1 數與式

1 ❶ A (A)(C)(D)　B 246

A (A) $\frac{7}{8}=\frac{7\times125}{8\times125}=\frac{875}{1000}=0.875$

(B) $\frac{8}{7}=1.\overline{142857}$

(C) $\frac{21}{75}=\frac{7}{25}=\frac{28}{100}=0.28$

(D) $\frac{3}{2^{10}}=\frac{3\times5^{10}}{2^{10}\times5^{10}}=\frac{3\times5^{10}}{10^{10}}$，小數點之後共有 10 位

B 從 $f(1)$ 開始每 4 項之和為 10

所求 $=\underbrace{1+2+3+4}_{f(1)\text{到}f(4)}+\underbrace{1+2+3+4}_{f(5)\text{到}f(8)}+\cdots+\underbrace{1+2+3+4}_{f(93)\text{到}f(96)}$

$+1+2+\underbrace{3}_{f(99)}=\underbrace{10+10+\cdots+10}_{24\text{個}}+6=246$

❷ A (C)　B $\frac{21}{20}$

A $a-b=0.\overline{12}-0.\overline{01}=\frac{12}{99}-\frac{1}{99}=\frac{11}{99}=\frac{1}{9}$

2 B 所求 $=\sqrt{(\frac{9}{11-1})^2+(\frac{9}{22-2})^2+(\frac{9}{33-3})^2}$

$=\sqrt{\frac{81}{100}+\frac{81}{400}+\frac{81}{900}}=\sqrt{\frac{81(36+9+4)}{3600}}$

$=\sqrt{\frac{81\times49}{3600}}=\frac{9\times7}{60}=\frac{21}{20}$

❸ A (B)(C)(D)(E)　B (A)(C)　C (D)　D $(9,4)$ 或 $(5,4)$

A (A) $0.3\overline{43}=\frac{343-3}{990}=\frac{34}{99}$，為有理數

(B) $0.343434\cdots>0.333\cdots$

(C) $0.343434\cdots>0.343$

(D) $0.343434\cdots<0.35$

(E) $0.3\overline{43}=0.3434343\cdots=0.\overline{34}$

B (B)反例：$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$

(D)反例：$a=0$，$x=\sqrt{2}$

C $a=\sqrt{7+\sqrt{47}}=\sqrt{7+6.\cdots}=\sqrt{13.\cdots}=3.\cdots$

∴ $3<a<4$

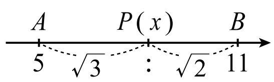
D ∵ $3(y-4)^2=0,3,12,\cdots$

必為 $x-7=\pm2$ 且 $y-4=0$

∴ $(x,y)=(9,4)$ 或 $(5,4)$

3 ❹ A 23；-6　B (B)(D)

A $x=\frac{11\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$



$=\frac{(11\sqrt{3}+5\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=33-11\sqrt{6}+5\sqrt{6}-10=23-6\sqrt{6}$

∴ $a=23$，$b=-6$

B (A)若 $a+b$ 為負，則 $\frac{a+b}{3}>\frac{a+b}{2}$

(B) $\frac{4a+b}{5}=\frac{16a+4b}{20}$，$\frac{3a+b}{4}=\frac{15a+5b}{20}$

(C) $\frac{a-b}{4}-\frac{2a-b}{5}=\frac{-3a-b}{20}$ 可能為負（如 $a=1$，$b=2$）

(D) ∵ $a<b<0$

∴ $\frac{a-b}{4}-\frac{2a-b}{5}=\frac{-3a-b}{20}>0$ 必成立

❺ A 11　B 5；$\sqrt{5}-2$

A $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3\times2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(5+1)+2\sqrt{5\times1}}=\sqrt{5}+\sqrt{1}$

∴ $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}+\sqrt{1})$

$=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

∴ $a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=5$

所求 $=1+2+3+5=11$

B $\sqrt{14+\sqrt{180}}=\sqrt{14+2\sqrt{45}}=\sqrt{(9+5)+2\sqrt{9\times5}}$

$=\sqrt{9}+\sqrt{5}=3+\sqrt{5}$，約為 5.2⋯

∴整數部分為 5，小數部分為 $(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-2$

4 ❻ A 180；$\frac{45}{2}$；10　B $\pm\sqrt{3}$；7

A ∵ $\frac{4x^2+9y^2}{2}\ge\sqrt{4x^2\cdot9y^2}=6|xy|=90$

∴ $4x^2+9y^2\ge180$

若 $4x^2+9y^2=180$，則 $4x^2=9y^2=90$

得 $x^2=\frac{45}{2}$，$y^2=10$

B ∵ $\frac{(x^2+1)+\frac{16}{x^2+1}}{2}\ge\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{16}{x^2+1}}=4$

∴ $x^2+\frac{16}{x^2+1}\ge7$，得 $f(x)$ 最小值為 7

此時 $x^2+1=\frac{16}{x^2+1}$

∴ $x^2+1=4$，得 $x=\pm\sqrt{3}$

❼ A 368；367　B 45　C 110

A $(4+\sqrt{10})^3+(4-\sqrt{10})^3$

$=[(4+\sqrt{10})+(4-\sqrt{10})]$

$\cdot[(4+\sqrt{10})^2-(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10})+(4-\sqrt{10})^2]$

$=8[(26+8\sqrt{10})-6+(26-8\sqrt{10})]=8\times46=368$

因 $0<4-\sqrt{10}<1$　∴ $0<(4-\sqrt{10})^3<1$

則 $367<(4+\sqrt{10})^3<368$，得 $n=367$

B $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=9$　∴ $a^2+b^2=9+4=13$

則 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=3\times(13+2)=45$

C $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x-\frac{3}{x}=5^3-3(x+\frac{1}{x})$

$=125-15=110$

5 ❽ A 4 或 -5　B 10　C 6；$-1\le x\le5$

A $2x+1=\pm9$，得 $2x=8$ 或 -10　∴ $x=4$ 或 -5

B $-10\le-2x+7\le10$　⇒　$-17\le-2x\le3$

⇒　$\frac{3}{-2}\le x\le\frac{17}{2}$

∴ $x=-1$、0、⋯、8，共 10 個

C 即 $f(x)=|x-(-1)|+|x-5|$
為「x 到 -1 與 5 的距離和」
$-1\le x\le 5$ 時，$f(x)$ 有最小值為 $|5-(-1)|=6$

9 A (B) B (C) C 72

A (A)應為 $(-2)^{-3}=\dfrac{1}{(-2)^3}=\dfrac{1}{-8}$ (C)應為 $16^{-\frac{3}{4}}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$

(D) $-\dfrac{1}{8}$ 不能取分數次方，在高中視為無意義

B 次數最小為 $\dfrac{2}{3}$ $\therefore$ 所求 $=27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=9$

C 所求 $=(\dfrac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\times(\dfrac{1}{4})^{-\frac{5}{2}}=(\dfrac{27}{8})^{\frac{2}{3}}\times 4^{\frac{5}{2}}=\dfrac{9}{4}\times 32=72$

10 A 1024 B $-\dfrac{13}{4}$ C (A)(C)(D)

A 所求 $=[(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})]^{10}=2^{10}=1024$

B 左式 $=\dfrac{2^{-\frac{35}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}=2^{-\frac{35}{3}-\frac{4}{3}}=2^{-13}=2^{4x}$ $\therefore\ x=-\dfrac{13}{4}$

6 C $(81)^x=(3^4)^x=\left\langle\begin{array}{l}3^{4x}=(3^x)^4\\(3^2)^{2x}=9^{2x}\end{array}\right.$

11 A 24；6 B 28；9

A 位數為 $23+1=24$，最高位數字為 6

12 A $\log 6$；0.7781 B $(2,56)$ C 48

A $k=\log 6$ $\because\ 10^{0.3010}\approx 2$，且 $10^{0.4771}\approx 3$
則 $6=2\times 3\approx 10^{0.3010}\times 10^{0.4771}=10^{0.7781}$ $\therefore\ k\approx 0.7781$

B $\sqrt[3]{49}^{\,100}=(7^{\frac{2}{3}})^{100}=7^{\frac{200}{3}}\approx(10^{0.8451})^{\frac{200}{3}}$
$=10^{56.34}=10^{0.34}\times 10^{56}$
$\because\ 10^{0.3010}<10^{0.34}<10^{0.4771}$ $\therefore\ 2<10^{0.34}<3$
$\therefore\ \sqrt[3]{49}^{\,100}=2.\cdots\times 10^{56}$，得 $m=2$，$n=56$

C 由 $\log 3\approx 0.4771$ 知 $10^{0.4771}\approx 3$
$\therefore\ 3^{100}\approx(10^{0.4771})^{100}=10^{47.71}=10^{0.71}\times 10^{47}$
$\because\ 1<10^{0.71}<10$ $\therefore\ 3^{100}$ 為 $47+1=48$ 位數

7 **範例 1** (1)(D) (2) $3.\overline{57}$、$\sqrt{10}$、$1+\sqrt{5}$ (3) 5 元

$3.\overline{57}$ 為有理數且比 4 小
$(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$
而 $|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|=(\sqrt{2}+2)+(-\sqrt{2}+2)=4$ 為有理數

	有理數	無理數
比 4 大	$(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$	無
比 4 小	$3.\overline{57}$	$\sqrt{10}$,$1+\sqrt{5}$

(1) $3.\overline{57}$ 與 $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$ 為有理數，所以有理數個數較多且最大數為 6，所以獎金為 3 元

(2)小明抽得 $\boxed{3.\overline{57}、\sqrt{10}、1+\sqrt{5}}$

(3)抽得 $\boxed{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2、\sqrt{10}、1+\sqrt{5}}$ 可得獎金 8 元

抽得 $\boxed{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2、3.\overline{57}、\sqrt{10}}$ 可得獎金 3 元

（還有別的情形）

三個有理數 $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$、$|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|$、$3.\overline{57}$ 取兩個，最大數不可能小於 4，所以不可能獲得 5 元獎金

(4)若最大數是 4，則按規則無法領取獎金，所以
$\boxed{|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|、\sqrt{10}、1+\sqrt{5}}$、
$\boxed{|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|、3.\overline{57}、\sqrt{10}}$、
$\boxed{|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|、3.\overline{57}、1+\sqrt{5}}$
這三種情形無法領取獎金

8 **類題 1** (A)(D)

(A)因 $(3.5)^2=12.25$ $\therefore\ 13>(3.5)^2$
(B)因 $(3.6)^2=12.96$ $\therefore\ 13>(3.6)^2$ 才對
(C)因 $\sqrt{13}-\sqrt{3}\approx 3.6-1.7=1.9$
而 $\sqrt{10}\approx 3.2$，應 $\sqrt{13}-\sqrt{3}<\sqrt{10}$ 才對
(D)因 $\sqrt{13}+\sqrt{3}\approx 3.6+1.7=5.3>4$
(E)因 $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{13-3}\approx\dfrac{3.6+1.7}{10}=0.53<0.6$

類題 2 (D)

列表討論，數值若重複就消去

m	1								2			
n	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4
$\frac{n}{m}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\cancel{\frac{4}{2}}$

m	3		4		5	6	7	8
n	1	2	1	2	1	1	1	1
$\frac{n}{m}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cancel{\frac{2}{4}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

$\therefore$ 共 $8+2+2+1+1+1+1+1=17$ 個

範例 2 (B)(C)

(A)若 a、b 為正數，則 $a^2>b^2$ $\Rightarrow$ $a^2-b^2>0$
$\Rightarrow$ $(a+b)(a-b)>0$ $\Rightarrow$ $a-b>0$ $\Rightarrow$ $a>b$
而 $(9\sqrt{5})^2=405$，$20^2=400$ $\Rightarrow$ $9\sqrt{5}>20$ 才對
(B) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2=7+2\sqrt{14}+2=9+2\sqrt{14}=9+\sqrt{56}$
$4^2=16=9+7=9+\sqrt{49}$ $\therefore\ \sqrt{7}+\sqrt{2}>4$
(C) $\sqrt{13}-\sqrt{10}=\dfrac{3}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}$，$\sqrt{11}-2\sqrt{2}=\dfrac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}$
$\because\ \sqrt{13}+\sqrt{10}>\sqrt{11}+\sqrt{8}$ $\therefore\ \sqrt{13}-\sqrt{10}<\sqrt{11}-2\sqrt{2}$
(D)反例：$x=0$，滿足 $-1\le x\le 3$，但不滿足 $1\le x^2\le 9$
(E) $2\le y\le 3$ $\Rightarrow$ $-6\le -2y\le -4$
又 $-2\le x\le 5$ $\Rightarrow$ $-8\le x-2y\le 1$ 才對

類題 3 (A)(B)(E)

(A) $0+0<a+b<1+1$
(B)將 $0<a<1$ 同乘 b，得 $0<ab<b$ $\therefore\ 0<ab<1$

(C)應為 $-1<b-a<1$　∵ b 可接近 1，a 可接近 0

則 $b-a$ 接近 1

(D)應為 $0<\frac{a}{b}$，而 $\frac{a}{b}$ 沒有上限

∵ a 可接近 1，b 可接近 0

(E)∵ $-1<a-b<1$，得 $|a-b|<1$

9 **類題 4** (C)(E)

$|2x-1|\le 7 \Rightarrow -3\le x\le 4$，$|y-4|\le 2 \Rightarrow 2\le y\le 6$

(A)
$$\begin{array}{rl} & -3\le x\le 4 \\ +) & -6\le -y\le -2 \\ \hline & -9\le x-y\le 2 \end{array}$$

(B) x 可以為 0　∴ $0\le x^2\le 16$

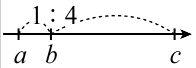
(C) $(-3)^3\le x^3\le 4^3 \Rightarrow -27\le x^3\le 64$

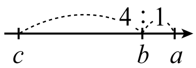
(D) $-18\le xy\le 24$ 才對

(E) $2\le y\le 6 \Rightarrow \frac{1}{6}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$

範例 3 (A)(D)

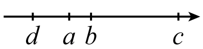
由分點公式，a、b、c 在數線上為

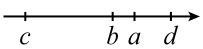


或


(B)不一定

(C) $d=\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}c=a+\frac{a-c}{3}$ 在數線上為



或


d 在 a、c 之外，故不在 a、b 之間

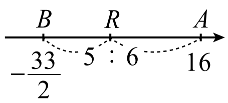
(E)由 $|b|=\left|\frac{4a}{5}+\frac{c}{5}\right|=\left|\frac{4a}{5}\right|+\left|\frac{c}{5}\right|$ 知，a、c 應同號

若 a、c 均負，則 $b<0$，應 $abc<0$ 才對

類題 5 $-\frac{19}{11}$

設 $A(a)$ 與 $B(b)$，則

P 為 $\frac{2b+3a}{2+3}=3$，Q 為 $\frac{4b+9a}{4+9}=6$



得 $\begin{cases}3a+2b=15\\9a+4b=78\end{cases} \Rightarrow a=16$，$b=-\frac{33}{2}$

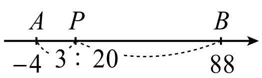
∴ $x=\dfrac{5\times 16+6\times\frac{-33}{2}}{5+6}=\dfrac{80-99}{11}=-\dfrac{19}{11}$

類題 6 3：20；8

由「時間 $=\frac{\text{距離}}{\text{速度}}$」，得 $\frac{\overline{PA}}{3}=\frac{\overline{PB}}{10}\times\frac{1}{2}$

即 $20\overline{PA}=3\overline{PB}$　∴ $\overline{PA}:\overline{PB}=3:20$

則 $x=\frac{3\times 88+20\times(-4)}{3+20}=\frac{184}{23}=8$



10 **範例 4** 5

純小數 b 之範圍為 $0\le b<1$

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=2+\sqrt{3}=3+(\sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow a=3$，$b=\sqrt{3}-1$

∴ $a+\frac{b^2}{1-b}=3+\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{1-\sqrt{3}+1}=3+\frac{4-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=3+2=5$

類題 7 3

$\frac{4}{2+\sqrt{3}}=4(2-\sqrt{3})\approx 1.072$

$\frac{11}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}}=\frac{11}{\sqrt{12}-\sqrt{1}}=\sqrt{12}+1\approx 4.464$

∴有 2、3、4，共 3 個

類題 8 (C)

$x=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$（取負）

$=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{6+2\sqrt{8}}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{6}-(\sqrt{4}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{-\sqrt{6}-2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2}$

$\approx\frac{-1.732-1.414-1}{2}=\frac{-4.146}{2}=-2.073$

∴在 -3 與 -2 之間

範例 5 (D)

由算幾不等式，$\frac{9^x+3^y}{2}\ge\sqrt{9^x\cdot 3^y}$

即 $\frac{K}{2}\ge\sqrt{3^{2x+y}}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$　∴ $K\ge 6\sqrt{3}$

在 $9^x=3^y$ 時，即 $2x=y$ 時，K 有最小值為 $6\sqrt{3}$

在 x 很大且 y 很小時，K 會很大

類題 9 3

由算幾不等式，$\frac{9x^4+25y^4}{2}\ge\sqrt{9x^4\cdot 25y^4}=15x^2y^2$ 必成立

即 $\frac{270}{2}\ge 15x^2y^2$，得 $9\ge x^2y^2$

∴ $-3\le xy\le 3$，得 xy 的最大值為 3

11 **類題 10** $10\sqrt{2}$

設 $\overline{AH}=h$，$\overline{BC}=x$，則 $\frac{1}{2}hx=25 \Rightarrow hx=50$

$\frac{h+x}{2}\ge\sqrt{hx} \Rightarrow h+x\ge 2\sqrt{50}=10\sqrt{2}$

故 $\overline{AH}+\overline{BC}$ 的最小值為 $10\sqrt{2}$

範例 6 (E)

原式 $=(4x^2+4)+(x^3-x^2-5x-3)+(x^3-3x^2+3x-1)$

$=2x^3-2x=2x(x^2-1)$

$=2x(x-1)(x+1)$

類題 11 331

$2^{15}+1=(2^5+1)(2^{10}-2^5+1)$

$=33\times 993=(3\times 11)(3\times 331)$

故最大質因數為 331

類題 12 (D)

設三重根為 k

則 $x^3+ax^2+bx+8=(x-k)^3=x^3-3kx^2+3k^2x-k^3$

$\therefore \begin{cases} a=-3k \\ b=3k^2 \\ 8=-k^3 \end{cases}$

得 $k=-2$，$a=6$，$b=12$

範例 7 19 或 $-\frac{53}{5}$

$A\to K\to A\to K\to B\to K$

而 $\overline{AK}=|x-1|$，$\overline{BK}=|x-9|$

$\therefore 3\overline{AK}+2\overline{BK}=74$，即 $3|x-1|+2|x-9|=74$，求解 x

分段點為 $x=1$ 與 $x=9$

①若 $x\ge 9$，則 $3(x-1)+2(x-9)=74$

得 $x=19$，合

②若 $1\le x\le 9$，則 $3(x-1)+2(-x+9)=74$

得 $x=59$，不合

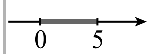
③若 $x\le 1$，則 $3(-x+1)+2(-x+9)=74$

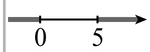
得 $x=-\frac{53}{5}$，合

$\therefore x=19$ 或 $-\frac{53}{5}$

12 **類題 13** (B)(C)(E)

利用距離的觀念，$|x|$ 為 x 到 0 的距離，$|x-5|$ 為 x 到 5 的距離


當 $0\le x\le 5$，$|x|+|x-5|$ 有最小值為 5


當 $x\ge 5$ 或 $x\le 0$，$|x|-|x-5|$ 有最大值為 5

類題 14 (C)

點 x 與 $\sqrt{101}$ 的距離小於 5，即 $|x-\sqrt{101}|<5$

得 $-5+\sqrt{101}<x<5+\sqrt{101}$

因 $\sqrt{101}=10.\cdots$，得 $5.\cdots<x<15.\cdots$

則 $x=6,7,8,9,10,\cdots,15$，而 $\sqrt{38}=6.\cdots$

與 $\sqrt{38}$ 相距超過 3 的有 $10,11,12,13,14,15$，共 6 個

範例 8 (1)(B)(D) (2) $a<b$ (3) $a\approx 1.2777$，$b\approx 1.3732$

(1)(A) $a^{\sqrt2}=2^{\frac12}$ 的兩邊同取 $\sqrt2$ 次方

得 $(a^{\sqrt2})^{\sqrt2}=a^2=2^{\frac{\sqrt2}{2}}<2$ 才對

(B) $a^{\sqrt2}=2^{\frac12}$ 的兩邊同取 3 次方

得 $(a^{\sqrt2})^3=a^{3\sqrt2}=2^{\frac32}=2\sqrt2$，可

(C) $a^{\sqrt2}=2^{\frac12}$ 的兩邊同取 $\frac12$ 次方

得 $(a^{\sqrt2})^{\frac12}=a^{\frac{1}{\sqrt2}}=(2^{\frac12})^{\frac12}=2^{\frac14}\ne\sqrt{\frac12}$

(D) $a^{\sqrt2}=\sqrt2$ 的兩邊同取倒數

得 $a^{-\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$，可

(2) $a^{\sqrt2}=\sqrt2$ 的兩邊同取 $6\sqrt2$ 次方，得 $(a^{\sqrt2})^{6\sqrt2}=(\sqrt2)^{6\sqrt2}$

即 $a^{12}=2^{3\sqrt2}=8^{\sqrt2}$

$b^{\sqrt3}=\sqrt3$ 的兩邊同取 $4\sqrt3$ 次方，得 $(b^{\sqrt3})^{4\sqrt3}=(\sqrt3)^{4\sqrt3}$

即 $b^{12}=3^{2\sqrt3}=9^{\sqrt3}$

$\because 8^{\sqrt2}<9^{\sqrt2}<9^{\sqrt3}$

$\therefore a^{12}<b^{12}$，知 $a<b$

(3) $a^{\sqrt2}=2^{\frac12}$ 的兩邊同取 $\frac{1}{\sqrt2}$ 次方

得 $a=(2^{\frac12})^{\frac{1}{\sqrt2}}=2^{\frac{\sqrt2}{4}}=1.277703\cdots\approx 1.2777$

$b^{\sqrt3}=3^{\frac12}$ 的兩邊同取 $\frac{1}{\sqrt3}$ 次方

得 $b=(3^{\frac12})^{\frac{1}{\sqrt3}}=3^{\frac{\sqrt3}{6}}=1.373197\cdots\approx 1.3732$

13 **類題 15** (C)

① $a^6=[(\frac12)^{\frac12}]^6=(\frac12)^3=\frac18$，$b^6=[(\frac13)^{\frac13}]^6=(\frac13)^2=\frac19$

$\therefore a>b$

② $a^4=[(\frac12)^{\frac12}]^4=(\frac12)^2=\frac14$，$c^4=[(\frac14)^{\frac14}]^4=\frac14$ $\therefore a=c$

由①②得知 $a=c>b$

類題 16 (C)

$b \xrightarrow[\text{點擊一次}]{} b^2 \xrightarrow[\text{點擊二次}]{} b^4 \xrightarrow[\text{點擊三次}]{} b^8$

$\therefore b^8\approx 81^3=3^{12}$

得 $b=(3^{12})^{\frac18}=3^{\frac32}=3\sqrt3\approx 3\times1.732=5.196$

範例 9 (1)(B)(C)(E) (2)(B)(C)(D) (3) 5

(1)可令 $x=2$，則(A) $x^2=4>2$ (B) $\frac1x=\frac12<2$

(C) $\sqrt{x}=\sqrt2<2$ (D) $10^x=100>2$

(E) $\log_{10}x=\log_{10}2\approx 0.3010<2$

(2)可令 $x=0.5$，則(A) $x^2=0.25<0.5$ (B) $\frac1x=2>0.5$

(C) $\sqrt{x}=\sqrt{0.5}\approx 0.71>0.5$ (D) $10^x=10^{\frac12}=\sqrt{10}>0.5$

(E) $\log_{10}x=\log_{10}\frac12=-\log_{10}2<0.5$

(3) $0.2\xrightarrow{x^2}0.04\xrightarrow{\frac1x}25\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}5$

$\xrightarrow{10^x}100000\xrightarrow{\log_{10}}5$

14 **類題 17** (D)

$1234^2=1522756$，在 10^6 與 10^7 之間

$\because \log(10^6)=6$ 且 $\log(10^7)=7$

$\therefore \log 1522756$ 在 6 與 7 之間

類題 18 (D)

原式 $=2\log b+2+\log b=7$ $\therefore \log b=\frac53$

得 $b=10^{\frac53}=10^{\frac{10}{6}}$，而 $10\sqrt{10}=10\cdot10^{\frac12}=10^{\frac32}=10^{\frac96}$

$\therefore 10\sqrt{10}<b<100$

範例 10 2.54×10^{244}；245

知 $10^{2.44404}\approx 278$，$10^{0.40400}\approx 2.5351$

$\therefore\ 278^{100}\approx(10^{2.44404})^{100}=10^{244.404}=10^{0.404}\times 10^{244}$

$\approx 2.5351\times 10^{244}\approx 2.54\times 10^{244}$

為 245 位數

類題 19 40

13 位數的範圍為 $10^{12}\sim 10^{13}$（含 10^{12} 但不含 10^{13}）

等比數列第 n 項為 2^n

∴希望 $10^{12}\le 2^n<10^{13}$，即 $10^{12}\le(10^{0.3010})^n<10^{13}$

$\therefore\ 12\le 0.3010\times n<13 \quad\Rightarrow\quad \frac{12}{0.3010}\le n<\frac{13}{0.3010}$

$\Rightarrow\quad 39.9\le n<43.2 \quad \therefore\ n=40$

類題 20 $(17,2)$

$(\frac{2}{3})^{100}\approx(\frac{10^{0.3010}}{10^{0.4771}})^{100}=(10^{-0.1761})^{100}=10^{-17.61}=10^{-18+0.39}$

$=10^{0.39}\times 10^{-18}$

而 $10^{0.3010}<10^{0.39}<10^{0.4771}$　$\therefore\ 2<10^{0.39}<3$

$\therefore\ (\frac{2}{3})^{100}=0.\underbrace{00\cdots0}_{17\text{ 個 }0}2\cdots$，得 $n=17$，$a_1=2$

綜合實力測驗

1.(B)	2.(D)	3.(C)	4.(A)	5.(A)(B)	6.(C)(D)(E)	7.(A)(D)
8.(A)(C)(E)	9. 7	10. $(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$	11. $(-16,8)$			
12. 15	13.(1) $y=900x+\frac{518400}{x}-1440$	(2) 24；41760				

15 1. $a=0.\overline{4}+0.\overline{6}=\frac{4}{9}+\frac{6}{9}=\frac{10}{9}$

$b=\sqrt{(0.9+0.1)^3}=\sqrt{1}=1$

$c=\sqrt{(0.9+0.1)^2}=\sqrt{1}=1$

得 $a>b=c$

2. (A) $0.\overline{23}=\frac{23}{99}$

(B) $\sqrt{361}=19$

(C)有限小數

(D)無限小數

(E) $\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

3. $(\frac{1}{25})^{\frac{1}{4}}=(\frac{1}{5})^{2\cdot\frac{1}{4}}=(\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\approx\frac{2.236}{5}=0.4472$

$\therefore\ 0.4<k<0.5$

4. $10^{1.74}\approx 55$　$\therefore\ 5.5\approx 10^{0.74}$

$\text{pH}=-\log[\text{H}^+]=-\log(5.5\times 10^{-4})$

$\approx-\log(10^{0.74}\times 10^{-4})=-\log(10^{-3.26})=3.26$

5. (A)封閉性　(C)取 $c=\sqrt{2}$，$d=-\sqrt{2}$

(D)取 $c=2+\sqrt{3}$，$d=2-\sqrt{3}$

(E)取 $a=5$，$c=1+\sqrt{2}$，$b=3$，$d=3+\sqrt{2}$

則 $a+c=b+d=6+\sqrt{2}$，但 $a\ne b$ 且 $c\ne d$

6. (A) $\sqrt{(\pi-3.15)^2}=|\pi-3.15|=3.15-\pi$

(B) $0.\overline{9}=\frac{9}{9}=1$

(C) $\sqrt{100}-\sqrt{99}=\frac{(\sqrt{100}-\sqrt{99})(\sqrt{100}+\sqrt{99})}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

$=\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

$\sqrt{99}-\sqrt{98}=\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}$

$\because\ \sqrt{100}+\sqrt{99}>\sqrt{99}+\sqrt{98}$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}<\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}$

$\therefore\ \sqrt{100}-\sqrt{99}<\sqrt{99}-\sqrt{98}$

(D) $[(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}]^6=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$，$[(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}]^6=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}>(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$

(E) $\frac{8+11}{2}>\sqrt{88}=2\sqrt{22}$

7. (A) $(\frac{1000}{125})^{-\frac{2}{3}}=(8)^{-\frac{2}{3}}=(\frac{1}{8})^{\frac{2}{3}}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

(B) $(10\sqrt{10})^{\log 8}=(10^{\frac{3}{2}})^{\log 8}=(10^{\log 8})^{\frac{3}{2}}=8^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{9}{2}}$

(C) $3^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{4}{6}}=3^{\frac{17}{12}}=\sqrt[12]{3^{17}}$

(D) $7^{-\frac{3}{2}}\times 63^{\frac{1}{2}}=(\frac{1}{7})^{\frac{3}{2}}\times 63^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{7^3}\times 7\times 9}=\sqrt{\frac{9}{49}}=\frac{3}{7}$

(E) $(7.85-0.83)\times 10^{-6}=7.02\times 10^{-6}$

答案應取 2 位有效數字，故原式 $\approx 7.0\times 10^{-6}$

16 8. $a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{a}\xrightarrow{10^x}10^{\sqrt{a}}\xrightarrow{\log_{10}}\log(10^{\sqrt{a}})=\sqrt{a}$

(A) $a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{a}\xrightarrow{\log_{10}}\log\sqrt{a}\xrightarrow{10^x}10^{\log\sqrt{a}}=\sqrt{a}$

(B) $a\xrightarrow{10^x}10^a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{10^a}\xrightarrow{\log_{10}}\log_{10}(10^{\frac{a}{2}})=\frac{a}{2}$

(C) $a\xrightarrow{10^x}10^a\xrightarrow{\log_{10}}\log 10^a=a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{a}$

(D) $a\xrightarrow{\log_{10}}\log a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{\log a}\xrightarrow{10^x}10^{\sqrt{\log a}}$

(E) $a\xrightarrow{\log_{10}}\log a\xrightarrow{10^x}10^{\log a}=a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{a}$

9. 設原有細菌 k 個

$k(1+a)^2=300\cdots$①，$k(1+a)^5=37500\cdots$②

$\frac{②}{①}$ 得 $(1+a)^3=125=5^3$，得 $1+a=5$

令 n 天後細菌數目為 937500 個

$k(1+a)^n=k(1+a)^5(1+a)^{n-5}$

$\Rightarrow\quad 937500=37500\times(1+a)^{n-5}$

$\Rightarrow\quad (1+a)^{n-5}=25 \quad\Rightarrow\quad 5^{n-5}=5^2 \quad\Rightarrow\quad n=7$

10. $|3-x|\le 4 \quad\Rightarrow\quad |x-3|\le 4 \quad\Rightarrow\quad -4\le x-3\le 4$

$\Rightarrow\quad -1\le x\le 7\cdots$①

$|x+2|\ge 5 \quad\Rightarrow\quad x+2\ge 5$ 或 $x+2\le -5$

$\Rightarrow\quad x\ge 3$ 或 $x\le -7\cdots$②

由①②得 $3\le x\le 7$

$3\le x\le 7 \quad\Rightarrow\quad 3-5\le x-5\le 7-5$

$\Rightarrow\ -2\le x-5\le 2\ \Rightarrow\ |x-5|\le 2\ \Rightarrow\ |-x+5|\le 2$

$\Rightarrow\ \left|\frac{1}{5}\right||-x+5|\le\left|\frac{1}{5}\right|\times 2\ \Rightarrow\ \left|-\frac{1}{5}x+1\right|\le\frac{2}{5}$

得 $a=-\frac{1}{5}$，$b=\frac{2}{5}$，故數對 $(a,b)=(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$

11. $(\sqrt{6-2\sqrt{5}})^3=(\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2})^3=(\sqrt{5}-1)^3$

$=(\sqrt{5})^3-3\cdot(\sqrt{5})^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{5}\cdot 1^2-1^3$

$=5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1=-16+8\sqrt{5}$

∴數對 $(a,b)=(-16,8)$

12. $k=[(270+1)(270^2-270+1)]\cdot[(270-1)(270^2+270+1)]$

$=(270^3+1)(270^3-1)=270^6-1$

$=3^{18}\times 10^6-1\approx(10^{0.48})^{18}\times 10^6-1$

$=10^{14.64}-1\approx 10^{0.64}\times 10^{14}$

∴ k 為 15 位數

13. (1)利用舊牆的長度為 x，則矩形寬度為 $\frac{360}{x}$

總費用 $y=180x+720(x-2)+720\times\frac{360}{x}\times 2$

$=900x+\frac{518400}{x}-1440\ (x>0)$

(2) $\dfrac{900x+\frac{518400}{x}}{2}\ge\sqrt{900x\cdot\frac{518400}{x}}=21600$

$900x=\frac{518400}{x}$ 時 $\Rightarrow\ x^2=(\frac{72}{3})^2$，即 $x=\frac{72}{3}=24$ 時

最少費用為 $21600\times 2-1440=41760$ 元

2 直線與圓

17 ❶ A $(9,11)$；$(2,8)$　B $2pq$；p^2+q^2　C (E)

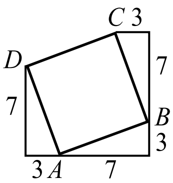
A A 向右移 7 再向上移 3 為 B

∴ $B(12,4)$ 向上移 7 再向左移 3 為

$C(12-3,4+7)=(9,11)$

$A(5,1)$ 向左移 3 再向上移 7 為

$D(5-3,1+7)=(2,8)$



B ① $\overline{AB}=2q$，$\overline{AC}=2p$

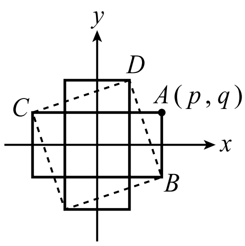
∴ $\Delta ABC=\frac{2p\times 2q}{2}=2pq$

② B、C、D 為正方形的三個頂點，由 $B(p,-q)$ 及 $D(q,p)$

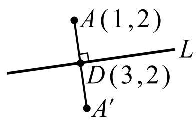
得 $\overline{BD}=\sqrt{(p-q)^2+(p+q)^2}$

