3 多項式

學測趨勢 多項式是大考必考的主題之一，以往的學測、指考加起來，每年都會出現三、四題之多，考題以定理運用、函數特性為主，相信這個趨勢未來也不會改變。

準備方向 請同學務必對每個定理性質的敘述瞭若指掌、倒背如流，再進一步觀摩解題技巧，多做、多解、多想，是學好這個單元的不二法門。

年　度	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
學測命題數	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1

一、多項式的運算

★★★★

❶ **多項式的基本概念**：形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的函數稱為多項式，習慣以降冪（次數遞減）表示。若最高次項係數 $a_n\neq 0$，則 $f(x)$ 的次數為 n，記為 $\deg f(x)=n$。$f(x)$ 的所有係數之和為函數值 $f(1)$。

例A 設 $f(x)=ax^6-bx^4+3x-\sqrt{2}$，其中 a、b 為非零實數，則 $f(5)-f(-5)$ 之值為：______

(A) -30　(B) 0　(C) $2\sqrt{2}$

(D) 30　(E)無法確定（與 a、b 有關）

例B 設 a 為實數，多項式 $f(x)=(2x^7+ax^4-a)^5$ 的次數為 $\deg f(x)=$______，將 $f(x)$ 乘開後各項係數之和為______。

讀完可以先練習範例 1、2

★★★★

❷ **多項式的除法原理**：給兩多項式 $f(x)$、$g(x)$，可用長除法找到唯一的多項式 $q(x)$ 與 $r(x)$，使等式 $f(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$ 成立，且若 $r(x)\neq 0$，則 $r(x)$ 的次數低於 $g(x)$ 的次數。我們分別稱 $f(x)$、$g(x)$、$q(x)$、$r(x)$ 依序為被除式、除式、商式與餘式。長除法可省略 x，只寫出係數。

例A 若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$，則 $p=$______，$q=$______。

例 B　多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$ 的商式為 $x+2$，餘式為 $2x-1$，則 $f(x)=$ ________。

例 C　$f(x)=(x^2+1)(x^3-2)\cdot g(x)+x^2+x+3$，$g(x)$ 為某一多項式，則：

(1) $f(x)$ 除以 x^3-2 的餘式為 ________。

(2) $f(x)$ 除以 x^2+1 的餘式為 ________。

讀完可以先練習範例 3　★★★★

③ **綜合除法與局部特徵**：當除式為 $x-k$ 時，長除法可大幅簡化為綜合除法，除了減少重複書寫、縮減計算空間，並可化減為加。將所得的商**繼續除以 $x-k$**，可將 x 的多項式化成 $x-k$ 的多項式，並可看出 $f(x)$ 在點 $(k,f(k))$ 附近的近似直線（即通過該點的**切線**），稱此線型函數為 $f(x)$ 在 $x=k$ 的**一次近似**。

例 A　利用綜合除法求 $2x^3+x^2-7$ 除以 $x+3$ 的商為 ________，餘式為 ________。

例 B　右表為 $f(x)=5x^3+x^2-2x+4$ 不斷除以 $x-1$ 的過程，請利用除法原理把 $f(x)$ 化為 $x-1$ 的多項式：

$$\begin{array}{rrrr|l}
+5 & +1 & -2 & +4 & \\
 & +5 & +6 & +4 & +1 \\
\hline
+5 & +6 & +4 & +8 & \\
 & +5 & +11 & +1 & \\
\hline
+5 & +11 & +15 & & \\
 & +5 & +1 & & \\
\hline
+5 & +16 & & &
\end{array}$$

$f(x)=5x^3+x^2-2x+4$

$=(x-1)\times$ ________ $+$ ____

$=(x-1)[(x-1)\times$ ________ $+$ ____ $]+$ ____

$=(x-1)^2\times$ ________ $+(x-1)\times$ ____ $+$ ____

$=(x-1)^2\times[(x-1)\times$ ____ $+$ ____ $]+(x-1)\times$ ____ $+$ ____

$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

序組 $(a,b,c,d)=$ ________。

例 C　$f(x)=(x-4)^3+7(x-4)^2+2(x-4)+5$ 的圖形經過點 $P(4,5)$，在 x 靠近 4 時，$f(x)$ 的圖形會近似一條直線，此直線即過 P 的切線，又稱為 $f(x)$ 在 $x=4$ 的一次近似，請問該線型函數為 $y=$ ________。

3 多項式

讀完可以先練習範例 4

❹ **餘式定理**：當被除式為 $f(x)$，除式為一次式 $ax-b$ 時，則餘式為函數值 $f(\frac{b}{a})$。反之，函數值 $f(k)$ 等於「$f(x)$ 被 $x-k$ 除的餘式」，即函數值與餘式兩者相同。

