02_08(토) 강의 노트

- 데이터의 분포(패턴)를 찾아서 의미있는 결론을 도출 -> 통계의 목표
  - then ai is statistics
  - statistics is math
  - so AI == MATH
- 수학 : 추상적인 개념을 탐구하고 논리적으로 확장하는 것 - 함수, 대수, 위상 수학
  - 추상적 구조를 연구하고 연산의 성질을 정의
  - 엄밀한 증명을 통해 개념의 타당성을 보장
- 컴퓨터 공학 : 구체적인 연산과 시스템을 설계하는 것 - 알고리즘, 데이터 구조, 컴파일러
  - but, 컴퓨터 과학도 본질적으로 수학을 기반으로 하며, 기초적인 개념부터 시작하여 다양한 응용 분야로 확장된다.
  - 연산을 자동화하고 연산을 효율적으로 하는 것이 컴퓨터 공학의 목표
- 즉, 수학은 주로 추상적 사고를 기반으로 발전하며, 컴퓨터 과학은 이를 구체적 구현으로 변환하는 역할을 함.
- 따라서, 수학을 아는 것이 중요
- 수학적 사고의 세 단계
  - a. 기초 : 문제 해결을 위한 기본적인 원리
    - 대수, 집합론 등
  - b. 응용 : 기존 개념을 발전시키고 실생활에 적용
    - 통계학, 데이터과학 등
  - c. 창발 : 기존 개념에서 새로운 개념이 자연스럽게 등장
    - 머신러닝에서 뉴럴 네트워크가 나온것
- 수학적 사고에서 가장 중요한 개념, 즉 수학적 대상은
  - 집합 : 관심 있는 수학적 대상(수,함수,행렬 등)의 모임
    - 무한 혹은 유한일 수 있으며 아무 요소도 없는 공집합과 하나의 요소만 있는 singleton이 있다.
    - 부분집합 : 특정 조건을 막족하는 원소들의 집합
    - 멱집합 : 어떤 집합의 공집합을 포함한 모든 부분집합의 모임
  - 함수 : 집합 X에서 집합 Y로의 함수란, 집합 X의 각 원소를 정확히 하나의 Y의 원소에 대응시키는 규칙을 의미한다.
    - 이때, 집합 X를 정의역(domain), 집합 Y를 공역(codomain)이라고 한다.
- 수학에서 다루는 주요 대상들은 집합의 형태로 정의되잠ㄴ 단순한 원소들의 모임이기 때문에, 원소들 사이에 관계나 연산이 존재하지 않는 무질서한 상태이다.
- 여기에 연산과 성질(두 원소를 받아 새로운 원소를 반호나하는 규칙)을 추가하면 `수학적 구조` 가 형성된다.