$=\sqrt{2p^2+2q^2}$

∴ $\Delta BCD=\overline{BD}^2\times\frac{1}{2}=p^2+q^2$



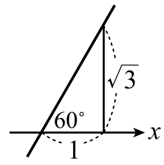
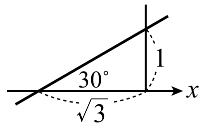
18 C $A\xrightarrow[y\text{ 加 }0]{x\text{ 加 }2}D\xrightarrow[y\text{ 加 }0]{x\text{ 加 }2}A'$，得 $A'(5,2)$



❷ A (C)；(A)　B (1) −1　(2) 10　(3) 4　C (A)　D −3

B (1) $\frac{7-x}{3-(-1)}=2$　∴ $7-x=8$ ⇒ $x=-1$

(2) $\frac{y}{5}=2$ ⇒ $y=10$　(3)即 $\frac{-k}{k-6}=2$，得 $k=4$

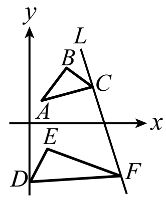
C 示意圖為  與 

∴銳交角為 $60^\circ-30^\circ=30^\circ$

19 D 由右圖知

所求最小值為

$m_{\overline{CF}}=\frac{3-(-6)}{5-8}=\frac{9}{-3}=-3$



❸ A (1) 11　(2) 1　B $\frac{2}{3}$　C (C)(E)　D $5x+2y=23$

A $m_{\overline{PQ}}=\frac{a-(a+3)}{1-2}=3$，$m_{\overline{QR}}=\frac{(a+3)-5}{2-(-1)}=\frac{a-2}{3}$

(1) $3=\frac{a-2}{3}$　∴ $a=11$　(2) $3\cdot\frac{a-2}{3}=-1$　∴ $a=1$

B 即 $\frac{-3}{2}\times m=-1$　∴ $m=\frac{2}{3}$

C (A)(B)任兩直線皆不互相垂直　(C)因 $2\times(-\frac{1}{2})=-1$

(D)有兩條直線平行

(E)因為有一條直線為水平線，一條直線為鉛直線

D 設所求為 $5x+2y=k$，代 $(3,4)$ 得 $15+8=23$

即 $5x+2y=23$

❹ A (1) $x-4y=-13$　(2) $4x+y=-1$　B −5　C 12

A $m_{\overline{AB}}=\frac{4-2}{3-(-5)}=\frac{1}{4}$

(1) $y-4=\frac{1}{4}(x-3)$ ⇒ $x-4y=-13$

(2) $\overline{AB}$ 中點為 $(-1,3)$

即 $y-3=-4(x+1)$ ⇒ $4x+y=-1$

20 B 直線的截距式為 $\frac{x}{-k}+\frac{y}{2k}=1$

代入 $(9,8)$ 得 $\frac{9}{-k}+\frac{8}{2k}=1$，即 $\frac{-5}{k}=1$　∴ $k=-5$

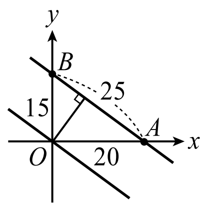
C 平移使一直線過原點

則另一直線過 $A(20,0)$、$B(0,15)$

為 $\frac{x}{20}+\frac{y}{15}=1$

所求為 ΔOAB 斜邊上的高

即 $\frac{15\times 20}{25}=12$



❺ A (1)(C)　(2)(B)　B $(-\frac{4}{3},-6)$

A (1)(A) $\frac{2}{3}\ne\frac{6}{-9}$　(B) $\frac{2}{3}\ne\frac{6}{-1}$

(C) $\frac{2}{1}=\frac{6}{3}\ne\frac{4}{1}$　(D) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{4}{6}$

(2)與 L 垂直的直線應為 $6x-2y=k$ 的形式

B $\frac{a}{4}=\frac{1}{-3}=\frac{2}{b}$　∴ $a=-\frac{4}{3}$，$b=-6$

6 A 5 或 $-\dfrac{5}{2}$　B $\dfrac{11}{26}$

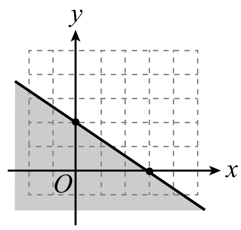
A $\dfrac{|6-4k-1|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5-4k|}{5}=3$

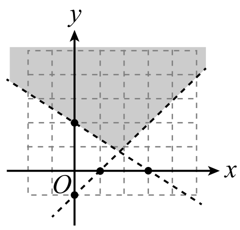
$\therefore$ $5-4k=\pm 15$，得 $k=5$ 或 $-\dfrac{5}{2}$

21 B L_1 上取一點 $(0,\dfrac{1}{4})$，到 L_2 的距離為 $\dfrac{|0+6-17|}{\sqrt{10^2+24^2}}=\dfrac{11}{26}$

7 B (D)　C (B)　D (A)

A (1)　　(2)





C ① $\because$ $a<0$

$\therefore$ $ax+by\ge c$ 為直線之左，刪去(A)、(E)

② $\because$ $a<0$ 且 $b<0$

$\therefore$ 斜率為 $-\dfrac{a}{b}<0$，朝右下，刪去(D)

③ $\because$ $b<0$ 且 $c<0$

$\therefore$ $x=0$ 代入 $ax+by=c$，得 $y=\dfrac{c}{b}>0$，刪去(C)

D 點 $(1,1)$ 是二元一次不等式 $\begin{cases} y<2x & \cdots① \\ y<-3x+5 & \cdots② \end{cases}$ 的一解

(A)代入得 $\begin{cases} -56<40 \\ -56<-55 \end{cases}$，可

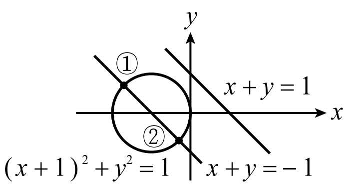
(B)代入②，(C)(D)(E)代入①皆不合

22 8 A $(x-1)^2+(y+3)^2=16$　B (B)　C (B)(C)

B Γ_1 為圓，圓心為 $(-1,0)$，半徑為 1

Γ_2 為兩平行直線 $x+y=1$ 與 $x+y=-1$

作圖如下，得 Γ_1 與 Γ_2 共有 2 個交點

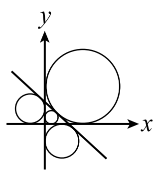


C (A)三點在同一直線上，不合

(D) $(-1,2)$ 到兩軸的距離不相等

$\therefore$ 不可能與兩軸都相切

(E)由右圖得知可決定四個圓



9 A 13　B 0；1；$(-2,3)$；$3\sqrt{2}$　C (B)

A $(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)=-k+9+4=0$

$\therefore$ $k=13$

B 由基本條件可知 $p=0$ 且 $q=1$

得 $x^2+y^2+4x-6y-5=0$

$\Rightarrow$ $(x+2)^2+(y-3)^2=18=(3\sqrt{2})^2$

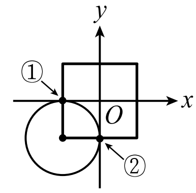
$\therefore$ 圓心為 $(-2,3)$，半徑為 $3\sqrt{2}$

C 圓配方為 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

圓心為 $(-1,-1)$

半徑為 1

作圖知共有 2 個交點



23 10 A (1) $x-y=0$

(2) $(x-\dfrac{4}{3})^2+(y+\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{8}{9}$

A 動點 $P(x,y)$

(1) $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2$

$\Rightarrow$ $x-y=0$（$\overline{AB}$ 的中垂線）

(2) $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

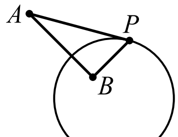
$\Rightarrow$ $x^2+y^2-2y+1=4(x^2-2x+1+y^2)$

$\Rightarrow$ $3x^2+3y^2-8x+2y+3=0$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{2}{3}y+1=0$

$\Rightarrow$ $(x-\dfrac{4}{3})^2+(y+\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{16}{9}+\dfrac{1}{9}-1$

$\Rightarrow$ $(x-\dfrac{4}{3})^2+(y+\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{8}{9}$（圓）



11 A $3x+5y=-22$　B $(4,7,14)$

A $3(x-4)+5(y+7)=1$，即 $3x+5y=-22$

B 原為 $(x-3)^2+(y+2)^2=12$，圓心為 $(3,-2)$

而新方程式為 $(x+1)^2+(y-5)^2=-p+26$

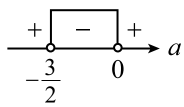
圓心變成 $(-1,5)$　$\therefore$ 向左移 4 單位再向上移 7 單位

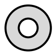
且 $12=-p+26$，得 $h=4$，$k=7$，$p=14$

12 A $-\dfrac{3}{2}<a<0$　B 6π

A 代入得 $a^2+(-a)^2+3a<0$

$\Rightarrow$ $a(2a+3)<0$　$\therefore$ $-\dfrac{3}{2}<a<0$



B 作圖為環形 ，兩同心圓半徑為 $\sqrt{4}$ 與 $\sqrt{10}$

所求為 $\pi\cdot\sqrt{10}^{\,2}-\pi\cdot\sqrt{4}^{\,2}=6\pi$

24 13 A $(1,5)$；3　B $(2,2)$；4

A 即 $(y-5)^2=9-(x-1)^2$ 且 $y\ge 5$

$\therefore$ 圖形為 $(x-1)^2+(y-5)^2=9$ 的上半圓

則圓心為 $(1,5)$，半徑為 3

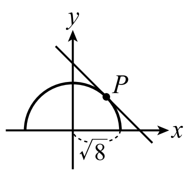
B $y=\sqrt{8-x^2}$，即「$x^2+y^2=8$ 且 $y\ge 0$」

得圖形為上半圓

圓心為 $(0,0)$，半徑為 $\sqrt{8}$

看出交點 P 為切點 $(2,2)$

代入 $x+y=k$，得 $k=4$



14 A (1) -2 或 4　(2) $(2,2)$　B ± 15　C $4\sqrt{2}$

A $\begin{cases} x^2+y^2+kx-3ky+k+4=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $2x^2-2kx+(k+4)=0$

$D=(-2k)^2-4\times 2\times(k+4)=4(k+2)(k-4)$

(1)∵相切，則 $D=4(k+2)(k-4)=0$

∴ $k=-2$ 或 4

(2)若 $k=4$，代回二次方程式得 $2x^2-8x+8=0$

即 $2(x-2)^2=0$，得 $x=2$，則切點為 $(2,2)$

B 圓心 $(0,0)$ 到 $3x+4y=k$ 的距離為 $\frac{|0+0-k|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|k|}{5}=3$

∴ $k=\pm 15$

C 圓心 $(0,0)$ 到 $3x+4y=5$ 的距離為 $\frac{|0+0-5|}{\sqrt{9+16}}=1$

∴ $\overline{PQ}=\sqrt{3^2-1^2}\times 2=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

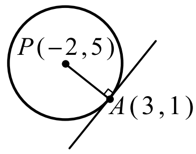
25 ⑮ A $\sqrt{15}$ B $5x-4y=11$

A 圓心為 $P(3,-4)$，半徑為 $\sqrt{5}$，$\overline{AP}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$

所求 $=\sqrt{\sqrt{20}^{\,2}-\sqrt{5}^{\,2}}=\sqrt{15}$

B 圓心為 $P(-2,5)$，$\overline{PA}$ 的斜率為

$\frac{1-5}{3-(-2)}=\frac{-4}{5}$，倒數變號為 $\frac{5}{4}$



所求切線為 $y-1=\frac{5}{4}(x-3)$

即 $5x-4y=11$

範例 1 (2) $A(-3,-1)$，$A'(9,11)$ (3) 17

(1)應再向上移 12 單位長，可到達 A'

(2) $x=3$ 代入 $x+y=8$ 得 $y=5$

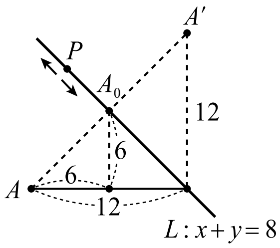
知 A_0 坐標為 $(3,5)$

A_0 向下移 6 再向左移 6 得

$A(3-6,5-6)=(-3,-1)$

A_0 向右移 6 再向上移 6 得

$A'(3+6,5+6)=(9,11)$



(3) $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\underset{\uparrow}{\ge}\overline{A'B}=\sqrt{15^2+8^2}=17$，得最小值為 17

三角形兩邊之和大於第三邊

類題 1 (1) $A(9,14)$，$B(2,11)$，$C(5,4)$，$D(12,7)$

(2) $\frac{3}{7}$ (3)(A)(C)(D)

(1) $P(7,9)$ 右移 2 上移 5 為 $A(9,14)$

∵ $\Delta PGA\cong\Delta PHB$（$AAS$）

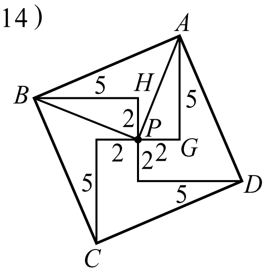
∴ $\overline{PH}=\overline{PG}=2$，$\overline{HB}=\overline{GA}=5$

∴ $P(7,9)$

①上移 2 左移 5 為 $B(2,11)$

②左移 2 下移 5 為 $C(5,4)$

③下移 2 右移 5 為 $D(12,7)$



(2) $A(9,14)$、$B(2,11)$ 連線的斜率為 $\frac{14-11}{9-2}=\frac{3}{7}$

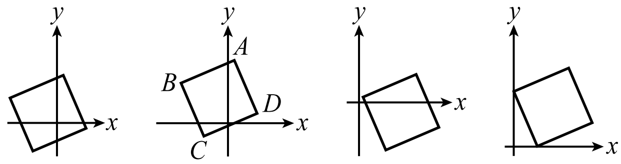
（另一個斜率為 $-\frac{7}{3}$）

(3)(A)如圖(一)

(B)如圖(二)，若 A、B 在第一象限，則 C、D 不可能在第三象限，若 A、D 在第一象限，則 B 不可能在第三象限

(C)如圖(三) (D)如圖(四)

(E)至多恰有兩個頂點在坐標軸上



圖(一) 圖(二) 圖(三) 圖(四)

26 **類題 2** (1) $(5,0)$ (2) $5\sqrt{5}$

(1)利用入射角 $\alpha=$ 反射角 β

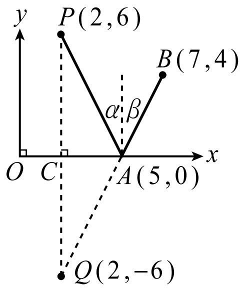
得知 Q、A、B 共線

∴ $\overleftrightarrow{QB}$：$y-4=\frac{4-(-6)}{7-2}(x-7)$

⇒ $y=2x-10$

令 $y=0$，得 $x=5$

∴ A 點坐標為 $(5,0)$



(2) $\overline{PA}+\overline{AB}=\overline{AQ}+\overline{AB}=\overline{QB}$

$=\sqrt{(7-2)^2+(4+6)^2}=5\sqrt{5}$

範例 2 (B)(C)(D)

(A)應為 $m_3>m_1>m_2$

(B)因 $m_1\times m_3=-1$ 且 $m_3=m_4$ ∴ $m_1\times m_4=-1$

(C)因 $y=x$ 的斜率為 1，且 $0<m_3<1$，由 $m_1\times m_3=-1$

得 $m_1=-\frac{1}{m_3}<-1$

(D)因 $m_2<m_1=-\frac{1}{m_3}$，同乘正數 m_3，得 $m_2m_3<-1$

(E)由 L_4 的 y 截距知 $c<0$

類題 3 (B)(C)(E)

(A) $\overline{CD}$ 朝右上最陡，應以 m_{CD} 為最大

(B) $\overline{BC}$ 朝右下最陡 ∴ m_{BC} 為最小

(D)∵ ΔABC 不是直角三角形 ∴ $m_{AB}\times m_{BC}\ne -1$

(E)∵ m_{CD} 為正，且 $|m_{CD}|$ 較大，m_{DA} 為負，且 $|m_{DA}|$ 較小

∴ $m_{CD}+m_{DA}>0$

類題 4 (C)(E)

m_1 和 m_3 必為一正一負，否則不可能使其中兩個相乘為 -1

m_2 可正可負，且 m_1m_2、m_2m_3、m_1m_3 三者恰有一個為 -1

27 **範例 3** (C)(E)

① L_1 的斜率為 $-\frac{103}{101}$，比斜右下 45° 還陡一些

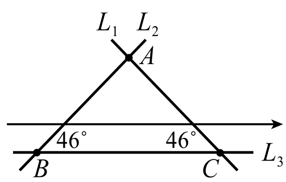
與 x 軸夾銳角 θ 約 46°，y 截距為 101

② L_2 的斜率為 $\frac{103}{101}$，比斜右上 45° 還陡一些

與 x 軸夾銳角 θ 約 46°，y 截距為 101

③ L_3 為水平線，作略圖如右

∴ L_1、L_2、L_3 圍成的 ΔABC 為等腰銳角三角形



類題 5 (E)

(A)斜率為四正，不合

(B)斜率為二正二負，不合

(C)有一個邊沒有斜率，不合

(D)有水平的邊，故乘積為 0，不合

(E)斜率為一正三負，合

類題 6 (E)

(A)斜率乘積 $abc<0$

(B)(C)(D) y 截距乘積 $pqr>0$

(E)斜率為一正二負，y 截距為二正一負

$\therefore abc>0$ 且 $pqr<0$

範例 4 $(3,3)$

$\overline{AB}$ 的斜率為 $m_{\overline{AB}}=\dfrac{0-(-6)}{(-3)-0}=-2$，倒數變號為 $\dfrac{1}{2}$

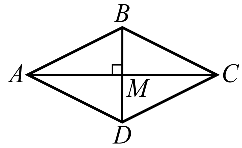
所以 $\overleftrightarrow{CD}$ 為 $y+1=-2(x-5)$，即 $2x+y=9\cdots$①

$\overleftrightarrow{AD}$ 為 $y-0=\dfrac{1}{2}(x+3)$，即 $x-2y=-3\cdots$②

由①②得 $x=3$，$y=3$　$\therefore D$ 為 $(3,3)$

28 **類題 7** 20

菱形對角線互相垂直



$\therefore m_{\overline{BM}}\times m_{\overline{AM}}=-1\quad\Rightarrow\quad m_{\overline{BM}}=-2$

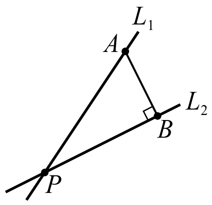
$\overleftrightarrow{BM}$：$y-3=-2(x-5)$

即 $2x+y=13$

解 $\begin{cases}4x-3y=1\\2x+y=13\end{cases}$，得 $B(4,5)$

菱形面積 $=4\Delta AMB=4\times\dfrac{\overline{AM}\times\overline{BM}}{2}=4\cdot(\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5})=20$

類題 8 $(-\dfrac{7}{2},-\dfrac{25}{4})$



設 L_1 的斜率為 $m+1$，L_2 的斜率為 m

$m_{\overline{AB}}=\dfrac{5-(-1)}{4-7}=-2$　$\because \overline{AB}\perp L_2$

$\therefore(-2)\times m=-1$，得 $m=\dfrac{1}{2}$

則 L_1 為 $y-5=\dfrac{3}{2}(x-4)$，即 $3x-2y=2\cdots$①

L_2 為 $y+1=\dfrac{1}{2}(x-7)$，即 $x-2y=9\cdots$②

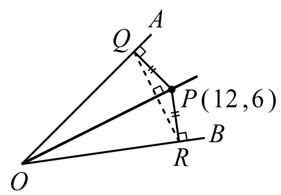
由①②得 $x=-\dfrac{7}{2}$，$y=-\dfrac{25}{4}$　$\therefore P(-\dfrac{7}{2},-\dfrac{25}{4})$

範例 5 $(9,9)$；$(\dfrac{63}{5},\dfrac{9}{5})$

(1) $P(12,6)$ 關於 $x-y=0$ 的對稱點 $P'(6,12)$

$\therefore$投影點 $Q(\dfrac{12+6}{2},\dfrac{6+12}{2})=(9,9)$

(2) $\overleftrightarrow{OP}$：$y=\dfrac{6}{12}x$，即 $x-2y=0$



斜率為 $\dfrac{1}{2}$，設 $R(\alpha,\beta)$

$\overline{QR}\perp\overline{OP}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{9-\beta}{9-\alpha}\times\dfrac{1}{2}=-1$

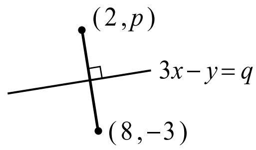
$\Rightarrow\quad 2\alpha+\beta=27\cdots$①

$\overline{QR}$ 的中點在 $\overline{OP}$ 上

$\therefore\ \dfrac{9+\alpha}{2}-2\times\dfrac{9+\beta}{2}=0\quad\Rightarrow\quad\alpha-2\beta=9\cdots$②

由①②得 $\alpha=\dfrac{63}{5}$，$\beta=\dfrac{9}{5}$　$\therefore R(\dfrac{63}{5},\dfrac{9}{5})$

類題 9 -1；17



①$\because$垂直　$\Rightarrow$　斜率乘積為 -1

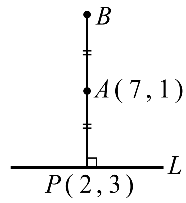
$\Rightarrow\quad\dfrac{p+3}{2-8}\cdot\dfrac{3}{1}=-1\quad\therefore p=-1$

②中點為 $(\dfrac{2+8}{2},\dfrac{-1-3}{2})=(5,-2)$

在 $3x-y=q$ 上，代入得 $15+2=q=17$

類題 10 $(12,-1)$

L 的斜率為 $\dfrac{5}{2}$，倒數變號得 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜率為 $-\dfrac{2}{5}$



則 $\overleftrightarrow{AB}$ 為 $y-1=-\dfrac{2}{5}(x-7)$

即 $2x+5y=19$，解 $\begin{cases}5x-2y=4\\2x+5y=19\end{cases}$

得 $x=2$，$y=3$

所以 A 投影到 L 為 $P(2,3)$

則 B 為 $(7+5,1-2)=(12,-1)$

29 **範例 6** (1)(C)　(2)(A)(C)(E)　(3) 23

過 A、B 的直線截距式為 $\dfrac{x}{n}+\dfrac{y}{2}=1$，代 P 得 $\dfrac{12}{n}+\dfrac{-k}{2}=1$

同乘 $2n$ 得 $24-nk=2n$，即 $n(k+2)=24$

n	1	2	3	4	6	8	12	24
$k+2$	24	12	8	6	4	3	2	1
k	22	10	6	4	2	1	0 ↑ 不合	-1 ↑ 不合

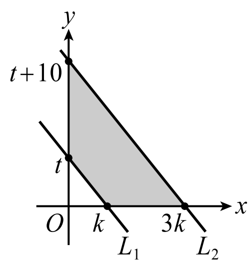
$\therefore\ (n,k)=(1,22),(2,10),(3,6),(4,4),(6,2),(8,1)$

(1)共 6 組

(2)(B) $n=k=4$ 為一解　(D)有 3 組解 n、k 均為偶數

(3) $n+k$ 最大值為 $1+22=23$

類題 11 $5x+4y=20$



設 L_1 的截距式為 $\dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{t}=1$

則 L_2 為 $\dfrac{x}{3k}+\dfrac{y}{t+10}=1$

$\because L_1/\!/L_2$，由三角形相似

得 $\dfrac{k}{3k}=\dfrac{t}{t+10}$，得 $t=5$

梯形面積 $=\dfrac{3k\times15}{2}-\dfrac{k\times5}{2}=20k=80\quad\therefore k=4$

所求為 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=1$，即 $5x+4y=20$

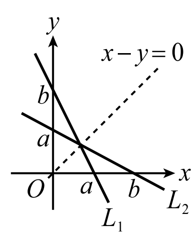
類題 12 (A)(C)(E)

(A) L_1 與 L_2 的斜率不相等，故 L_1 和 L_2 必相交於一點

(B) L_1 與 L_2 的斜率均為負，乘積應為 1

(C)點 $(0,0)$ 到 L_1、L_2 的距離均

為 $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$



(D)由圖知 $x-y=0$ 為 L_1 與 L_2 的鈍角平分線

(E)因 L_1 與 L_2 對稱於 $x=y$，C_1 與 C_2 也對稱於 $x=y$，所以若 L_1 與 C_1 交於兩點，則 L_2 與 C_2 也交於兩點

30 **範例 7** 14.4

t 秒後甲位於 $P_1(4t,0)$，乙位於 $Q_1(0,3t)$

$t+6$ 秒後甲位於 $P_2(4t+24,0)$，乙位於 $Q_2(0,3t+18)$

$\overline{P_1Q_1}$ 的斜率為 $\dfrac{3t-0}{0-4t}=-\dfrac{3}{4}$

$\overline{P_2Q_2}$ 的斜率為 $\dfrac{(3t+18)-0}{0-(4t+24)}=\dfrac{3(t+6)}{-4(t+6)}=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore \overleftrightarrow{P_1Q_1} \,/\!/\, \overleftrightarrow{P_2Q_2}$，由截距式知 $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$ 為 $\dfrac{x}{4t}+\dfrac{y}{3t}=1$

即 $3x+4y=12t$，則 P_2 到 $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$ 的距離即為底圓直徑

$=\dfrac{|3(4t+24)+0-12t|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{72}{5}=14.4$（公尺）

《速解》

用 1 秒後甲 $(4,0)$，乙 $(0,3)$；7 秒後甲 $(28,0)$，乙 $(0,21)$

即 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$ 與 $\dfrac{x}{28}+\dfrac{y}{21}=1$ 求兩平行線間距

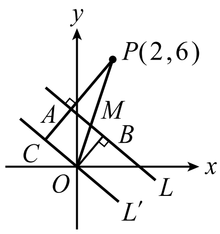
類題 13 $\dfrac{23}{7}$ 或 1

$d(P,L)=\dfrac{|2k+k-5|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$

移項平方得 $(3k-5)^2=2(1+k^2)$，即 $7k^2-30k+23=0$

分解為 $(7k-23)(k-1)=0$，得 $k=\dfrac{23}{7}$ 或 1

類題 14 ⑴ 3：2　⑵ 2



⑴ $\overline{PA}=\dfrac{|3\times2+4\times6-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{18}{5}$

$\overline{OB}=\dfrac{|0+0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{12}{5}$

$\because \triangle PAM \sim \triangle OBM$（$AA$ 相似）

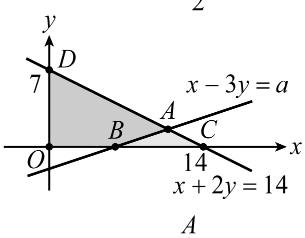
$\therefore \overline{AM}:\overline{MB}=\overline{PA}:\overline{OB}=\dfrac{18}{5}:\dfrac{12}{5}=3:2$

⑵過 O 作 L 的平行線 L'，A 投影到 L' 為 C

則 $\overline{AB}=\overline{OC}=\sqrt{\overline{OP}^2-(\overline{PA}+\overline{OB})^2}=\sqrt{40-36}=2$

範例 8 6

$x+2y=14$ 與兩軸圍成的直角三角形面積為 $\dfrac{7\times14}{2}=49$



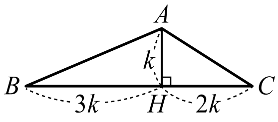
而 $\dfrac{213}{5}=42.6$，所以判定

$x-3y=a$ 的 x 截距應在 0 與 14

之間，才可滿足題意，如右圖

四邊形 $ABOD$ 的面積為 $\dfrac{213}{5}$

其中 $B(a,0)$、$C(14,0)$



設 A 到 x 軸的距離為 $\overline{AH}=k$

則因 $\overline{AC}$ 斜率為 $-\dfrac{1}{2}$，所以 $\overline{CH}=2k$

因 $\overline{AB}$ 斜率為 $\dfrac{1}{3}$，所以 $\overline{BH}=3k$

則 $\triangle ABC=\dfrac{5k\cdot k}{2}=49-\dfrac{213}{5}=\dfrac{32}{5}$，得 $k^2=\dfrac{64}{25}$

$\therefore k=\dfrac{8}{5}$，則 $\overline{BC}=14-a=5k=5\times\dfrac{8}{5}=8$，得 $a=6$

31 **類題 15** $(-5,10)$

$\begin{cases}2x+y=10\\x-2y=-15\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}$

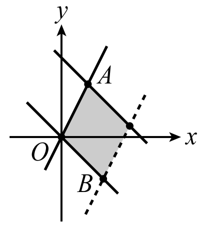
$\begin{cases}2x+y=10\\x-2y=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

$\because A(1,8)$ 與 $B(4,2)$ 連成線段與 $3x-y=k$ 相交

所以 $\underset{3x-y-k \text{ 代 } A}{\underbrace{(3-8-k)}}\underset{3x-y-k \text{ 代 } B}{\underbrace{(12-2-k)}}\le 0$，得 $(k+5)(k-10)\le 0$

得 $-5\le k\le 10$　$\therefore (a,b)=(-5,10)$

類題 16 ⑴ $2\sqrt{5}$　⑵ 2；$3\sqrt{10}$



⑴作圖如右，解 $\begin{cases}x+y=6\\2x-y=0\end{cases}$

得 $A(2,4)$，則邊長為

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

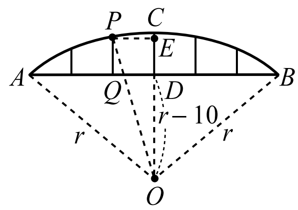
⑵$\because y=ax-b$ 平行 $2x-y=0$　$\therefore a=2$

設 $B(k,-k)$，則 $\overline{OB}=\sqrt{2}k=2\sqrt{5}$，得 $k=\sqrt{10}$

$\therefore B(\sqrt{10},-\sqrt{10})$ 代入 $y=2x-b$，得 $-\sqrt{10}=2\sqrt{10}-b$

$\therefore b=3\sqrt{10}$

範例 9 50；$20\sqrt{6}-40$



①令圓之半徑為 $r=\overline{OC}=\overline{OA}$

ΔOAD 為直角三角形

$\therefore \overline{OA}^2=\overline{AD}^2+\overline{OD}^2$

即 $r^2=30^2+(r-10)^2$

得 $r^2=r^2-20r+1000$

$\therefore r=\dfrac{1000}{20}=50$ 公尺

②令 P 在中間支柱之投影點為 E

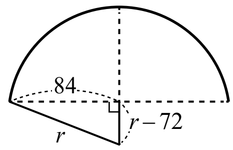
$\overline{OD}=\overline{OC}-\overline{CD}=50-10=40$

$\overline{OP}^2=\overline{OE}^2+\overline{PE}^2$，即 $50^2=\overline{OE}^2+10^2$

得 $\overline{OE}=\sqrt{50^2-10^2}=\sqrt{2400}=20\sqrt{6}$

$\overline{PQ}=\overline{DE}=\overline{OE}-\overline{OD}=20\sqrt{6}-40$ 公尺

類題 17 85



設半徑為 r，則 $84^2+(r-72)^2=r^2$

$\Rightarrow$　$7056+r^2-144r+5184=r^2$

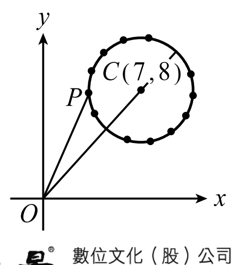
$\therefore r=85$

類題 18 $\dfrac{120}{13}$

$\overline{CD}=\sqrt{26^2-24^2}=10$，因 $\Delta OAB \sim \Delta OCD$

故 $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$，即 $\dfrac{24}{\overline{AB}}=\dfrac{26}{10}$，得 $\overline{AB}=24\times\dfrac{10}{26}=\dfrac{120}{13}$

32 **範例 10** 12



圓心 $C(7,8)$，半徑為 3，$O(0,0)$

$\overline{OC}=\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}\approx 10.6$

則圓上任意點到 O 距離最近約

$10.6-3=7.6$

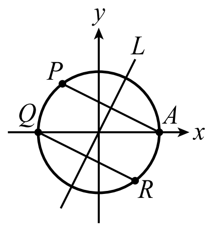
最遠約 $10.6+3=13.6$

$\therefore$ 圓上距 $(0,0)$ 為 8、9、10、11、12、13 的點各有 2 個

所求為 $6\times 2=12$ 個

類題 19 (C)

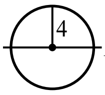
精確作圖如右，由圓的對稱性看出可找到 P、Q、R 三點到 L 的距離等於 $d(A,L)$



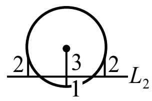
類題 20 (A)(B)(D)

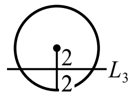
(A)配方，$(x-5)^2+y^2=-9+25=16$

　$\therefore$ 圓心為 $(5,0)$，$r=4$，合

(B)  ，合

(C) $(5,0)$ 距 L_1 為 $\dfrac{|15+0+15|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{30}{5}=6>4$，應為相離，不合

(D)  ，合

(E)  ，應有三個點，不合

範例 11 $(x-4)^2+(y-5)^2=25$

$\overline{AB}$ 的中垂線：$y-6=-\dfrac{1}{2}(x-2)$

$\Rightarrow\quad 2y-12=-x+2$

$\Rightarrow\quad x+2y-14=0$

$\because$ 圓心在弦的中垂線上，故設圓心為 $O(14-2t,t)$，則半徑為 $\overline{OA}=|t|$

$\Rightarrow\quad \sqrt{(14-2t)^2+(t-2)^2}=|t|$

$\Rightarrow\quad 196-56t+4t^2+t^2-4t+4=t^2$

$\Rightarrow\quad t^2-15t+50=0\quad\Rightarrow\quad (t-5)(t-10)=0$

$\Rightarrow\quad t=5$ 或 10

當 $t=5$ 時，圓心為 $(4,5)$，半徑為 5，故圓方程式為 $(x-4)^2+(y-5)^2=25$

當 $t=10$ 時，圓心為 $(-6,10)$，會與 x 軸負向相切，不合

33 **類題 21** $(x+2)^2+(y-4)^2=5$

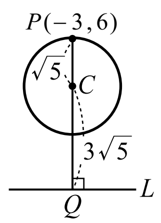
圓 C 在 L 的投影長為 $2\sqrt{5}$

$\therefore$ 圓 C 的直徑為 $2\sqrt{5}$

$d(P,L)=\dfrac{|-3-12-5|}{\sqrt{5}}=\dfrac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

點 P 在 L 的投影點 $\begin{cases}x-2y-5=0\cdots① \\ 2x+y=0\quad\cdots②\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$　$\therefore Q(1,-2)$