例 A $x^{10}+3$ 被 $x-2$ 除的餘式為________。

例 B 設 $f(x)=x^5+6x^4-4x^3+25x^2+30x+20$，則 $f(-7)=$________。

例 C 求 $12^5-13\cdot 12^4+5\cdot 12^3+80\cdot 12^2+50\cdot 12=$________。

❺ **迭代法求餘式**：形式上為餘式定理的推廣，觀念上是由二項式展開而得。

例 A $[(x^4+5x+1)(x+3)+2x]^3$ 除以 x^4+5x+1 的餘式為________。

例 B $2x^{20}$ 除以 x^6-3x 的餘式為________。

例 C $f(x)=2x^{30}+5x^{22}+7x^4$ 除以 $x^{10}-2$ 的餘式為________。

❻ **因式定理**：多項式 $f(x)$ 被 $x-a$ 整除 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 有 $x-a$ 的因式 $\Leftrightarrow$ $f(a)=0$ $\Leftrightarrow$ 多項方程式 $f(x)=0$ 有 $x=a$ 的根。以上四件事情完全相同，所以「整除」與分解因式、解方程式密切相關。

例 A 若 $x+2$ 為 $f(x)=x^7+ax^3$ 的因式，求 $a=$________。

例 B 設 a 為整數，請問下列哪一個選項的一次式，有可能是 $f(x)=2x^3+ax^2-2ax+a$ 的因式？______

(A) $x+1$ (B) $x-1$ (C) $x+2$ (D) $x-2$

讀完可以先練習範例 5

★★★★

7 因式定理的推廣與應用

(1)設 $f(x)$ 為多項式，若兩相異實數 a、b 使得 $f(a)=f(b)=0$，則 $f(x)$ 有因式 $(x-a)(x-b)$。可推廣到一般情形。

(2)若有三個相異數使 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的函數值均為 k，則 $a=b=0$ 且 $c=k$。可推廣到一般情形。

(3)若有三個相異數使 $f(x)=ax^2+bx+c$ 與 $g(x)=px^2+qx+r$ 的函數值均等，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 完全相等，即 $a=p$ 且 $b=q$ 且 $c=r$。可推廣到一般情形。

(4)**根與係數**：若二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩根 α、β，則 ax^2+bx+c 有因式 $(x-\alpha)(x-\beta)$，所以 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$，兩邊恆等比較係數可得 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$。此式也可由 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 推得。

例 A 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(-2)=f(1)=0$，$f(0)=6$ 且 $f(3)=30$，則 $f(x)=$ ______。

例 B 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(1)=f(5)=f(6)=3$ 且 $f(0)=63$，則 $f(x)=$ ______。

例 C 設 $f(x)=2\cdot\frac{(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}+3\cdot\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}+5\cdot\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$，試求 $f(\sqrt{2})=$ ______，$f(\sqrt{3})=$ ______，$f(\sqrt{5})=$ ______，將 $f(x)$ 乘開化簡後可得 $f(x)=$ ______。

例 D 設 k 為實數使得方程式 $3x^2+15x+k=0$ 有兩個實根 α、β，則：

(1) $\alpha+\beta=$ ______ (2)若 $\alpha\beta=2$，求 $k=$ ______。

3 多項式

★★★★

❽ 牛頓插值的假設法：求多項式或求餘式常用這個特別的假設法，舉例說明如下：

⑴過平面上三相異點 (a,d)、(b,e)、(c,f) 的二次插值多項式，可假設為：

$f(x)=P(x-a)(x-b)+Q(x-a)+R$，稱為牛頓插值法，依序代 a、b、c 可求得係數 P、Q、R。用此法可以不用解係數的聯立方程式，也可推廣到更高次的多項式。

⑵多項式 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x^2+x+3)$ 的餘式可假設為 $a(x^2+x+3)+bx+c$，則 $bx+c$ 就是 $f(x)$ 除以 x^2+x+3 的餘式，利用此法可大幅簡化求解的過程。

例 A $f(x)$ 是二次多項式，若 $f(121)=1$，$f(122)=4$，$f(123)=11$，求 $f(125)=$ ______。

例 B 多項式 $f(x)$ 至少三次，除以 $x+1$ 的餘式為 6，除以 x^2+x+2 的餘式為 $5x-3$，求 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x^2+x+2)$ 的餘式為 ______。

二、多項式函數

★★★★

❾ 線型函數：$f(x)=ax+b$ 的圖形為平面上的直線，線上兩點坐標決定 a 與 b，其中 a 為斜率，b 為 y 截距。多項式的圖形都是平滑曲線，局部放大後會很接近直線段，可用線型函數表示，即為該曲線的切線。

例 A $f(x)$ 為一次函數，若 $f(1.27)=8.723$，$f(1.28)=8.783$，求 $f(x)=$ ______。

例 B 若函數 $f(x)=5(x-2)^3+7(x-2)^2+4(x-2)+3$ 在 $x=2$ 附近的圖形近似一條直線，則此直線方程式為 ______，即為 $f(x)$ 在點 $(2,3)$ 處的切線。

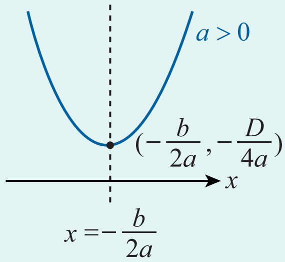
讀完可以先練習範例 6、7、8、9

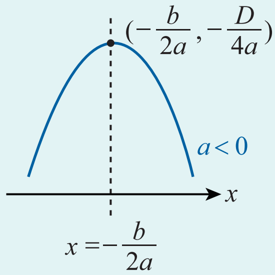
⑩ 二次函數

(1)設 a、b、$c \in R$ 且 $a \neq 0$，則 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為**拋物線**。

