，则有$W(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 的特征量为：

$$d_i=\begin{cases}\mu_i & ,\mu_i\text{为满足}C_iA^{\mu_i}B\neq 0\text{的最小值}\\ n-1, & \text{当}C_iA^kB=0,k=0,1,\cdots,n-1\end{cases} \quad \text{<1>}$$

$$E_i=C_iA^{d_i}B \quad \text{<2>}$$

证明：由$W(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 可得$W_i(s)=C_i(sI-A)^{-1}B$

而$(sI-A)^{-1}=\dfrac{1}{a(s)}(R_{n-1}s^{n-1}+\cdots+R_1s+R_0)$

其中：$a(s)=det(sI-A)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$

$$R_{n-1}=I,R_{n-2}=A+a_{n-1}I,\quad\cdots,\quad R_0=A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I$$

则： $W_i(s)=\frac{1}{a(s)}(C_iR_{n-1}Bs^{n-1}+\cdots+C_iR_{n-d_i}Bs^{n-d_i}+C_iR_{n-d_i-1}Bs^{n-d_i-1}+\cdots+C_iR_1Bs+C_iR_0B)$

由 d_i 定义可知，$W_i(s)$ 中各元素分母和分子多项式的阶数之差的最小值为 d_i+1，这表明与 $s^{n-1},s^{n-2},\cdots,s^{n-d_i}$ 相关的系数矩阵为零，而 s^{n-d_i-1} 的系数矩阵不为零，即：

$$C_iR_{n-1}B=0,\ C_iR_{n-2}B=0,\cdots,C_iR_{n-d_i}B=0,C_iR_{n-d_i-1}B\neq 0$$

将 $R_{n-1},R_{n-2},\cdots,R_{n-d_i},R_{n-d_i-1}$ 代入可得：

$$C_iB=0,\ C_iAB=0,\cdots,C_iA^{d_i-1}B=0,C_iA^{d_i}B\neq 0$$

即 d_i 是使 $C_iA^kB\neq 0$ 成立的最小正整数。

而当 $W_i(s)=0$，即 $C_iA^kB=0,(k=0,1,\cdots,n-1)$ ，则规定 $d_i=n-1$

故<1>式得证。

由E_i的定义可得:

$$\boldsymbol{E}_i=\lim_{s\to\infty}s^{d_i+1}\boldsymbol{W}_i(s)$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{s^{d_i+1}}{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{s})}(\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{R}_{n-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{s}^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{R}_{n-d_i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{s}^{n-d_i}+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{R}_{n-d_i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{s}^{n-d_i-1}+\cdots+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{B})$$

$$=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{R}_{n-d_i-1}\boldsymbol{B}$$

$$=\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}^{d_i}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{d_i-1}+\cdots+a_{n-d_i}\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$$

$$=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{d_i}\boldsymbol{B}+a_{n-1}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{d_i-1}\boldsymbol{B}+\cdots+a_{n-d_i}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{B}$$

$$=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{d_i}\boldsymbol{B}$$

故特征量的性质(1)得证。

(2). 对于任意的非奇异矩阵对$\{L, K\}$，状态反馈闭环系统的传递函数矩阵

$W_{KL}(s)=C(sI-A+BK)^{-1}BL$的两个特征量$\bar{d}_i$和$\bar{E}_i$则可表示为：

$$\bar{d}_i=\begin{cases}\bar{\mu}_i & ,\bar{\mu}_i\text{为满足}C_i(A-BK)^{\bar{\mu}_i}BL\neq 0\text{的最小值}\\ n-1, & \text{当}C_i(A-BK)^k BL=0, k=0,1,\cdots,n-1\end{cases}$$

$$\bar{E}_i=C_i(A-BK)^{d_i}BL$$

根据性质（1）相同的方法可证。

(3) 对于任意的非奇异矩阵对$\{L, K\}$，开环系统和闭环系统的传递函数矩阵的特征量之间存在如下关系式：

$$\bar{d}_i=d_i,\qquad \bar{E}_i=E_iL\qquad\qquad i=1,2,\cdots.p$$

四. 系统可解耦的条件

定理：给定p个输入p个输出的线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx$

可采用输入变换和状态反馈矩阵$u = -Kx + Lv$进行解耦控制的充要条件，由系统传递函数矩阵每一行结构特性向量E_i组成的矩阵非奇异。

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \end{bmatrix} \qquad E \in R^{p\times p}$$