$\overline{CP}:\overline{CQ}=\sqrt{5}:3\sqrt{5}=1:3$

利用分點公式，得圓心 $C(-2,4)$

$\overline{CP}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}=r$

$\therefore$ 圓方程式為 $(x+2)^2+(y-4)^2=5$

類題 22 $(x-\frac{5}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{29}{2}$

設圓心為 $(3k+7,k)$，與 A、B 等距離

$\sqrt{(3k+3)^2+(k-2)^2}=\sqrt{(3k+6)^2+(k+5)^2}$

$\Rightarrow\quad 10k^2+14k+13=10k^2+46k+61$，得 $k=-\dfrac{3}{2}$

圓心為 $(\dfrac{5}{2},\dfrac{-3}{2})$，半徑為 $\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{7}{2})^2}=\sqrt{\dfrac{29}{2}}$

所求為 $(x-\frac{5}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\dfrac{29}{2}$

範例 12 (B)(E)

令 $A(7,0)$、$B(0,\frac{7}{2})$

(A)因 $\overline{AB}=\sqrt{49+\dfrac{49}{4}}=\sqrt{\dfrac{245}{4}}=\sqrt{61.25}<10$

　若當 $\overline{AB}$ 當成直徑，則半徑會小於 5

(B)令 O 為原點，因 $\angle AOB=90^\circ$，所以若 $\overline{AB}$ 為直徑

　則 O 在圓周上

(C)不一定，因 $\overline{AB}$ 的斜率為 $-\dfrac{1}{2}$

　所以 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $x+2y=6$ 平行

　若圓心在第一象限且半徑很大，則 Γ 不與 $x+2y=6$ 相交

(D) $\overline{AB}$ 的中點為 $(\frac{7}{2},\frac{7}{4})$，垂直平分線為 L：$y-\dfrac{7}{4}=2(x-\dfrac{7}{2})$

　即 L：$2x-y=\dfrac{21}{4}$

　$x=0$ 代入得 $y=-\dfrac{21}{4}$，所以 L 通過第四象限

(E)承(D)，圓心必在 L 上，$(0,-\frac{21}{4})$ 距離 $A(7,0)$ 為

　$\sqrt{49+\dfrac{441}{16}}=\sqrt{\dfrac{1225}{16}}\approx\sqrt{76.6}>8$，所以半徑大於 8

類題 23 (A)(D)

$\because (1,1)$ 與 $(-1,1)$ 的中垂線方程式為 $x=0$

(A)即圓心在原點　(B)圓心在 y 軸上可決定無限多個圓

(C)設圓心 (k,k)，則半徑為 k

　圓方程式 $(x-k)^2+(y-k)^2=k^2$

　$(3,4)$ 代入得 $(3-k)^2+(4-k)^2=k^2$

　$\Rightarrow\quad k^2-14k+25=0\quad\Rightarrow\quad k=\dfrac{14\pm\sqrt{96}}{2}=7\pm2\sqrt{6}$

　有兩個 k 值，故可決定兩個圓，不合

(D) $\because$ 若圓與兩坐標軸都相切，則圓心在 $x\pm y=0$ 上，與 $x+y=2$ 聯立只有一解

　得圓心為 $(1,1)$，方程式為 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，合

(E) $x\pm y=0$ 與 $2x+y=3$ 聯立有兩解

　得圓心 $(1,1)$ 或 $(3,-3)$，可決定兩圓，不合

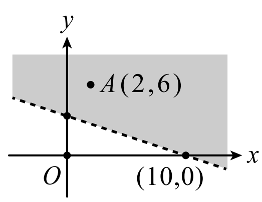
34 **類題 24** (E)

設圓心 $P(x,y)$、$O(0,0)$、$A(2,6)$，由題意得 $\overline{PO}>\overline{PA}$

$\sqrt{x^2+y^2}>\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$

$\Rightarrow\quad x+3y>10$，如右圖所示

所以圓心可在一、二、四象限



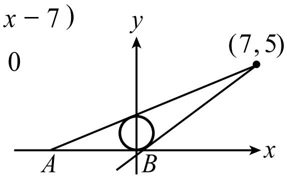
(D) $y=0$ 代入 $x+3y>10$ 得 $x>10$ 才對

範例 13 $\frac{16}{3}$

過 $(7,5)$ 的切線設為 $y-5=m(x-7)$

圓心 $(0,1)$ 到 $mx-y-7m+5=0$

的距離為 $\frac{|0-1-7m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$



$\Rightarrow\ (4-7m)^2=m^2+1$

$\Rightarrow\ (12m-5)(4m-3)=0\ \Rightarrow\ m=\frac{5}{12}$ 或 $\frac{3}{4}$

$\therefore$ 切線為 $\begin{cases} y-5=\frac{5}{12}(x-7)\text{，令 } y=0\text{，得 } x=-5 \\ y-5=\frac{3}{4}(x-7)\text{，令 } y=0\text{，得 } x=\frac{1}{3} \end{cases}$

影子由 $(-5,0)$ 到 $(\frac{1}{3},0)$，故影長為 $\frac{16}{3}$

類題 25 (1) 1 (2) 2 (3) $x^2+y^2-2x-y=0$
(4) $3x+4y=10$ 與 $x=2$

(1) $\overline{AP}=\sqrt{2^2+1^2-4}=1$

(2) ΔPAO 面積 $=\frac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{OA}=1$，四邊形 $PAOB$ 面積 $=2$

(3) ΔPAB 外接圓以 $\overline{OP}$ 為直徑

$\Rightarrow\ (x-2)(x-0)+(y-1)(y-0)=0$

$\Rightarrow\ x^2+y^2-2x-y=0$

(4)設切線為 $y-1=m(x-2)$

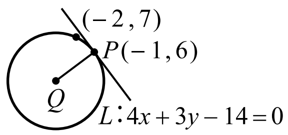
$\Rightarrow\ |0-0-2m+1|=2\times\sqrt{m^2+1}\ \Rightarrow\ m=\frac{-3}{4}$

$\therefore$ 切線為 $y-1=-\frac{3}{4}(x-2)$ 與鉛直線 $x=2$

即 $3x+4y=10$ 與 $x=2$

35 **類題 26** 10；-6；9

$x^2+y^2+ax+by+c=0$



$\Rightarrow\ (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

圓心 $Q(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$，$m_{\overline{QP}}=\frac{6+\frac{b}{2}}{-1+\frac{a}{2}}=\frac{12+b}{-2+a}$

$\because\ \overline{PQ}\perp L\quad\therefore\ \frac{12+b}{-2+a}\times(-\frac{4}{3})=-1\ \Rightarrow\ \frac{48+4b}{-6+3a}=1$

$\Rightarrow\ 3a-6=48+4b\ \Rightarrow\ 3a-4b=54\cdots$①

點 $(-2,7)$ 代入原式：$-2a+7b+c=-53\cdots$②

點 $(-1,6)$ 代入原式：$-a+6b+c=-37\cdots$③

由①②③解得 $a=10$，$b=-6$，$c=9$

範例 14 (B)(C)(D)

設直線 L 向右平移 h 單位後與圓 C 相切

設平移後的方程式為 $3(x-h)+4y=10$

即 $3x+4y-3h-10=0$，圓心 $(6,8)$ 與切線的距離為 4

$\therefore\ \frac{|18+32-3h-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4\ \Rightarrow\ |40-3h|=20$

$\Rightarrow\ 3h-40=\pm 20$

$\Rightarrow\ h=20$ 或 $\frac{20}{3}\quad\because\ a<b\quad\therefore\ a=\frac{20}{3}$，$b=20$

再設直線 L 向上平移 k 單位後與圓 C 相切

設平移後的切線方程式為 $3x+4(y-k)=10$

即 $3x+4y-4k-10=0$

$\therefore\ \frac{|18+32-4k-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4\ \Rightarrow\ |4k-40|=20$

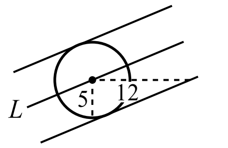
$\Rightarrow\ k=15$ 或 5 $\quad\because\ c<d\quad\therefore\ c=5$，$d=15$

(A) $a=\frac{20}{3}\notin Z$

(E) $a+d=\frac{20}{3}+15=\frac{65}{3}$，$b+c=20+5=25$

$\therefore\ a+d<b+c$ 才對

類題 27 (1) $\pm\frac{5}{12}$ (2) $\frac{60}{13}$



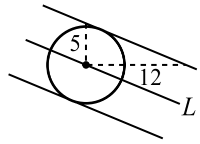
(1)斜率為 $\pm\frac{5}{12}$

(2)直角三角形兩股為 12 與 5

斜邊長為 13

斜邊上的高為 $\frac{12\times 5}{13}=\frac{60}{13}$

即半徑



類題 28 $(16,13)$

圓 C 配方為 $(x+7)^2+(y+4)^2=81$

半徑為 9，圓心在第一象限且與兩坐標軸都相切的圓方程式為 $(x-9)^2+(y-9)^2=81$，所以圓心由 $(-7,-4)$ 移到 $(9,9)$ 必須向右移 16 再向上移 13

$\therefore\ (p,q)=(16,13)$

綜 合 實 力 測 驗

1.(A) 2.(B) 3.(B) 4.(D) 5.(A)(D)(E)

6.(A)(B)(C)(D)(E) 7.(A)(C) 8.(C)(D)(E) 9. $-\frac{7}{11}$

10. 6；$(-5,6)$ 11. $-\frac{5}{3}$ 12. $(x-4)^2+(y-1)^2=10$

13.(1)一個圓形 (2) 1875π 平方公尺

36 1. 由直線斜率觀察

$\overleftrightarrow{AB}$：$3x-4y+11=0$，斜率 $\frac{3}{4}$（右側）

$\overleftrightarrow{BC}$：$x+3y-5=0$，斜率 $-\frac{1}{3}$（右側）

$\overleftrightarrow{CA}$：$4x-y-7=0$，斜率 4（左側）

2. $(x-5)^2+y^2=16$，圓心 $C(5,0)$，半徑為 4

(A) $d(C,L_1)=\frac{|15-0-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$ (B) $d(C,L_2)=\frac{|15+5|}{5}=4$

(C) $d(C,L_3)=\frac{|15-0-15|}{5}=0$ (D) $d(C,L_4)=\frac{|15|}{5}=3$

(E) $d(C,L_5)=\frac{|15+0-5|}{5}=2$

(B)選項的弦心距等於半徑，故 L_2 與圓相切

3. $m_{\overline{AC}}=m_{\overline{BC}}$

$\Rightarrow\ \frac{2}{a-2}=\frac{b+2}{-2}\ \Rightarrow\ (a-2)(b+2)=-4$

$a-2$	1	2	4	-1	-2	-4
$b+2$	-4	-2	-1	4	2	1

a	3	4	6	1	0	-2
b	-6	-4	-3	2	0	-1

不合

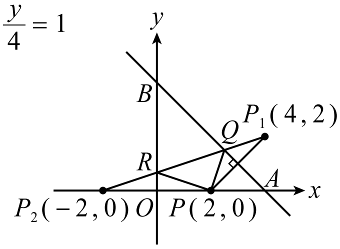
得 $a+b=-3$ 或 0 或 3　$\therefore$ $a+b$ 的最小值為 -3

4. 直線 AB 的方程式為 $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$

即 $x+y=4$

P 點對於直線 $x+y=4$ 的對稱點為 $P_1(4,2)$

P 點對於 y 軸的對稱點為 $P_2(-2,0)$



$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P_1Q}+\overline{QR}+\overline{RP_2}$

$=\overline{P_1P_2}=\sqrt{(4+2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

5. (A) $m>0$

(B) $m_1=-\frac{1}{a}$，$m_2=-\frac{1}{c}$，$m_3=m$，則 $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{c}<0$

$\Rightarrow$　$c>a$

(C)(D) $L_2\perp L_3$　$\Rightarrow$　$(-\frac{1}{c})\times m=-1$　$\Rightarrow$　$\frac{m}{c}=1$

$\Rightarrow$　$m=c$　$\Rightarrow$　$m-c=0$

(E) L_1 的 x 截距為 $-b<0$　$\Rightarrow$　$b>0$

L_2 的 x 截距為 $-d>0$　$\Rightarrow$　$d<0$　$\therefore$ $d-b<0$

6. $mm_1=-1$　$\therefore$ $m_1=-\frac{1}{2}$

不失一般性

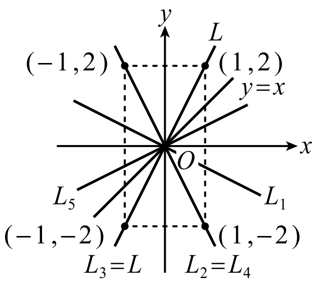
設 L：$y=2x$

在 L 上取一點 $(1,2)$

則 $m_2=\frac{-2}{1}=-2$

$m_3=\frac{-2}{-1}=2$

$m_4=\frac{2}{-1}=-2$，$m_5=\frac{1}{2}$



37 7. $L_1 /\!/ L_2$　$\Rightarrow$　$\frac{3}{6}=\frac{-2}{p}\neq\frac{-1}{q}$　$\Rightarrow$　$p=-4$ 且 $q\neq-2$

L_1：$6x-4y-2=0$，L_2：$6x-4y+q=0$

$d(L_1,L_2)=\frac{|q+2|}{\sqrt{36+16}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$　$\Rightarrow$　$|q+2|=4$

$\Rightarrow$　$q+2=\pm4$　$\Rightarrow$　$q=2$ 或 -6

L_3：$bx+ay=ab$

$L_1\perp L_3$　$\therefore$ $\frac{3}{2}\times\frac{-b}{a}=-1$　$\Rightarrow$　$2a=3b\cdots$①

點 $(1,1)$ 代入 L_3：$b+a=ab\cdots$②

①代入②，$\frac{2a}{3}+a=a\times\frac{2a}{3}$　$\Rightarrow$　$\frac{5a}{3}=\frac{2a^2}{3}$

$\Rightarrow$　$2a^2=5a$　$\Rightarrow$　$a(2a-5)=0$

$\Rightarrow$　$a=\frac{5}{2}$ 或 0（不合），代回①得 $b=\frac{5}{3}$

8. (A)圓心 $C(1,2)$，$d(C,x\text{ 軸})=2>\sqrt{3}$，不相交

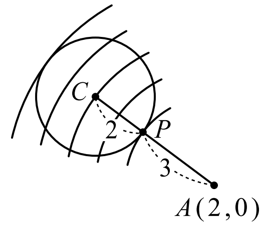
(B)圖形過原點，僅通過三個象限

(C) $\overline{CA}=\sqrt{16+9}=5$

圓上任意一點到 A 的最近距離為 $5-2=3$

最遠距離為 $5+2=7$

共有 $3\times2+2=8$ 個點



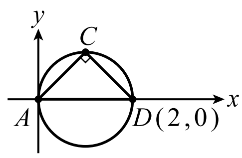
(D) ΔACD 為等腰直角三角形

圓心在斜邊中點 $(1,0)$

圓方程式 $(x-1)^2+y^2=1$

$(0,1)$ 代入得 $1+1=2>1$

點 B 在圓外



(E) $\because$ $ABDC$ 是矩形　$\therefore$ $\overline{AD}=\overline{BC}$ 為圓直徑

9. C 點投影在 x 軸為 D

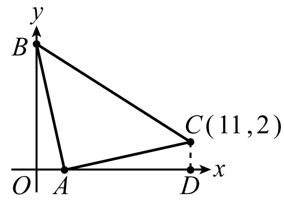
$\Delta OAB\cong\Delta DCA$（$ASA$）

得 $\overline{OA}=2$

$\overline{OB}=\overline{OD}-\overline{OA}=11-2=9$

$\therefore$ $B(0,9)$

故 $m_{\overleftrightarrow{BC}}=\frac{9-2}{0-11}=-\frac{7}{11}$



10. ① $\overline{AB}$ 的斜率為 $m_{\overline{AB}}=\frac{(-2)-(-4)}{(-1)-5}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$

$\overleftrightarrow{CD}$ 的斜率為 $m_{\overleftrightarrow{CD}}=-\frac{2}{k}$　$\because$ $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$

$\therefore$ $-\frac{1}{3}=-\frac{2}{k}$，得 $k=6$

② $\because$ $\overline{AB}\perp\overline{AC}$　$\therefore$ $m_{\overline{AB}}=-\frac{1}{3}$，倒數變號得 $m_{\overline{AC}}=3$

則 $\overline{AC}$ 為 $y+2=3(x+1)$，即 $3x-y=-1$

解 $\begin{cases}3x-y=-1\\2x+6y=26\end{cases}$，得 $x=1$，$y=4$，C 坐標為 $(1,4)$

B 到 A 為「向左平移 6 單位且向上平移 2 單位」

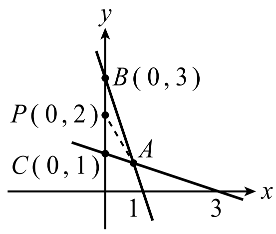
$C(1,4)$ 經「向左平移 6 單位且向上平移 2 單位」

得 D 坐標為 $D(1-6,4+2)=(-5,6)$

11. 如右圖聯立不等式所表示的區域為 ΔABC

$\begin{cases}x+3y=3\\3x+y=3\end{cases}$，得 $x=\frac{3}{4}$，$y=\frac{3}{4}$

$\therefore$ $A(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$



$\overline{AP}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的中線

L：$y=mx+2$ 表通過 $P(0,2)$ 斜率為 m 的變動直線

$\because$ $\overline{AP}$ 在直線 L 上

$\therefore$ $m=\frac{2-\frac{3}{4}}{0-\frac{3}{4}}=-\frac{5}{3}$

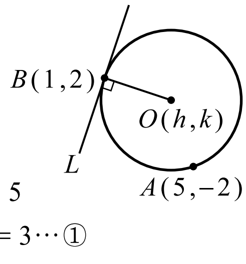
12. 設圓心 $O(h,k)$　$\because$ $\overline{OA}=\overline{OB}$

$\sqrt{(h-5)^2+(k+2)^2}$

$=\sqrt{(h-1)^2+(k-2)^2}$

$\Rightarrow$　$-10h+4k+29=-2h-4k+5$

$\Rightarrow$　$-8h+8k=-24$　$\Rightarrow$　$h-k=3\cdots$①



又 $\overline{OB}\perp L$　∴ $\dfrac{k-2}{h-1}\times 3=-1$　⇒　$h+3k=7\cdots②$

由①②得 $(h,k)=(4,1)$，半徑 $\overline{OA}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

得圓方程式為 $(x-4)^2+(y-1)^2=10$

13. 設大獵犬與小獵犬分別在 $A(0,0)$、$B(50,0)$ 兩點等候，同時抵達獵物的點為 $P(x,y)$

⑴因為大獵犬速度是小獵犬的 $\sqrt{3}$ 倍　∴ $\overline{PA}=\sqrt{3}\,\overline{PB}$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3}\times\sqrt{(x-50)^2+y^2}$

⇒　$x^2+y^2=3(x^2-100x+2500+y^2)$

⇒　$2x^2+2y^2-300x+7500=0$

⇒　$x^2+y^2-150x+3750=0$

⇒　$(x-75)^2+y^2=1875$

⇒　$(x-75)^2+y^2=(25\sqrt{3})^2$

故所有 P 點所形成的圖形為一個圓

⑵小獵犬會先追到獵物的範圍即為圓 $(x-75)^2+y^2=(25\sqrt{3})^2$ 的內部

其面積為 1875π 平方公尺

3 多項式

38 ❶ A (D)　B 35；32

A $f(5)-f(-5)$

$=(a\cdot 5^6-b\cdot 5^4+15-\sqrt{2})-(a\cdot 5^6-b\cdot 5^4-15-\sqrt{2})=30$

B $\deg f(x)=7\times 5=35$

係數和 $=f(1)=(2+a-a)^5=2^5=32$

❷ A 3；8　B x^2+2x-1　C ⑴ x^2+x+3　⑵ $x+2$

A 此題使用長除法（分離係數），得 $p=3$，$q=8$

$$\begin{array}{r|llllll}
 & +1 & +0 & -1 & +4 & & \\ \hline
+1+1+2 & +1 & +1 & +1 & +p & +2 & +q \\
 & +1 & +1 & +2 & & & \\ \hline
 & & & -1 & +p & +2 & \\
 & & & -1 & -1 & -2 & \\ \hline
 & & & & +(p+1) & +4 & +q \\
 & & & & +4 & +4 & +8 \\ \hline
 & & & & & +(p-3) & +(q-8)
\end{array}$$

39 B $f(x)=\dfrac{(x^3+4x^2+5x-3)-(2x-1)}{x+2}$

$=\dfrac{x^3+4x^2+3x-2}{x+2}$

$=x^2+2x-1$

$$\begin{array}{r|llll}
 & +1 & +2 & -1 & \\ \hline
+1+2 & +1 & +4 & +3 & -2 \\
 & +1 & +2 & & \\ \hline
 & & +2 & +3 & \\
 & & +2 & +4 & \\ \hline
 & & & -1 & -2 \\
 & & & -1 & -2 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

C ⑴餘式即 x^2+x+3

⑵ x^2+x+3 不可當餘式

再除以 x^2+1 的餘式為 $x+2$，即所求

❸ A $2x^2-5x+15$；-52　C $2x-3$

A
$$\begin{array}{rrrr|l}
+2 & +1 & +0 & -7 & \\
 & -6 & +15 & -45 & -3 \\ \hline
+2 & -5 & +15 & -52 &
\end{array}$$

B $f(x)=5x^3+x^2-2x+4$

$=(x-1)\times(5x^2+6x+4)+8$

$=(x-1)[(x-1)\times(5x+11)+15]+8$

$=(x-1)^2\times(5x+11)+(x-1)\times 15+8$

$=(x-1)^2\times[(x-1)\times 5+16]+(x-1)\times 15+8$

$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

序組 $(a,b,c,d)=(5,16,15,8)$

C 所求直線為 $y=2(x-4)+5=2x-3$

40 ❹ A 1027　B 6　C 24

A 即 $2^{10}+3=1024+3=1027$

B
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
+1 & +6 & -4 & +25 & +30 & +20 & \\
 & -7 & +7 & -21 & -28 & -14 & -7 \\ \hline
+1 & -1 & +3 & +4 & +2 & +6 &
\end{array}$$

∴ $f(-7)=6$

C
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
+1 & -13 & +5 & +80 & +50 & +0 & \\
 & +12 & -12 & -84 & -48 & +24 & +12 \\ \hline
+1 & -1 & -7 & -4 & +2 & +24 &
\end{array}$$

令 $f(x)=x^5-13x^4+5x^3+80x^2+50x$　∴ $f(12)=24$

❺ A $8x^3$　B $54x^5$　C $7x^4+20x^2+16$

A 由 $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

被除式 $=(x^4+5x+1)$ 的倍式 $+8x^3$，因 $8x^3$ 的次數小於 4，所以餘式即為 $8x^3$

B 被除式 $=2x^{20}=2(x^6)^3\cdot x^2=2x^2[(x^6-3x)+3x]^3$

$=(x^6-3x)$ 的倍式 $+2x^2\cdot 27x^3$

∴餘式 $=54x^5$，即 x^6 用 $3x$ 取代的結果

C $f(x)=2(x^{10})^3+5(x^{10})^2\cdot x^2+7x^4$

⇒　$2\times 2^3+5\times 2^2\times x^2+7x^4=7x^4+20x^2+16$

❻ A -16　B (D)

A $f(-2)=-128-8a=0$　⇒　$a=-16$

41 B (A)若 $f(-1)=-2+a+2a+a=0$，則 $a=\dfrac{1}{2}$

(B) $f(1)=2+a-2a+a=2\neq 0$

(C)若 $f(-2)=-16+4a+4a+a=0$，則 $a=\dfrac{16}{9}$

(D)若 $f(2)=16+4a-4a+a=0$，則 $a=-16$

❼ A $(x+2)(x-1)(2x-3)$

B $-2(x-1)(x-5)(x-6)+3$

C 2；3；5；x^2　D ⑴ -5　⑵ 6

A 設 $f(x)=(x+2)(x-1)(ax+b)$

則 $f(0)=-2b=6$，$f(3)=10(3a+b)=30$

得 $b=-3$，$a=2$　∴ $f(x)=(x+2)(x-1)(2x-3)$

B 因 $f(x)-3$ 有因式 $x-1$、$x-5$、$x-6$

設 $f(x)=k(x-1)(x-5)(x-6)+3$

由 $f(0)=-30k+3=63$，得 $k=-2$

∴ $f(x)=-2(x-1)(x-5)(x-6)+3$

C $f(\sqrt{2})=2+0+0=2$，$f(\sqrt{3})=0+3+0=3$

$f(\sqrt{5})=0+0+5=5$

$\because f(x)$ 與 x^2 在 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ 的函數值相等

$\therefore f(x)=x^2$

D ⑴ $\alpha+\beta=-\dfrac{15}{3}=-5$　⑵ $\alpha\beta=\dfrac{k}{3}=2$　$\therefore k=6$

42 ❽ A 37　B $7x^2+12x+11$

A 設 $f(x)=A(x-121)(x-122)+B(x-121)+C$

$f(121)=C=1$，$f(122)=B+C=4$　$\therefore B=3$

$f(123)=2A+2B+C=11$　$\therefore A=2$

$\therefore f(125)=2\times 12+3\times 4+1=37$

B 設 $f(x)=(x+1)(x^2+x+2)\cdot Q(x)+[a(x^2+x+2)+bx+c]$

$=(x^2+x+2)[(x+1)\cdot Q(x)+a]+bx+c$

則 $b=5$ 且 $c=-3$，$f(-1)=0+2a-b+c=2a-8=6$

$\therefore a=7$

$\therefore$所求餘式 $=7(x^2+x+2)+5x-3=7x^2+12x+11$

❾ A $6x+1.103$　B $y=4x-5$

A 斜率為 $\dfrac{8.783-8.723}{1.28-1.27}=\dfrac{0.06}{0.01}=6$

設 $f(x)=6x+k$，$f(1.27)=6\times 1.27+k=8.723$

$\therefore k=8.723-7.62=1.103$

$\therefore f(x)=6x+1.103$

B 因 x 靠近 2，$5(x-2)^3+7(x-2)^2$ 略去不計

所求為 $y=4(x-2)+3=4x-5$

43 ❿ A ⒟　B $f(1)>f(4)>f(3)$　C $k>1$　D 1 或 5

E 2；12

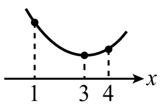
A $f(t)=-(t-5)^2+36$

$\therefore$最大值為 $f(5)=36$，最小值為 $f(10)=11$

$\therefore$最大溫差為 $36-11=25$

B 開口朝上，頂點的 x 坐標為 3

圖形如右



$\therefore f(1)>f(4)>f(3)$

44 C 判別式 $=4-4k<0$　$\Rightarrow$　$4k>4$　$\Rightarrow$　$k>1$

D 設平移後的方程式為 $y=(x-h)^2$

點 $(3,4)$ 代入得 $4=(3-h)^2$

$\Rightarrow$　$3-h=\pm 2$　$\Rightarrow$　$h=1$ 或 5

E $f(x)=(x-1)^2+(x-1)^2+(x-1)^2+(x-2)^2$

$+(x-2)^2+(x-5)^2$

$\therefore x=\dfrac{1+1+1+2+2+5}{6}=\dfrac{12}{6}=2$ 時

有最小值為 $f(2)=3+0+9=12$

⓫ A $(-5,1)$；$(-5,1)$；⒟

B 4；-40；103；$(-4,103)$　C $(-2,-1)$

A 對稱中心為 $(-5,1)$，為 $(0,0)$ 向左移 5 再向上移 1

所以 $p=-5$，$q=1$

$f(x)$ 的圖形從對稱中心先往右上再往右下

45 B $f(x)=(x^3+3\cdot x^2\cdot 4)+8x+7$

$=(x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3)+8x+7-48x-64$

$=(x+4)^3-40x-57$

$=(x+4)^3-40(x+4)-57+160$

$=(x+4)^3-40(x+4)+103$

得 $h=4$，$p=-40$，$q=103$

對稱中心為 $(-4,103)$

C $f(x)$ 的圖形對稱中心為 $(9,7)$ 恰為圓心

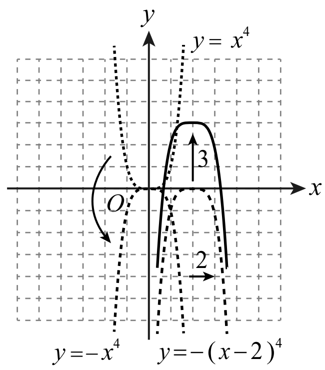
所以 $(9,7)$ 為 $A(20,15)$ 與 $B(x,y)$ 的中點

則 $\dfrac{20+x}{2}=9$，$\dfrac{15+y}{2}=7$

得 $x=-2$，$y=-1$，故 B 為 $(-2,-1)$

⓬ B ⒝⒟　C ⒝⒞

A $y=x^4$ 的圖形，對 x 軸作對稱得 $y=-x^4$，再沿 x 軸方向右移 2 單位得 $y=-(x-2)^4$，再向上移 3 單位得 $y=-(x-2)^4+3$ 即為所求



46 B 因往右下　$\therefore a<0$

對稱中心由 $(0,0)$ 向左移

再向下移　$\therefore h>0$ 且 $k<0$

因左上右下　$\therefore n$ 為奇數

C $\because$往右下　$\therefore a_n<0$　$\because$右下左上　$\therefore n$ 為奇數

⓭ C 5　D 3

A ⑴ $x=-2$ 或 3 或 6　⑵ $x<-2$ 或 $-2<x<3$ 或 $x>6$

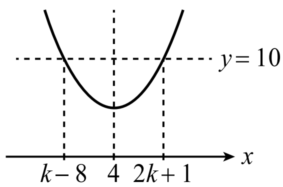
⑶ $x=-2$ 或 $3\le x\le 6$

B 不相交　⑴ $x\in R$　⑵無實根

C 因 $y=a(x-4)^2+b$ 的對稱軸為 $x=4$，所以 $k-8$ 與 $2k+1$ 的算術平均數為 4

由 $\dfrac{(k-8)+(2k+1)}{2}=4$

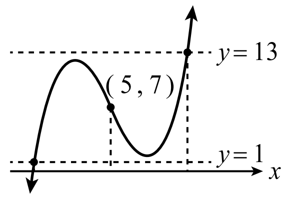
得 $k=5$



D 因 $y=f(x)$ 的對稱中心為點 $(5,7)$，而 7 為 1 與 13 的平均數，所以 $k-9$ 與 $3k+7$ 的平均為 5

得 $\dfrac{(k-9)+(3k+7)}{2}=5$

得 $k=3$



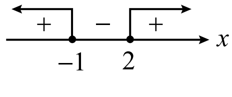
47 ⓮ A $x\le -1$ 或 $x\ge 2$

B $x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $-1<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

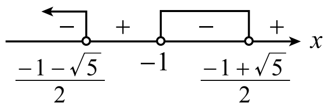
C $x<1$ 或 $x>2$，但 $x\ne 3$

A $(x+1)(x-2)\ge 0$

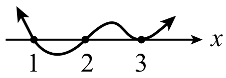
$\Rightarrow$　$x\le -1$ 或 $x\ge 2$



B 解為 $x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $-1<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$



C 如右圖，解為 $x<1$ 或 $x>2$ 但 $x\neq 3$



範例 1 (A)(B)(E)

已知 $f_1(x)=g(x)\cdot Q_1(x)+r_1(x)$

$f_2(x)=g(x)\cdot Q_2(x)+r_2(x)$

(A) $\because -f_1(x)=g(x)\cdot[-Q_1(x)]-r_1(x)$

$\therefore -f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$

(B) $f_1(x)+f_2(x)=g(x)\cdot\left[Q_1(x)+Q_2(x)\right]+\left[r_1(x)+r_2(x)\right]$

(C) $r_1(x)r_2(x)$ 的次數若為二次，則不能當餘式

(D) $f_1(x)=\left[-3g(x)\right]\cdot\left[\dfrac{1}{-3}Q_1(x)\right]+r_1(x)$

∴餘式應仍為 $r_1(x)$ 才對

(E) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)$

$=g(x)Q_1(x)r_2(x)-g(x)Q_2(x)r_1(x)$

$=g(x)\left[Q_1(x)r_2(x)-Q_2(x)r_1(x)\right]$

類題 1 (A)(C)(E)

$f(x)=3x^3+ax^2+2x+b$

甲生用 $2x^3+ax^2+2x+b$ 除以 $g(x)$

乙生用 $3x^3+ax^2-2x+b$ 除以 $g(x)$

∵餘式相同

$\therefore (3x^3+ax^2-2x+b)-(2x^3+ax^2+2x+b)$

$=x^3-4x$ 可被 $g(x)$ 整除

而 $x^3-4x=x(x+2)(x-2)$

48 **類題 2** (A)(C)(E)

由 $f(x)=(x^2-2x-3)q_1(x)+(x+5)$

$=(x+1)(x-3)q_1(x)+(x+5)$

知 $f(-1)=4$，$f(3)=8$

(B)由於 $f(-3)$ 之值未知，無法得知 $f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為何

(C)若 $f(x)=(x^2+3x+2)q_2(x)+(3x+7)$

$=(x+1)(x+2)q_2(x)+(3x+7)$

則 $f(-1)=4$，合

(D)若 $f(x)=(x^2-x-6)q_3(x)+(2x+3)$

$=(x+2)(x-3)q_3(x)+(2x+3)$

則 $f(3)=9$，不合

(E)若 $f(x)=(x+1)(x-3)(x+2)q_4(x)+(2x^2-3x-1)$

則 $f(-1)=2+3-1=4$，$f(3)=18-9-1=8$，合

範例 2 $5x-2$

①已知 $f(x)=(x^2-5x+4)q_1(x)+(x+2)$

$=(x-1)(x-4)q_1(x)+(x+2)$

可知 $f(1)=3$，$f(4)=6$

後續解題僅用到 $f(1)=3$

②已知 $f(x)=(x^2-5x+6)q_2(x)+(3x+4)$

$=(x-2)(x-3)q_2(x)+(3x+4)$

可得 $f(2)=10$，$f(3)=13$

後續解題僅用到 $f(3)=13$

③設所求為 $ax+b$

則 $f(x)=(x^2-4x+3)q_3(x)+(ax+b)$

$=(x-1)(x-3)q_3(x)+(ax+b)$

利用 $f(1)=a+b=3$，$f(3)=3a+b=13$

得 $a=5$，$b=-2$，所求餘式為 $5x-2$

類題 3 $2x+5$

設所求餘式為 $ax+b$

商為 $q(x)$，則

$f(x)=(x^2+x+1)q(x)+(ax+b)$

為恆等式，兩邊同乘 $(x+1)$，得

$$\begin{array}{r|llll} & +a & & & \\ +1+1+1 & +a & +(a+b) & + & b \\ & +a & +a & + & a \\ \hline & & +b & + & (b-a) \end{array}$$