① $a > 0 \Leftrightarrow$ 開口朝**上**。

② $a < 0 \Leftrightarrow$ 開口朝**下**。





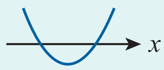
(2) $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

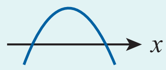
，得**頂點坐標為** $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$，其中

$D = b^2 - 4ac$，即 $x = -\frac{b}{2a}$ 時，二次函數有最大值或最小值，此極值為 $-\frac{D}{4a}$。

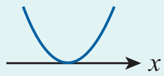
(3)令 $y = 0$ 得方程式 $ax^2 + bx + c = 0$，解 x 也就是求圖形與 x 軸的交點。

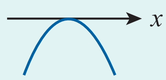
①若 $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ 拋物線與 x 軸**交於兩點** $(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0)$，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 有兩相異實根。



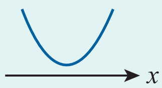


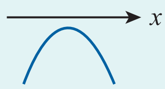
②若 $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ 拋物線與 x 軸**相切**，切點為 $(-\frac{b}{2a}, 0)$，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 有兩相等實根。





③若 $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ 拋物線與 x 軸**不相交**，即函數 $f(x)$ **恆正或恆負**，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 沒有實根。





(4) $y = ax^2$ 的圖形水平右移 h 單位（$h > 0$），再鉛直上移 k 單位（$k > 0$），得到新的二次函數為 $y = a(x - h)^2 + k$。

(5)若實數 a_1、a_2、⋯、a_n 的**算術平均數為 μ**，則二次函數 $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ 的**最小值為 $f(\mu)$**，且 $f(\mu)$ 即為 a_1、a_2、a_3、⋯、a_n 的離差平方和 S_{xx}，可計算 $a_1 \sim a_n$ 的標準差。

例 A 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f(t) = -t^2 + 10t + 11$，其中 $1 \leq t \leq 10$，則這段時間內該地區的最大溫差為：______

(A) 9　(B) 16　(C) 20　(D) 25　(E) 36

例 B 設 $f(x) = x^2 + ax + b$，a、b 為定實數，若 $f(3 + x) = f(3 - x)$ 對任意實數 x 均成立，則 $f(1)$、$f(3)$、$f(4)$ 的大小關係為____________。

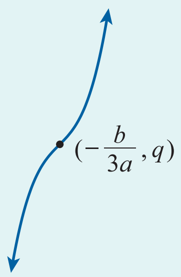
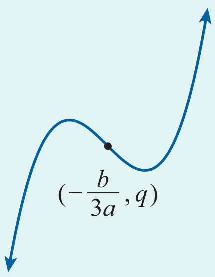
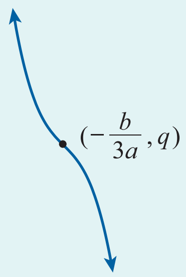
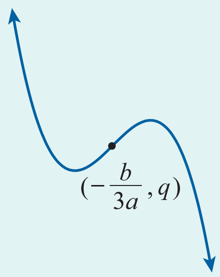
例 C 設 $f(x)=x^2-2x+k$，對所有實數 x 恆使 $f(x)>0$，求 k 的範圍為__________。

例 D 將 $y=x^2$ 的圖形水平右移 h 單位後，得新圖形會通過點 $(3,4)$，則 $h=$__________。

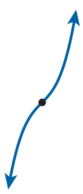
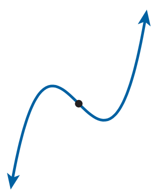
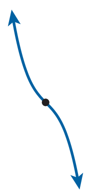
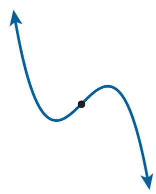
例 E $f(x)=3(x-1)^2+2(x-2)^2+(x-5)^2$ 在 $x=$______時，有最小值為______。

讀完可以先練習範例 10 ★★★★

⑪ **三次函數**：設 a、b、c、$d\in R$ 且 $a\neq 0$，則 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為三次函數，利用乘法公式 $(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$ 可將三次函數「配立方」成為 $f(x)=a(x+\frac{b}{3a})^3+p(x+\frac{b}{3a})+q$ 的形式，此圖形由 $y=ax^3+px$ 平移而得，可知點 $(-\frac{b}{3a},q)$ 為 $f(x)$ 的對稱中心，且對稱中心的切線斜率即為 p。依 a、p 的四種正負情形將三次函數的圖形分類如下：

$a>0$ 且 $p>0$	$a>0$ 且 $p<0$	$a<0$ 且 $p<0$	$a<0$ 且 $p>0$
			
往右上遞增	往右上呈現波浪形	往右下遞減	往右下呈現波浪形

例 A $f(x)=-2(x+5)^3+7(x+5)+1$ 的對稱中心為__________，為 $y=-2x^3+7x$ 向右移 p 再向上移 q 而得（若為負值則方向相反），請問數對 $(p,q)=$__________，$f(x)$ 的圖形為下列哪一個選項？______