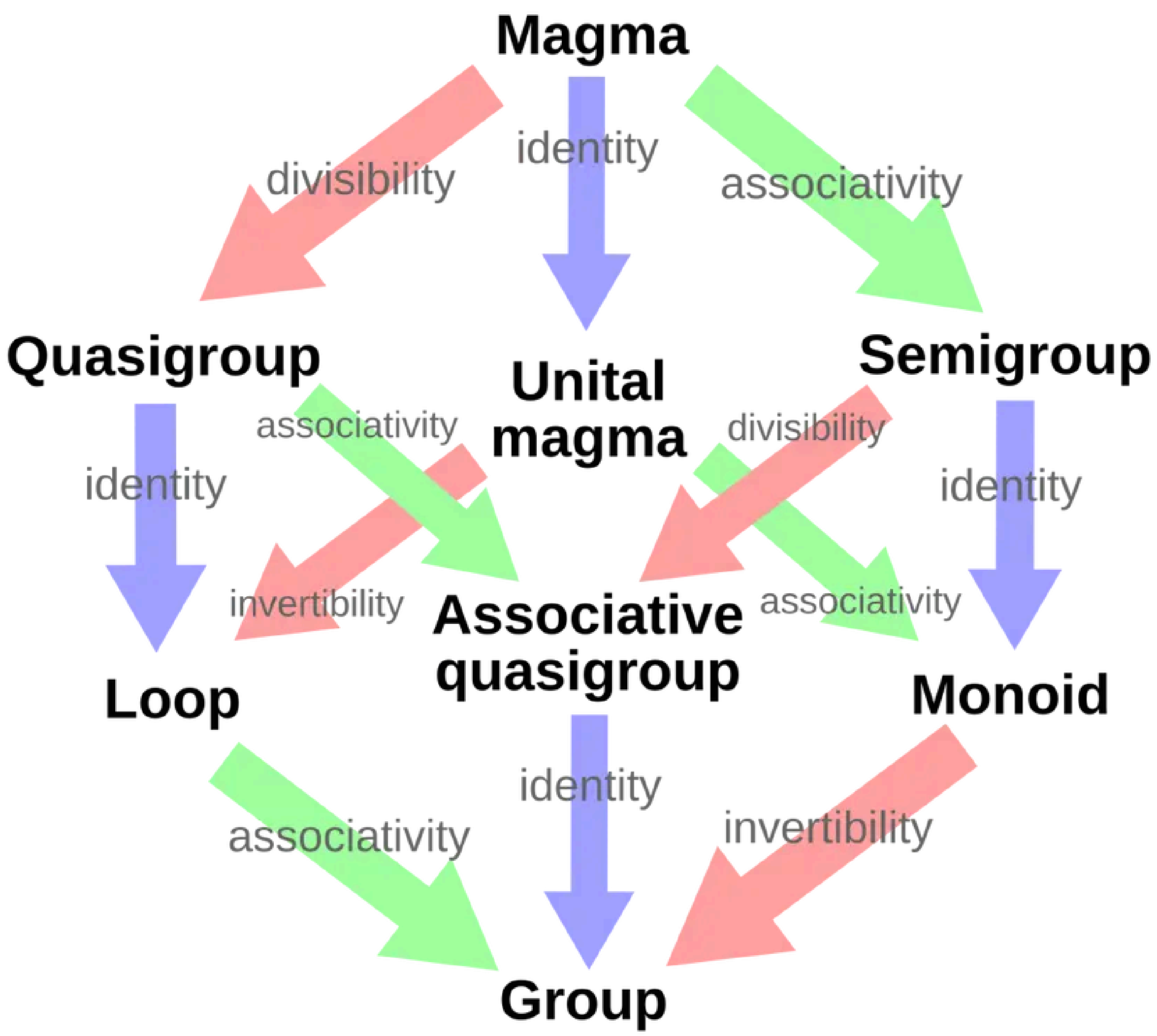
$$\text{수학적구조} = (\text{집합}, \text{연산}, \text{공리})$$

즉, 집합에 특정한 연산을 추가하고, 이 연산이 만족해야한 공리(무조건 지켜야하는 조건 혹은 명제)를 설정하면 구조가 정의 된다.
예를 들어,
- 집합 + 이항연산(덧셈, 곱셈) => 대수구조
  - 대수구조에 대하여 구체적으로 얘기하자면 비어있지 않은 집합 A(기본집합 또는 정의역) + 집합 A위에서 정의된 연산들의 모음 + 연산들이 반드시 만족해야하는 유한개의 항등식(공리)로 구성된다.
    그러면, 벡터공간에는 어떤 연산이 추가된것일까?
    - 벡터 덧셈
    - 스칼라 곱
  - 벡터들의 모임이 집합이고 여기에 두가지 연산(벡터 덧셈, 스칼라 곱)을 추가해야 벡터공간이 되는 것이다.
  - 또한 이에 따라 벡터 공간에서 지켜야하는 공리는 다음과 같다.
    - a. 교환법칙
      - $u + v = v + u, \;\; \forall u, v \in V$
    - b. 결합법칙
      - $(u + v) + w = u + (v + w), \;\; \forall u, v, w \in V$
    - c. 덧셈 항등원 존재
      - $\exists 0 \in V \; such \; that \; v + 0 = v, \;\; \forall v \in V$
    - d. 덧셈 역원 존재
      - $\forall v \in V, \exists -v \in V \quad such \; that \; v + (-v) = 0$
    - e. 분배법칙 - 벡터 덧셈
      - $a(u + v) = au + av, \;\; \forall u, v \in V, a \in F$
    - f. 분배법칙 - 스칼라 덧셈
      - $(a + b)v = av + bv, \;\; \forall v \in V, a, b \in F$

        - g. 결합법칙 - 스칼라 곱
            - $a(bv) = (ab)v, \quad \forall v \in V, a, b \in F$
        - h. 항등원 존재 - 스칼라
            - $1v = v, \quad \forall v \in V$
    - 벡터공간이라는 대수구조를 다음과 같은 `튜플` 로도 표현할 수 있다.