$(x+1)f(x)=\underbrace{(x^2+x+1)q(x)(x+1)}_{①}+\underbrace{(ax+b)(x+1)}_{②}$

第①部分被 x^2+x+1 整除

第②部分乘開為 $ax^2+(a+b)x+b$

則 $ax^2+(a+b)x+b$ 除以 x^2+x+1 的餘式應為 $5x+3$

用長除法得 $bx+(b-a)$ 即為 $5x+3$

$\therefore b=5$，$b-a=3$，則 $a=2$，所求為 $2x+5$

類題 4 (D)

設四次式 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的商為 $ax+b$

即 $(x+1)f(x)=(x^3+2)(ax+b)+(x+2)$ 為恆等式

x 代 -1，得 $0=1\times(-a+b)+1$　$\therefore -a+b=-1$ …①

x 代 0，得 $f(0)=2(0+b)+2=4$　$\therefore b=1$

代①得 $a=2$

$\therefore x$ 代 2，得 $3f(2)=10(2a+b)+4=50+4=54$

$\therefore f(2)=18$

49 **範例 3** (1) 79　(2) $(1,8,23,32,15)$　(3) 12.0221　(4) $32x-49$

(1)將 $x=3$ 代入，得

$f(3)=81-9+12-5=a+b+c+d+e$

$\therefore a+b+c+d+e=79$

(2)

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +0 & -1 & +4 & -5 & \\ & +2 & +4 & +6 & +20 & 2 \\ \hline 1 & +2 & +3 & +10 & +15 & \\ & +2 & +8 & +22 & & 2 \\ \hline 1 & +4 & +11 & +32 & & \\ & +2 & +12 & & & 2 \\ \hline 1 & +6 & +23 & & & \\ & +2 & & & & 2 \\ \hline 1 & +8 & & & & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)^4+8(x-2)^3+23(x-2)^2+32(x-2)+15$

故序組 $(a,b,c,d,e)=(1,8,23,32,15)$

(3)由(2)代 $x=1.9$，得

$f(1.9)=(-0.1)^4+8(-0.1)^3+23(-0.1)^2+32(-0.1)+15$

$=0.0001-0.008+0.23-3.2+15=12.0221$

⑷在 $P(2,15)$ 的近似直線為 $y=32(x-2)+15$

即 $y=32x-49$

類題 5 (A)(C)(D)

看出 $d=-2$，$h=\dfrac{2}{3}$，$m=3$，繼而推得

$$\begin{array}{rrrrr|l} & +12 & +4 & -5 & -2 & \\ & & +8 & +8 & +2 & \dfrac{2}{3} \\ \hline +3 & +12 & +12 & +3 & +0 & \\ & +4 & +4 & +1 & & \end{array}$$

$\therefore f(x)=12x^3+4x^2-5x-2$

被 $3x-2$ 整除

商為 $4x^2+4x+1$

即 $f(x)=(3x-2)(2x+1)^2$

類題 6 ⑴ 2；11；24；15　⑵ $70+34\sqrt{5}$

⑴

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -1 & +4 & -5 & \\ & +4 & +6 & +20 & 2 \\ \hline 2 & +3 & +10 & +15 \to d & \\ & +4 & +14 & & 2 \\ \hline 2 & +7 & +24 \to c & & \\ & +4 & & & 2 \\ \hline a \leftarrow 2 & +11 \to b & & & \end{array}$$

$\Rightarrow\ f(x)=2(x-2)^3+11(x-2)^2+24(x-2)+15$

$\therefore a=2$，$b=11$，$c=24$，$d=15$

⑵ $f(2+\sqrt{5})=2(\sqrt{5})^3+11(\sqrt{5})^2+24\sqrt{5}+15=70+34\sqrt{5}$

50 **範例 4** 27

$f(3)=7^5-8\times7^4+6\times7^3+3\times7^2+29\times7+20$

則 $f(3)$ 就是多項式 $x^5-8x^4+6x^3+3x^2+29x+20$ 除以 $x-7$ 的餘式

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -8 & +6 & +3 & +29 & +20 & \\ & +7 & -7 & -7 & -28 & +7 & 7 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -4 & +1 & +27 & \end{array}$$

$\therefore f(3)=27$，即為所求

類題 7 9

已知 $g(1)=8$　$\therefore f(1)-g(1)=1-5+1+4=1$

得 $f(1)=1+g(1)=1+8=9$　$\therefore$所求餘式為 9

類題 8 (E)

所求 $=g(2)=f(f(2))$，先求 $f(2)=8-8-2+5=3$

$\therefore f(f(2))=f(3)=27-18-3+5=11$

範例 5 $-\dfrac{2}{3}$

因 $f(x)-12$ 代 $x=p$、q、r、s 的函數值均為 0

所以 $f(x)-12$ 有因式 $x-p$、$x-q$、$x-r$、$x-s$

因 $f(x)-12$ 為四次且最高次項係數為 6

所以 $f(x)-12=6x^4+5x^3-16x^2-6x+5$

$\qquad\qquad\qquad=6(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$

令 $x=-1$，代入得

$f(-1)-12=6-5-16+6+5$

$\qquad\qquad\quad=6(-1-p)(-1-q)(-1-r)(-1-s)$

得 $-4=6(p+1)(q+1)(r+1)(s+1)$

$\therefore (p+1)(q+1)(r+1)(s+1)=-\dfrac{2}{3}$

類題 9 (A)(C)(E)

除式 $=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ 即為 $f(x)$ 的因式，由因式定理知 $f(-2)=0$ 且 $f(1)=0$

$\therefore f(-2)=2^{20}-4\times2^{18}-32-2p+q=0$

得 $-2p+q=32\cdots$①

$f(1)=1-4+1+p+q=0$，得 $p+q=2\cdots$②

由①②得 $p=-10$，$q=12$

(B)應為 $p<q$

(C) $p+q=2>0$　(D)應為 $pq=-120<0$

(E) $p^q=(-10)^{12}=10^{12}$，$q^p=12^{-10}=\dfrac{1}{12^{10}}$　$\therefore p^q>q^p$

51 **類題 10** -4

$f(-2)=f(1)=f(3)=0$

由因式定理得 $(x+2)(x-1)(x-3)\mid f(x)$

又 $\deg f(x)=3$　$\therefore f(x)=a(x+2)(x-1)(x-3)$

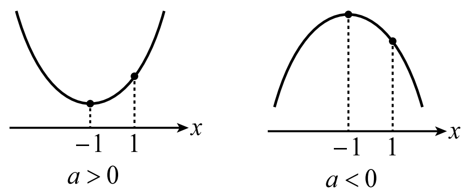
$f(0)=1$　$\therefore 6a=1$　$\Rightarrow$　$a=\dfrac{1}{6}$

$f(x)=\dfrac{1}{6}(x+2)(x-1)(x-3)$

$f(-3)=\dfrac{1}{6}\times(-1)\times(-4)\times(-6)=-4$

範例 6 $(1,4)$ 或 $(-1,6)$

先配方 $f(x)=a(x^2+2x+1)+b-a=a(x+1)^2+b-a$



$\begin{cases} f(-1)=-a+b \\ f(1)=3a+b \end{cases}$　$\Rightarrow$　一者為最大，另一者為最小

若 $a>0$，則 $\begin{cases} f(-1)=-a+b=3 \\ f(1)=3a+b=7 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$a=1$，$b=4$

若 $a<0$，則 $\begin{cases} f(-1)=-a+b=7 \\ f(1)=3a+b=3 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$a=-1$，$b=6$

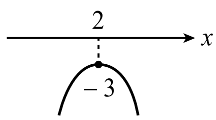
故 $(a,b)=(1,4)$ 或 $(-1,6)$

類題 11 (B)

$f(x)=ax^2+bx+\dfrac{1}{a}=a(x-2)^2-3$ 且開口朝下

即 $ax^2+bx+\dfrac{1}{a}$

$=ax^2-4ax+(4a-3)$



兩邊相等，得 $\begin{cases} b=-4a \cdots① \\ \dfrac{1}{a}=4a-3 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$4a^2-3a-1=0\cdots$②

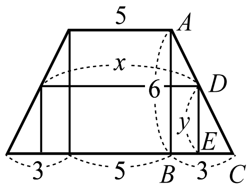
解②得 $(a-1)(4a+1)=0$，因開口朝下得 $a=-\dfrac{1}{4}$

代①得 $b=1$

$\therefore (a,b)=(-\dfrac{1}{4},1)$ 在第二象限

類題 12　$\dfrac{121}{4}$

設矩形的長為 x，寬為 y



$\because\ \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{DE}}\quad \therefore\ \dfrac{3}{6}=\dfrac{\frac{11-x}{2}}{y}$

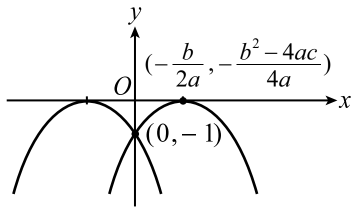
得 $y=11-x$

面積 $=xy=x(11-x)=-x^2+11x$

$=-(x^2-11x+\dfrac{121}{4})+\dfrac{121}{4}=-(x-\dfrac{11}{2})^2+\dfrac{121}{4}$

$\therefore$在 $x=\dfrac{11}{2}$ 時，有最大值為 $\dfrac{121}{4}$（此時矩形為正方形）

52 範例 7　(A)(C)(E)



(A)如右圖，因開口向下

得 $a<0$

(B)又頂點 $(-\dfrac{b}{2a},0)$ 可在原點之左或右

$\therefore\ b$ 可正可負

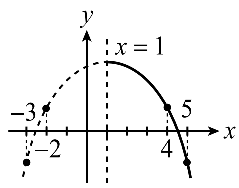
(C)$\because$過 $(0,-1)$　$\therefore\ f(0)=c=-1$

(D)$\because$與 x 軸相切，$b^2-4ac=0$

$\therefore\ b^2+4ac=4ac+4ac=8ac>0$

(E)$f(1)=a+b+c\le 0$

類題 13　(A)(B)(C)



對稱軸為 $x=1$

由圖知 $f(0)$、$f(-1)$、$f(-2)>0$

而 $f(-3)$、$f(-4)<0$

類題 14　(B)(D)

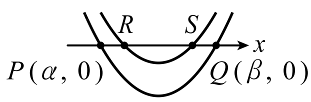
(A)由直線斜率知 $a<0$，拋物線開口應朝下

(C)由直線知 $a<0$ 且 $b=0$，拋物線應以 y 軸為對稱軸

(E)由直線知 $a<0$ 且 $b<0$，拋物線開口朝下且 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$

對稱軸應在 y 軸之左

範例 8　$\sqrt{41}$



如右圖，α、β 為方程式 $x^2+ax+b=0$ 的兩根

$\therefore\ \alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$

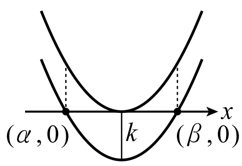
$\overline{PQ}=7\quad\Rightarrow\quad|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=7$

$\Rightarrow\quad\sqrt{a^2-4b}=7\quad\Rightarrow\quad a^2-4b=49$

$\overline{RS}=\sqrt{(-a)^2-4(b+2)}=\sqrt{a^2-4b-8}=\sqrt{49-8}=\sqrt{41}$

故 $\overline{RS}=\sqrt{41}$

53 類題 15　9



令 $x^2+ax+b=0$ 的兩根為 α、β

則 $\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$

$\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2-4\cdot b}=6$

$\Rightarrow\quad a^2-4b=36$

設平移後的二次函數為 $y=x^2+ax+b+k$，與 x 軸相切

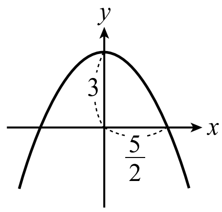
$\Rightarrow\quad a^2-4(b+k)=0\quad\Rightarrow\quad a^2-4b-4k=0$

$\Rightarrow\quad 36-4k=0$，得 $k=9$

類題 16　$\dfrac{20}{3}$

建立坐標系使拋物線的頂點為 $(0,3)$，開口朝下

設方程式為 $y=ax^2+3$



將 $(\dfrac{5}{2},0)$，代入得 $0=\dfrac{25}{4}a+3$

$\therefore\ a=-\dfrac{12}{25}$，則 $y=-\dfrac{12}{25}x^2+3$

令 $y=-\dfrac{7}{3}$，代入得 $-\dfrac{12}{25}x^2+3=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore\ \dfrac{16}{3}=\dfrac{12}{25}x^2$，得 $x^2=\dfrac{16\times25}{36}$

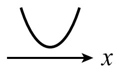
$\therefore\ x=\pm\dfrac{10}{3}$，所求 $=\dfrac{10}{3}-(-\dfrac{10}{3})=\dfrac{20}{3}$

範例 9　$m>\dfrac{-1+\sqrt{26}}{4}$

$3x+2y=1$ 即 $y=\dfrac{1-3x}{2}$，「圖形恆在 $3x+2y=1$ 的上方」

即 $mx^2+x+(m+1)>\dfrac{1-3x}{2}$ 恆成立

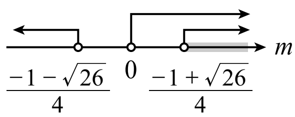
移項使右邊為 0，即 $2mx^2+5x+(2m+1)>0$ 恆成立

令 $f(x)=2mx^2+5x+(2m+1)$，$f(x)$ 的圖形為 

$\therefore\ \begin{cases}2m>0\\ D=5^2-4\cdot2m\cdot(2m+1)<0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}m>0\\ 16m^2+8m-25>0\end{cases}$

公式解 $16m^2+8m-25=0$

得 $m=\dfrac{-8\pm\sqrt{1664}}{32}=\dfrac{-1\pm\sqrt{26}}{4}$

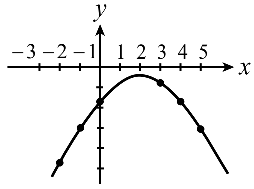


$\therefore\ m>\dfrac{-1+\sqrt{26}}{4}$

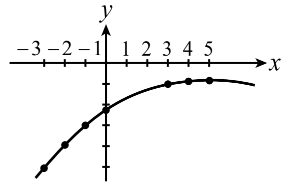
類題 17　(A)(B)(C)(E)

$\because\ b^2-4ac<0$

$\therefore$拋物線與 x 軸不相交，有兩種可能



或



(A)開口必朝下

(B)$f(0)=c$ 必小於 0

(C)頂點的 x 值必大於 1　$\therefore\ f(0)<f(1)$

(D)由圖知 $f(4)>f(5)$ 也可以

(E)由圖知 $f(-3)<f(-2)$

54 類題 18　$\dfrac{1}{9}<a<1$

$f(2)=4a+2b+c=4\ \cdots$①

$f(5)=25a+5b+c=1\ \cdots$②

②－①得 $21a+3b=-3\quad\Rightarrow\quad b=-1-7a$

代入①得 $4a+2(-1-7a)+c=4\quad\Rightarrow\quad c=10a+6$

$\because\ f(x)$ 恆正　$\therefore\ b^2-4ac<0$

即 $(-1-7a)^2-4a(10a+6)<0\quad\Rightarrow\quad 9a^2-10a+1<0$

$\Rightarrow\quad(9a-1)(a-1)<0\quad\therefore$得 $\dfrac{1}{9}<a<1$

範例 10 (1) $(-9,21,-12)$　(2) $(3,-3)$
(3) $(-6,3,3)$　(4) (C)

(1)設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-6)+p(x-1)(x-2)+q(x-1)+r$

$f(1)=r=1$，$f(2)=q+r=2$，$f(6)=20p+5q+r=6$

$\therefore r=1$，$q=1$，$p=0$

得 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-6)+(x-1)+1$
$=x^3-9x^2+21x-12$

得 $(a,b,c)=(-9,21,-12)$

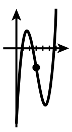
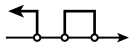
(2)配立方

$f(x)=(x^3-3\cdot x^2\cdot 3\qquad)+21x-12$
$=(x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3)+21x-12-27x+27$
$=(x-3)^3-6x+15=(x-3)^3-6(x-3)-3$

$\therefore$對稱中心為 $(3,-3)$

(3) $f(x)=(x-3)^3-6(x-3)-3$ 為 $y=x^3-6x$ 向右移 3 再向下移 3 而得

所以 $m=-6$，$h=3$，$k=3$，$(m,h,k)=(-6,3,3)$

(4) $f(x)$ 的圖形為 ，所以 $f(x)<0$ 的解為 

類題 19 (C)

必須配立方成為 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，由 a、p 的正負看出圖形的類型，而 a、p 之值由 a、b、c 來決定

55 **類題 20** (B)(D)

$f(x)=2(x+1)^3-5(x+1)+3$
$=2(x^3+3x^2+3x+1)-5x-2=2x^3+6x^2+x$

$\therefore a=2$，$b=6$，$c=1$，$d=0$

範例 11 (1) 7；1　(2) $-8\le k<-5$　(3)(A)(D)

(1)若 $k=0$，$x^2-6x=x(x-6)\le 0$ 的解為 $0\le x\le 6$，由 0 ～ 6 有 7 個整數　$\therefore n(0)=7$

若 $k=-9$，$x^2-6x+9=(x-3)^2\le 0$ 的解為 $x=3$

$\therefore n(-9)=1$

(2) $x^2-6x-k\le 0\ \Rightarrow\ (x-3)^2-9-k\le 0$

$\Rightarrow\ (x-3)^2-(\sqrt{9+k})^2\le 0$

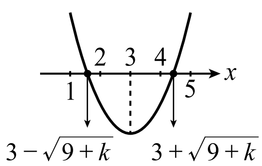
$\Rightarrow\ (x-3-\sqrt{9+k})(x-3+\sqrt{9+k})\le 0$

$4\le 3+\sqrt{9+k}<5$

$\Rightarrow\ 1\le\sqrt{9+k}<2$

$\Rightarrow\ 1\le 9+k<4$

$\Rightarrow\ -8\le k<-5$



(3)(A)當 k 增大，$y=x^2-6x-k$ 的圖形會往下平移，不等式的區間範圍會左右伸長，所以 $n(k)$ 會遞增

(B)因 $y=x^2-6x-k=(x-3)^2+(-k-9)$，由對稱性知滿足 $x^2-6x-k\le 0$ 的整數以 3 為中心，故 $n(k)$ 之值必為奇數

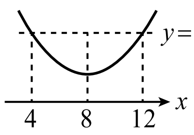
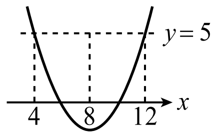
(C)舉例：若最小整數解為 -2，列出全部整數解為 $-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8$

正整數應比負整數多 6 個

(D)若有 -5，因 $3-(-5)=8$，則 $3+8=11$ 也在 $n(k)$ 個整數解之中，所以含有 10

(E)若最大整數解為 10，因 $10-3=7$，則 $3-7=-4$ 得最小整數解為 -4，不含 -5

類題 21 (C)(D)

$y=f(x)$ 的圖形為  或 

看出 $y=f(x)$ 的開口朝上，且對稱軸為 $x=8$

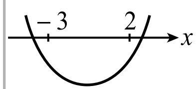
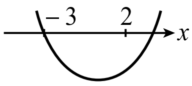
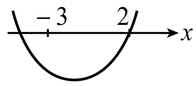
(A) $6<x<9$ 沒有以 $x=8$ 為中點

(B)(E) $f(x)<0$ 的解應比 $4<x<12$ 的範圍小

56 **類題 22** $-1\le k\le 4$

先解 $x^2+x-6<0$，即 $(x+3)(x-2)<0$，得 $-3<x<2$

則 $y=f(x)=x^2+kx-12$ 的圖形為

 或  或 

$\therefore f(-3)\le 0$ 且 $f(2)\le 0$

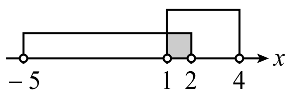
即 $\begin{cases}9-3k-12\le 0\\4+2k-12\le 0\end{cases}$，得 $-1\le k\le 4$

範例 12 $(4,-10)$

因 $(x-1)(x-2)<0$，乘開為 $x^2-3x+2<0$，所以 $x=1$ 與 $x=2$ 分別為 $x^2-5x+a=0$ 與 $x^2+3x+b=0$ 的根

①若 $x=1$ 滿足 $x^2-5x+a=0$，則 $x=2$ 滿足 $x^2+3x+b=0$

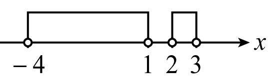
可解得 $a=4$，$b=-10$

則 $\begin{cases}(x-1)(x-4)<0\\(x+5)(x-2)<0\end{cases}$ 的解為 

得 $1<x<2$，合

②若 $x=1$ 滿足 $x^2+3x+b=0$，則 $x=2$ 滿足 $x^2-5x+a=0$

可解得 $b=-4$，$a=6$

則 $\begin{cases}(x-2)(x-3)<0\\(x+4)(x-1)<0\end{cases}$ 的解為 

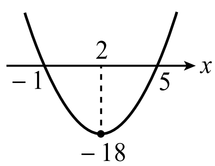
無解，與題意不合

$\therefore (a,b)=(4,-10)$

類題 23 $2-2\sqrt{3}\le x\le 2+2\sqrt{3}$

$y=f(x)$ 的圖形為拋物線

如右圖所示，對稱軸為 $x=2$



設 $f(x)=a(x-2)^2-18$

由 $f(5)=9a-18=0$，得 $a=2$

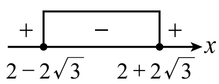
$\therefore f(x)=2(x-2)^2-18=2x^2-8x-10$

解 $f(x)\le 6$，即 $2x^2-8x-10\le 6$

即 $x^2-4x-8\le 0$

令 $x^2-4x-8=0$

得 $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+32}}{2}=2\pm 2\sqrt{3}$



所求為 $2-2\sqrt{3}\le x\le 2+2\sqrt{3}$

類題 24 -20

因 $f(x)=0$ 的根為 $x=2$、5、6

$\therefore$ 設 $f(x)=a(x-2)(x-5)(x-6)$

則 $f(8)=a\cdot6\cdot3\cdot2=36a=12$

得 $a=\frac{1}{3}$　$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}(x-2)(x-5)(x-6)$

$\therefore\ f(0)=\frac{1}{3}\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(-6)=-20$

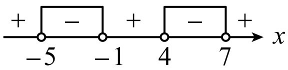
範例 13 (B)(D)

移項得 $[x^2-(2x-3)](x+5)(x+1)(x-4)(x-7)<0$

而 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 恆為正數

不等式與 $(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)<0$ 的解相同

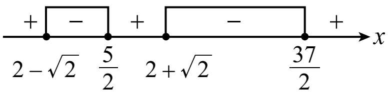
$\therefore\ x=-\pi$、2π 滿足不等式



57 **類題 25** 17

令 $x^2-4x+2=0$，得 $x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$，約為3.414

與 0.586，作圖



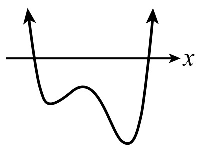
$\therefore\ 2-\sqrt{2}\le x\le\frac{5}{2}$ 或 $2+\sqrt{2}\le x\le\frac{37}{2}$

得 $x=1$、2、4、5、6、…、18，共 17 個

類題 26 (B)(C)(D)(E)

(A) $f(x)$ 的次數應為偶數

(B) $y=f(x)$ 的圖形如右，兩邊都朝上



(C) $f(x)<0$ 的解都滿足 $f(x)<100$

(E)滿足 $f(2x)<0$ 的整數 a，代入得

$f(2a)<0$，所以偶數 $2a$ 為 $f(x)<0$ 的解，一一對應

範例 14 $(-11,10)$

$f(x)\le0$ 的解為 $1\le x\le19$

$\therefore\ f(x)=k(x-1)(x-19)$，其中 $k>0$

$\therefore\ f(3x+a)=k(3x+a-1)(3x+a-19)\le0$ 的解為

$\frac{1-a}{3}\le x\le\frac{19-a}{3}$，得 $\frac{1-a}{3}=4$，$a=-11$

$b=\frac{19-a}{3}=\frac{30}{3}=10$，$(a,b)=(-11,10)$

《另解》

由 $f(x)\le0$　$\Leftrightarrow$　$1\le x\le19$，x 用 $3x+a$ 取代

$\therefore\ f(3x+a)\le0$　$\Leftrightarrow$　$1\le 3x+a\le19$

即 $\frac{1-a}{3}\le x\le\frac{19-a}{3}$，得 $\frac{1-a}{3}=4$ 且 $\frac{19-a}{3}=b$

$\therefore\ a=-11$，$b=10$，$(a,b)=(-11,10)$

類題 27 (B)

設 $f(x)=a(x+2)(x-4)$，其中 $a<0$

$f(2x)=a(2x+2)(2x-4)=4a(x+1)(x-2)$

$4a(x+1)(x-2)<0$

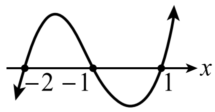
$\because\ a<0$　$\therefore\ (x+1)(x-2)>0$

$\therefore\ x<-1$ 或 $x>2$

類題 28 $-2<x<-1$ 或 $x>1$

設 $f(x)=a(x-1)(x-3)(x-7)$

圖形往右向下降　$\therefore\ a<0$



$f(2x+5)$

$=a(2x+5-1)(2x+5-3)(2x+5-7)$

$=a(2x+4)(2x+2)(2x-2)=8a(x+2)(x+1)(x-1)<0$

$\because\ a<0$　$\therefore\ (x+2)(x+1)(x-1)>0$

$\therefore\ -2<x<-1$ 或 $x>1$

綜　合　實　力　測　驗

1.(C)	2.(B)	3.(E)	4.(C)	5.(C)(E)
6.(A)(C)(E)	7.(A)(B)(E)	8.(B)(D)	9. 4	10. $2<a<6$
11. $(3,1)$	12. $(-12,28,4)$			
13.(1) 2.25	(2) $-\frac{1}{5}x^2+10x-10$	(3) 20		

58 1. ①圖形由左上往右下　$\therefore\ a<0$

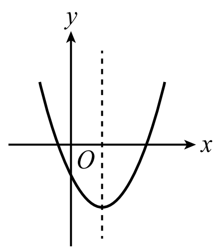
②$x=h$ 附近的直線斜率為正　$\therefore\ b>0$

③對稱中心 (h,k)，$h>0$ 且 $k<0$

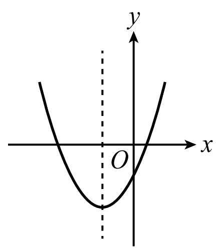
$\therefore\ a$、b、h、k 為 2 個正數 2 個負數

2.

①

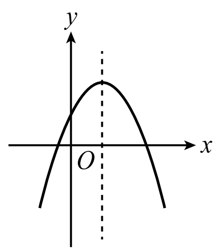


或

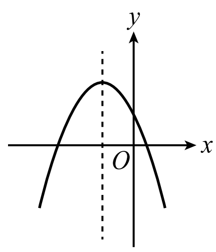


$a>0$，b 未定，$c<0$，$b^2-4ac>0$

②



或



$a<0$，b 未定，$c>0$，$b^2-4ac>0$

由①②得 $ac<0$，$b^2-4ac>0$

$\therefore\ \frac{c}{a}<0$，$\frac{4ac-b^2}{ac}>0$

A 點在第二象限

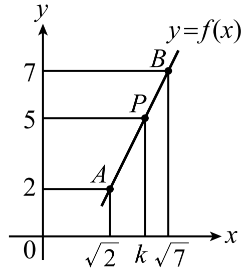
3. 根據右圖，由平行線截比例線段

性質得 $\overline{AP}:\overline{PB}$

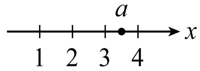
$=(5-2):(7-5)=3:2$

利用線段分點公式可得

$k=\frac{3\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{3+2}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{7}}{5}$



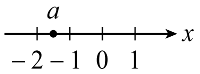
4. ①若 $a>1$，則 $1<x<a$



不等式至多包含 2 個整數，則 $1<a\le4$

②若 $a=1$，$(x-1)^2<0$，無解

③若 $a<1$，則 $a<x<1$



不等式至多包含 2 個整數，則 $-2\le a<1$

$\therefore$ a 的取值範圍為 $-2\le a\le 4$

5. $f(x)=(x-2)^3+3(x-2)^2+6(x-2)+6$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & +6 & -2 & \\ & +2 & -2 & +8 & 2 \\ \hline 1 & -1 & +4 & +6 & \\ & +2 & +2 & & \\ \hline 1 & +1 & +6 & & \\ & +2 & & & \\ \hline 1 & +3 & & & \end{array}$$

(A) $a+b+c+d$
$=1+3+6+6=16$

(B) $f(1.99)=(-0.01)^3+3(-0.01)^2$
$+6\times(-0.01)+6\approx 5.94$

(C) $f(2+\sqrt{3})=\sqrt{3}^{\,3}+9+6\sqrt{3}+6$
$=15+9\sqrt{3}$

(D) x^3-3x^2+6x-2
$=x^3-3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2-1^3+3x+1-2$
$=(x-1)^3+3x-1=(x-1)^3+3(x-1)+2$
$y=f(x)$ 對稱中心為 $(1,2)$

(E) $y=f(x)$ 在 $x=1$ 附近的圖形近似於直線
$y=3(x-1)+2=3x-1$

6. (A)(B) $(x^3+ax^2+bx-6)-(5x-3)=x^3+ax^2+(b-5)x-3$
為 x^2+x+1 的倍式，利用長除法

$$\begin{array}{r|l} & x-3 \\ \hline x^2+x+1 & x^3+ax^2+(b-5)x-3 \\ & x^3+x^2+x \\ \hline & (a-1)x^2+(b-6)x-3 \\ & -3x^2-3x-3 \\ \hline & (a+2)x^2+(b-3)x+0 \end{array}$$

$\begin{cases} a+2=0 \\ b-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$

(C) $f(x)=x^3-2x^2+3x-6$，$f(1)=1-2+3-6=-4$

(D) $f(x)=(x^2+x+1)(x-3)+5x-3$
$xf(x)=(x^2+x+1)\cdot x(x-3)+5x^2-3x$
$=(x^2+x+1)(x^2-3x)$
$+5(x^2+x+1)-8x-5$
$=(x^2+x+1)(x^2-3x+5)$
$-8x-5$

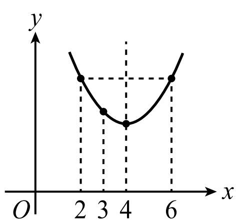
$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ \hline x^2+x+1 & 5x^2-3x+0 \\ & 5x^2+5x+5 \\ \hline & -8x-5 \end{array}$$

$xf(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $-8x-5$

(E) $f(x)=(x^2+x+1)(x-3)+5x-3$
$=(3x^2+3x+3)(\frac{x}{3}-1)+5x-3$

$\therefore$ $f(x)$ 除以 $3x^2+3x+3$ 的餘式為 $5x-3$

59 7. $f(2)=f(6)=10$



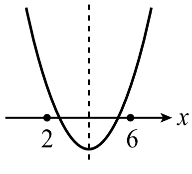
$\therefore$對稱軸方程式為 $x=\frac{2+6}{2}=4$

又 $f(3)>f(4)$

$\therefore$拋物線開口向上且頂點坐標為 $(4,f(4))$

(A)開口向上，故 $a>0$

(B) $f(1)=f(4-3)=f(4+3)$
$=f(7)$



(C) $f(1)>f(5)>f(4)$

(D) $a>0$，且 $-\frac{b}{2a}>0$，得 $b<0$

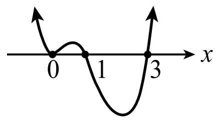
$c=f(0)>f(2)=10$　$\therefore$ $c>0$

故 b^2-4ac 可正、可負、可為零

(E) $f(x)=a(x-2)(x-6)+10$
$=ax^2-8ax+12a+10$
$\therefore$ $b=-8a$
$|b|=|-8a|=8a>a$ $(a>0)$

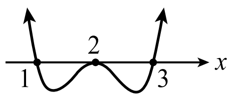
8. (A) $x^2-4x+3>0$
$\Rightarrow$ $(x-1)(x-3)>0$
$\Rightarrow$ $x<1$ 或 $x>3$

(B) $x^2(x-1)(x-3)<0$
由圖㈠得解為 $1<x<3$



圖㈠

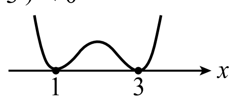
(C) $(x^2-4x+4)(x-1)(x-3)<0$
$\Rightarrow$ $(x-2)^2(x-1)(x-3)<0$
由圖㈡得解為
$1<x<3$，但 $x\ne 2$



圖㈡

(D) $(x^3-1)(x-3)<0$
$\Rightarrow$ $(x-1)(x^2+x+1)(x-3)<0$
又 $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$
$\therefore$原不等式的解與不等式 $(x-1)(x-3)<0$ 相同
即 $1<x<3$

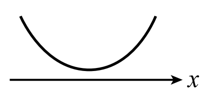
(E)移項得
$(x-1)(x-3)[(x+2)(x-4)-(2x-11)]<0$
$\Rightarrow$ $(x-1)(x-3)(x^2-4x+3)<0$
$\Rightarrow$ $(x-1)(x-3)(x-1)(x-3)<0$
$\Rightarrow$ $(x-1)^2(x-3)^2<0$
如圖㈢，不等式無解



圖㈢

9. $\because$ $f(1)=f(2)=0$
$\therefore$ $(x-1)(x-2)$ 為 $f(x)$ 的因式
設 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$
$f(3)=2(3a+b)=10$，$f(-1)=6(-a+b)=6$
$\begin{cases} 3a+b=5 \\ -a+b=1 \end{cases}$，得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$
即 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$
常數項 $f(0)=(-1)\times(-2)\times 2=4$

10. $f(-2)=1$，即 $4-2a+b=1$，得 $b=-3+2a\cdots$①
判別式 $=a^2-4b<0\cdots$②
①代入②：$a^2-4(-3+2a)<0$
$\Rightarrow$ $a^2-8a+12<0$
$\Rightarrow$ $(a-2)(a-6)<0$
$\Rightarrow$ $2<a<6$



11. 令 $\beta=\alpha+2$
則 α、β 為方程式 $-x^2+(k+1)x-k=0$ 的兩根
得 $\alpha+\beta=-(\frac{k+1}{-1})=k+1$，$\alpha\beta=\frac{-k}{-1}=k$
$\because$ $\alpha>0$ 且 $\beta>0$　$\therefore$ $k>0$

$\overline{AB}=|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \Rightarrow 2=\sqrt{(k+1)^2-4k}$

