《现代控制理论》MOOC课程

6.2.2　无约束条件的变分问题(2)

二 横截条件

端点状态$x(t_0)$ 和 $x(t_f)$均不固定时的变分问题。

问题： 寻求使泛函 $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t]dt$

取极值，且$x(t_0)$ 和 $x(t_f)$均不固定时的函数 $x^*(t)$。

解： $\delta J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \right) \delta x dt$

由于端点不固定，所以$\delta x(t_0) \neq 0$， $\delta x(t_f) \neq 0$

$$\delta J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} \delta x(t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \right) \delta x dt$$

在极值曲线$x^*(t)$ 上，必有 $\delta J[x^*(t)]=0$

故欧拉方程： $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$

横截条件： $\left.\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0$，

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}=0$$

成立

显然，端点中任意一点固定时，其横截条件改由终端条件代替。

$$\delta J=\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}\delta x(t_f)-\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}\delta x(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\delta x dt=0$$

例：求泛函 $J=\int_0^1 (\dot{x}^2+1)\,dt$

求满足下列两种端点情况的极值曲线。

(1) $x(0)=1, x(1)=2$　　(2) $x(0)=1, x(1)$未定

解：$L=\dot{x}^2+1$　　$L_{\dot{x}\dot{x}}=2$　　$L_x=L_{\dot{x}x}=L_{\dot{x}t}=0$

由欧拉方程：$L_x-L_{\dot{x}x}\dot{x}-L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}-L_{\dot{x}t}=0$

可得：$2\ddot{x}=0$

通解为：$x(t)=C_1t+C_2$

对端点情况(1)可得：$x^*(t)=t+1$　　相应的极值为：$J[x^*(t)]=2$

对端点情况(2)由横截条件：$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=2\dot{x}\big|_{t=1}=0$　　可得：$\dot{x}(1)=0$

考虑初值条件可得：$x^*(t)=1$　　相应的极值为：$J[x^*(t)]=1$

二 欧拉方程与横截条件的向量形式

问题： 寻求使泛函 $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t]dt$

取极值，且 $x(t_0)$ 和 $x(t_f)$ 均不固定时的函数 $x^*(t)$。

其中， $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$

$\dot{x}(t) = [\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \cdots, \dot{x}_n(t)]^T$

一维情况下的欧拉方程和横截条件可以推广到n维情况：

故欧拉方程： $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

横截条件： $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0,$ $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0$

例. 求泛函

$$J[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x_1x_2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)dt$$

满足边界条件 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(\pi/2) \\ x_2(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

的最优轨线。

解：由欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ 得

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} - \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 2\dot{x}_1 \\ 2\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\ddot{x}_1 \\ 2\ddot{x}_2 \end{bmatrix} = 0$$

于是：
$$\begin{cases} x_2 - \ddot{x}_1 = 0 \\ x_1 - \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$
可得：
$$x_1^{(4)} - x_1 = 0$$

特征方程为：
$$\lambda^4 - 1 = 0$$

特征值为：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$

其通解为：
$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$
$$x_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$$

代入边界条件得：
$$x_1^*(t) = \sin t$$
$$x_2^*(t) = -\sin t$$