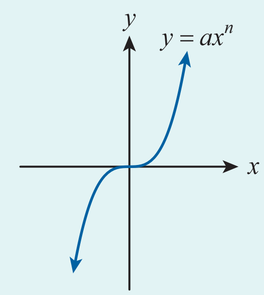
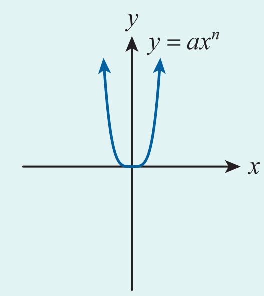
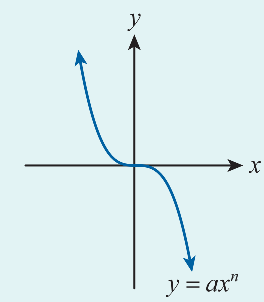
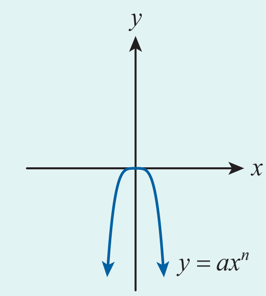
(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

例 B $f(x)=x^3+12x^2+8x+7=(x+h)^3+p(x+h)+q$，求 $h=$_____，$p=$_______，$q=$_______，$y=f(x)$ 的對稱中心為_____________。

例 C 設 $a\neq 0$，若 $f(x)=a(x-9)^3+b(x-9)+7$ 的圖形與圓 $(x-9)^2+(y-7)^2=r^2$ 恰有 A、B 兩個交點，其中一個交點的坐標是 $A(20,15)$，請問另一個交點 B 的坐標是_____________。

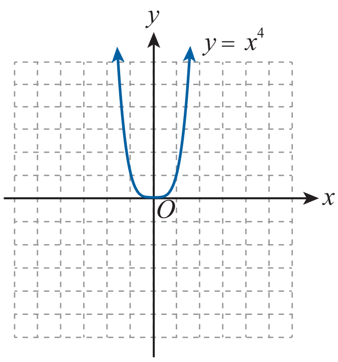
★★★★

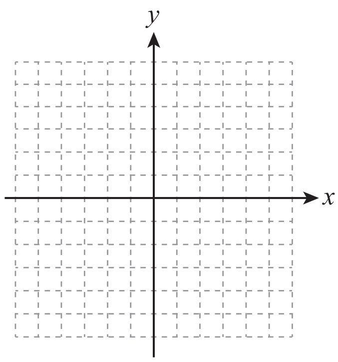
⑫ **單項多項式與大域特徵**：形如 $f(x)=ax^n$，其中 a 為實數，n 為正整數或零，稱為單項多項式函數，如 $y=3x^5$。若 $a>0$，則圖形往右上；若 $a<0$，則圖形往右下。若 n 是奇數，則左右的上下方向相反；若 n 是偶數，則左右的上下方向相同。

$a>0$ 且 n 為奇數	$a>0$ 且 n 為偶數	$a<0$ 且 n 為奇數	$a<0$ 且 n 為偶數
			

將 $y=ax^n$ 的圖形向右移 h 再向上移 k，即為 $y=a(x-h)^n+k$ 的圖形。若 n 次多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 a，則宏觀來看 $f(x)$ 的圖形近似於 $y=ax^n$，即為 $f(x)$ 的大域特徵。

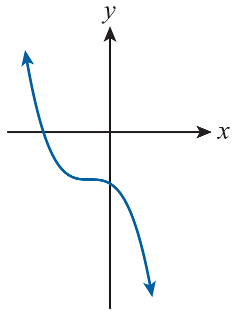
例 A 利用 $y=x^4$ 的函數圖形，如右圖，描繪 $y=-(x-2)^4+3$ 的圖形。





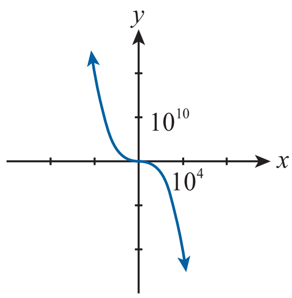
例 B 若函數 $y=a(x+h)^n+k$ 的圖形如右，請問下列選項哪些為真？______

(A) $a>0$　(B) $h>0$　(C) $k>0$　(D) n 為奇數



例 C n 次多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，若大域特徵圖形如右，則下列選項哪些正確？______

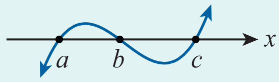
(A) $a_n>0$　(B) $a_n<0$　(C) n 為奇數　(D) n 為偶數



三、多項不等式

★★★★

⑬ **由函數圖形解不等式**：藉由畫出函數 $f(x)$ 的略圖，標明函數值正負的分界點，即可解出不等式 $f(x)\geq 0$ 或 $f(x)\leq 0$。如 $y=f(x)$ 的圖形為



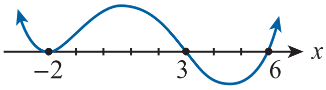
，則 $f(x)\geq 0$ 的解為「$a\leq x\leq b$ 或 $x\geq c$」。

例 A $y=f(x)$ 的函數圖形如右，則：

(1)方程式 $f(x)=0$ 的相異實根為______。

(2)不等式 $f(x)>0$ 的解為______。

(3)不等式 $f(x)\leq 0$ 的解為______。



例 B $f(x)=x^2+4x+7$ 的圖形與 x 軸是否相交？______，求：

(1)不等式 $f(x)>0$ 的解為______　(2) $f(x)\leq 0$ 的解為______。

例 C 若 $a(x-4)^2+b<10$ 的解為 $k-8<x<2k+1$，求 $k=$______。

例 D 三次函數 $f(x)=a(x-5)^3+b(x-5)+7$，其中 a、b 為實數且 $a\neq 0$，若不等式 $1\leq f(x)\leq 13$ 的解為 $k-9\leq x\leq 3k+7$，求 $k=$______。