$\Rightarrow k^2+2k+1-4k=4 \Rightarrow k^2-2k-3=0$

$\Rightarrow (k-3)(k+1)=0 \Rightarrow k=3$ 或 -1（不合）

$\therefore \alpha+\beta=\alpha+\alpha+2=3+1 \Rightarrow 2\alpha=2 \Rightarrow \alpha=1$

故數對 $(k,\alpha)=(3,1)$

12. 對稱中心的橫坐標 $2=\dfrac{-p}{3\times 2}$ $\therefore p=-12$

$f(2)=16-48+2q-19=5$，得 $q=28$

$f(x)=2x^3-12x^2+28x-19$

$=2(x^3-6x^2+12x-8)-24x+16+28x-19$

$=2(x-2)^3+4x-3=2(x-2)^3+4(x-2)+5$

$f(x)$ 的圖形可由 $y=2x^3+4x$ 的圖形向右平移 2 單位，向上平移 5 單位而得

故序對 $(p,q,r)=(-12,28,4)$

13. (1) $f(20)=5+2\times 20=45$ 萬元

每千個基本成本為 $\dfrac{45}{20}=2.25$ 萬元

(2)設 $g(x)=ax^2+bx+c$

$\begin{cases}25a+5b+c=35\\100a+10b+c=70\\225a+15b+c=95\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\b=10\\c=-10\end{cases}$

$\therefore g(x)=-\dfrac{1}{5}x^2+10x-10$

(3) $h(x)=g(x)-f(x)$

$=-\dfrac{1}{5}x^2+10x-10-(5+2x)=-\dfrac{1}{5}x^2+8x-15$

$=-\dfrac{1}{5}(x^2-40x+400)+80-15=-\dfrac{1}{5}(x-20)^2+65$

當 $x=20$（千個）時，$h(x)$ 有最大值為 65 萬元

4 數列級數與數據分析

60 ❶ A 106；37；1550 B 1600 C 丙

A $\begin{cases}a_3=a_1+2d=100\\a_{10}=a_1+9d=79\end{cases}$ $\therefore d=-3$，$a_1=106$

希望 $a_n=106+(n-1)\times(-3)<0$，得 $n>36\dfrac{1}{3}$

$\therefore n=37$ 開始為負

前 20 項之和為 $\dfrac{2\times 106+19\times(-3)}{2}\times 20=1550$

B 所求 $=64\times 25=1600$

C

甲	1000				1160				1320			
乙	500		540		580		620		660		700	
丙	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360

得每年乙比甲多 40 元，丙比乙多 20 元，故丙最有利

61 ❷ A 14 B 14；$1023\dfrac{15}{16}$

A 第 n 項為 6^{n-1}，解 $6^{n-1}>10^{10}$

得 $(n-1)\log 6>10$ $\therefore n-1>\dfrac{10}{0.3010+0.4771}\approx 12.85$

$\therefore n>13.85$，得 $n=14$

B 公比為 2，又 $512=\dfrac{1}{16}\times 2^{n-1} \Rightarrow 2^{13}=2^{n-1}$

$\therefore n=14$，所求 $=\dfrac{\frac{1}{16}(2^{14}-1)}{2-1}=2^{10}-\dfrac{1}{16}=1023\dfrac{15}{16}$

❸ A 10404 B (D)

A 共 2 期，期利率為 2%

所求 $=10000(1+2\%)^2=10000\times 1.0404=10404$

B 愈晚存入，本利和愈少，所以選(D)丁方案

62 ❹ A (1) 300 (2) 4900 (3) 90000 B (A)

A (1)所求 $=\dfrac{24\times 25}{2}=300$ (2)所求 $=\dfrac{24\times 25\times 49}{6}=4900$

(3)所求 $=(\dfrac{24\times 25}{2})^2=300^2=90000$

B 所求 $=(1^3+2^3+\cdots+20^3)-(1^3+2^3+\cdots+10^3)$

$=(\dfrac{20\times 21}{2})^2-(\dfrac{10\times 11}{2})^2=44100-3025=41075$

❺ A 5、3、3、3、3 B 6；$6n-1$，$n\ge 1$ C $\dfrac{81}{16}$

A $a_1=S_1=3+2=5$

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n+2)-[3(n-1)+2]=3$，$n\ge 2$

∴前五項為 5、3、3、3、3

B $a_1=S_1=3+2=5$，$a_2=S_2-S_1=(12+4)-5=11$

公差 $=a_2-a_1=6$

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2+2n)-[3(n-1)^2+2(n-1)]$

$=(3n^2+2n)-(3n^2-4n+1)=6n-1$，$n\ge 1$

C $n=5$ 代入，得 $2a_1+4a_2+8a_3+16a_4+32a_5=243\cdots$①

$n=4$ 代入，得 $2a_1+4a_2+8a_3+16a_4=81\cdots$②

①－②得 $32a_5=162$ $\therefore a_5=\dfrac{81}{16}$

❻ A (1)(D) (2)(B) B (C) C $\dfrac{3}{7}$

63 B 將各選項的遞迴式列出前幾項

(A)為 1 , 2 , 5 , 14 , 41 (B)為 1 , 2 , 6 , 24 , 120

(C)為 1 , 2 , 6 , 15 , 31 (D)為 1 , 3 , 7 , 15 , 31

(E)為 1 , 2 , 5 , 16 , 65

C $a_2=\dfrac{7}{2}a_1(1-a_1)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{1}{7}\times\dfrac{6}{7}=\dfrac{3}{7}$

$a_3=\dfrac{7}{2}a_2(1-a_2)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{6}{7}$

$a_4=\dfrac{7}{2}a_3(1-a_3)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{6}{7}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{3}{7}$

$\therefore \langle a_n\rangle=\dfrac{1}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7},\cdots$ $\therefore a_{100}=\dfrac{3}{7}$

❼ A (D)

A (A) $n=41$ 代入，為 $41^2-41+41=41^2$

(B) $n=3$ 代入，$2^3=8<3^2=9$，$n\ge 4$ 才合

(C) $n=k$ 成立可推得 $n=k+1$ 成立

但 $n=1$ 代入，$2\ne 2\times 1+2=4$

❽ A 21；6 B 38.9 C 一月；-0.5

A ①全體的 $\mu=\dfrac{37\times 2+13\times 4}{6}=\dfrac{126}{6}=21$

②已知 $\sqrt{ab}=24$，$\sqrt[4]{cdef}=3$

$\therefore ab=24^2=2^6\times 3^2$，$cdef=3^4$

則全體的 $G=\sqrt[6]{abcdef}=\sqrt[6]{(2^6\times 3^2)\times 3^4}=2\times 3=6$

64 B $\mu_{加}=\dfrac{21+30+62+120+156}{1+1+2+3+3}=\dfrac{389}{10}=38.9$

C ①一月的薪水為 k 元

則三月的薪水 $=k\times 1.1\times 0.9=0.99k<k$

②設平均成長率為 $r\%$，則 $(1+r\%)^2=1.1\times 0.9=0.99$

得 $1+r\%\approx 0.995$　$\therefore r\%\approx -0.005=-0.5\%$

9 A ⑴ 10　⑵ 18　⑶ 51；56

A ⑴先算 $16\times\dfrac{40}{100}=6.4$，進位為 7，所求為 10

⑵先算 $16\times\dfrac{75}{100}=12$，第 12 個數為 17

第 13 個數為 19，所求 $=\dfrac{17+19}{2}=18$

⑶ 13 是第 9 個數，所以 $8<16\times\dfrac{k}{100}<9$

得 $50<k<56.25$　$\therefore k$ 最小為 51，最大為 56

10 A 10　B 76

A $\mu=3$，$S_{xx}=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2-5\times 3^2=10$

B $\mu=2$，$S_{xx}=100-6\times 2^2=76$

65 11 A 8；$2\sqrt{2}$　B A；C

A $\mu=6$，$S_{xx}=(-4)^2+(-2)^2+0^2+2^2+4^2=40$

$\therefore \sigma^2=\dfrac{40}{5}=8$，$\sigma=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

12 A 7；8　B (C)(D)(E)

B 因平移後差量（標準差、全距、四分位距）不變

13 A -19；32　B (D)

A $\mu=5$，$\sigma=8$，$x'=-4x+1$

則 $\mu'=-4\mu+1=-19$，$\sigma'=|-4|\sigma=32$

66 B 所求 $=6.1\times 25.4=154.94$

14 A 200　B $\dfrac{3}{2}$；0

A $\dfrac{5-\mu}{\sigma}=1$ 且 $\dfrac{11-\mu}{\sigma}=3$

$\therefore \begin{cases}5-\mu=\sigma\\ 11-\mu=3\sigma\end{cases}\Rightarrow \mu=2$，$\sigma=3$

$\therefore$所求 $=2\times 100=200$

B $\because$平均為 0　$\therefore$總和 $=2x-2x+5y=0$，得 $y=0$

標準差為

$$\sqrt{\frac{x^2+x^2+(-x)^2+(-x)^2+y^2+y^2+y^2+y^2+y^2}{9}}=1$$

$\therefore \dfrac{4x^2}{9}=1$，得 $x=\dfrac{3}{2}$

15 A ⑴丙　⑵甲　⑶乙　B (D)

A ⑴ $x=60$ 所對 y 值為不及格的人數，甲班有 20 人不及格，乙班有 30 人不及格，丙班有 45 人不及格

⑵ $y=25$ 所對 x 值為中位數，甲班最大

⑶ $y=40$ 所對 x 值為第 80 百分位數，乙班最大

67 B (A)(B)(C)的標準差均相同，(D)較大，(E)較小

16 A -0.5；中度負相關　B 0.75

A $r=\dfrac{120-10\times 3\times 5}{\sqrt{150-10\times 3^2}\times\sqrt{310-10\times 5^2}}=\dfrac{-30}{\sqrt{60}\times\sqrt{60}}=-0.5$

為中度負相關

B $r=\dfrac{900}{20\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}=\dfrac{900}{20\cdot 12\cdot 5}=\dfrac{900}{1200}=\dfrac{3}{4}=0.75$

68 17 A 9　B $y=-1.6x+44.2$　C $y=\dfrac{3}{2}x$；12

A $x=8$ 代入 $y=-2x+25$，得 $y=9$

B $y-25=-0.6\times\dfrac{8}{3}(x-12)$

即 $y=-1.6x+44.2$

C $\mu_x=6$，$\mu_y=9$

$S_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}-10\mu_x\mu_y$

$=690-10\times 6\times 9=150$

$S_{xx}={x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_{10}}^2-10{\mu_x}^2$

$=460-10\times 6^2=100$

迴歸式為 $y-9=\dfrac{150}{100}(x-6)$，即 $y=\dfrac{3}{2}x$

代 $x=8$，得 $y=12$

18 A ⑴ 0.8　⑵ 0.8　⑶ -0.8　B 6

C ⑴ $(-\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3})$　⑵ $y=1.2x-6.6$；$y=0.8x$

B 即 $r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=4$，變成 $r\times\dfrac{3\sigma_y}{2\sigma_x}=\dfrac{3}{2}\times 4=6$

69 C ⑴ $(\dfrac{5-8}{4},\dfrac{7-3}{6})=(-\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3})$

⑵原為 $y-3=0.8\times\dfrac{6}{4}(x-8)$

即 $y=1.2x-6.6$，標準化後變成 $y=0.8x$

19 A (C)　B (D)　C (D)

70 C $\because A$ 的迴歸直線接近水平，D 的迴歸直線朝右上，B 與 C 皆朝右下且位置相同

範例 1 4953

第 1 列的末項為 1，第 2 列的末項為 $3=1+2$

第 3 列的末項為 $6=1+2+3$

得第 99 列的末項為 $1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99\times 100}{2}=4950$

$\therefore$第 100 列的前幾項為 4951、4952、$\boxed{4953}$、⋯

故所求為 4953

類題 1 4884

第 k 列的最大數字為 $1+2+3+\cdots+k$，若為奇數列，則此列最大數在左

$\therefore$第 99 列的最左數為 $1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99\times 100}{2}=4950$

則所求 $=4950+66\times(-1)=4884$

類題 2 56

所求 $= \underbrace{1}_{\text{第一層}} + \underbrace{1+2}_{\text{第二層}} + \underbrace{1+2+3}_{\text{第三層}} + \underbrace{1+2+3+4}_{\text{第四層}}$

$+ \underbrace{1+2+3+4+5}_{\text{第五層}} + \underbrace{1+2+3+4+5+6}_{\text{第六層}}$

$= 1+3+6+10+15+21 = 56$

71 **範例 2** (A)(D)

(A)$\because$ 公差為正數 $\therefore a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$

$\because b_n = -a_n \quad \therefore b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$

(B)反例：$\langle a_n \rangle = -3,-2,-1,0,1,2,\cdots$

則 $\langle c_n \rangle = 9,4,1,0,1,4,\cdots$

(C) $d_n = a_n + a_{n+1} = [a_1 + (n-1)\alpha] + [a_1 + n\alpha] = 2a_1 + (2n-1)\alpha$

$\langle d_n \rangle$ 為等差且公差為 2α 才對

(D) $e_n = [a_1 + (n-1)\alpha] + n = a_1 - \alpha + n(\alpha+1)$，公差為 $\alpha + 1$

(E)反例：$\langle a_n \rangle = 1,2,3,4,\cdots$，則 $\langle f_n \rangle = 1, \frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{10}{4}, \cdots$

故 $\langle f_n \rangle$ 的公差為 $\langle a_n \rangle$ 公差的一半，即 $\frac{\alpha}{2}$

類題 3 (B)

大拇指為 $\underbrace{1,9,17}_{\text{加8 加8}},25,33,41,49,\cdots,a_n$

則 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)\times 8 = 8n - 7 \le 1000$

得 $n \le \frac{1007}{8} = 125\frac{7}{8}$

$\therefore$ 代 $n = 125$，$a_{125} = 8\times 125 - 7 = 993$

大拇指由 993 開始數 $\therefore$ 1000 在食指

類題 4 (B)(C)(E)

(A)公差可能為負，如 $a_{100} = \frac{1}{2}$，則 $a_{1000} < 0$

(B)因 $\langle a_n \rangle$ 遞減 (C)因 $a_1 \sim a_{1000}$ 均正

(D)不一定，a_{100} 可為正

(E)左式 $= (a_1 + 999d) - (a_1 + 9d) = 990d$

右式 $= 10(a_1 + 99d - a_1) = 990d \quad \therefore$ 左式 = 右式

範例 3 29

設數列共 n 項，公差為 d

則 $a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + (a_1+3d) + (a_1+4d)$

$= 5a_1 + 10d = 24 \cdots ①$

$a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + (a_n - 4d)$

$= 5a_n - 10d = 186 \cdots ②$

①＋②得 $5a_1 + 5a_n = 24 + 186 \Rightarrow a_1 + a_n = 42$，則

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\times n}{2} = \frac{42\times n}{2} = 21n = 609 \quad \therefore n = 29$，共 29 項

72 **類題 5** (C)(E)

(D)正中間項 $a_{\frac{1+101}{2}} = a_{51} \quad \therefore$ 總和 $= a_{51}\times 101 = 0$，得 $a_{51} = 0$

(A)(C)由等差中項知 $a_1 + a_{101} = a_2 + a_{100} = a_3 + a_{99} = 2\cdot a_{51} = 0$

(B)(E)由 $a_{51} = 0$ 且 $a_{71} = 71$ 知，$\langle a_n \rangle$ 為遞增的等差數列

公差 $d > 0$，因此知 $a_1 = -a_{101} < 0$

而 $a_2 + a_{101} = a_2 + (-a_1) = a_2 - a_1 = d > 0$

類題 6 (A)(B)(E)

(A)(B) $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 7 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 5 \end{cases} \quad \therefore d = -\frac{1}{3}$，$a_1 = 8$

則 $a_{20} = a_1 + 19d = 8 - \frac{19}{3} = \frac{5}{3}$

(C) $a_n = 8 + (n-1)\cdot(\frac{-1}{3}) = \frac{25-n}{3} < 0$，$n$ 至少為 26

(D)$\because a_{25} = 0$

$\therefore$ 前 24 項和 S_{24} 與前 25 項和 S_{25} 均為前 n 項和的最大值

(E)因 $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\times n = \frac{d}{2}\cdot n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$

$\therefore p = \frac{d}{2}$，$q = a_1 - \frac{d}{2}$，$r = 0$

範例 4 (1) $\frac{10\sqrt{3}}{27}$ (2) $\frac{1024}{81}$

(1) $T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$T_2 = T_1 + [\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{1}{3})^2]\times 3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$T_3 = T_2 + [\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{1}{9})^2]\times 12 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$

(2) T_1 周長為 $a_1 = 3$，T_2 周長為 $a_2 = a_1 \times \frac{4}{3}$

T_3 周長為 $a_3 = a_2 \times \frac{4}{3} \Rightarrow$ 周長成等比數列，公比為 $\frac{4}{3}$

$\therefore T_6$ 周長為 $a_6 = a_1\cdot(\frac{4}{3})^5 = 3\times\frac{4^5}{3^5} = \frac{1024}{81}$

類題 7 8

設公比為 r，且 $r > 0$

$a_1 \cdot a_{11} = 1 \Rightarrow a_1\cdot a_1 r^{10} = a_1^2 r^{10} = 1 \cdots ①$

又 $a_4 = 4 \Rightarrow a_1 r^3 = 4 \cdots ②$

$① \div ②^2 \Rightarrow r^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

$\because a_4 = a_3 r \Rightarrow 4 = a_3 \cdot \frac{1}{2} \quad \therefore a_3 = 8$

類題 8 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

設公比為 r，則 $a_2 = 1\times r = r$，$a_3 = a_2 + a_1 = r + 1$

$a_4 = a_3 + a_2 = (r+1) + r = 2r + 1 = 2 - \sqrt{5} \quad \therefore r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

73 **範例 5** (D)

設公比為 r，則 $S_{10} = \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r} = 80 \cdots ①$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r^2} = 120 \cdots ②$

$\frac{①}{②}$ 得 $\frac{\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}}{\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r^2}} = \frac{80}{120}$，即 $1 + r = \frac{2}{3} \quad \therefore r = -\frac{1}{3}$，代回①

$\Rightarrow \frac{a_1(1-\frac{1}{3^{10}})}{1+\frac{1}{3}} = 80 \quad \therefore a_1(1-\frac{1}{3^{10}}) = 80\times\frac{4}{3} = \frac{320}{3} \approx 106.7$

$\therefore$ 因 $1 - \frac{1}{3^{10}} \approx 1$，$a_1 \approx 106.7$

類題 9 39

即 $\log(9^n)=19.\cdots$，由 $19\le n\log 9<20$，得 $\dfrac{19}{0.954}\le n<\dfrac{20}{0.954}$

即 $19.92\le n<20.96$　$\therefore n=20$

則 $S=1+81+\cdots+81^{20}=\dfrac{1\times(81^{21}-1)}{81-1}\approx\dfrac{81^{21}}{80}$

$\log S=21\log 81-\log 80=84\log 3-3\log 2-\log 10$

$\approx 84\times 0.477-3\times 0.301-1=38.165$

$\therefore S$ 為 39 位數

類題 10 (1) 6　(2) $\dfrac{7}{2}$

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=24\cdots$①

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=84\cdots$②

②－①得 $(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)+\cdots+(a_{20}-a_{19})=60$

(1)若為等差，設公差為 d，得 $d+d+\cdots+d=10d=60$

$\therefore d=6$

(2)若為等比，設公比為 r，首項為 a

$84=ar+ar^3+ar^5+\cdots+ar^{19}$

$=r(a+ar^2+ar^4+\cdots+ar^{18})=24r$

$\Rightarrow\ r=\dfrac{84}{24}=\dfrac{7}{2}$

範例 6 (B)(D)

(A)若公差為正，則 a_3 最大；若公差為負，則 a_1 最大

$\therefore$不可能 a_2 最大

(B)如 b_1、b_2、b_3 為 -1、2、-4

(C)反例：a_1、a_2、a_3 為 -4、-1、2，滿足 $a_1+a_2<0$

但 $a_2+a_3>0$

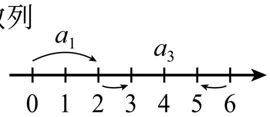
(D)因 $b_1b_2<0$，所以公比為負，則 $b_2b_3<0$

(E)反例：b_1、b_2、b_3 為 4、6、9，則 $b_1 \not> b_2$

74 **類題 11** (A)(B)(C)(D)(E)

當 a_1 由 $0\to 2$ 時，a_2 由 $2\to 3$，a_4 由 $6\to 5$

$\therefore b_1$、b_2、b_3、b_4 為遞增的等比數列



(C) b^2 由 $2^2\to 2^3$

(D) b^4 由 $2^6\to 2^5$

(E) $b_2\times b_4=2^{a_2}\times 2^{a_4}=2^{a_2+a_4}=2^{2a_3}=(2^{a_3})^2=b_3^{\,2}=(2^4)^2=256$

類題 12 (A)(C)

(A)$\because a_{10}=a_9\times(-0.8)$　$\therefore a_9$ 與 a_{10} 為一正一負

(B)若 a_9 為正，則 a_{10} 為負，由「$a_{10}>b_{10}$」知 b_{10} 為負才對

(C)$\because b_9$、b_{10} 至少有一個為負

$\therefore$公差為負，得 $b_9>b_{10}$ 成立

(D)若 a_9 為負，則 a_{10} 為正

(E)若 a_9 與 b_9 為正，a_{10} 與 b_{10} 為負，則 a_8 為負且 b_8 為正

範例 7 8181

複利本利和 $=3000000\times(1+3\%)^3$

$=3\times 103\times 103\times 103=3278181$

單利本利和 $=3000000+3000000\times 0.03\times 3=3270000$

$\therefore$所求為 $3278181-3270000=8181$

類題 13 (B)

甲的本利和 $=100000\times 1.02^3$

乙的本利和 $=100000\times 1.01^6$

丙的本利和 $=100000\times 1.01\times 1.02\times 1.03$

丁的本利和 $=100000\times 1.03\times 1.02\times 1.01$

①因 $(1.01)^6=[(1.01)^2]^3=(1.0201)^3>(1.02)^3$

$\therefore$乙＞甲

②因 $1.01\times 1.03=(1.02-0.01)(1.02+0.01)$

$=(1.02)^2-(0.01)^2<(1.02)^2$

$\therefore 1.01\times 1.02\times 1.03<(1.02)^3$，則丙＝丁＜甲

由①②得，丙＝丁＜甲＜乙　$\therefore$乙的本利和最多

75 **類題 14** 8013

設所求為 x 元，存 1 次 1 年後為 $1.04x$

存 2 次 2 年後為 $(1.04)^2x+1.04x$，⋯

存10次10年後為$(1.04)^{10}x+(1.04)^9x+\cdots+1.04x=100000$

$\therefore\ \dfrac{1.04x\cdot[(1.04)^{10}-1]}{1.04-1}\approx 26x(1.48-1)\approx 100000$

$\therefore\ x\approx\dfrac{100000}{26\times 0.48}\approx 8012.8\approx 8013$

範例 8 1214

所求 $=3\times 5+4\times 6+5\times 7+\cdots+$第 12 項

$=(1+2)(1+4)+(2+2)(2+4)+(3+2)(3+4)+\cdots$
$+$第 12 項

$=(1^2+6\times 1+8)+(2^2+6\times 2+8)+(3^2+6\times 3+8)+\cdots$
$+$第 12 項

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2)+6\times(1+2+3+\cdots+12)$
$+\underbrace{(8+8+\cdots+8)}_{12\text{ 個}}$

$=\dfrac{12\times 13\times 25}{6}+6\times\dfrac{12\times 13}{2}+8\times 12$

$=650+468+96=1214$

類題 15 (2) 17

(1)左式 $=1\times(1+1)+2\times(2+1)+3\times(3+1)+\cdots$
$+n\times(n+1)$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}=$右式

(2) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=1938$

$\Rightarrow\ \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}=1938$

$\Rightarrow\ n(n+1)(n+2)=5814$　$\therefore n=17$

類題 16 3311

$\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}=1771$

$\therefore k(k+1)(k+2)=1771\times 6=(7\times 11\times 23)\times 6$

$=21\times 22\times 23$

得 $k=21$，則所求 $=\dfrac{21\times 22\times 43}{6}=3311$

76 **範例 9** (B)(C)(D)

(A) $a_2=\dfrac{1\times 2}{2}-1=0$ 才對

(B)$\because$ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 必為整數　$\therefore$ a_2、a_3、$\cdots$均為整數

(C)$\because$（整數 ± 無理數）必為無理數

(D)由 $a_{n+2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}-a_{n+1}$

$=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}-[\dfrac{n(n+1)}{2}-a_n]=(n+1)+a_n$

$\therefore$偶數項為遞增

(E)設 a_2 為奇數，則由(D)知 $a_4=3+a_2$ 為偶數

類題 17 $\dfrac{2}{3}$；$\dfrac{3}{5}$；$\dfrac{4}{7}$；$\dfrac{n}{2n-1}$

① $\because$ $a_1=1$，由所給遞迴定義可得

$a_2=\dfrac{3a_1-1}{4a_1-1}=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{3a_2-1}{4a_2-1}=\dfrac{3}{5}$，$a_4=\dfrac{3a_3-1}{4a_3-1}=\dfrac{4}{7}$

②由 $a_1=\dfrac{1}{1}$，$a_2=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{3}{5}$，$a_4=\dfrac{4}{7}$，$\cdots$

觀察數列 $\langle a_n\rangle$：a_n 的分子成等差數列，首項為 1，公差為 1；分母也成等差數列，首項為 1，公差為 2

故可推測第 n 項 $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$，$n\in N$

類題 18 (A)(C)(D)

(A)若 a_1 與 a_2 同號，則由 $a_3=a_1+a_2$ 知，a_3 與 a_1、a_2 也同號

$\therefore$ $a_2a_3>0$

(B)(C)若 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，則 $(a_1+2d)=(a_1+d)+a_1$

得 $a_1=d$，$a_n=a_1+(n-1)d=d+(n-1)d=nd$

$\therefore$ $a_4\neq a_3+a_2$ 且 $a_4=4a_1$

(D)(E)若 $\langle a_n\rangle$ 為等比數列，則 $a_1r^2=a_1r+a_1$

得 $r^2=r+1$，所以 $r=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 為無理數

由 $r^2=r+1$ 同乘 a_1r，得 $a_1r^3=a_1r^2+a_1r$

所以 $a_4=a_3+a_2$ 成立

77 **範例 10** 9；126

$\Delta_2=1+2$，$\Delta_3=1+2+3$，$\Delta_4=1+2+3+4$

$\square_2=2^2$，$\square_3=3^2$，$\square_4=4^2$

$⬠_2=1+4$，$⬠_3=1+4+7$，$⬠_4=1+4+7+10$

$\Delta_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$\square_n=n^2$

$⬠_n=1+4+7+\cdots+$ 第 n 項

$=\dfrac{2\times 1+(n-1)\times 3}{2}\times n=\dfrac{3n^2-n}{2}$

$\therefore$ $m=\dfrac{n(n+1)}{2}+n^2=\dfrac{3n^2-n}{2}+9$

得 $(n^2+n)+2n^2=3n^2-n+18$

$\therefore$ $n=9$，$m=\dfrac{9\times 10}{2}+81=126$

類題 19 (1) $a_{n+1}=a_n+6n$，$n\in N$　(2) 271

(1) $a_1=1$，$a_2=a_1+6$，$a_3=a_2+2\times 6$，$a_4=a_3+3\times 6$

推得 $a_{n+1}=a_n+6n$，$n\in N$

(2)由 $a_1=1$，$a_2=1+6\times 1$，$a_3=1+6\times(1+2)$

$a_4=1+6\times(1+2+3)$

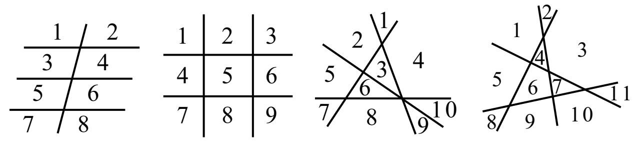
得 $a_{10}=1+6\times(1+2+3+\cdots+9)=1+6\times 45=271$

78 **類題 20** (1) $\begin{cases}a_1=2\\a_n=a_{n-1}+n，n\geq 2\end{cases}$　(2)(C)(D)

(1) $a_1=2$，$a_2=a_1+2=4$，$a_3=a_2+3=7$，$a_4=a_3+4=11$

，$\cdots$，故遞迴式為 $\begin{cases}a_1=2\\a_n=a_{n-1}+n，n\geq 2\end{cases}$

(2)



$k=8$　$k=9$　$k=10$　$k=11$

若 4 條直線平行，得 $k=5$ 為最小值

$\therefore$ $k=5$、8、9、10、11，無法得到 $k=6$ 及 $k=7$ 的情形

範例 11 79

原總分為 $76\times 15=1140$

所求 $=\dfrac{1140-92-45-55}{15-3}=\dfrac{948}{12}=79$

類題 21 (C)

設全體為 n 人，則依題號答對人數分別為 $0.8n$、$0.7n$、$0.6n$、$0.5n$、$0.4n$，總得分為

$0.8n\times 20+0.7n\times 20+0.6n\times 20+0.5n\times 20+0.4n\times 20$

$=3n\times 20=60n$　$\therefore$平均分數 $=\dfrac{60n}{n}=60$

類題 22 4；6

高一總分為 $60x$，高二總分為 $65y$，高三總分為 $74\times 12=888$

$\therefore$ $\dfrac{60x+65y}{x+y}=63$，即 $2y=3x\cdots$①

$\therefore$ $\dfrac{60x+65y+888}{x+y+12}=69$，即 $9x+4y=60\cdots$②

由①②得 $x=4$，$y=6$

79 **範例 12** (E)

第二週到第三週成本減少 50%，所以售價應減少 25%

成為 $180\times 0.75=135=x$

第三週到第四週成本增加 80%，所以售價應增加 40%

成為 $135\times 1.4=189=y$　$\therefore$ $120<x<180<y$

類題 23 (A)(C)(E)

設原月薪均為 1 單位

月份	一	二	三	四	五	六
張三	1.1	$(1.1)^2$	$(1.1)^3$	$(1.1)^3(0.9)$	$(1.1)^3(0.9)^2$	$(1.1)^3(0.9)^3$
李四	0.9	$(0.9)^2$	$(0.9)^3$	$(0.9)^3(1.1)$	$(0.9)^3(1.1)^2$	$(0.9)^3(1.1)^3$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{張三的月薪均高於李四}}$　$\Downarrow$ 相同

而六月的月薪相同，均為

$(0.9)^3(1.1)^3=[(1-0.1)(1+0.1)]^3=(0.99)^3<1$

類題 24 8.1

設所求為 x%，則 $(1+3\%)^4(1+x\%)=(1+4\%)^5$

即 $1+x\%=\dfrac{(1.04)^5}{(1.03)^4}\approx\dfrac{1.2167}{1.1255}=1.0810\cdots$

$\therefore x\%\approx 0.081=8.1\%$

80 **範例 13** ⑴ 6　⑵ 8　⑶ 4

⑴ 6 級分的累積百分比由 18% 躍升至 38%，占 20%，
為最多人數，故眾數為 6 級分

⑵ 0 ～ 7 級分累積 44%，0 ～ 8 級分累積 58%
故中位數為 8 級分

⑶前標（即第 3 四分位數）為 10 級分
後標（即第 1 四分位數）為 6 級分
故所求 = 10 − 6 = 4 級分

類題 25 (A)(B)(C)

(A) 40 分以下共有 $10.45+8.18+11.85+14.96=45.44<50$
50 分以下共有 $45.44+16=61.44>50$

(B) 20 分以下共有 $10.45+8.18=18.63<25$
30 分以下共有 $18.63+11.85=30.48>25$

(C) 50 分以下共有 $61.44<75$
60 分以下共有 $61.44+15.28=76.72>75$

(D) 30 分以下共有 $30.48>30$　∴應超過三成

(E) 60 分以上共有 $100-76.72=23.28$　∴不到四成

81 **類題 26** 三；80；70

10 分～ 60 分共 $2+3+4+7=16$ 人

80 分～ 100 分共 $8+6+4=18$ 人，設 70 分有 x 人

①若 $x=0$，則 $Me=\dfrac{80+80}{2}=80$

②若 $x=1$，則 Me 為由小而大第 18 個數，得 $Me=80$

③若 $x=2$，則 $Me=\dfrac{70+80}{2}=75$

④若 $x=3$，則 Me 為由小而大第 19 個數，得 $Me=70$

⑤若 $x\ge 4$，則 Me 都是 70

∴中位數共有 80、75、70 三種不同的值，最大可為 80，
最小可為 70

範例 14 (E)

設原始成績為 x_1、x_2、x_3、$\cdots$、x_{100}

調整後的成績為 $10\sqrt{x_1}$、$10\sqrt{x_2}$、$10\sqrt{x_3}$、$\cdots$、$10\sqrt{x_{100}}$

$\sqrt{\dfrac{1}{100}(100x_1+100x_2+\cdots+100x_{100}-100\times 65^2)}=15$

$\Rightarrow\quad \sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{100}-4225}=15$

$\Rightarrow\quad x_1+x_2+\cdots+x_{100}-4225=225$

$\Rightarrow\quad x_1+x_2+\cdots+x_{100}=4450$

$M=\dfrac{1}{100}(x_1+x_2+\cdots+x_{100})=44.5\quad\therefore 44\le M<45$

類題 27 6

設另一科為 x，則 $\dfrac{68+80+80+80+86+x}{6}=80$

$\therefore 394+x=480$，得 $x=86$

則 $\sigma=\sqrt{\dfrac{(-12)^2+0^2+0^2+0^2+6^2+6^2}{6}}=\sqrt{\dfrac{216}{6}}=\sqrt{36}=6$

類題 28 33

算術平均為 $\mu=\dfrac{1+1+1+1+1+1+1+1+x}{9}=\dfrac{x+8}{9}$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+x^2-9(\frac{x+8}{9})^2}{9}}$$

$$=\sqrt{\frac{8+x^2-\frac{1}{9}(x^2+16x+64)}{9}}=\sqrt{\frac{8x^2-16x+8}{81}}$$

$$=\sqrt{\frac{8(x-1)^2}{81}}=\frac{\sqrt{8}(x-1)}{9}>10$$

$\Rightarrow\quad x-1>\dfrac{90}{\sqrt{8}}=\dfrac{45\sqrt{2}}{2}\approx 45\times 0.707\approx 31.8$