$$(V, +, \cdot)$$

    - 즉, 벡터 공간은 벡터 공간은 `집합 + 연산(벡터 덧셈, 스칼라 곱) + 공리(8개)` 로 이루어진 수학적 구조이다.
- More into 대수구조



- 마그마(Magma)
    - 집합 S 와 하나의 이항연산 $*$ 이 정의됨.
    - 연산의 폐쇄성이 존재

$$a, b \in S \Rightarrow a * b \in S$$

    - 즉, 예를 들어 자연수 집합 $\mathbb{N}$ 위에서 덧셈 연산 $(+)$ 을 수행하면 항상 자연수로 닫혀 있음.
    - 여기서 $*$은 덧셈 and 곱셈
- 반군(Semigroup)
    - 마그마에 결합법칙이 추가됨.

$$(a * b) * c = a * (b * c), \ \forall a, b, c \in S$$

- 모노이드(Monoid)
    - 반군에 항등원이 추가됨.

$$e * a = a * e = a, \ \forall a \in S$$

- 군(Group)
    - 모노이드에 역원이 추가됨.

$$\forall a \in S, \exists a^{-1} \text{ such that } a * a^{-1} = e$$

- 군에 교환법칙을 추가하면 아벨 군(Abelian Group,가환군)이다.

$$a * b = b * a,\ \forall a, b \in G$$

- 환(Ring)
  - 두 개의 이항 연산(덧셈,곱셈)이 정의된 대수적 구조
  - 덧셈 가환군
    - 즉 덧셈에 대해 교환, 결합, 항등원, 역원
  - 곱셈 모노이드
    - 즉, 곱셈에 대해 결합, 항등원(항등원 존재 여부에 따라 단위원을 갖는 환과 그렇지 않은 환으로 구분)
  - 분배법칙(곱셈, 덧셈)
    - 즉, 덧셈과 곱셈 사이에 분배법칙이 존재한다.
- 채(field)
  - 환의 확장판으로 나눗셈을 할 수 있다.(즉, 곱셈에 대해 역원이 존재한다.)

$$\forall a \in F, a \neq 0, \quad \exists a^{-1} \text{ such that } a \times a^{-1} = 1$$

- 예시를 들어보면 다음과 같다.

$$\begin{gathered}
(\mathbb{Z}, +) = G? => \text{정수 집합 Z에 덧셈 연산을 정의하면 아벨 군이 된다.} \\
(\mathbb{Z}, \times) \neq G => \text{정수 집합 Z에 곱셈 연산을 정의하면 군을 이루지 못한다.} \\
(\mathbb{Q}, \times) = G => \text{유리수 집합 Q에서 곱셈를 정의하면 군을 이룬다.} \\
(\mathbb{Z}, +, \times) = R => \text{정수에 덧셈과 곱셈 연산이 함께 정의 되면 환이 된다.} \\
(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times) = F => \text{유리수, 실수, 복소수 집합에서 덧셈과 곱셈을 함계 고려하면 체가 된다.}
\end{gathered}$$

- why?
  - a. 정수는 덧셈에 대해 교환법칙이 성립함
  - b. 정수는 곱세에 대해 역원이 존재하지 않고 0이 포함된 군이라면 영원의 문제가 존재하지
  - c. 0을 제외한 유리수 집합에서 곱셈을 정의하면 군을 이룸
  - d. 정수는 덧셈에 대하여 역원이 존재하지만 곱셈에 대한 역원이 없으므로 체는 될 수 없지만 환에 해당함
  - e. but 유리수, 실수, 복소수 집합에서 덧셈과 곱셈을 함께 고려하면 체가 된다.
    - 덧셈에 대해 아벨 군, 곱셈에 대해 아벨 군 그리고 분배법칙이 성립한다.

다시 벡터공간으로 돌아가보면, 벡터 공간은 벡터 공간은 `집합 + 연산(벡터 덧셈, 스칼라 곱) + 공리(8개)` 로 이루어진 수학적 구조인데,
이를 다시 구체적으로 정의해보면 다음과 같다.

$$\begin{gathered}
+ : V \times V \to V, \quad (\text{벡터 덧셈}) \\
\cdot : F \times V \to V, \quad (\text{스칼라 곱}) \\
(V, F, +, \cdot) = \text{Module(Ring)} \\
\text{where } V \text{ is a vector space, and } F \text{ is a field (e.g., } \mathbb{R}, \mathbb{C}).
\end{gathered}$$

- V는 벡터들의 집합이며, 덧셈이 정의되고 F는 체를 의미하며 실수체 $\mathbb{R}$ 또는 복소수체 $\mathbb{C}$를 의미함.
- 벡터 공간은 이렇게 벡터의 덧셈과 스칼라 곱이 정의 된 대수구조임.
- 여기서 모듈(Module)은 환 위에서 정의된 일반적 개념인데, 벡터 공간은 체 위에서 정의된 특수한 모듈이다.
- 즉, 모든 벡터 공간은 체 위에서 정의되어 모듈이지만 모든 모듈이 벡터공간은 아니다.
  - ex) 모듈에서는 스칼라의 역원이 존재하지 않을 수 있다.