讀完可以先練習範例 11、12、13、14 ★★★★

⑭ **二次與高次不等式**：先使一邊為 0，再因式分解，並作函數的略圖，標明各段落函數值的正負，依題意取正或取負。這個觀念可用來解其它類型的不等式。

例 A　$x^2-x-2\geq 0$ 之解為＿＿＿＿＿＿＿＿。

例 B　$(x+1)(x^2+x-1)<0$ 之解為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

例 C　$(x-1)(x-2)^3(x-3)^2>0$ 之解為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

範例 1　多項式的除法原理

全對率 17%　108 學測

設 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 為實係數三次多項式，$g(x)$ 為實係數二次多項式。已知 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x)$、$r_2(x)$。試選出正確的選項。＿＿＿＿

(A) $-f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$

(B) $f_1(x)+f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)+r_2(x)$

(C) $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)r_2(x)$

(D) $f_1(x)$ 除以 $-3g(x)$ 的餘式為 $-\frac{1}{3}r_1(x)$

(E) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)$ 可被 $g(x)$ 整除

解

類題 1　學生練習計算三次多項式 $f(x)$ 除以一次多項式 $g(x)$ 的餘式。已知 $f(x)$ 的三次項係數為 3，一次項係數為 2。甲生把 $f(x)$ 的三次項係數錯看成 2（其它係數沒看錯），乙生把 $f(x)$ 的一次項係數錯看成 -2（其它係數沒看錯）。而甲生和乙生算出來的餘式剛好一樣。試問 $g(x)$ 可能等於以下哪些一次式？＿＿＿＿

(A) x　(B) $x-1$　(C) $x-2$　(D) $x+1$　(E) $x+2$

類題 2　多項式 $f(x)$ 除以 x^2-2x-3 的餘式為 $x+5$，則下列選項哪些正確？__________

(A) $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式必定為 4

(B) $f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式必定為 8

(C) $f(x)$ 除以 x^2+3x+2 的餘式有可能是 $3x+7$

(D) $f(x)$ 除以 x^2-x-6 的餘式有可能是 $2x+3$

(E) $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-3)(x+2)$ 的餘式有可能是 $2x^2-3x-1$

範例 2　假設餘式或商

設多項式 $f(x)$ 除以 x^2-5x+4，餘式為 $x+2$；除以 x^2-5x+6，餘式為 $3x+4$，則多項式 $f(x)$ 除以 x^2-4x+3，餘式為__________。

解

3

多項式

類題 3　設 $f(x)$ 為一次多項式，若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為__________。

類題 4　設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數，滿足 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的餘式為 $x+2$。若 $f(0)=4$，則 $f(2)$ 的值為下列哪一個選項？______

(A) 8　　(B) 10　　(C) 15　　(D) 18　　(E) 20　　答對率 41%　110 學測

範例 3 綜合除法的連續使用

$f(x)=x^4-x^2+4x-5=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$，請問：

(1) $a+b+c+d+e=$ ______ 。

(2)序組 $(a,b,c,d,e)=$ ______ 。

(3) $f(1.9)=$ ______ 。

(4) $y=f(x)$ 的圖形在點 $P(2,e)$ 附近會接近一直線，此直線的函數式為 $y=$ ______ 。

解

類題 5 已知以 $mx+n$ 除 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的綜合除法算式如右，根據此算式可知：______

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
 & +a & +b & +c & +d & \\
 & & +f & +g & +2 & h \\
\hline
+m & +e & +12 & +3 & +0 & \\
\hline
 & +4 & +i & +1 & &
\end{array}
$$

(A) $m=3$　(B) $c=11$

(C) $f(h)=0$　(D) $2x+1$ 是 $f(x)$ 的因式

類題 6 已知 $f(x)=2x^3-x^2+4x-5=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，則：

(1) $a=$ ______，$b=$ ______，$c=$ ______，$d=$ ______ 。

(2) $f(2+\sqrt{5})=$ ______ 。

範例 4 餘式定理

若 $f(x)=(3x-2)^5-8(3x-2)^4+6(3x-2)^3+3(3x-2)^2+29(3x-2)+20$，則 $f(x)$ 除以 $x-3$ 之餘式為______。

解

類題 7 若多項式 $f(x)$、$g(x)$ 滿足 $f(x)-g(x)=x^3-5x^2+x+4$，且 $g(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 8，則 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為______。

類題 8 若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為何？______

(A) 3　(B) 5　(C) 7　(D) 9　(E) 11

範例 5 因式定理

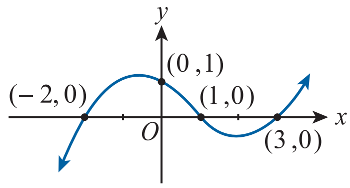
設 $f(x)=6x^4+5x^3-16x^2-6x+17$，已知有四個相異實數 p、q、r、s 滿足 $f(p)=f(q)=f(r)=f(s)=12$，求 $(p+1)(q+1)(r+1)(s+1)=$______。