$\therefore x>32.8$，所求為 33

82 **範例 15** 0.875

$\mu_x=\dfrac{135}{5}=27$，$\mu_y=\dfrac{105}{5}=21$

$$r=\frac{2842-5\times 27\times 21}{\sqrt{3661-5\times 27^2}\times\sqrt{2209-5\times 21^2}}$$

$$=\frac{2842-2835}{\sqrt{16}\times\sqrt{4}}=\frac{7}{8}=0.875$$

類題 29 (C)

x	y	$x-2$	$y+4$	乘
19	5	17	9	153
−5	−13	−7	−9	63
6	−5	4	−1	−4
−1	−5	−3	−1	3
12	13	10	17	170
−13	−7	−15	−3	45
−4	−12	−6	−8	48
2	−8	0	−4	0
8	−7	6	−3	−18
−4	−1	−6	3	−18
20	−40			442

每人的國文、數學成績同減 70，$\mu_x=2$，$\mu_y=-4$

由 $8.9=\sqrt{\dfrac{[(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+\cdots+(x_{10}-2)^2]}{10}}$

得 $[(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+\cdots+(x_{10}-2)^2]=8.9^2\times 10$

由 $7.5=\sqrt{\dfrac{[(y_1+4)^2+(y_2+4)^2+\cdots+(y_{10}+4)^2]}{10}}$

得 $[(y_1+4)^2+(y_2+4)^2+\cdots+(y_{10}+4)^2]=7.5^2\times 10$

$\therefore r=\dfrac{442}{\sqrt{8.9^2\times 10}\times\sqrt{7.5^2\times 10}}=\dfrac{442}{8.9\times 7.5\times 10}\approx 0.662$

類題 30 0.55

x	y	$x-\mu_x$	$y-\mu_y$	乘	$(x-\mu_x)^2$	$(y-\mu_y)^2$
90	14	9	3	27	81	9
81	12	0	1	0	0	1
84	10	3	−1	−3	9	1
72	11	−9	0	0	81	0
78	8	−3	−3	9	9	9
				33	180	20

$\mu_x=\dfrac{10+1+4+(-8)+(-2)}{5}+80=81$

$\mu_y=\dfrac{4+2+0+1+(-2)}{5}+10=11$

$r=\dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\times\sqrt{S_{yy}}}=\dfrac{33}{\sqrt{180}\times\sqrt{20}}=\dfrac{33}{60}=0.55$

83 **範例 16** (B)

概念強化 0.85

x	y	$x-80$	$y-81$	乘	$(x-80)^2$
62	75	-18	-6	108	324
78	80	-2	-1	2	4
87	83	7	2	14	49
85	86	5	5	25	25
88	81	8	0	0	64
				149	466

國文平均為 80，英文平均為 81

設國文為 x，英文為 y

y 對 x 的迴歸直線為 $y-81=\dfrac{149}{466}(x-80)$

代 $x=100$ 得 $y=81+\dfrac{1490}{233}\approx 81+6.4=87.4$

類題 31 (B)(C)(D)(E)

(A) $x>10$ 代入 $y=3x-25$，得 $y>5$，y 不一定比 10 大

(B) $y<15$ 代入 $y=3x-25$，得 $3x-25<15$

　即 $x<\dfrac{40}{3}<15$

(C) $\because\ r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=3$ 且 $\sigma_x>0$，$\sigma_y>0$　$\therefore\ r>0$

(D) $\because\ 0<r\le 1$，則 $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{3}{r}\ge 3$，則 $\sigma_y\ge 3\sigma_x>\sigma_x$

(E)由 $r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=3$，得 $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}=\dfrac{r}{3}$　$\therefore\ \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ 愈大，則 r 愈大

類題 32 (E)

五個選項的 y 值平均都是 5，平方和依序為

$\underset{1^2+13^2+1^2}{\underset{\uparrow}{171}}$ 、 $\underset{3^2+10^2+2^2}{\underset{\uparrow}{113}}$ 、 $\underset{5^2+7^2+3^2}{\underset{\uparrow}{83}}$ 、 $\underset{9^2+1^2+5^2}{\underset{\uparrow}{107}}$ 、 $\underset{7^2+4^2+4^2}{\underset{\uparrow}{81}}$

知標準差 σ_y 以(E)為最小，(A)為最大

五條迴歸線的斜率均為 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

因 $r<0$，且 σ_x 都一樣，故選 σ_y 最小者，可使 r 為最小

84 **範例 17** (A)(C)

概念強化 1.○ 2.○ 3.×

實驗結果（x 英噸，y 英吋）$\because\ x$ 值愈大，y 值愈小

得 $r<0$，迴歸直線斜率應為 $m<0$　$\therefore\ r\cdot m>0$

而單位換算（英噸 → 公噸，英吋 → 公分）為正向伸縮

$\therefore\ r=R$

而 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，$M=R\cdot\dfrac{\sigma_y\times 2.54}{\sigma_x\times 1.016}$　$\therefore\ m\ne M$

類題 33 (A)(C)(D)(E)

(B) $\because\ r$ 只有 0.016，接近零相關　$\therefore$不適合

(C)即資料平移　(D)即資料伸縮

類題 34 (B)(C)(E)

x	y	$x-2$	$y-1$	乘	$(x-2)^2$	$(y-1)^2$
0	0	-2	-1	2	4	1
3	0	1	-1	-1	1	1
3	3	1	2	2	1	4
6	3			3	6	6

因左右平移與正向伸縮不影響相關係數

可令 $A(0,0)$，$B(3,0)$，$C(3,3)$

$\mu_x=2$，$\mu_y=1$　$\therefore\ r=\dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$

綜 合 實 力 測 驗

1.(C)	2.(C)	3.(B)	4.(D)
5.(A)(B)(D)	6.(A)(D)(E)	7.(A)(B)(D)(E)	8.(B)(C)(D)(E)
9. 583	10. 72	11. $\dfrac{341}{1024}$	12. -1.8
13.(1)(B) (2) 88.05 (3)中度高血壓人群			

85 1. 設公比為 r，$a_1+a_1r=8$

$a_1r^3+a_1r^4=r^3(a_1+a_1r)=64 \Rightarrow r^3=8 \Rightarrow r=2$

$a_1+2a_1=8 \Rightarrow a_1=\dfrac{8}{3}$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$

$=\dfrac{\frac{8}{3}(2^{10}-1)}{2^2-1}=\dfrac{8\times 1023}{9}=\dfrac{8\times 341}{3}=\dfrac{2728}{3}\approx 909.33$

2. 期利率為 $\dfrac{6\%}{12}=0.5\%=0.005$

所求 $=10000(1+0.005)^{24}+10000(1+0.005)^{23}+\cdots$
$+10000(1+0.005)^1$

$=10000[1.005+(1.005)^2+\cdots+(1.005)^{24}]$

$=10000\times\dfrac{1.005\times[(1.005)^{24}-1]}{1.005-1}=10050\times\dfrac{(1.005)^{24}-1}{1.005-1}$

3. (A) $\dfrac{a+b+c+d}{4}=\mu \Rightarrow a+b+c+d=4\mu$

$\dfrac{a+b+c+d+\mu}{5}=\dfrac{4\mu+\mu}{5}=\mu$

(B) $\sigma=\sqrt{\dfrac{(a-\mu)^2+(b-\mu)^2+(c-\mu)^2+(d-\mu)^2}{4}}$

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{(a-\mu)^2+(b-\mu)^2+(c-\mu)^2+(d-\mu)^2+0^2}{5}}<\sigma$

(E)數據標準化後，其標準差為 1

4. 0 ～ 8 級分共占 49.28%，故第 50 百分位數為 9 級分

86 5. (A)迴歸直線必通過 (μ_X,μ_Y)　(B) $r=0.9>0$

(C)斜率為 $\dfrac{75-70}{70-60}=\dfrac{5}{10}=0.5$

(D)迴歸直線方程式為 $(y-70)=0.5(x-60)$

$\Rightarrow\ y=0.5x+40$，又 $(2,41)$、$(-10,35)$ 兩點皆在迴歸直線上，故相關性增加：$r>0.9$

(E) $r\ne 1$，雖然 $x=80$ 代入迴歸式 $y-70=0.5(x-60)$ 得 $y=80$，但只是預測，可能非真正的 y 值

6. $S_8>S_9 \Rightarrow S_9-S_8<0 \Rightarrow a_9<0$

$S_8>S_7 \Rightarrow S_8-S_7>0 \Rightarrow a_8>0$

$d=a_9-a_8<0$

(A)(B)公差 $d<0$，是遞減數列，$a_7>a_8>a_9$

(C) $S_{16}=\dfrac{(a_1+a_{16})\times 16}{2}=\dfrac{(a_8+a_9)\times 16}{2}$

$\because S_9>S_7 \Rightarrow S_9-S_7>0 \Rightarrow a_9+a_8>0$

故 $S_{16}>0$

(D) $S_{17}=\dfrac{(a_1+a_{17})\times 17}{2}=a_9\times 17<0$

(E)因 $\langle a_n\rangle$ 前 8 項為正，第 9 項開始為負

7. (A) $a_9=C_9^{11}=C_2^{11}=55$

(B)(C) $a_0+a_1+\cdots+a_{11}=2^{11}=2048$

$\Rightarrow \mu=\dfrac{2048}{12}\approx 170.67$

(D)(E) $a_0=a_{11}=1$，$a_1=a_{10}=C_1^{11}=11$，$a_2=a_9=C_2^{11}=55$

$a_3=a_8=C_3^{11}=165$，將係數由小而大排：

$a_0,a_{11},a_1,a_{10},a_2,a_9,a_3,a_8,a_4,a_7,a_5,a_6$

$\therefore Me=\dfrac{a_9+a_3}{2}=\dfrac{C_9^{11}+C_3^{11}}{2}=\dfrac{55+165}{2}=110$

8. (A)反例：$a_n=(n-1)(n-2)(n-3)+n$

滿足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，但 $a_4=10$

(B)若 $b_{13}>0$，則 $b_{14}<0$，$b_{15}<b_{14}<0$，得 $b_{14}\times b_{15}>0$

若 $b_{13}<0$，則 $b_{14}>0$，$b_{15}>b_{14}>0$，得 $b_{14}\times b_{15}>0$

(C)$\because c_1=1$，$c_{10}<0 \quad \therefore d<0$，故 $0>c_{10}>c_{20}$

(D) $\begin{cases} d_n+d_{n-1}=5\cdots① \\ d_{n+1}+d_n=5\cdots② \end{cases}$

②−①得 $d_{n+1}-d_{n-1}=0 \Rightarrow d_{n+1}=d_{n-1}$

若 $d_1=d_3=d_5=\cdots=d_{19}=1$

$d_2=d_4=d_6=\cdots=d_{20}=4 \quad \therefore d_{19}+d_{20}=5$

(E) $\dfrac{e_n}{e_{n-1}}=-2$，$\langle e_n\rangle$ 為公比為 -2 的等比數列

$e_{20}=e_1\times r^{19}=1\times(-2)^{19}<0$

9. 第 19 列的最後一個數是第 $1+2+3+\cdots+19=190$ 項

∴第 20 列的第 5 個數是等差數列的第 195 項

$a_{195}=1+3\times(195-1)=583$

10. 設 $y=ax+b$

$\begin{cases} \mu_y=a\mu_x+b \Rightarrow 60=40a+b\cdots① \\ \sigma_y=|a|\times\sigma_x \Rightarrow 6=5|a| \quad \cdots② \end{cases}$

$\Rightarrow a=\dfrac{6}{5}$ 代入①，得 $60=40\times\dfrac{6}{5}+b$

$\therefore b=12 \Rightarrow y=\dfrac{6}{5}x+12$

$x=50$ 代入 $\Rightarrow y=\dfrac{6}{5}\times 50+12=72$

加分後成績變為 72 分

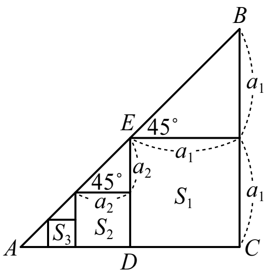
11. 設 S_n 的邊長為 a_n

$a_2=a_1-a_2 \Rightarrow a_2=\dfrac{1}{2}a_1$

$a_3=a_2-a_3 \Rightarrow a_3=\dfrac{1}{2}a_2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$a_n=a_{n-1}-a_n \Rightarrow a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$



$2a_1=1 \Rightarrow a_1=\dfrac{1}{2}$

數列 $\langle S_n\rangle$ 表首項 $\dfrac{1}{4}$，公比為 $\dfrac{1}{4}$ 的等比數列

$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=\dfrac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{4})^5]}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1023}{1024}=\dfrac{341}{1024}$

87 12. 因 $W=-7X+168 \quad \therefore r_1(X,W)=-1$

$r_2(Y,W)=r_2(Y,-7X+168)$

$=-r_2(Y,X)=-r_2(X,Y)=-0.8$

$\therefore r_1+r_2=-1+(-0.8)=-1.8$

13. (1)迴歸直線斜率 $b=\dfrac{944}{1032}\approx 0.9147\approx 0.91$

(2) $y=a+0.91x$，必通過點 (μ_x,μ_y)

$\therefore a=129-0.91\times 45=88.05$

(3)∵迴歸直線方程式 $y=88.05+0.91x$

年齡 70 歲的老人標準的收縮壓為

$y=88.05+0.91\times 70=151.75$ (mmHg)

$\dfrac{180}{151.75}\approx 1.19$，故收縮壓為 180 mmHg 的 70 歲老人屬於中度高血壓人群

5 排列組合與機率

88 ❶ A (1)全班最多 9 人被當　(2) $x<1$ 或 $x>5$

(3) $x\geq 3$ 且 $y\neq 1$

❷ A (1)(B)　(2)(C)　B (A)(B)

A (1) $x=1$ 且 $y=-1$ 知「$x^2=y^2 \not\Rightarrow x^3=y^3$」

$x^3=y^3 \Rightarrow x=y$，$x^2=y^2$

(2) $x^3\neq y^3 \Leftrightarrow x\neq y$

89 B (A)「$x=0 \Rightarrow -2<x<3$」成立

(B)「$-1\leq x\leq 1 \Rightarrow -2<x<3$」成立

(C) $x=-2$ 使「$-2\leq x\leq 2 \not\Rightarrow -2<x<3$」

(D)「$-3\leq x\leq 3 \not\Rightarrow -2<x<3$」

❸ A 32　B (E)　C (B)(C)

A 每個元素可選擇「要」或「不要」

有 $2^5=32$ 種不同的子集合

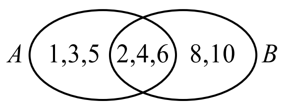
B (A) A 有 3、5、$\{1,2\}$ 共 3 個元素　$\therefore n(A)=3$

(B) $1\notin A$　(C) $\{5\}\notin A$　(D) $\{1,2\}\in A$

C (A) $0\notin N$　(D) 0^0 為無意義

❹ A $\{2,4,6\}$；$\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$；$\{1,3,5\}$

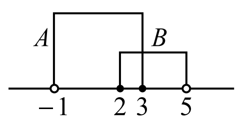
A



90 B (1) $\{x\,|\,2\leq x\leq 3，x\in R\}$

(2) $\{x\,|\,-1<x<5，x\in R\}$

(3) $\{x\,|\,-1<x<2，x\in R\}$



5 A (1) $\{1,6\}$ (2) $\{1,2,5,6\}$ B (1) 1 (2) 8

A (1) $A'\cap B'=(A\cup B)'=\{1,6\}$

(2) $A'\cup B'=(A\cap B)'=\{1,2,5,6\}$

B (1) $n(A'\cap B')=n[(A\cup B)']=10-9=1$

(2) $n(A'\cup B')=n[(A\cap B)']=10-2=8$

6 A 25 B 19

A $n(A\cup B)=10+20-5=25$

B $n(甲\cup乙\cup丙)=40$

$=27+30+32-20-23-25+n(甲\cap乙\cap丙)$

$\therefore n(甲\cap乙\cap丙)=19$

7 A 15 B 31

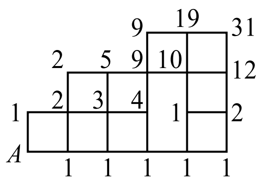
A 只含 A + 只含 B + 含 A 且含 B $=6+6+3=15$

《另解》

$$\underbrace{\overset{上}{3}\times\overset{右}{3}\times\overset{下}{1}\times\overset{左}{1}}_{含A}+\underbrace{\overset{上}{3}\times\overset{右}{1}\times\overset{下}{1}\times\overset{左}{3}}_{含B}-\underbrace{\overset{上}{3}\times\overset{右}{1}\times\overset{下}{1}\times\overset{左}{1}}_{含A且含B}$$

$=9+9-3=15$

91 B



8 A 45 B 130

A $2^{\boxed{0、2、4、6、8}}\times 3^{\boxed{0、2、4}}\times 7^{\boxed{0、2、4}}$ ∴ 有 $5\times3\times3=45$ 個

B 有 $5\times9\times3-5=135-5=130$ 種

9 A 6 B 432 C 360 D 90

A 可以想成「上、中、下」三個字排成一列

共有 $3!=6$ 種

B 所求 $=\underbrace{6}_{放1}\times\underbrace{3}_{放2}\times\underbrace{4!}_{放3\sim6}=18\times24=432$ 種

C 有 $P^6_4=6\times5\times4\times3=360$ 種

D 有 $P^{10}_2=10\times9=90$ 條

92 **10** A 6 B 72 C 1260

A 即 →→→→→← 的排列，有 $\frac{6!}{5!}=6$ 種

B 先畫 3、4、5 車，再畫 1、2、6、7 車

共有 $\underbrace{3!}_{企、無、貓排成一列}\times\underbrace{\frac{4!}{2!}}_{企、無、貓、貓排成一列}=6\times12=72$ 種

C $\underbrace{\frac{8!}{2!3!2!}}_{任意排}-\underbrace{\frac{7!}{3!2!}}_{0在首位}=1680-420=1260$

11 A 21；35 B 13 C 2520 D 280

A ①有 $C^7_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$ 個 ②有 $C^7_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ 個

B 即 $C^n_2=\frac{n(n-1)}{2}=78$

$\therefore n(n-1)=78\times2=13\times12$，得 $n=13$

C 有 $C^8_2\times C^6_2\times C^4_2\times C^2_2=28\times15\times6\times1=2520$ 種

D 有 $C^9_3\times C^6_3\times C^3_3\times\frac{1}{3!}=84\times20\times1\times\frac{1}{6}=280$ 種

12 A 3 或 7 B 4

A $C^9_3+C^9_7=C^9_3+C^9_2=C^{10}_3=C^{10}_7$ $\therefore k=3$ 或 7

93 B 由 $C^3_0=C^4_0$

所求 $=C^4_0+C^4_1+C^5_2+\cdots+C^9_6=C^5_1+C^5_2+\cdots+C^9_6=\cdots$

$=C^9_5+C^9_6=C^{10}_6=C^{10}_4$ $\therefore r=4$

13 A (1) 280 (2) 0 B (B) C (A)(D) D 1023

A (1)為 $C^7_3(2x)^3y^4=35\cdot8x^3y^4=280x^3y^4$

(2)∵各項次數和均為 7 次 ∴ x^2y^6 項係數為 0

B $(1+\sqrt2)^6=C^6_0+C^6_1\sqrt2+C^6_2\sqrt2^{\,2}+C^6_3\sqrt2^{\,3}+C^6_4\sqrt2^{\,4}$

$+C^6_5\sqrt2^{\,5}+C^6_6\sqrt2^{\,6}$

$=(C^6_0+2C^6_2+2^2C^6_4+2^3C^6_6)+(C^6_1+2C^6_3+2^2C^6_5)\sqrt2$

$\therefore b=C^6_1+2C^6_3+2^2C^6_5$

C $(x^2+y)^{12}=C^{12}_0x^{24}+C^{12}_1x^{22}y+\cdots+C^{12}_5x^{14}y^5+C^{12}_6x^{12}y^6$

$+C^{12}_7x^{10}y^7+C^{12}_8x^8y^8+\cdots+C^{12}_{12}y^{12}$

係數以正中間的 C^{12}_6 最大，兩邊對稱遞減

故(B)應 $C^{12}_6>C^{12}_7$ (C)應 $C^{12}_5=C^{12}_7$

D ∵ $C^{10}_0+C^{10}_1+C^{10}_2+\cdots+C^{10}_{10}=2^{10}$

∴所求 $=2^{10}-C^{10}_0=1024-1=1023$

14 A $\frac{35}{128}$ B $\frac{5}{12}$ C (E) D (E)

A $P=\frac{C^8_4}{2^8}=\frac{70}{256}=\frac{35}{128}$

B $P=\frac{(C^3_2\times6)\times5}{6\times6\times6}=\frac{3\times6\times5}{216}=\frac{5}{12}$

94 C 四行選兩行再各選一格

$P=\frac{(C^4_2\times4\times4)}{C^{16}_2}=\frac{6\times4\times4}{120}=\frac{4}{5}$

D (A)～(D)的四種情形之機率均為 $\frac{1}{16}$

15 A $\frac{8}{25}$ B 0.3 C (D)

A 所求 $=1-\frac{6}{25}-\frac{11}{25}=\frac{8}{25}$

B $0.9=0.7+0.5-P(A\cap B)$ ⇒ $P(A\cap B)=0.3$

C ∵ $P(A)+P(B)=\frac12+\frac13=\frac56$ ∴ $\frac12\le P(A\cup B)\le\frac56$

95 **16** A (A) B 4500 C $\frac{14}{3}$ D $\frac{22}{3}$

A 所求 $=\frac35\times50+\frac25\times100=30+40=70$ 元

B $E=\underbrace{\frac14\times8000}_{紅心}+\underbrace{\frac14\times6000}_{方塊}+\underbrace{\frac12\times2000}_{黑牌}$

$=2000+1500+1000=4500$ 元

C 取一球的期望值為 $\frac23\times1+\frac13\times5=\frac73$

∴所求 $=\frac73\times2=\frac{14}{3}$ 元

(D) 丟一次的期望值為 $\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times 4+\frac{1}{3}\times 5=\frac{11}{3}$

$\therefore$ 所求 $=\frac{11}{3}\times 2=\frac{22}{3}$

範例 1 (B)(C)

(A)「$1\le x\le 2$」的否定敘述應為「$x<1$ 或 $x>2$」

(B)「$abcd=0$」的否定敘述應為「$abcd\neq 0$」，即 a、b、c、d 均不為 0

(C)「點 (x,y) 在第二或第四象限」的否定敘述為「點 (x,y) 不在第二象限且不在第四象限」，所以「點 (x,y) 在第一或第三象限或在軸上」，則 $xy\ge 0$

(D)反例：長方形的四個內角均為 90°

(E)甲乙相鄰與丙分開（如甲乙丁丙戊）也是「甲乙丙三人相鄰」的否定情形

96 **類題 1** (C)(E)

(A)逗號應為「且」

(B)前者的 x 不可為 4，而後者的 x 可以為 4，所以兩者不相等

(C)「均為奇數」的否定為「至少有一個為偶數」，所以「乘積為偶數」

(D)「$x^2+y^2=0$」的否定為「$x^2+y^2\neq 0$」，可能 $x=0$ 且 $y\neq 0$，所以 xy 可以為 0

(E)若 ΔABC 不是正三角形，則 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 不全為 60° 即至少有一個內角不是 60°

類題 2 (A)(C)(D)

即內側車道不限，外側車道只准行駛大客車

範例 2 (A)(D)(E)

(B)反例：$x=0$ 滿足 $-1\le x\le 2$，但不滿足 $1\le x^2\le 4$

(C)各科都是第二名，有可能總成績為第一名。總成績不是全班第一名，有可能某科是全班第一名，所以兩者是「非充分也非必要」條件，另外，「各科都是班上第一名 $\Rightarrow$ 總成績是班上第一名」是對的

(D)「ΔABC 是正三角形 $\Rightarrow$ $\angle BAC=60^\circ$」成立

(E)「$(x-1)(x-2)<0$ $\Leftrightarrow$ $1<x<2$」成立

類題 3 (A)(B)(D)(E)

即「$a<3$ 且 $b>5$」 $\Rightarrow$ 「$x=1$ 或 $y\neq 2$」成立

(A)(D)(E)因前提並未滿足，所以結論可以不用成立，因此有可能發生

(B)前提滿足，結論也滿足

(C)前提滿足，但結論不成立，不允許發生

97 **類題 4** (E)

由「一滿足且二滿足 $\Rightarrow$ 可參選」

知「不可參選 $\Rightarrow$ 一不滿足或二不滿足」

所以小文的「國文不到 70 分且英文不到 70 分」或「數學不及格」，由條件知小文的「英文不到 70 分」或「數學不及格」

範例 3 (B)(D)(E)

由題目知：A 有元素 1、2、3、4 與其他

B 有元素 1 與其他，沒有 2、3、4 這三個元素

C 有元素 2、3 與其他，沒有 1、4 這兩個元素

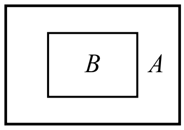
D 有元素 1、2、3 與其他，沒有 4 這個元素

(A) B 與 C 可能有共同元素，比如 5

(B) $A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap(A\cap C)=\{1\}\cap\{2,3\}=\phi$

(C) $4\notin B$ 且 $4\notin C$　(D) $1\in B$ 且 $1\in D$

類題 5 -1；6；9



$\because A\cap B=\{-3\}$　$\therefore -3\in A$，$-3\in B$

即 $(-3)^2+a(-3)-12=0$，得 $a=-1$

故 $A=\{x\,|\,x^2-x-12=0\}=\{-3,4\}$

$\because A\cup B=\{-3,4\}=A$

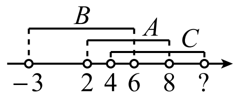
$\therefore B\subset A$，$A\cap B=B$

故 $B=\{-3\}$，即 $x^2+bx+c=0$ 的根為 -3、-3

因此 $x^2+bx+c=(x+3)^2=x^2+6x+9$　$\therefore b=6$，$c=9$

故 $a=-1$，$b=6$，$c=9$

類題 6 $(4,6)$



作圖如右，若 A 為 -3 ～ 6 的範圍

則 $A\cap C$ 不會是 4 ～ 8 的範圍

$\because a_1>b_1$，$a_2>b_2$

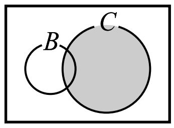
所以 A 為 2 ～ 8 的範圍

則 B 為 -3 ～ 6 的範圍，C 為 4 到不小於 8 的範圍

則 $B\cap C=\{x\,|\,4<x<6$，$x\in R\}$

$\therefore$ 數對 $(p,q)=(4,6)$

98 **範例 4** (1) 24　(2) 3



(1) $n(C)=n(B\cup C)-n(B)+n(B\cap C)$
$=36-20+8=24$

(2)每一學生至少持有一種飲料

$\therefore n(A\cup B\cup C)=48$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=22+20-37=5$

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$\Rightarrow$ $48=22+20+24-5-8-8+n(A\cap B\cap C)$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=3$

類題 7 25

$\underbrace{4\times 3\times 3}_{\text{帽衣鞋任意}}-\underbrace{1\times 3\times 1}_{\text{紅帽且灰鞋}}-\underbrace{3\times 1\times 3}_{\text{非藍帽且白衣}}+\underbrace{1\times 1\times 1}_{\text{紅帽且白衣且灰鞋}}$

$=36-3-9+1=25$ 種

《另解》可用樹狀圖把所有情形列出計數

類題 8 (B)(C)(D)

n(手機)$=A+B=35$，n(平板)$=A+C=24$

n(全班)$=A+B+C+D=45$

其中 n(手機 $\cap$ 平板)$=A$

①$\because$ $35+24=59$ 比 45 多 14，所以 A 至少為 14

若 A 為 14，則 $B=21$，$C=10$，$D=0$

②若「手機 $\supset$ 平板」，則 A 為最大

此時 $A=24$，$B=11$，$C=0$，$D=10$

由①②知 $14\le A\le 24$

$B=35-A \Rightarrow 11\le B\le 21$

$C=24-A \Rightarrow 0\le C\le 10$

$D=10-C \Rightarrow 0\le D\le 10$

(A)(E)不一定

99 **範例 5** 11

位置編號為①②③④⑤，甲必須在⑤，討論戊的位置

用樹狀圖列出（若丙、丁沒有選擇餘地，則不列出）

- 戊在①
  - 乙在③
  - 乙在④
- 戊在②
  - 乙在①
  - 乙在③
  - 乙在④
- 戊在③
  - 乙在①
  - 乙在④
    - 丙在①
    - 丙在②
- 戊在④
  - 乙在①
  - 乙在③
    - 丙在①
    - 丙在②

共有 11 種

類題 9 (C)

原式 $=2^k\cdot 2^{2m}\cdot 2^{3n}=2^{k+2m+3n}=2^9$

即 $k+2m+3n=9$，求正整數解

列表討論

n	1	1	2
m	2	1	1
k	2	4	1

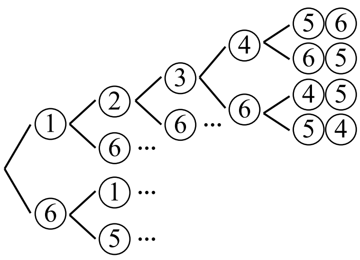
共有 3 組解

類題 10 (1)(A)(B)(D) (2) 32 (3) 4

(1)(C) 3 號球不會比 2 號球先取出

(E) 3 號球不會比 1 號球先取出

(2)用樹狀圖



前五次取球每次有「上、下」兩個選擇

共 $2\times2\times2\times2\times2=32$ 種

(3)
- $\underline{①⑥}\ \underline{⑤④③②}$
- $\underline{①②⑥}\ \underline{⑤④③}$
- $\underline{①②③⑥}\ \underline{⑤④}$
- $\underline{①②③④⑥}\ \underline{⑤}$

共 4 種

100 **範例 6** 192

$\underset{\text{二壘}}{2}\times\underset{\text{三壘}}{2}\times\underset{\text{游擊}}{2}\times(\underset{\text{左外}}{4}\times\underset{\text{中外}}{3}\times\underset{\text{右外}}{2})=192$ 種

類題 11 (1) 210 (2) 170 (3) 150

(1) $\underset{\text{上衣}}{5}\times\underset{\text{裙與褲}}{6}\times\underset{\text{襪}}{7}=210$ 種

(2) 穿褲 $\Rightarrow 5\times4\times7=140$

穿裙 $\Rightarrow 5\times2\times3=30$

所求 $=140+30=170$ 種

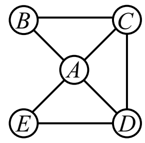
(3) 穿長襪 $\Rightarrow 5\times2\times3=30$

穿短襪 $\Rightarrow 5\times6\times4=120$

所求 $=30+120=150$ 種

類題 12 (1) $n(n-1)(n-2)^3$

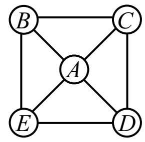
(2) $n(n-1)(n-2)(n^2-5n+7)$



(1)依 A、B、C、D、E 的順序塗色

有 $\underset{A}{n}\,\underset{B}{(n-1)}\,\underset{C}{(n-2)}\,\underset{D}{(n-2)}\,\underset{E}{(n-2)}$

$=n(n-1)(n-2)^3$ 種



(2)依 A、B、C、D、E 的順序塗色，在塗 E 時會受 B、D 的同色或異色有不同的塗法，B、D 同色

$\Rightarrow \underset{A}{n}\,\underset{BD}{(n-1)}\,\underset{C}{(n-2)}\,\underset{E}{(n-2)}$

$=n(n-1)(n-2)^2$

B、D 異色 $\Rightarrow \underset{A}{n}\,\underset{B}{(n-1)}\,\underset{D}{(n-2)}\,\underset{C}{(n-3)}\,\underset{E}{(n-3)}$

$=n(n-1)(n-2)(n-3)^2$

$\therefore$所求 $=n(n-1)(n-2)^2+n(n-1)(n-2)(n-3)^2$

$=n(n-1)(n-2)[(n-2)+(n-3)^2]$

$=n(n-1)(n-2)(n^2-5n+7)$ 種

101 **範例 7** (1) 144 (2) 192 (3) 336 (4) 288

(1) $\underset{\text{□□□、丁、戊、己先排}}{4!}\times\underset{\text{甲、乙、丙排入□□□}}{3!}=24\times6=144$ 種

(2) $\underset{\text{□□、丁、戊、己先排}}{4!}\times\underset{\text{甲、乙排入□□}}{2!}\times\underset{\text{丙插空}}{4}=24\times2\times4=192$ 種

(3) $6!-\underset{\text{甲、乙相鄰}}{5!\times2!}-\underset{\text{丙、丁相鄰}}{5!\times2!}+\underset{\text{甲、乙相鄰且丙、丁相鄰}}{4!\times2!\times2!}$

$=720-240-240+96=336$ 種

(4) $\underset{\text{首位}}{4}\times\underset{\text{末位}}{3}\times\underset{\text{中間四個位置任意排列}}{4!}=4\times3\times24=288$ 種

類題 13 4320

所求 $=\underset{\text{排上面 3 人}}{3!}\times\underset{\text{排下面 6 人}}{6!}=6\times720=4320$ 種

類題 14 138

體育課有（一三）、（一四）、（一五）、（二四）、（二五）、（三五），共 6 種排法

$\therefore \underset{\text{體育課}}{6}\times(\underset{\text{音}}{5}\times\underset{\text{美}}{5}-\underset{\text{體音美同一天}}{2})=6\times23=138$ 種

102 **範例 8** (1) 216　(2) 75

□ □ □
一 二 三

(1)每位數字都有 6 個選擇：共有 $6\times6\times6=216$ 組號碼

(2) $\underbrace{3}_{5\text{ 排入空格}}\times\underbrace{5\times5}_{\text{另兩個決定數字}}=75$ 組

類題 15 (D)

$\underbrace{1\times25\times10\times10\times10\times1}_{\text{第一碼為 }A\text{ 且最後一碼為 4 的排法}}-\underbrace{1\times25\times9\times1\times1\times1}_{\text{恰連續出現三個 4 的排法}}$

$-\underbrace{1\times25\times1\times1\times1\times1}_{\text{連續出現四個 4 的排法}}$

$=25\times(1000-9-1)=25\times990$ 個

類題 16 (1) 729　(2) 585　(3) 325

(1)每物有 3 種分給人的方法，所求 $=3^6=729$ 種

(2)用倒扣法

所求 $=3^6-\underbrace{2\times2\times2\times2}_{4\text{ 書分給乙丙}}\times\underbrace{3\times3}_{\text{筆任意分}}=729-144=585$ 種

(3)用取捨原理

所求 $=3^6-\underbrace{2^4\times3^2}_{\text{甲沒書}}-\underbrace{3^4\times2^2}_{\text{甲沒筆}}+\underbrace{2^6}_{\text{甲沒書也沒筆}}$