证明：必要性：

已知存在控制$u = -Kx + Lv$，可使系统实现解耦，即闭环系统的传递函数矩阵为

$W_{KL} = diag[\overline{W}_{11}(s), \overline{W}_{22}(s), \cdots, \overline{W}_{pp}(s)]$，则E非奇异。

由于解耦,由结构特性向量的定义可得

$$\bar{E}=\begin{bmatrix}\bar{E}_1\\ \bar{E}_2\\ \vdots\\ \bar{E}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{s\to\infty} s^{d_1+1}W_{KL1}(s)\\ \lim\limits_{s\to\infty} s^{d_2+1}W_{KL2}(s)\\ \vdots\\ \lim\limits_{s\to\infty} s^{d_p+1}W_{KLp}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{s\to\infty} s^{d_1+1}\overline{W}_{11}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \lim\limits_{s\to\infty} s^{d_p+1}\overline{W}_{pp}(s)\end{bmatrix}$$

即为对角非奇异常阵。

由$\bar{E}=EL$ 可知 $E=\bar{E}L^{-1}$，由于$\bar{E}$和L均为非奇异，故E非奇异，必要性得证。

充分性：已知E非奇异，证明可解耦。

由已知E非奇异，故E^{-1} 存在

取$\{L，K\}$为：$L=E^{-1}$，$K=E^{-1}F, F=\begin{bmatrix}C_1A^{d_1+1}\\ \vdots\\ C_pA^{d_p+1}\end{bmatrix}$

这样，闭环系统的传递函数矩阵为：

$$W_{KL}(s)=C(sI-A+BE^{-1}F)^{-1}BE^{-1}$$

由结构特征量的性质和凯莱－哈密尔顿定理可得：

$$W_{KLi}(s)=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{s^{d_i+1}} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

$$W_{KL}(s)=diag\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s^{d_1+1}} & \dfrac{1}{s^{d_2+1}} & \cdots & \dfrac{1}{s^{d_p+1}}\end{bmatrix}$$

即实现了解耦，充分性得证。

- 解耦后，各输入输出间的传递函数是多重积分，称为积分型解耦系统。极点在坐标的原点，其性能在工程上不能被接受。其意义在于理论分析，即可通过简单的输入变换和状态反馈实现解耦。

五. 确定解耦控制器的算法

算法：给定完全能控的线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx$$

确定使系统完全解耦的输入变换和状态反馈矩阵{L，K}的计算步骤如下：

1. 计算系统的特征量 $\{d_i, i = 1,2,\cdots,p\}$ 和 $\{E_i = C_i A^{d_i} B, i = 1,2,\cdots,p\}$。判断 E 是否非奇异。

若是，可解耦，进入下一步。若否，不能解耦，退出计算。

2.计算 E^{-1} 和 $F = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ C_p A^{d_p+1} \end{bmatrix}$

3.取 $\{L, K\}$ 为 $L = E^{-1}$，$K = E^{-1}F$，导出积分型解耦系统

$$\dot{x} = (A - BK)x + BLv = \left(A - BE^{-1}F\right)x + BE^{-1}v = \bar{A}x + \bar{B}v$$
$$y = Cx$$

状态空间表达式所对应的传递函数矩阵为：

$$G(s)=C(sI-A+BE^{-1}F)^{-1}BE^{-1}=diag\begin{bmatrix}\frac{1}{s^{d_1+1}} & \frac{1}{s^{d_2+1}} & \cdots & \frac{1}{s^{d_p+1}}\end{bmatrix}$$

例：已知系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}x$$

求解耦控制的K阵和L阵。

解：（1）计算E阵

$$C_1A^0B=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix} \qquad C_2A^0B=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

故有：$d_1 = d_2 = 0$

$$\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{C_1 A^{d_1} B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E_2} = \boldsymbol{C_2 A^{d_2} B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E_1} \\ \boldsymbol{E_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad det\boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

故可实现状态反馈解耦控制。

（2）求解耦控制的K阵和L阵。

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_1 A^{d_1+1}} \\ \boldsymbol{C_2 A^{d_2+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

因此： $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{E}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

解耦后的变换传递函数为：

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{KL}}(\boldsymbol{s})=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & 0\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$