解

類題 9 設 p、q 為實數，若多項式 $f(x)=x^{20}-4x^{18}+x^5+px+q$ 能被 x^2+x-2 整除，請問下列選項哪些正確？______

(A) p、q 均為整數　(B) $p>q$　(C) $p+q>0$
(D)乘積 $pq>0$　(E) $p^q>q^p$

類題 10 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 之圖形如右，則 $f(-3)=$ ______。



範例 6 二次函數的極值 101 指考乙

設二次實係數多項式函數 $f(x)=ax^2+2ax+b$ 在區間 $-1\leq x\leq 1$ 上的最大值為 7、最小值為 3。試求數對 (a,b) 的所有可能值。______

解

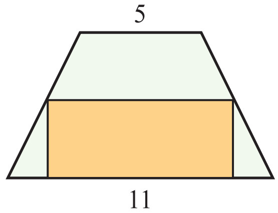
關鍵想法

就算不知道 a、b，還是可以配方得知頂點的 x 坐標

類題 11 設 a、b 為實數且 $a\neq 0$，若 $f(x)=ax^2+bx+\dfrac{1}{a}$ 在 $x=2$ 時有最大值為 -3，則點 $P(a,b)$ 位在______。

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)坐標軸上

類題 12 等腰梯形的上底為 5，下底為 11，高為 6，其內接矩形（如右圖）的最大面積為______平方單位。



範例 7　二次函數的圖形判斷

設 a、b、c 為實數，若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 $(0,-1)$ 且與 x 軸相切，則下列哪些正確？________

(A) $a<0$　(B) $b>0$　(C) $c=-1$　(D) $b^2+4ac=0$　(E) $a+b+c\le 0$

解

關鍵想法

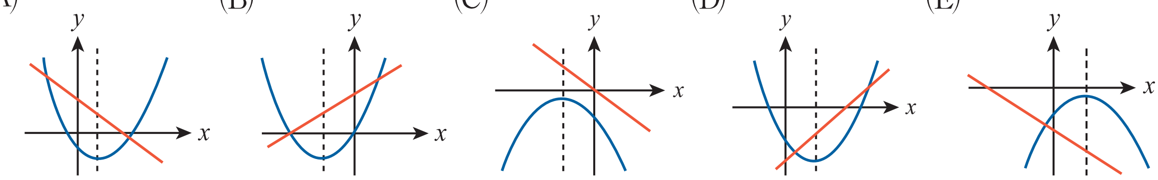
這一題畫個圖就看出答案了

類題 13　設 a 與 b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 滿足 $f(4)>0$，$f(5)<0$。試問下列哪些為真？________

(A) $f(0)>0$　(B) $f(-1)>0$　(C) $f(-2)>0$　(D) $f(-3)>0$　(E) $f(-4)>0$

類題 14　函數 $y=ax+b$ 與 $y=ax^2+bx+c$ 在同一坐標系的圖形可能為下列哪些？________

(A)　(B)　(C)　(D)　(E)



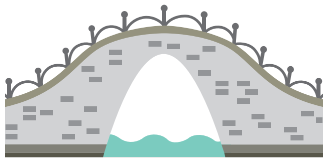
範例 8　二次函數截 x 軸的弦長

設 a、b 為實數。已知坐標平面上拋物線 $y=x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}=7$，若拋物線 $y=x^2+ax+(b+2)$ 與 x 軸的兩交點為 R、S，則 $\overline{RS}=$________。

解

類題 15 設 a、b 為實數，若 $y=x^2+ax+b$ 的圖形被 x 軸所截的弦長為 6，則此圖形沿 y 軸正向平移 k 後恰與 x 軸相切，則 $k=$______。

類題 16 有一拋物線形的拱橋如右圖，已知此拋物線以過最高點的鉛直線為對稱軸，現用尺測得拱頂與水平面的距離為 3 公尺，且水面寬度為 5 公尺，若水面下降 $\frac{7}{3}$ 公尺，則水面寬度變成______公尺。



範例 9 判別二次函數恆正或恆負

設 m 為實數，二次函數 $y=mx^2+x+(m+1)$ 的圖形恆在直線 $3x+2y=1$ 的上方，則 m 的範圍為______。

解

小小叮嚀

設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，當 $b^2-4ac<0$ 時

(1)若 $a>0$，則 $f(x)$ 之值恆為正數

(2)若 $a<0$，則 $f(x)$ 之值恆為負數

類題 17 設 a、b、c 為實數，$a\neq 0$，且 $f(x)=ax^2+bx+c$ 滿足 $f(-1)=-3$，$f(3)=-1$，$b^2-4ac<0$，則下列選項哪些正確？______

(A) $a<0$　(B) $c<0$　(C) $f(0)<f(1)$

(D) $f(4)<f(5)$　(E) $f(-3)<f(-2)$

3 多項式

類題 18 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，已知 $f(2)=4$，$f(5)=1$，且 $y=f(x)$ 的函數值恆為正數，求二次項係數 a 的範圍為__________。

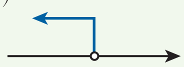
範例 10 三次函數的圖形特徵

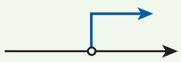
設 $f(x)$ 為三次多項式，最高次項的係數為 1，且 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(6)=6$，請回答下列各小題：(1)若 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，求序組 $(a,b,c)=$__________。