$=729-144-324+64=325$ 種

103 **範例 9** (B)

□□□□□
一二三四五

①放入「牛牛大咖排」有 $\underbrace{\dfrac{3!}{2!}}_{\text{一三五放入牛、牛、大}}\times\underbrace{2!}_{\text{二四放入咖、排}}=6$ 種

②放入「牛大大咖排」，同①有 6 種

③放入「牛大咖咖排」，用取捨原理

$\underbrace{\dfrac{5!}{2!}}_{\text{任意}}-\underbrace{\dfrac{4!}{2!}\times2!}_{\text{牛大相鄰}}-\underbrace{4!}_{\text{咖咖相鄰}}+\underbrace{3!\times2!}_{\text{牛大相鄰且咖咖相鄰}}$

$=60-24-24+12=24$ 種

④放入「牛大咖排排」，同③有 24 種

所求 $=6+6+24+24=60$ 種

類題 17 11

①若左下為 ▭，則上方為

- ▯⊟⊟ ⇒ 排法有 $\dfrac{3!}{2!}=3$ 種
- ▯▯▯⊟ ⇒ 排法有 $\dfrac{4!}{3!}=4$ 種
- ▯▯▯▯▯ ⇒ 排法有 1 種

②若左邊為 ▯，則右邊為 ▯▯▯、⊟▯、▯⊟ 共 3 種

故所求為 $3+4+1+3=11$ 種

類題 18 180

看成「特、頭、貳、貳、參、參」排成一列，每種排列方式即為一種分配獎品的方法

所求 $=\dfrac{6!}{2!2!}=180$ 種

104 **範例 10** 15

5 天沒被選中，有 6 個空隙，選其中兩個插空

$\therefore C_2^6=15$ 種

類題 19 48

每比一場則總分增加 2 分

設共 n 人參加，分數總和為 $2\cdot C_2^n$

$\because 2200<2C_2^n<2300\quad\Rightarrow\quad1100<C_2^n<1150$

而 $C_2^{40}=780$，$C_2^{50}=1225$，$C_2^{47}=1081$，$C_2^{48}=1128$

$C_2^{49}=1176$

$\therefore n=48$，故此比賽共有 48 個玩家參賽

類題 20 14

$C_2^n=\dfrac{n(n-1)}{2}=a$，$C_3^n=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=b$

$\because b=4a\quad\therefore\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=4\times\dfrac{n(n-1)}{2}$

即 $n-2=12$，所以 $n=14$

範例 11 270

概念強化 ×。應為 $C_2^{13}\times C_2^4\times C_2^4$

所求 $=\underbrace{C_3^5}_{\text{取三組}}\times\underbrace{C_1^3\times C_1^3\times C_1^3}_{\text{再各取出一個數}}=10\times3\times3\times3=270$ 種

類題 21 1260

5 □□－□□□□

所求 $=\underbrace{C_2^4}_{6、7、8、9\text{ 取兩個由小而大排好}}\times\underbrace{C_4^{10}}_{0\sim9\text{ 取四個由小而大排好}}=6\times210=1260$ 組

105 **類題 22** (1) 150　(2) 160

(1)方格紙的直線有 6 條，橫線有 5 條，各取兩條即得一個長方形，故所求 $=C_2^6\times C_2^5=15\times10=150$ 個

(2)《方法一》

$\underbrace{C_2^5}_{5\text{ 行選出 2 行}}\times\underbrace{C_1^4\times C_1^4}_{\text{此 2 行再各取一格}}=10\times4\times4=160$ 種

《方法二》

$\underbrace{C_2^{20}}_{\text{任取兩格}}-\underbrace{C_1^5\times C_2^4}_{\text{兩格同行}}=190-5\times6=160$ 種

範例 12 (C)

- 己不參加 ⇒ $C_1^3\times C_1^2=6$
- 己參加且右手持拍 ⇒ $1\times C_1^2=2$
- 己參加且左手持拍 ⇒ $C_1^3\times1=3$

$\therefore$所求 $=6+2+3=11$

類題 23 43200

有四天是 1 男 1 女，有一天是 2 男

$\Rightarrow\underbrace{C_1^5\times C_2^6}_{\text{選一天用 2 男}}\times\underbrace{4!}_{\text{剩四天讓男生排列}}\times\underbrace{4!}_{\text{剩四天讓女生排列}}$

$=5\times15\times24\times24=43200$

$\therefore$本週安排值日生的方式共有 43200 種

類題 24 161

$\underbrace{C_2^4\cdot C_6^7}_{2男6女}+\underbrace{C_3^4\cdot C_5^7}_{3男5女}+\underbrace{C_4^4\cdot C_4^7}_{4男4女}$

$=6\times7+4\times21+1\times35=161$ 種

範例 13 (1) 12　(2) 9　(3) 4

(1) $x=1$ 代入，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=2^n=4096$　∴ $n=12$

(2) $C_4^n：C_{n-6}^n=3：2$

$\Rightarrow\quad 2\times\dfrac{\cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}$

$=3\times\dfrac{\cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}(n-4)(n-5)}{6\times5\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}$

$\Rightarrow\quad 2=\dfrac{1}{10}(n-4)(n-5)\quad\Rightarrow\quad n^2-9n=0$

$\Rightarrow\quad n(n-9)=0\quad\Rightarrow\quad n=9$ 或 0（不合）　∴ $n=9$

(3) $(11)^{2004}=(1+10)^{2004}$

$=1+C_1^{2004}\times10+C_2^{2004}\times10^2+\cdots+C_{2004}^{2004}\times10^{2004}$

$=20041+100t$（$t\in N$）

∴十位數字為 4

106 **類題 25** $45x^2-80x+36$

$x^{10}=[1+(x-1)]^{10}$

$=C_0^{10}+C_1^{10}(x-1)+C_2^{10}(x-1)^2+\underbrace{C_3^{10}(x-1)^3+\cdots}_{(x-1)^3 的倍式}$

∴餘式為 $=1+10(x-1)+45(x-1)^2=45x^2-80x+36$

類題 26 (B)(D)(E)

即 $C_r^n\cdot2^r\cdot3^{n-r}=C_{r-1}^n\cdot2^{r-1}\cdot3^{n-r+1}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{n!}{r!\times(n-r)!}\times2=\dfrac{n!}{(r-1)!\times(n-r+1)!}\times3$

$\Rightarrow\quad \dfrac{1}{r}\cdot2=\dfrac{1}{n-r+1}\cdot3$，即 $2(n-r+1)=3r$

∴ $2n+2=5r$，列表得

r	2	4	6	8	10	⋯
n	4	9	14	19	24	⋯

(A) n 可為奇數　(C)應為 2 組

範例 14 $\dfrac{9}{64}$

樣本空間有 $4\times4\times4\times4=256$ 種，回到原點

①上、上、下、下的排列方式有 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$ 種

②左、左、右、右的排列方式有 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$ 種

③上、下、左、右的排列方式有 $4!=24$ 種

∴ $P=\dfrac{6+6+24}{256}=\dfrac{9}{64}$

類題 27 $\dfrac{1}{12}$

3、3、8、9 之排列數為 $\dfrac{4!}{2!}=12$　∴ $P=\dfrac{1}{12}$

類題 28 (B)

$n(S)=4\times4\times4\times4$ 種

符合的有 $\underbrace{C_2^4}_{A>B}\times\underbrace{C_2^4}_{C>D}=36$ 種　∴ $P=\dfrac{36}{4\times4\times4\times4}=\dfrac{9}{64}$

107 **範例 15** $\dfrac{90}{119}$

再想一想 多算，算成兩倍

抽三位共有 $C_3^{35}=\dfrac{35\times34\times33}{6}=35\times17\times11$ 種

有男有女的有 $\underbrace{C_2^{20}\times C_1^{15}}_{二男一女}+\underbrace{C_1^{20}\times C_2^{15}}_{一男二女}=190\times15+20\times105$

$=2850+2100=4950$ 種

則所求的 $P=\dfrac{4950}{35\times17\times11}=\dfrac{90}{119}$

類題 29 $\dfrac{119}{190}$

高一共 $20\times\dfrac{55}{100}=11$ 人，高二共 $20\times\dfrac{25}{100}=5$ 人

高三共 $20\times\dfrac{20}{100}=4$ 人，任選 2 人共 $C_2^{20}=\dfrac{20\times19}{2\times1}=190$ 種

其中同年級的選法有 $C_2^{11}+C_2^5+C_2^4=55+10+6=71$ 種

∴所求 $P=\dfrac{190-71}{190}=\dfrac{119}{190}$

類題 30 $\dfrac{1}{9}$

所求 $=\dfrac{\overset{\substack{選一天兩人一起擔任\\\downarrow}}{C_1^5}\times C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2}{\underset{\substack{\uparrow\\週一}}{C_2^{10}}\times\underset{\substack{\uparrow\\週二}}{C_2^8}\times\underset{\substack{\uparrow\\週三}}{C_2^6}\times\underset{\substack{\uparrow\\週四}}{C_2^4}\times\underset{\substack{\uparrow\\週五}}{C_2^2}}=\dfrac{C_1^5}{C_2^{10}}=\dfrac{5}{45}=\dfrac{1}{9}$

範例 16 (D)

$R=\dfrac{1}{C_6^{42}}$，$r=\dfrac{1}{C_5^{39}}$

∴ $\dfrac{r}{R}=\dfrac{\frac{1}{C_5^{39}}}{\frac{1}{C_6^{42}}}=\dfrac{C_6^{42}}{C_5^{39}}=\dfrac{\frac{42\times41\times40\times39\times38\times37}{6\times5\times4\times3\times2\times1}}{\frac{39\times38\times37\times36\times35}{5\times4\times3\times2\times1}}$

$=\dfrac{42\times41\times40}{6\times36\times35}=\dfrac{82}{9}=9.11\cdots$

108 **類題 31** (E)

$P=\dfrac{C_6^{21}}{C_6^{42}}=\dfrac{\frac{21\times20\times19\times18\times17\times16}{6!}}{\frac{42\times41\times40\times39\times38\times37}{6!}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{18}{41}\times\dfrac{17}{39}\times\dfrac{16}{37}$

∴最接近 $\dfrac{1}{2^6}$

類題 32 (A)(D)

奇數有 1、3、5、7、9，偶數有 2、4、6、8、10

∴ $p=\dfrac{C_2^5+C_2^5}{C_2^{10}}=\dfrac{10+10}{45}=\dfrac{4}{9}$，$q=\dfrac{C_1^5\times C_1^5}{C_2^{10}}=\dfrac{5}{9}$

(C)(D) $|p-q|=\left|-\dfrac{1}{9}\right|=\dfrac{1}{9}>\dfrac{1}{10}>\dfrac{1}{20}$

範例 17 $\dfrac{759}{1024}$

$n(S)=2^{10}=1024$ 種

5 元兩正面　⇒　$C_2^2\times2^8=256$

5 元一正面

$\Rightarrow\quad C_1^2\times(\underbrace{C_2^8+C_3^8+C_4^8+\cdots+C_8^8}_{\text{一元至少 2 正}})=2\times(2^8-C_0^8-C_1^8)$

$\quad=2\times(256-1-8)=494$

5 元沒正面 $\Rightarrow\quad C_0^2\times(C_7^8+C_8^8)=1\times(8+1)=9$

$\therefore$所求 $=\dfrac{256+494+9}{1024}=\dfrac{759}{1024}$

類題 33 (A)(B)(C)(D)

P(甲贏乙)$=\dfrac{4\times6}{36}=\dfrac{2}{3}$

P(乙贏丙)$=\dfrac{6\times4}{36}=\dfrac{2}{3}$

P(丙贏丁)$=\dfrac{4\times3+2\times6}{36}=\dfrac{2}{3}$

P(丁贏甲)$=\dfrac{3\times2+3\times6}{36}=\dfrac{2}{3}$

類題 34 (C)(D)(E)

(A) $a_2=\dfrac{C_2^4}{2^4}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$　(B) $b_4=\dfrac{C_4^8}{2^8}=\dfrac{70}{256}$

(C) $b_2=\dfrac{C_2^8}{2^8}$，$b_6=\dfrac{C_6^8}{2^8}$

(D) $a_3=\dfrac{C_3^4}{2^4}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，$b_3=\dfrac{C_3^8}{2^8}=\dfrac{56}{256}=\dfrac{7}{32}$　$\therefore a_3>b_3$

(E) $b_0\sim b_8$ 為 $\dfrac{C_0^8}{2^8}$、$\dfrac{C_1^8}{2^8}$、…、$\underset{b_4\text{ 最大}}{\underset{\shortparallel}{\dfrac{C_4^8}{2^8}}}$、…、$\dfrac{C_8^8}{2^8}$

109 **範例 18** (A)(C)(D)(E)

(A)(B) $a=\log\dfrac{3}{2}=\log3-\log2\approx0.4771-0.3010=0.1761$

(C) $b=1-5a\approx1-5\times0.1761=0.1195<\dfrac{1}{6}$

(D) $\log\dfrac{4}{3}=2\log2-\log3\approx2\times0.3010-0.4771=0.1249$

由(C)知 $b\approx0.1195$　$\therefore b<\log\dfrac{4}{3}$

(E) $\because a\approx0.1761$，$b\approx0.1195$　$\therefore a>b$

類題 35 $\dfrac{5}{9}$

$$(甲,乙)，甲贏=\left\{\begin{array}{l}(1,1)\\(2,1)(2,2)\\(3,1)(3,2)(3,3)\\(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)\\(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)\\(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)\end{array}\right\}共 20 種$$

$n(S)=6\times6=36$　$\therefore P=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$

類題 36 (D)

和為 6 有 $(2,4)$、$(3,3)$、$(4,2)$

和為 7 有 $(2,5)$、$(3,4)$、$(4,3)$、$(5,2)$

和為 8 有 $(2,6)$、$(3,5)$、$(4,4)$、$(5,3)$、$(6,2)$

和為 9 有 $(2,7)$、$(3,6)$、$(4,5)$、$(5,4)$、$(6,3)$、$(7,2)$

$\Rightarrow$　最多

和為 10 有 $(3,7)$、$(4,6)$、$(5,5)$、$(6,4)$、$(7,3)$

範例 19 (B)

$n(S)=10\times10$，用數對 (□,□) 表示所抽的球號

差 0 的情形有 $(0,0)$、$(1,1)$、…、$(9,9)$ 共 10 種

差 1 的情形有 $\left.\begin{array}{l}(1,0)、(2,1)、\cdots、(9,8)\\(0,1)、(1,2)、\cdots、(8,9)\end{array}\right\}$ 共 18 種

差 2 的情形有 $\left.\begin{array}{l}(2,0)、(3,1)、\cdots、(9,7)\\(0,2)、(1,3)、\cdots、(7,9)\end{array}\right\}$ 共 16 種

$\Rightarrow$　差距再增加，樣本會減少，所以差距為 1 的機率最大

110 **類題 37** (B)

$n(S)=C_3^5=10$ 種，和大於 14 有 $(8,6,1)$、$(8,6,2)$、$(8,6,3)$ 共 3 種　$\therefore P=\dfrac{3}{10}$

類題 38 $\dfrac{1}{25}$

設甲箱中有白球 x 個，乙箱中有白球 y 個

x、$y\in N$，且 $x<5$、$y<20$

則 $\dfrac{C_1^x\times C_1^y}{C_1^5\times C_1^{20}}=\dfrac{x\times y}{5\times20}=0.54\quad\Rightarrow\quad xy=54\quad\Rightarrow\quad x=3$，$y=18$

兩箱各取一球，兩球都是黑色的機率為

$\dfrac{C_1^2\times C_1^2}{C_1^5\times C_1^{20}}=\dfrac{2\times2}{5\times20}=\dfrac{1}{25}$

範例 20 (D)(E)

(A)(B)不一定

(C)因採隨機抽樣，小文、小美被抽中的機率應相等

(E) P(A、B 同時被抽中)$=\dfrac{C_2^2\times C_{78}^{798}}{C_{80}^{800}}=\dfrac{1\times\dfrac{798!}{78!\times720!}}{\dfrac{800!}{80!\times720!}}$

$=\dfrac{798!\times80!}{800!\times78!}=\dfrac{80\times79}{800\times799}<\dfrac{80\times80}{800\times800}=\dfrac{1}{100}$

類題 39 (A)(C)

甲方法中，每位老師被選的機率為 $\dfrac{1}{4}$

$\therefore$每位學生被選機率也是 $\dfrac{1}{4}$

乙方法中，愛班被選的機率較大

$\therefore$愛班學生被選機率會大於 $\dfrac{1}{4}$

111 **類題 40** (C)(D)

(A)第一題答錯的，B 組有 20 人，C 組有 30 人，D 組有 80 人

(B)第二題答錯的，B 組有 20 人，C 組有 70 人，D 組有 100 人

故抽一人為 B 組的機率應為 $\dfrac{20}{20+70+100}<0.5$

(C)全體第一題答對率為 $\dfrac{100+80+70+20}{400}=\dfrac{270}{400}=67.5\%$

全體第二題答對率為 $\dfrac{100+80+30+0}{400}=\dfrac{210}{400}=52.5\%$

故全體第一題答對率比第二題高 15%

(D) $\because P$(對第二題)$<P$(對第一題)

$\therefore P$(一、二都對)$\le P$(對第二題)$=0.3$

範例 21 16

兩骰點數 (x,y) 有 $6\times6=36$ 種，有獎金 36 元的樣本為

x	1	2	3	4	5	6	1～5	6
y	5	4	3	2	1	1～5	6	6

，共 16 個

$\therefore E=\dfrac{16}{36}\times36+0=16$ 元

類題 41 23

設所求為 n，箱中共 $n+7$ 顆球

則 $E=\dfrac{2}{n+7}\times2000+\dfrac{5}{n+7}\times1000+\dfrac{n}{n+7}\times0=\dfrac{9000}{n+7}=300$ 元

$n+7=\dfrac{9000}{300}=30$，得 $n=23$

類題 42 750

E（抽一個）$=100\times\dfrac{1}{4}+200\times\dfrac{1}{4}+300\times\dfrac{1}{4}+400\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1000}{4}=250$ 元

E（抽三個）$=250\times3=750$ 元即所求

112 **範例 22** $\dfrac{25}{16}$

C、D、E 全猜對的機率為 $\dfrac{1}{8}$，恰錯一個選項的機率為 $\dfrac{3}{8}$

所求 $E=\dfrac{1}{8}\times5+\dfrac{3}{8}\times2.5+\dfrac{4}{8}\times0=\dfrac{5+7.5}{8}=\dfrac{25}{16}$ 分

類題 43 甲地

甲地的期望值為 $0.6\times10000+0.4\times(-7000)$

$=6000-2800=3200$ 萬元

乙地的期望值為 $0.7\times6000+0.3\times(-5000)$

$=4200-1500=2700$ 萬元

$\because 3200>2700$　$\therefore$應選甲地投資

類題 44 ⑴ 350 元　⑵ 70%

⑴ $E=5000000\times\dfrac{4}{2000000}+100000\times\dfrac{8}{2000000}$

$+50000\times\dfrac{32}{2000000}+10000\times\dfrac{400}{2000000}+8000\times\dfrac{3100}{2000000}$

$+5000\times\dfrac{36000}{2000000}+2000\times\dfrac{19200}{2000000}+1000\times\dfrac{80000}{2000000}$

$+600\times\dfrac{184000}{2000000}+500\times\dfrac{480000}{2000000}=\dfrac{700000000}{2000000}=350$ 元

⑵回報率 $=\dfrac{350}{500}\times100\%=70\%$

綜　合　實　力　測　驗

1.(C)　2.(E)　3.(B)　4.(E)　5.(A)(B)　6.(A)(B)(E)
7.(A)(B)(C)(D)　8.(A)(C)(D)　9. 15　10. 9
11. 180　12. $\dfrac{6}{7}$　13.⑴(D)　⑵ 35　⑶ 30；$\dfrac{1175}{3}$

113 1. $P\Rightarrow Q$ 同義命題是 $\sim Q\Rightarrow\sim P$

2. 一般項為 $C_r^5(ax^2)^{5-r}\cdot(-\dfrac{1}{x})^r=(-1)^r\cdot C_r^5\cdot a^{5-r}\cdot x^{10-2r}\cdot x^{-r}$

$=(-1)^r\cdot C_r^5\cdot a^{5-r}\cdot x^{10-3r}$

令 $10-3r=4$，則 $r=2$

$(-1)^2C_2^5a^3=80\Rightarrow10a^3=80\Rightarrow a=2$

3.

機率	$\dfrac{C_2^2}{C_2^{10}}$	$\dfrac{C_1^2C_1^8}{C_2^{10}}$	$\dfrac{C_2^8}{C_2^{10}}$
報酬	900 元	90 元	0 元

$E=900\times\dfrac{1}{45}+90\times\dfrac{16}{45}+0=20+32+0=52$ 元

4. ① 1,1,1,1,0,0,0,0 $\Rightarrow\dfrac{8!}{4!4!}=70$

② 1,1,1,1,1,−1,0,0 $\Rightarrow\dfrac{8!}{5!2!}=168$

③ 1,1,1,1,1,1,−1,−1 $\Rightarrow\dfrac{8!}{6!2!}=28$

$70+168+28=266$ 種

5. (A) $4!\times P_2^5=480$ 種　ˇ丙ˇ丁ˇ戊ˇ己ˇ

(B) $\dfrac{6!}{2!}=360$ 種　○丙丁○戊己

(C) $\dfrac{C_2^4\cdot C_2^2}{2!}=3$ 種

(D) $\underbrace{C_2^6}_{2男}\times\underbrace{C_1^4}_{1女}+\underbrace{C_1^6}_{1男}\times\underbrace{C_2^4}_{2女}=60+36=96$ 種

(E) $\underbrace{P_3^8}_{\substack{7個位子有\\8個空隙}}=336$ 種

6. (A)巴斯卡定理

(C) $C_0^8+C_2^8+C_4^8+C_6^8+C_8^8=C_1^8+C_3^8+C_5^8+C_7^8=2^7$

(D) $C_{10}^{20}+C_{11}^{20}+\cdots+C_{19}^{20}+C_{20}^{20}$

$=\dfrac{1}{2}\times(C_{10}^{20}+C_{10}^{20}+C_{11}^{20}+C_{11}^{20}+\cdots+C_{20}^{20}+C_{20}^{20})$

$=\dfrac{1}{2}\times[C_{10}^{20}+(C_0^{20}+C_1^{20}+\cdots+C_{20}^{20})]$

$=\dfrac{1}{2}\times(C_{10}^{20}+2^{20})=\dfrac{1}{2}C_{10}^{20}+2^{19}\neq2^{19}$

(E) $12^{10}=(1+11)^{10}=C_0^{10}+C_1^{10}\times11+\underbrace{C_2^{10}\times11^2+\cdots+C_{10}^{10}11^{10}}_{121的倍數}$

$=111+121t$，$t\in N$

114 7. (A) (　, 5,　)：$\dfrac{6\times1\times6}{6^3}=\dfrac{1}{6}$

(B) $1-P$（沒有 5 點）$=1-\dfrac{5\times5\times5}{6^3}=\dfrac{91}{216}$

(C) $\dfrac{6\times5\times4}{6^3}=\dfrac{5}{9}$

(D)（偶,偶,奇）：$\dfrac{C_2^3\times3\times3\times3}{216}=\dfrac{3}{8}$

(E)公比 $r=1$：(1,1,1),(2,2,2),⋯,(6,6,6)

公比 $r=2$：(1,2,4)

$\dfrac{6+3!}{6^3}=\dfrac{1}{18}$

8. (A) $\dfrac{C_3^4\times3!\times5!}{8!}=\dfrac{1}{14}$

(B) $\dfrac{4!\times4!}{8!}=\dfrac{1}{70}$

(C) $\dfrac{4!\times\overset{上下互換}{2^4}}{8!}=\dfrac{1}{105}$

2	5	8	3
7	4	1	6

(D) $\dfrac{C_4^8\times C_4^4}{8!}=\dfrac{1}{576}$

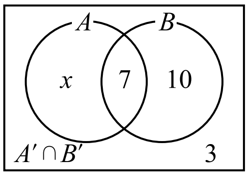
(E)設 $\begin{cases} 1 \text{ 在第一列為 } A \text{ 事件} \\ 2 \text{ 在第二列為 } B \text{ 事件} \end{cases}$

$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

$=1-\dfrac{C_1^4\times 7!}{8!}-\dfrac{C_1^4\times 7!}{8!}+\dfrac{C_1^4\times C_1^4\times 6!}{8!}$

$=1-\dfrac{4}{8}-\dfrac{4}{8}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{7}$

9. 設班上戴眼鏡的同學表 A 事件
男生表 B 事件，女生表 B' 事件
$A'\cap B'$ 表女生沒戴眼鏡的事件
$x+7+10+3=35$　$\therefore x=15$
$n(A\cap B')=15$



10. $5\times 3\times (C_1^n+C_2^n)=675$　$\Rightarrow$　$n+\dfrac{n(n-1)}{2}=45$
$\Rightarrow$　$2n+n^2-n=90$　$\Rightarrow$　$n(n+1)=90$
得 $n=9$

11. ①選到陳老師：$\underbrace{C_2^6}_{\text{剩下的 6 人選 2 人}}\times \underbrace{2}_{\text{北區}}\times \underbrace{2}_{\text{中區}}\times \underbrace{1}_{\text{南區}}=60$
②沒選到陳老師：$C_3^6\times 3!=20\times 6=120$
故共有 $60+120=180$ 種

12. $n(S)=15$
所求 $=\dfrac{\overset{\text{5 個號碼選 2 個號碼}}{C_2^5}\times \overset{\text{從 3 個顏色的球中選 1 個}}{C_1^3}\times C_1^3}{C_2^{15}}=\dfrac{90}{105}=\dfrac{6}{7}$

13. (1) $\dfrac{C_2^{10}}{C_2^{30}}=\dfrac{45}{435}=\dfrac{9}{87}$

(2)

日需求量 x	20	30	40	50
機率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(x)=20\times\dfrac{1}{6}+30\times\dfrac{1}{3}+40\times\dfrac{1}{3}+50\times\dfrac{1}{6}=35$
故日需求量的期望值為 35 個

(3)因 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=1$
故每天生產量不是 20 個、30 個、40 個，就是 50 個

麵包編號	20	30	40	50
賣出機率	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

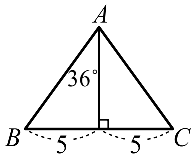
①若生產 20 個，可得利潤 $20\times(35-20)\times 1=300$ 元
②若生產 30 個，則可能賣出 20 個或 30 個
賣出 20 個，報廢 10 個的機率為 $\dfrac{1}{6}$，賣出 30 個的機率為 $\dfrac{5}{6}$，第 21 ～ 30 個麵包的利潤為
$(30-20)\times\dfrac{5}{6}\times(35-20)+(30-20)\times\dfrac{1}{6}\times(-20)$
$=125-\dfrac{200}{6}>0$
③若生產 40 個，則第 31 ～ 40 個麵包的利潤為
$(40-30)\times\dfrac{3}{6}\times(35-20)+(40-30)\times\dfrac{3}{6}\times(-20)$
$=75-100<0$
④若生產 50 個，則第 41 ～ 50 個麵包的利潤為
$(50-40)\times\dfrac{1}{6}\times(35-20)+(50-40)\times\dfrac{5}{6}\times(-20)$
$=25-\dfrac{1000}{6}<0$
應推出 30 個蛋糕，才能得到最大利潤
$300+125-\dfrac{200}{6}=\dfrac{2350}{6}=\dfrac{1175}{3}$

6 三角比的定義及其性質

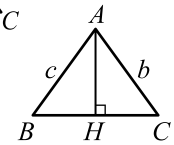
115 ❶ A (E)　B $\dfrac{4}{5}$；$\dfrac{3}{4}$　C (C)(D)

A $\because \sin 36^\circ=\dfrac{5}{\overline{AB}}$ $\left(\dfrac{\text{對}}{\text{斜}}\right)$

$\therefore \overline{AB}=\dfrac{5}{\sin 36^\circ}$



C $\overline{AH}=c\sin B$
$=b\sin C$



116 ❷ A 三；230°　B (D)

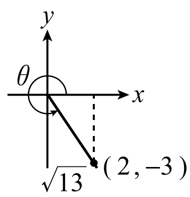
A $950^\circ\div 360^\circ=2\cdots 230^\circ$

B $-720^\circ<\theta<-630^\circ$

❸ A $-\dfrac{3}{\sqrt{13}}$；$\dfrac{2}{\sqrt{13}}$；$-\dfrac{3}{2}$　B -11　C 5

A 如右圖，得 $\sin\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\tan\theta=-\dfrac{3}{2}$

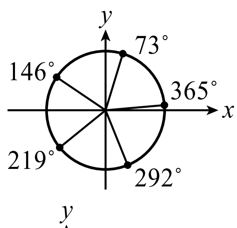


B $\tan\theta=\dfrac{2k-3}{k+1}=\dfrac{5}{2}$
得 $4k-6=5k+5$　$\therefore k=-11$

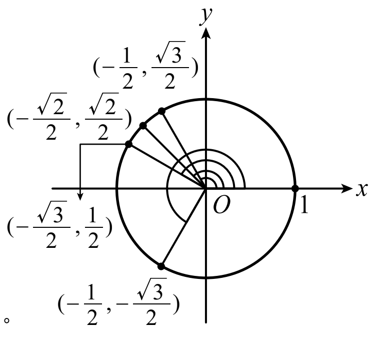
C $\angle POQ=160^\circ-70^\circ=90^\circ$　$\therefore \Delta POQ$ 為直角三角形
$\overline{PQ}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

❹ A (E)　B (1) 0；1　(2) 1；0　(3) 0；-1　(4) -1；0
D 1230°

A 作單位圓，看 73°、146°、219°、292°、365° 的 y 坐標
知 $\sin 292^\circ<\sin 219^\circ<\sin 365^\circ$
$<\sin 146^\circ<\sin 73^\circ$
$\therefore$ 中位數為 $\sin 365^\circ$



117 C (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$-\dfrac{1}{2}$
(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(3) $\dfrac{1}{2}$；$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$-\dfrac{1}{2}$



D $30^\circ+360^\circ\times 4=1470^\circ$
$150^\circ+360^\circ\times 3=1230^\circ$
$\therefore 1230^\circ$ 最接近 1300°

5 A $\frac{3}{8}$ B $\frac{3}{5}$ 或 -1 C $\frac{1}{16}$；$-\frac{3}{2}$

A 平方，得 $\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$

即 $1-2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin x\cos x=\frac{3}{8}$

B 移 $\cos\theta$，$2\sin\theta=1+\cos\theta$
平方為 $4\sin^2\theta=(1+\cos\theta)^2$
即 $4(1-\cos^2\theta)=1+2\cos\theta+\cos^2\theta$
得 $5\cos^2\theta+2\cos\theta-3=(5\cos\theta-3)(\cos\theta+1)=0$
$\therefore \cos\theta=\frac{3}{5}$ 或 -1

C $f(x)=(1-\sin^2x)+\frac{1}{2}\sin x-1$

$=-(\sin^2x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16})=-(\sin x-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{16}$

$\therefore \sin x=\frac{1}{4}$ 時，$f(x)$ 有最大值為 $\frac{1}{16}$

$\sin x=-1$ 時，$f(x)$ 有最小值為 $-\frac{25}{16}+\frac{1}{16}=-\frac{3}{2}$

118 **6** A (1) $\cos 50^\circ$ (2) $\sin 70^\circ$
B (1) $\sin 80^\circ$ (2) $-\cos 50^\circ$ (3) $-\tan 10^\circ$
C (1) $-\sin 10^\circ$ (2) $\cos 40^\circ$ (3) $-\tan 80^\circ$
D (1) $-\sin 40^\circ$ (2) $-\cos 70^\circ$ (3) $\tan 110^\circ$

7 A (1) 8 (2) 12 B $(\sqrt{3}+1):\sqrt{2}:2$ C $6\sqrt{2}$

A $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R \Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{4}}=\frac{b}{\frac{1}{3}}=2R$

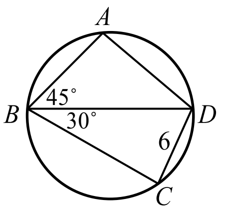
(1) $b=8$ (2) $R=12$

B 即 $c:a:b$
$=\sin C:\sin A:\sin B=\sin 105^\circ:\sin 30^\circ:\sin 45^\circ$
$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}:\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2}):2:2\sqrt{2}$
$=(\sqrt{3}+1):\sqrt{2}:2$

C $\because \frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore \overline{AD}=\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ$

$=\frac{6}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$



8 A $\frac{29}{56}$ B $\sqrt{39}$ C 7

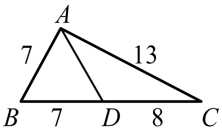
A $\cos A=\frac{4^2+7^2-6^2}{2\cdot4\cdot7}=\frac{29}{56}$

119 B $\overline{BC}^2=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cos120^\circ=39$ $\therefore \overline{BC}=\sqrt{39}$

C $\cos B=\frac{49+49-\overline{AD}^2}{2\cdot7\cdot7}=\frac{49+225-169}{2\cdot7\cdot15}$

$\Rightarrow \frac{98-\overline{AD}^2}{7}=\frac{105}{15}=7$

$\therefore \overline{AD}^2=49$，得 $\overline{AD}=7$

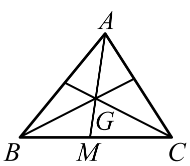


9 A $4\sqrt{7}$ B 100

A $\overline{GM}=\frac{1}{2}\overline{GA}=3$

$\therefore 5^2+7^2=2(3^2+\overline{BM}^2)$

得 $\overline{BM}=2\sqrt{7}$，則 $\overline{BC}=4\sqrt{7}$

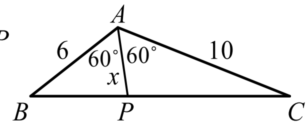


B 所求 $=5^2+5^2+5^2+5^2=100$

10 A $5\sqrt{3}$ B $\frac{15}{4}$ C $10\sqrt{3}$；$\sqrt{3}$；$\frac{7\sqrt{3}}{3}$

A $\Delta=\frac{1}{2}\times5\times4\times\sin60^\circ=5\sqrt{3}$

B 設 $\overline{AP}=x$
由 $\Delta ABC=\Delta ABP+\Delta ACP$
得 $\frac{1}{2}\cdot6\cdot10\cdot\sin120^\circ$
$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot10\cdot x\cdot\sin60^\circ$
同乘 2 並約去 $\sin120^\circ$，得 $60=6x+10x$
所以 $x=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}$