근데 왜 벡터 공간은 공간이라고 부를까?

- 수학적 공간이란?
  - 원소들이 특정한 관계(구조)를 가지면서 존재하는 수학적 환경
  - 근데 왜 공간이라 부를까?
    - 단순한 대수 구조를 넘어서 공간적인 성질(거리,위상,차원)을 가질 수 있기 때문에 공간이라는 용어를 사용함,벡터라는 원소 자체의 특성때문이기도 함.
    - 즉, 벡터 공간은 기학학적 개념과 자연스럽게 연결될 수 있는 대수적 구조가 공간을 형성하기 때문에 벡터 공간이라하는 것이다.
      - a. 벡터 공간은 방향과 크기를 표현가능하다.
      - b. 내적이 정의된 벡터공간은 벡터간 거리와 각도를 정의할 수 있음.
      - c. 내적이 추가된 벡터 공간에서는 기저를 통해 차원의 개념을 정의할 수 있음
- 그러면 벡터공간이 내적 공간이 될려면 어떠한 연산이 추가되는 것일까?
  - 내적이란 무엇일까?
    - 내적이란 벡터 공간에서 두 벡터 사이의 관계를 정량화(스칼라화)하는 함수

        - 이는 두 벡터간의 유사성을 나타낸다. 기하학적으로 각도와 놈의 개념을 표현한다.
    - 내적을 정의하는 함수는 하나만 있을까?
        - 아니다. 내적은 벡터 공간의 특성에 따라 다르게 정의될 수 있으며, 내적의 4가지 공리를 만족하는 다양한 형태의 함수가 존재한다.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to F$$

            - 내적함수 $\langle \cdot, \cdot \rangle$는 벡터 공간 V에서 두 벡터를 입력으로 받아, Field F의 원소(Scalar) 값을 출력하는 함수이다.
        - 내적의 공리
            - Conjugate Symmetry (켤레 대칭성)
                - 두 벡터의 내적은 교환 가능하다.
                - 따라서, 실수 벡터 공간에서는 단순한 대칭성을 만족한다.

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

                - 다만, 복소수 벡터 공간에서는 켤레 복소수 관계를 가진다.

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \quad \forall u, v \in V$$

            - Linearity in the First Argument (첫 번째 변수에 대한 선형성)
                - 첫 번째 변수에 대해 선형 연산을 유지한다.

$$\langle au + bw, v \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle w, v \rangle, \quad \forall u, w, v \in V, \quad \forall a, b \in \mathbb{F}$$

            - Positive Definiteness (양의 정부호성)
                - 벡터 자기 자신과의 내적은 항상 0 이상이며, 벡터가 0벡터가 아닌 경우 내적값은 반드시 양수여야 한다.

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \& \langle v, v \rangle = 0 \ \mathrm{then} v = 0$$

            - Homogeneity in the First Argument (첫 번째 변수에 대한 동질성, 균질성)
                - 스칼라 배율이 그대로 유지된다.

$$\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle, \quad \forall a \in \mathbb{F}, \quad \forall u, v \in V$$