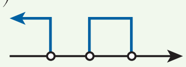
(2) $y=f(x)$ 的圖形具對稱中心，試求出對稱中心的坐標為__________。

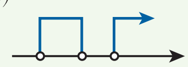
(3) $y=f(x)$ 為 $y=x^3+mx$ 向右平移 h 再向下平移 k 而得，求出序組 $(m,h,k)=$__________。

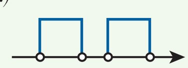
(4)不等式 $f(x)<0$ 的解，在數線上作圖為下列哪一種型態？______

(A)


(B)


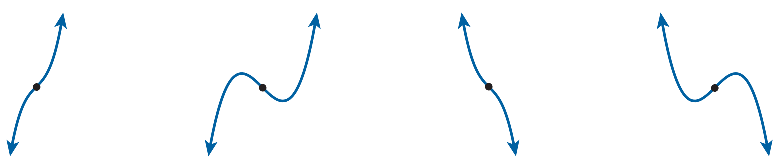
(C)


(D)


(E)


解

類題 19 三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形有以下四種類型，請問下列敘述何者正確？______



(A)只要知道 a 之值即可判斷 $f(x)$ 的圖形是屬於哪一種類型

(B)只要知道 a、b 之值即可判斷 $f(x)$ 的圖形是屬於哪一類型

(C)只要知道 a、b、c 之值即可判斷 $f(x)$ 的圖形是屬於哪一類型

(D)必須知道 a、b、c、d 之值才可判斷 $f(x)$ 的圖形是屬於哪一類型

類題 20 若 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形為 $y=2x^3-5x$ 平移而得，對稱中心的坐標為 $(-1,3)$，試問下列各選項哪些正確？________

(A) a、b、c、d 均為偶數　(B) $a+b+c+d<10$　(C)乘積 $abcd<0$

(D) $a<b$　(E) $c<d$

範例 11 由函數圖形解不等式

設 k 為實數，滿足二次不等式 $x^2-6x-k\leq 0$ 的整數共有 $n(k)$ 個，試問：

(1) $n(0)=$______，$n(-9)=$______。

(2)若 $n(k)=3$，則 k 的範圍為______________。

(3)關於函數 $n(k)$ 的敘述，下列選項哪些正確？________

(A) $n(k)$ 之值隨 k 而遞增，即「若 $k_1<k_2$，則 $n(k_1)\leq n(k_2)$」成立

(B) $n(k)$ 的值可為正偶數

(C)滿足不等式的 $n(k)$ 個整數若含負整數，則其中的正整數比負整數多 7 個

(D)若這 $n(k)$ 個整數含有 -5，則必也含有 10

(E)若這 $n(k)$ 個整數含有 10，則必也含有 -5

解

類題 21 已知二次不等式 $f(x)<5$ 的解為 $4<x<12$，則 $f(x)<0$ 的解可以是下列哪些選項？________

(A) $6<x<9$　(B) $1<x<15$　(C) $5<x<11$　(D)無實數解　(E)任意實數

類題 22 若聯立不等式 $\begin{cases} x^2+x-6<0 \\ x^2+kx-12>0 \end{cases}$ 無實數解，求實數 k 的範圍為 ______。

範例 12 多項不等式的反問題

設 a、b 為實數且聯立不等式 $\begin{cases} x^2-5x+a<0 \\ x^2+3x+b<0 \end{cases}$ 的解為 $1<x<2$，求數對 $(a,b)=$ ______。

解

類題 23 設 $f(x)$ 為二次函數，當 x 為任意實數時，$f(x)$ 有最小值 -18，且不等式 $f(x)\le 0$ 的解為 $-1\le x\le 5$，請問不等式 $f(x)\le 6$ 的解為 ______。

3 多項式

類題 24 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(x)>0$ 的解為「$2<x<5$ 或 $x>6$」，$f(x)>12$ 的解為「$x>8$」，求 $f(0)=$ ______。

範例 13 高次不等式

多項式不等式 $x^2(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)<(2x-3)(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)$，下列哪些選項是它的一個解？______

(A) -2π　(B) $-\pi$　(C) π　(D) 2π

解

關鍵想法
看出來沒？兩邊有很長的公因式，不可以消掉！要移項提公因式才對

類題 25 試問不等式 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$ 有＿＿＿＿個整數解。

類題 26 實係數多項式不等式 $f(x)<0$ 的整數解共有 k 個，其中 k 為正整數，則下列各選項的敘述哪些為真？＿＿＿＿＿＿

(A) $f(x)$ 的次數必為奇數

(B) $f(x)$ 的最高次項係數必為正數

(C) $f(x)<100$ 的整數解至少有 k 個

(D) $f(x)>100$ 的整數解必有無限多個

(E) $f(2x)<0$ 的整數解個數就是 $f(x)<0$ 的偶數解個數

範例 14 平移伸縮求解不等式

已知 a、b 為實數，$f(x)$ 為二次函數且 $f(x)\le 0$ 的解為 $1\le x\le 19$，則 $f(3x+a)\le 0$ 的解為 $4\le x\le b$，求數對 $(a,b)=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

解

類題 27 設 $f(x)$ 為二次函數，且 $f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$，則 $f(2x)<0$ 之解為：＿＿＿＿

