《现代控制理论》MOOC课程

1.2 状态空间表达式的建立

单输入单输出系统实现方法二

1. 当 $m = n$

由系统的传递函数可得： $Y(s)=\dfrac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}U(s)$

取拉氏反变换，可得：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

选取状态变量，令：

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ \quad \vdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \\ x_{n+1} = \dot{x}_n - \beta_n u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x_1 + \beta_0 u \\ \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = x_{n+1} + \beta_n u \end{cases}$$

写成矩阵的形式,得到含有待定系数及待求变量的状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \mathrm{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 \mathrm{u}$$

其中 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$及 x_{n+1}为待求系数和变量;

求待定系数和变量

$$
\begin{cases}
x_1 = y - \beta_0 u \\
x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = y^{(1)} - \beta_0 u^{(1)} - \beta_1 u \\
x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u = y^{(2)} - \beta_0 u^{(2)} - \beta_1 u^{(1)} - \beta_2 u \\
\quad\vdots \\
x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2} u^{(1)} - \beta_{n-1} u \\
x_{n+1} = \dot{x}_n - \beta_n u = y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1} u^{(1)} - \beta_n u
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y = x_1 + \beta_0 u \\
y^{(1)} = x_2 + \beta_0 u^{(1)} + \beta_1 u \\
y^{(2)} = x_3 + \beta_0 u^{(2)} + \beta_1 u^{(1)} + \beta_2 u \\
\quad\vdots \\
y^{(n-1)} = x_n + \beta_0 u^{(n-1)} + \beta_1 u^{(n-2)} + \cdots + \beta_{n-2} u^{(1)} + \beta_{n-1} u \\
y^{(n)} = x_{n+1} + \beta_0 u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + \beta_{n-1} u^{(1)} + \beta_n u
\end{cases}
$$

将前n个方程两边分别同乘 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$

$$
\begin{cases}
a_0 y = a_0 x_1 + a_0\beta_0 u \\
a_1 y^{(1)} = a_1 x_2 + a_1\beta_0 u^{(1)} + a_1\beta_1 u \\
a_2 y^{(2)} = a_2 x_3 + a_2\beta_0 u^{(2)} + a_2\beta_1 u^{(1)} + a_2\beta_2 u \\
\quad\vdots \\
a_{n-1} y^{(n-1)} = a_{n-1} x_n + a_{n-1}\beta_0 u^{(n-1)} + a_{n-1}\beta_1 u^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\beta_{n-2} u^{(1)} + a_{n-1}\beta_{n-1} u \\
y^{(n)} = x_{n+1} + \beta_0 u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + \beta_{n-1} u^{(1)} + \beta_n u
\end{cases}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rclllllll}
a_0 y & = & a_0 x_1 & & & & & & +a_0\beta_0 u \\
a_1 y^{(1)} & = & a_1 x_2 & & & & & +a_1\beta_0 u^{(1)} & +a_1\beta_1 u \\
a_2 y^{(2)} & = & a_2 x_3 & & & & +a_2\beta_0 u^{(2)} & +a_2\beta_1 u^{(1)} & +a_2\beta_2 u \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n-1} y^{(n-1)} & = & a_{n-1} x_n & + & a_{n-1}\beta_0 u^{(n-1)} & +\cdots+ & a_{n-1}\beta_{n-3} u^{(2)} & + a_{n-1}\beta_{n-2} u^{(1)} & + a_{n-1}\beta_{n-1} u \\
y^{(n)} & = & x_{n+1} & +\beta_0 u^{(n)} & +\beta_1 u^{(n-1)} & +\cdots & +\beta_{n-2} u^{(2)} & +\beta_{n-1} u^{(1)} & +\beta_n u
\end{array}
\right.
$$

将每个方程等式两边相加

$$\text{左边} = a_0 y + a_1 y^{(1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = b_n u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

$$\text{右边} = (a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots a_{n-1} x_n + x_{n+1}) + \beta_0 u^{(n)} + \cdots + (\beta_n + a_{n-1}\beta_{n-1} + \cdots + a_1\beta_1 + a_0\beta_0) u$$

比较方程两边的系数有：

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots a_{n-1} x_n + x_{n+1} = 0 \Rightarrow x_{n+1} = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = b_n$$

$$\beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \quad , \cdots , \beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - \cdots - a_1\beta_1 + a_0\beta_0$$

代入状态方程，可得：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\\ \beta_n\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\beta_0 \mathrm{u}$$

能观标准I型

待定系数递推公式：

$$\begin{cases}\beta_0=b_n\\ \beta_1=b_{n-1}-a_{n-1}\beta_0\\ \quad\vdots\\ \beta_n=b_0-a_{n-1}\beta_{n-1}-\cdots-a_1\beta_1+a_0\beta_0\end{cases}$$

2. 当m<n时：与所讨论情形的等价 $b_k=0, k=n，\mathrm{n}-1，\cdots，m+1$

例： 系统的动态特性由下列微分方程描述

$$\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\dot{u}+2u$$

列写其相应的状态空间表达式。

解： $b_3=b_2=0$，$b_1=1$，$b_0=2$ $\quad$ $a_2=5$，$a_1=7$，$a_0=3$

$$\beta_0=b_3=0$$

$$\beta_1=b_2-a_2\beta_0=0$$

$$\beta_2=b_1-a_2\beta_1-a_1\beta_0=1-5\times0-7\times0=1$$

$$\beta_3=b_0-a_2\beta_2-a_1\beta_1-a_0\beta_0=2-5\times1-7\times0-3\times0=-3$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-7&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

多输入多输出系统实现方法

- 多输入多输出系统的实现，可采用方框图法。就是依据高阶微分方程组，画出所对应的方框图，再根据方框图列写状态空间表达式。
- 由于经典控制理论难以有效的处理多输入多输出系统，通常不会建立多输入多输出系统的微分方程或传递函数描述。

小结

- 方框图法、机理法、实现的方法的建模步骤；
- 状态变量的选取方法：

方框图法：每一个积分器的输出选为状态变量

机理法：每一个独立储能元件，选一个变量作为状态变量

实现方法1：传递函数分母分之输入的拉氏反变换，及其各阶导数作为状态变量。

实现方法2：系统输入、输出各阶导数的线性组合选作状态变量。