        - 따라서, 유클리드 공간의 유클리드 내적, 복소수 공간의 복소수 내적 등 다양한 내적이 존재한다.
            - 그러면 유클리드 공간의 스칼라 체는 무엇일까?
                - 유클리드 공간은 스칼라 연산이 실수에서 이루어지기 때문에 스칼라체는 실수체이며 따라 실수체 위의 유한 차원의 내적공간으로 정의된다.
- 벡터 공간의 확장
  벡터 공간 -> 길이, 거리 개념이 없음
  => 내적을 추가 => 내적 공간 -> 내적을 추가하여 각도, 투영, 직교를 정의할 수 있음
  => 내적으로부터 놈을 정의 => 놈 공간 -> 내적으로부터 벡터의 길이(norm)을 정의할 수 있음
  => 놈으로부터 거리를 정의 => 거리 공간 -> norm을 통해 벡터 간의 거리 개념을 정의할 수 있음
  => 거리로부터 열린 집합을 정의 => 위상 공간 -> `거리 기반으로 열린 집합을 정의하여 위상을 형성할 수 있음...? -> 이해 부족`
- 벡터 공간을 정의할때 차원이란 무엇일까?
    - 벡터 공간을 생성(Span)하는 선형 독립인 벡터들의 집합(기저, Basis)의 원소 개수
    - 이는 벡터 공간의 기본 구조를 결정하는 중요한 속성이다.
    - 그렇다면 차원을 정의할때 기저란 무엇일까?
        - 선형 독립성을 가지며 벡터 공간 전체를 생성하는 벡터들의 집합 => 즉, 벡터 공간을 전부 커버할 수 있는 독립적인 방향을 가진 벡터들의 집합을 뜻한다.
        - 즉, 벡터지만 선형 독립성이라는 특성이 추가된 벡터 집합의 부분 집한이다. 또한 이 것들의 개수로 해당 공간의 차원이 결정된다.
        - 그러면 선형 독립성이란?
            - 해당 벡터 집합의 어떠한 벡터도 나머지 벡터들의 선형 결합으로 표현될 수 없다는 것을 의미
            - 다른말로는 해당 벡터 집합의 선형결합으로 해당 벡터 공간의 모든 벡터들을 표현할 수 있다는 의미이다.
        - 하나의 공간에 기저는 하나뿐일까?
            - 아니다. 해당 공간에서 기저의 두 조건을 만족하는 벡터들은 기저에 해당한다. but 모든 기저(집합)은 같은 원소의 개수를 가진다.
            - 기저의 조건
                - a. 선형 독립 (Linear Independence)
                  집합 B 가 선형 독립이라는 것은, B 의 모든 유한 부분집합이 선형 독립이어야 한다는 의미이다.
                  즉, 임의의 유한 부분집합 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset B$ 에 대해,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = 0$$

                  을 만족하는 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_m \in F$ 가 존재할 때,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

이어야 한다.
즉, 기저의 원소들은 서로 종속되지 않고 독립적인 방향을 가진다.

- b. 생성(Spanning Property)
기저 B 는 벡터 공간 V 의 생성 집합(Spanning Set)이어야 한다.
즉, 임의의 벡터 $v \in V$ 는 기저 B 의 유한한 선형 결합(Linear Combination)으로 표현할 수 있어야 한다.
즉, 임의의 벡터 $v \in V$ 에 대해, 적절한 스칼라 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ 와 벡터 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in B$ 가 존재하여

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

즉, 기저 벡터들을 독립적인 방향을 지녀야한다.

- 기저를 정의하는 방식에 하나 더 있다. 과연?
  - 해당 정의를 가지고 기저를 정의한다면 벡터 공간의 기저는 체 F(스칼라) 위에서 정의된 벡터들의 선형 독립 집합으로, 벡터 공간 V를 생성(Span)하는 집합.
- 그렇다면 모든 벡터 공간에는 기저가 있을까?(심지어 무한 차원에서도?)
  - 우선 기저의 공리를 생각해본다면 유한 차원에서는 기저가 항상 존재한다.
    - 예를 들어, n차원 공간에서는 $(e_1, e_2, ..., e_n)$ 에서 하나만 1이고 나머지 0인 서로 다른 n개의 벡터들이 유한 차원 공간에서 기저가 될 수 있다.
    - 그렇다면 무한차원에서는?
      - 위의 $(e_1, e_2, ..., e_n)$를 $n \to \infty$라 확장한다면 무한 공간에서 까지 존재하여 항상 존재한다고 할 수 있지만 엄밀한 정의인지는 모르겠다....

- 수학에서 말하는 벡터공간의 차원과 numpy에서 말하는 차원에는 무슨 차이가 있을까?
  - v = (1, 2, 3) => dim V = 3 -> math
  - M_(2xx2) = [1, 2; 3, 4] -> in numpy <=> m = (1, 2, 3 ,4) in M => dim M = 4 -> in math
  - 수학적 차원과 달리 numpy에서 차원이란 수학의 텐서의 차수, 랭크를 의미한다.
  - numpy의 reshape은 벡터 공간의 차원을 보존한다.
  - 또한 numpy의 size는 벡터 공간의 차원을 알려준다.
  - 이를 통해 알 수 있는 것은 수학은 맥락속에서 파악해야한다는 것이다.