(A) $-1<x<2$

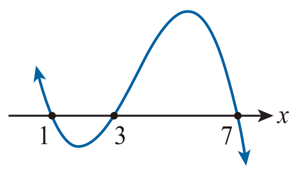
(B) $x<-1$ 或 $x>2$

(C) $x<-2$ 或 $x>4$

(D) $-4<x<8$

(E) $x<-4$ 或 $x>8$

類題 28 若 $y=f(x)$ 的圖形如右圖，則 $f(2x+5)<0$ 的解為＿＿＿＿＿＿＿＿。

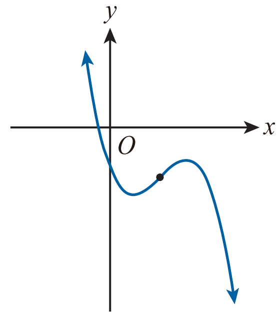


3 多項式

綜　合　實　力　測　驗

一 單選題

____ 1. $y = a(x-h)^3 + b(x-h) + k$ 的圖形如右，則關於 a、b、h、k 四個實數的正負情形，下列何者正確？



(A) 4 個正數　(B) 3 個正數 1 個負數　(C) 2 個正數 2 個負數　(D) 1 個正數 3 個負數　(E) 4 個負數

____ 2. 二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過四個象限，則點 $A(\frac{c}{a}, \frac{4ac-b^2}{ac})$ 落在第幾象限？

(A)一　(B)二　(C)三　(D)四　(E)無法確定

____ 3. 已知一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(\sqrt{2}) = 2$，$f(\sqrt{7}) = 7$，$f(k) = 5$，則 k 值為何？

(A) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{3}$　(C) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{3}$　(D) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{5}$　(E) $\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{7}}{5}$

____ 4. 一元二次不等式 $(x-1)(x-a) < 0$ 的解集合中至多包含 2 個整數，則 a 的取值範圍為何？

(A) $(-2, 4)$　(B) $(-3, 5)$　(C) $[-2, 4]$　(D) $[-3, 5]$　(E) $[-2, 5]$

二 多選題

____ 5. 已知三次函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$。請選出正確的選項。

(A) $a + b + c + d = 2$

(B) $f(1.99) \approx 6.06$（求至小數點第 2 位）

(C) $f(2+\sqrt{3}) = 15 + 9\sqrt{3}$

(D) $y = f(x)$ 的對稱中心為 $(1, 4)$

(E) $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的圖形近似於直線 $y = 3x - 1$

____ 6. 三次多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為 $5x - 3$，則下列選項哪些正確？

(A) $a = -2$

(B) $b = -3$

(C) $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 -4

(D) $xf(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為 $5x - 3$

(E) $f(x)$ 除以 $3x^2 + 3x + 3$ 的餘式為 $5x - 3$

______ 7. 設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 $(2,10)$ 與 $(6,10)$ 兩點且 $f(3)>f(4)$，則下列選項哪些正確？

(A) $a>0$　(B) $f(1)=f(7)$　(C) $f(1)>f(4)>f(5)$

(D) $b^2-4ac>0$　(E) $|b|>|a|$

______ 8. 下列哪些選項中的不等式其解為 $1<x<3$ ？

(A) $-x^2+4x-3<0$

(B) $x^2(x-1)(x-3)<0$

(C) $(x^2-4x+4)(x-1)(x-3)<0$

(D) $(x^3-1)(x-3)<0$

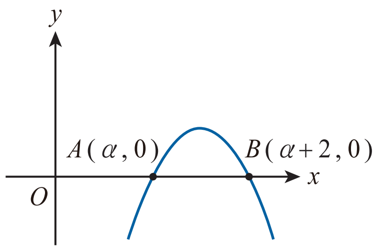
(E) $(x+2)(x-4)(x-1)(x-3)<(2x-11)(x-1)(x-3)$

三 填充題

9. 設 $f(x)$ 為三次多項式滿足 $f(1)=f(2)=0$，$f(3)=10$，$f(-1)=6$，則此多項式的常數項為______。

10. 二次函數 $f(x)=x^2+ax+b$，若函數圖形通過 $(-2,1)$ 且與 x 軸不相交，則 a 的範圍為______。

11. 已知二次函數 $y=-x^2+(k+1)x-k$ 與 x 軸交於 $A(\alpha,0)$、$B(\alpha+2,0)$，如右圖，則數對 $(k,\alpha)=$______。



12. 若三次函數 $f(x)=2x^3+px^2+qx-19$ 圖形的對稱中心為 $(2,5)$，其圖形由 $y=2x^3+rx$ 平移而得，則序對 $(p,q,r)=$______。

四 素養導向試題

13. 某玩具製造工廠，每次接到訂單都需開模 5 萬元，製造每一千個玩具材料費需 2 萬元，由此建立生產的基本成本函數 $f(x)=5+2x$，其中 x 以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如右表關係。依此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$，以及獲利函數 $h(x)=g(x)-f(x)$。

數量（千個）	報價總值（萬元）
5	35
10	70
15	95

(1)若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本是______萬元。

(2)試求報價總值函數 $g(x)=$______。

(3)根據 $h(x)$，試問訂單數量為______千個時，獲利總值最高。

3 多項式