120 C $s=\frac{8+5+7}{2}=10$，$\Delta=\sqrt{10\cdot2\cdot5\cdot3}=10\sqrt{3}=r\cdot10$

$\therefore r=\sqrt{3}$，$R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{8\cdot5\cdot7}{4\cdot10\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

11 A (1) 60° (2) 120° (3) 45° B (1) 5 (2) $\frac{4}{5}$ (3) 10°

B (1)令 $\theta=\tan^{-1}5$，則 $\tan(\tan^{-1}5)=\tan\theta=5$

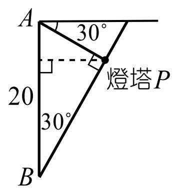
(2)令 $\theta=\cos^{-1}\frac{3}{5}$，則 $\cos\theta=\frac{3}{5}$

所以 $\sin(\cos^{-1}\frac{3}{5})=\sin\theta=\frac{4}{5}$

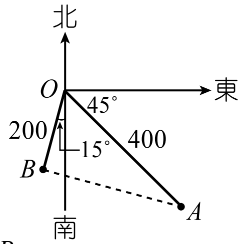
(3) $\sin100^\circ=\sin80^\circ=\cos10^\circ$
$\therefore \cos^{-1}(\sin100^\circ)=\cos^{-1}(\cos10^\circ)=10^\circ$

12 A $5\sqrt{3}$ B 17 C 600 D (D)

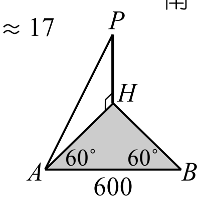
A $\overline{PA}=10$
$\overline{PB}=10\sqrt{3}$
$\therefore P$ 到 $\overline{AB}$ 距離為 $\frac{10\times10\sqrt{3}}{20}=5\sqrt{3}$



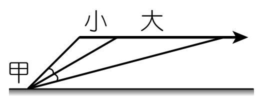
B $\because \angle AOB=60^\circ$
且 $\overline{OA}:\overline{OB}=2:1$
$\Rightarrow$ ΔOAB 為直角三角形
$\overline{AB}=200\sqrt{3}$
$\therefore$平均速度 $=\frac{200\sqrt{3}}{20}=10\sqrt{3}$
$\approx 10\times1.732\approx17$



121 C $\because \Delta HAB$ 為正三角形
$\therefore \overline{HA}=\overline{AB}=600$
$\because \Delta PHA$ 為 $1:1:\sqrt{2}$
$\therefore \overline{PH}=\overline{HA}=600$

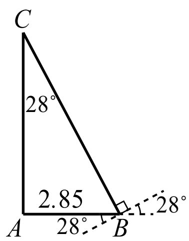


D 由圖可知氣球加速離去



範例 1 6.1

$\angle ABC=90^\circ-28^\circ=62^\circ$
$\angle ACB=90^\circ-62^\circ=28^\circ$
$\sin C=\sin28^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$
$\therefore 0.4695=\frac{2.85}{\overline{BC}}$
得 $\overline{BC}=\frac{2.85}{0.4695}\approx6.07\approx6.1$ 公尺



類題 1 170

設 $\overline{AB}=x$，則 $\overline{BC}=\frac{x}{2}$

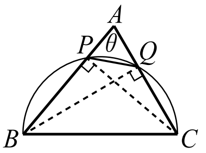
由 $\sin\angle EFC=\frac{3}{5}$，知 $\cos\angle EFC=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$

$\therefore \cos\angle EFC=\frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}=\frac{\frac{x}{2}+51}{x}=\frac{4}{5}$

得 $\frac{5}{2}x+255=4x \quad\Rightarrow\quad x=170$

122 **類題 2** $\cos^2\theta$；$\cos\theta$

① $\overline{AP}=\overline{AC}\cos\theta$，$\overline{AQ}=\overline{AB}\cos\theta$



所求 $=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\sin\theta}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\theta}=\dfrac{\overline{AP}\cdot\overline{AQ}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}$

$=\dfrac{\overline{AC}\cdot\cos\theta\cdot\overline{AB}\cdot\cos\theta}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\cos^2\theta$

②由 $\Delta APQ\sim\Delta ACB$，得 $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BC}}=\sqrt{\dfrac{\Delta APQ}{\Delta ABC}}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

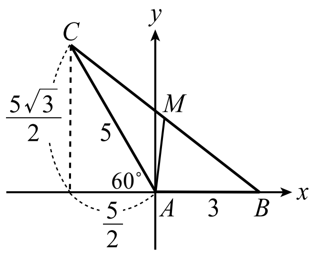
範例 2 $5\sqrt{3}$

令 $A(0,0)$、$B(3,0)$

則 C 坐標為 $(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$

$\therefore$ $\overline{BC}$ 中點為 $M(\frac{1}{4},\frac{5\sqrt{3}}{4})$

則 $\tan\angle BAM=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=5\sqrt{3}$



類題 3 $-\frac{3}{5}$；$-\frac{4}{5}$；$(-\frac{12}{11},-\frac{9}{11})$

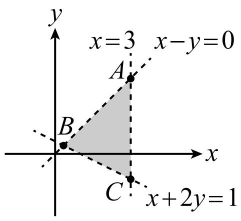
設 $P(k,-2k-3)$，則 $\tan\theta=\frac{-2k-3}{k}=\frac{3}{4}$

$\therefore k=-\frac{12}{11}$，代回得 $P(-\frac{12}{11},-\frac{9}{11})$，在第三象限

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$

類題 4 (B)(E)

$\begin{cases} x<3 & (左) \\ x-y>0 & (右) \\ x+2y>1 & (右) \end{cases}$ 的圖形如右



圍成區域為 ΔABC 的內部

頂點為 $A(3,3)$、$B(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$、$C(3,-1)$

因 $\tan 18.3^\circ\approx 0.33$

所以 θ 為 -18.3° ～ 45° 之間的同界角

(A)(C)若 (x,y) 在第四象限，則 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta<0$

(B)因 ΔABC 都在 y 軸之右　(D)若 $\theta=0^\circ$，則 $\cos\theta=1$

(E)$\because \frac{1}{\sqrt{2}}>\sin\theta>-\frac{1}{\sqrt{10}}$，$1\ge\cos\theta>\frac{1}{\sqrt{2}}$，$1>\tan\theta>-\frac{1}{3}$

123 **範例 3** (A)(C)

由公式解得兩根為 $\frac{2+\sqrt{4-12k}}{6}$、$\frac{2-\sqrt{4-12k}}{6}$

$\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=\frac{2+\sqrt{4-12k}}{6}+\frac{2-\sqrt{4-12k}}{6}=\frac{2}{3}\cdots① \\ \sin\theta\cos\theta=\frac{2+\sqrt{4-12k}}{6}\cdot\frac{2-\sqrt{4-12k}}{6}=\frac{4-(4-12k)}{36}=\frac{k}{3}\cdots② \end{cases}$

(A)(B)把①平方，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\frac{k}{3}=\frac{4}{9}$

$\therefore \frac{2k}{3}=-\frac{5}{9}$，得 $k=-\frac{5}{9}\times\frac{3}{2}=-\frac{5}{6}\approx-0.83$

(C)(D)由 $\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{3}=-\frac{5}{18}$ 知 θ 為鈍角

且 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

(E)將 $k=-\frac{5}{6}$ 代回，解 $18x^2-12x-5=0$

得 $x=\frac{12\pm\sqrt{144+360}}{2\times18}=\frac{12\pm6\sqrt{14}}{36}=\frac{2\pm\sqrt{14}}{6}$

$\therefore \sin\theta=\frac{2+\sqrt{14}}{6}$，$\cos\theta=\frac{2-\sqrt{14}}{6}$

類題 5 (E)

$a=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$，$b=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}>\sin^2\theta$

$c=\frac{\tan\theta\times\cos^2\theta}{(\tan^2\theta+1)\times\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\sin\theta\cos\theta$

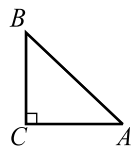
$\because 45^\circ<\theta<50^\circ \quad\therefore 0<\cos\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<1$

則 $\sin\theta\cos\theta<\sin^2\theta \quad\therefore c<a<b$

類題 6 $\frac{9}{8}$

用公式解，$\sin A=\frac{5+\sqrt{25-16m}}{8}$，$\sin B=\frac{5-\sqrt{25-16m}}{8}$

如右圖，兩根為 $\sin A$、$\sin B$ 且 $A+B=90^\circ$



$\Rightarrow\quad \sin B=\sin(90^\circ-A)=\cos A$

$\because \sin A+\cos A=\sin A+\sin B$

$=\frac{5+\sqrt{25-16m}}{8}+\frac{5-\sqrt{25-16m}}{8}=\frac{5}{4}$

兩邊平方得 $1+2\sin A\cos A=\frac{25}{16}\quad\therefore \sin A\cdot\cos A=\frac{9}{32}$

$\Rightarrow\quad \frac{5+\sqrt{25-16m}}{8}\times\frac{5-\sqrt{25-16m}}{8}$

$=\frac{25-(25-16m)}{64}=\frac{m}{4}=\frac{9}{32}\quad\Rightarrow\quad m=\frac{9}{8}$

124 **範例 4** (1)(D)　(2)(B)

(1) $\sin A\overset{補角}{=\!=}\sin B\overset{餘角}{=\!=}\cos C\overset{少\,180^\circ}{=\!=\!=}-\cos D\overset{角變號}{=\!=\!=}-\cos E$

$=-\cos(270^\circ+F)\overset{少\,180^\circ}{=\!=\!=}\cos(90^\circ+F)\overset{餘角}{=\!=}\sin(-F)$

$\overset{角變號}{=\!=\!=}-\sin F$。故選(D)

(2) $\cos A\overset{補角}{=\!=}-\cos B\overset{餘角}{=\!=}-\sin C\overset{少\,180^\circ}{=\!=\!=}\sin D\overset{角變號}{=\!=\!=}-\sin E$

$=-\sin(F+270^\circ)\overset{少\,180^\circ}{=\!=\!=}\sin(F+90^\circ)\overset{餘角}{=\!=}\cos(-F)$

$\overset{角變號}{=\!=\!=}\cos F$。故選(B)

《另解》

$A=180^\circ-B=180^\circ-(90^\circ-C)=90^\circ+(180^\circ+D)$

$=270^\circ+(-E)=270^\circ+(-270^\circ-F)=-F$

$\therefore \sin A=\sin(-F)=-\sin F$，$\cos A=\cos(-F)=\cos F$

類題 7 (B)(C)

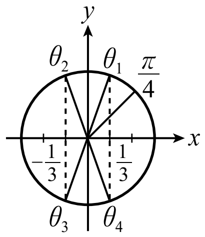
(A)應 $\theta_1 > 45^\circ$

(B) θ_1 與 θ_2 互補

(C) $\cos\theta_3 < 0$

(D)應 $\sin\theta_4 < 0$

(E)應 $\theta_4 < \theta_3 + 90^\circ$



類題 8 (B)

$\because \angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$

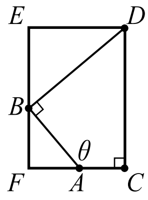
且 $\angle ABF + \angle EBD = 90^\circ$

$\therefore \angle EBD = \angle BAF = 180^\circ - \theta$

則 $\overline{CD} = \overline{BF} + \overline{BE}$

$= \overline{AB}\cdot\sin\angle BAF + \overline{BD}\cdot\cos\angle EBD$

$= a\sin(180^\circ - \theta) + b\cos(180^\circ - \theta) = a\sin\theta - b\cos\theta$



125 **範例 5** $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

ΔABE 三內角為 $15^\circ - 45^\circ - 120^\circ$，由正弦定理知

$\frac{\overline{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{BE}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{AE}}{\sin 45^\circ}$，即 $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{BE}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\overline{AE}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

得 $\overline{BE} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

$\overline{AE} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

所以 $\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = \overline{AE} - \overline{BE} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

$= \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

類題 9 (C)

令陽光與山坡成夾角 θ，則 $\theta = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ$

由正弦定理 $\frac{11}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin 70^\circ}$，而 $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$

$\therefore 11 \cdot 0.940 \approx x \cdot \frac{1}{2}$，得 $x \approx 20.68$

類題 10 (C)

公式解 $8x^2 - 4\sqrt{3}x + 1 = 0$

$\Rightarrow\quad x = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-32}}{16} = \frac{4\sqrt{3} \pm 4}{16} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{4}$

$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$，$\sin B = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$，由正弦定理知

$\frac{a}{\sin A} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{4}} = 2R \quad \therefore R = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$

126 **範例 6** 7

設 $\overline{AP} = x$，則 $\overline{AR} = \overline{PQ} = \overline{PB} = 13 - x$

$\square APQR = \overline{AP} \times \overline{AR} \times \sin 60^\circ = x(13-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

得 $x(13-x) = 40$，解 $x^2 - 13x + 40 = (x-5)(x-8) = 0$

$\therefore x = 5$ 或 8，由餘弦定理

$\overline{PR}^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60^\circ = 25 + 64 - 40 = 49$

$\therefore \overline{PR} = 7$

類題 11 13

由外角性質知 $\angle EBD = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

$\therefore \Delta EBD$ 為正三角形，則 $\overline{BE} = 7$

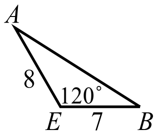
由外角性質知 $\angle CAD = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

$\therefore \Delta ACD$ 為等腰三角形，則 $\overline{AD} = 15$

$\therefore \overline{AE} = \overline{AD} - \overline{DE} = 15 - 7 = 8$，$\Delta ABE$ 用餘弦定理

$\overline{AB}^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 49 + 64 + 56 = 169$

$\therefore \overline{AB} = \sqrt{169} = 13$



類題 12 $\frac{\sqrt{73}}{10}$

設 $\overline{AB} = 10$，則 $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = 1$，$\overline{A_1B} = 9$

$\therefore \overline{A_1B_1}^2 = 1^2 + 9^2 - 2 \times 1 \times 9 \times \cos 60^\circ = 1 + 81 - 9 = 73$

$\therefore \overline{A_1B_1} = \sqrt{73}$，則 $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{73}}{10}$

127 **範例 7** $\sqrt{32}$

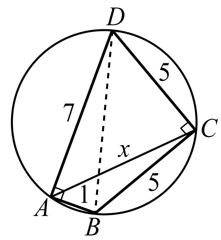
$\because \angle A + \angle C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle B$ 與 $\angle D$ 互補

得 $\cos B = -\cos D$，設 $\overline{AC} = x$

由餘弦定理得

$\frac{1^2 + 5^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 5} = -\frac{5^2 + 7^2 - x^2}{2 \cdot 5 \cdot 7}$



$\Rightarrow\quad \frac{26 - x^2}{1} = \frac{74 - x^2}{-7}$，即 $-182 + 7x^2 = 74 - x^2$

$\therefore x^2 = 32$，得 $x = \sqrt{32}$ 為所求

類題 13 (1) $\sqrt{19}$　(2) $\frac{21\sqrt{3}}{4}$　(3) $\frac{19}{3}\pi$

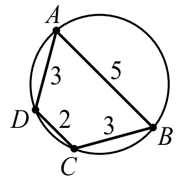
$\overline{AC}^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos D$

$= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos B$

$\because \angle B + \angle D = 180^\circ$

$\Rightarrow\quad \cos D = -\cos B \quad \therefore 42 \cdot \cos B = 21$

得 $\cos B = \frac{1}{2}$，故 $\angle B = 60^\circ$



(1) $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{19}$

(2) $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

(3) ΔABC 中，$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R$

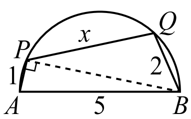
$\Rightarrow\quad R = \sqrt{19} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$

$\therefore$圓面積 $= \pi R^2 = \frac{19}{3}\pi$

類題 14 $\frac{-2 + 6\sqrt{14}}{5}$

設 $\overline{PQ} = x$，$\overline{BP} = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$

$\because \angle PAB$ 與 $\angle PQB$ 互補



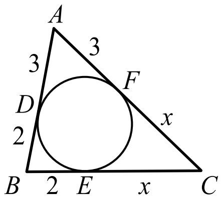
由 $\cos\angle PAB = \frac{1}{5}$，得 $\cos\angle PQB = \frac{x^2 + 2^2 - \sqrt{24}^2}{2 \cdot x \cdot 2} = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow\quad 5x^2 + 4x - 100 = 0$

$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 2000}}{2 \times 5}$（取正）$= \frac{-2 + 6\sqrt{14}}{5}$

範例 8 7

$s=\dfrac{6+4+2x}{2}=x+5$



ΔABC 面積

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$

$\sqrt{(x+5)\cdot 3\cdot 2\cdot x}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}(x+5)$

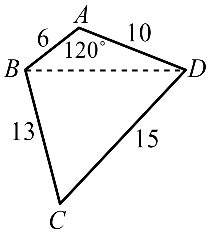
$\Rightarrow\ \ x^2+x-20=0\ \ \Rightarrow\ \ (x+5)(x-4)=0$

$\Rightarrow\ \ x=-5$（不合）或 4

$\therefore\ \overline{AC}=\overline{AF}+\overline{FC}=3+4=7$

128 **類題 15** $15\sqrt{3}+84$

連接 $\overline{BD}$



$\overline{BD}=\sqrt{36+100-2\cdot 6\cdot 10\cdot\cos 120^\circ}$

$=\sqrt{136+60}=\sqrt{196}=14$

四邊形 $ABCD$ 之面積

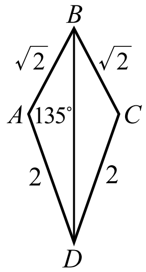
$=\Delta ABD$ 面積 $+\ \Delta BCD$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 10\times\sin 120^\circ+\sqrt{21\times 7\times 8\times 6}=15\sqrt{3}+84$

（ΔBCD 周長 $=14+13+15=42$，海龍公式之 $s=21$）

類題 16 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

由餘弦定理



$\overline{BD}^2=\sqrt{2}^{\,2}+2^2-2\times\sqrt{2}\times 2\times\cos 135^\circ$

$=2+4+4=10$

$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{10}$，利用面積

$\Delta ABD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2\times\sin 135^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times h$

其中 h 為「以 $\overline{BD}$ 為底的高」

得 $1=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times h$，所以 $h=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

則 $\overline{AC}=2h=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

範例 9 $\dfrac{16}{7}$

$\because\ \overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{PC}$

設 $\overline{AC}=4x$，$\overline{PC}=3x$，且 $\cos\angle BAP=\cos\angle CAP$

$\therefore\ \dfrac{4^2+2^2-3^2}{2\cdot 4\cdot 2}=\dfrac{2^2+(4x)^2-(3x)^2}{2\cdot 2\cdot 4x}$，約分，得 $11=\dfrac{7x^2+4}{x}$

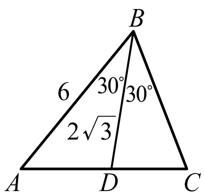
$\Rightarrow\ \ 7x^2-11x+4=(7x-4)(x-1)=0$

$\Rightarrow\ \ x=\dfrac{4}{7}$ 或 1（不合）　$\therefore\ \overline{AC}=4x=\dfrac{16}{7}$

類題 17 $3\sqrt{3}$

設 $\overline{BC}=x$

由 $\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot x\cdot\sin 60^\circ$



$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot x\cdot\sin 30^\circ$

得 $x=3$

則 $\overline{AC}^{\,2}=6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot\cos 60^\circ=36+9-18=27$

得 $\overline{AC}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

類題 18 $\dfrac{\sqrt{210}}{7}$

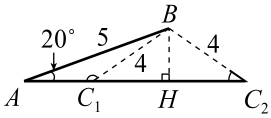
$\cos B=\dfrac{9+4x^2-2x^2}{2\cdot 3\cdot 2x}=\dfrac{25+4x^2-3x^2}{2\cdot 5\cdot 2x}$

約分得 $\dfrac{9+2x^2}{3}=\dfrac{25+x^2}{5}\ \ \Rightarrow\ \ 45+10x^2=75+3x^2$

得 $7x^2=30\ \ \Rightarrow\ \ x=\sqrt{\dfrac{30}{7}}=\dfrac{\sqrt{210}}{7}$

129 **範例 10** (B)(E)

作圖，先作 $\angle A=20^\circ$



再作 B 使 $\overline{AB}=5$

過 B 的高為 $\overline{BH}<\dfrac{5}{2}$

在 $\overrightarrow{AH}$ 上找 C 使 $\overline{BC}=4$ 有 C_1、C_2 兩種情形

所以此題的 SSA 有兩解，ΔABC_1 與 ΔABC_2

(A)有 $\angle ABC_1$ 及 $\angle ABC_2$ 兩種 $\angle B$

(B)雖 $\angle C$ 有 $\angle AC_1B$ 及 $\angle AC_2B$，但互為補角，所以正弦值相同

(C) ΔABC_1 比 ΔABC_2 小，所以面積值有兩種

(D) ΔABC_1 的內切圓半徑比 ΔABC_2 的要小

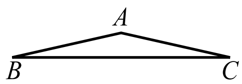
(E)由正弦定理，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle AC_1B}=2R_1$，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle AC_2B}=2R_2$

$\because\ \sin\angle AC_1B=\sin\angle AC_2B\ \ \ \therefore\ R_1=R_2$

類題 19 (A)(B)(E)

(A)令 $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$

(B)把等腰三角形壓扁，如右圖



使 $\angle B$、$\angle C$ 很小，$\angle A$ 很大

$\therefore\ \sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 都趨於 0

(C)若選項條件成立　$\Rightarrow$　$60^\circ<\angle A$、$\angle B$、$\angle C<120^\circ$

$\Rightarrow$　$180^\circ<\angle A+\angle B+\angle C$

(D)若選項條件成立　$\Rightarrow$　$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 為 30° 或 150°

但 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

(E) $\angle A$、$\angle B$ 為 30° 或 150°，$\angle C$ 為 60° 或 120°

$\therefore$令 $\angle A=\angle B=30^\circ$，$\angle C=120^\circ$

類題 20 (A)(B)

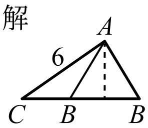
(A)由餘弦定理 $a^2=4^2+6^2-2\times 4\times 6\times\cos A$

可求出唯一的 a，即 SAS 決定唯一三角形

(B)由餘弦定理 $6^2=a^2+4^2-2\times a\times 4\times\cos B$

兩根乘積為負，恰解出一個正根，可求出唯一的 a

(C)作圖如右，知若 $\angle C$ 夠小，可知 $\overline{BC}$ 有兩解



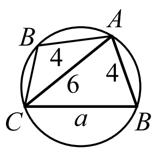
即 $4^2=6^2+a^2-2\times 6\times a\times\cos C$

有兩個正根，三角形不唯一

(D)面積 $=\dfrac{1}{2}\times 4\times 6\times\sin A$，$\angle A$ 有銳或鈍兩種

三角形有兩解

(E)作圖如右，給定外接圓，可有兩解



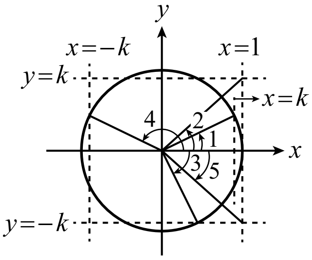
130 **範例 11** ⑴(A)(B)(D) ⑵(A)(B) ⑶(D)；(C)

如右圖，$\cos^{-1}k=\angle 1$

$\tan^{-1}k=\angle 2$，$\sin^{-1}(-k)=\angle 3$

$\cos^{-1}(-k)=\angle 4$

$\tan^{-1}(-k)=\angle 5$



⑴ $\angle 1$ ～ $\angle 5$ 的終邊在第一、二、四象限內

⑵當 k 由 0 遞增到 1，$\cos^{-1}k$ 由 90° 遞減到 0°，$\tan^{-1}k$ 由 0° 遞增到 45°，所以可找到 k 值使 $\cos^{-1}k=\tan^{-1}k$

按計算機知 $k=0.78615$ 使 $\cos^{-1}k$、$\tan^{-1}k$ 均約為 38.173°

⑶看出 $\angle 4=\cos^{-1}(-k)$ 最大，$\angle 3=\sin^{-1}(-k)$ 最小

類題 21 (B)(D)

(A) $\because \cos^{-1}1=0^\circ$

(B) $\because \angle A=\sin^{-1}1=90^\circ$，$\angle B=\tan^{-1}2$ 在 60° ～ 90° 之間

(C) $\angle A=\cos^{-1}\dfrac{-1}{2}=120^\circ$ $\quad\because \tan^{-1}\sqrt{3}=60^\circ$

$\therefore \angle B=\tan^{-1}2>60^\circ$，內角和會超過 180°

(D)令 $\cos^{-1}\dfrac{-1}{4}=\theta$，則 $\cos\theta=\dfrac{-1}{4}$，$\cos(180^\circ-\theta)=\dfrac{1}{4}$

$\therefore 180^\circ-\theta=\cos^{-1}\dfrac{1}{4}$，$\theta=180^\circ-\cos^{-1}\dfrac{1}{4}$

即 $\cos^{-1}\dfrac{-1}{4}=180^\circ-\cos^{-1}\dfrac{1}{4}$，$\angle A+\angle B=\cos^{-1}\dfrac{1}{3}+\cos^{-1}\dfrac{-1}{4}$

$=\underbrace{\cos^{-1}\dfrac{1}{3}}_{小}+(180^\circ-\underbrace{\cos^{-1}\dfrac{1}{4}}_{大})<180^\circ$

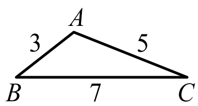
(E) $\angle A+\angle B=\cos^{-1}\dfrac{-1}{3}+\cos^{-1}\dfrac{1}{4}$

$=(180^\circ-\underbrace{\cos^{-1}\dfrac{1}{3}}_{小})+\underbrace{\cos^{-1}\dfrac{1}{4}}_{大}>180^\circ$，內角和超過 180°

類題 22 (A)(D)(E)

$\cos B=\dfrac{9+49-25}{2\cdot 3\cdot 7}=\dfrac{11}{14}$

$\cos C=\dfrac{25+49-9}{2\cdot 5\cdot 7}=\dfrac{13}{14}$



$\therefore p=14$，$q=11$，$r=14$，$s=13$

而 $\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx\dfrac{1.414}{2}=0.707$

$\therefore \cos C>\cos B>\cos 45^\circ$，得 $\angle C<\angle B<45^\circ$

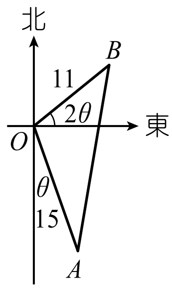
131 **範例 12** (D)

作圖如右，令燈塔為 O

$\angle AOB=(90^\circ-\theta)+2\theta=90^\circ+\theta$

$\because \sin\theta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \cos\angle AOB=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$



則由餘弦定理

$\overline{AB}^2=11^2+15^2-2\times 11\times 15\times\cos\angle AOB$

$\qquad=121+225+110=456$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{456}\approx 21.4$

則所需時間約為 $\dfrac{21.4}{10}=2.14$ 小時 $=128.4$ 分鐘

類題 23 (C)

令 $\overline{AB}=1$，由 $\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=0.577$ $\quad\therefore \overline{BC}=0.577$

由 $\tan 34^\circ=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=0.675$

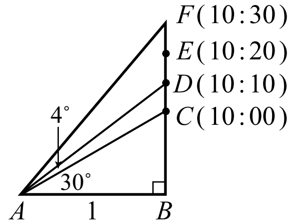
$\therefore \overline{BD}=0.675$

$\therefore \overline{CD}=0.675-0.577=0.098$

則 $\overline{CF}=0.098\times 3=0.294$

$\overline{BF}=\overline{BC}+\overline{CF}$

$=0.577+0.294=0.871$



$\therefore \tan\angle BAF=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{AB}}=0.871\approx\tan 41^\circ$

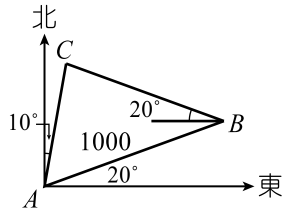
類題 24 653

$\angle ABC=20^\circ+20^\circ=40^\circ$

$\angle BAC=90^\circ-20^\circ-10^\circ=60^\circ$

$\therefore \angle ACB=180^\circ-40^\circ-60^\circ=80^\circ$

由正弦定理：$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}$



即 $\dfrac{1000}{\sin 80^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 40^\circ}$，而 $\sin 80^\circ=\cos 10^\circ$

$\therefore \dfrac{1000}{0.9848}=\dfrac{\overline{AC}}{0.6428}$

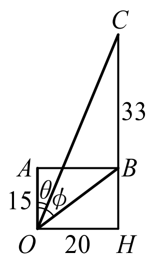
得 $\overline{AC}=\dfrac{1000}{0.9848}\times 0.6428=\dfrac{6428000}{9848}=652.7\cdots\approx 653$

132 **範例 13** ⑴(C) ⑵ B；A

⑴設 O 投影到 $\overleftrightarrow{BC}$ 為 H，地面 O、A、B、C 的位置如下圖

$\overline{OB}=\underset{\substack{\uparrow\\ 3\,:\,4\,:\,5}}{\sqrt{15^2+20^2}=25}$

$\overline{OC}=\underset{\substack{\uparrow\\ 5\,:\,12\,:\,13}}{\sqrt{20^2+48^2}=52}$



令 $\angle AOC=\theta$，$\angle AOB=\phi$

則 $\tan\theta=\dfrac{20}{48}=\dfrac{5}{12}$，$\tan\phi=\dfrac{20}{15}=\dfrac{4}{3}$

則 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{5}{12}\approx 22.6^\circ$，$\phi=\tan^{-1}\dfrac{4}{3}\approx 53.1^\circ$

$\therefore \phi-\theta\approx 53.1^\circ-22.6^\circ=30.5^\circ$

$\therefore \angle AOC<\angle BOC$，知 C 旗桿的視線離 A 較近…①

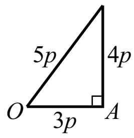
而 $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}=\tan^{-1}\dfrac{4}{3}$，$\cos^{-1}\dfrac{5}{13}=\tan^{-1}\dfrac{12}{5}$

$\therefore B$ 仰角最大，C 仰角最小…②，由①②知照片應選(C)

⑵ A 旗桿的仰角為 $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}$

$\overline{OA}=3p=15$ $\quad\therefore p=5$

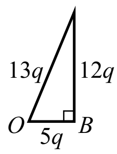
則 A 旗桿高度為 $4p=20$ 呎



B 旗桿的仰角為 $\cos^{-1}\dfrac{5}{13}$

$\overline{OB}=5q=25$ $\quad\therefore q=5$

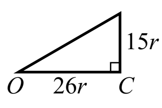
則 B 旗桿高度為 $12q=60$ 呎



C 旗桿的仰角為 $\tan^{-1}\dfrac{15}{26}$

$\overline{OC}=26r=52$ $\quad\therefore r=2$

則 C 旗桿高度為 $15r=30$ 呎



$\therefore B$ 最長且 A 最短

類題 25　233

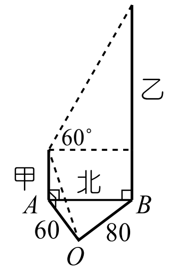
作圖如右，甲大樓位於 A

高度為 60 公尺，乙大樓位於 B

因 $\angle AOB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$\therefore\ \overline{AB} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$

則所求 $= 100 \times \sqrt{3} + 60 \approx 173.2 + 60 \approx 233$



133 **類題 26**　(1) $15\sqrt{3}$　(2) 30　(3) $15\sqrt{3} - 15$　(4) $15\sqrt{2}$　(5) $\sqrt{2}$

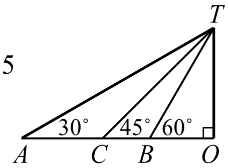
設 $\overline{OB} = x \ \Rightarrow\ \overline{OT} = \sqrt{3}x$，$\overline{OA} = 3x$

$\therefore\ \overline{AB} = \overline{OA} - \overline{OB} = 2x = 30 \ \Rightarrow\ x = 15$

(1)桿高 $\overline{OT} = 15\sqrt{3}$ 公尺

(2) $\overline{BT} = 2\overline{BO} = 2x = 30$

(3) $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = \overline{OT} - \overline{OB} = 15\sqrt{3} - 15$



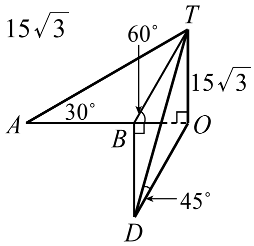
(4) $\because\ \angle TDO = 45^\circ \ \Rightarrow\ \overline{OD} = \overline{OT} = 15\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{BD} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{OB}^2}$

$= \sqrt{(15\sqrt{3})^2 - 15^2} = 15\sqrt{2}$

(5) $\tan\angle AOD = \tan\angle BOD$

$= \dfrac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \dfrac{15\sqrt{2}}{15} = \sqrt{2}$



綜合實力測驗

1.(D)　2.(B)　3.(D)　4.(C)　5.(B)(C)(E)　6.(C)(D)　7.(B)(C)

8.(B)(E)　9. $\dfrac{119}{169}$　10. $\dfrac{1}{4}$　11. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　13.(1) 7　(2) $\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

1. ΔABC 中，$\overline{AB} = \overline{BC}\cos B = \cos B$

ΔABH 中，$\overline{AH} = \overline{AB}\sin B = \cos B \sin B$

2. $a = \sin 1197^\circ = \sin 117^\circ = \sin 63^\circ$

$b = \cos 2134^\circ = \cos 334^\circ = \cos(-26^\circ) = \cos 26^\circ = \sin 64^\circ$

$c = \sin(-2405^\circ) = -\sin 2405^\circ$

$= -\sin 245^\circ = -\sin(180^\circ + 65^\circ) = \sin 65^\circ$

$\therefore\ \sin 65^\circ > \sin 64^\circ > \sin 63^\circ \quad \therefore\ c > b > a$

3. $\because\ \Delta ABC$ 是直角三角形，$\angle A = 90^\circ$

令 $\angle ABC = \alpha$，$\angle ACB = \beta$

則 $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{4}{5}$

原式 $= \sin 90^\circ + \cos(90^\circ + \alpha) + \sin(90^\circ + \beta)$

$= \sin 90^\circ - \sin\alpha + \cos\beta = 1 - \dfrac{4}{5} + \dfrac{4}{5} = 1$

4. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow\ 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{4}{9} \ \Rightarrow\ 2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{5}{9} < 0$

$\because\ 0^\circ < \theta < 180^\circ \ \Rightarrow\ \sin\theta > 0 \quad \therefore \cos\theta < 0$

$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \dfrac{5}{9} = \dfrac{14}{9}$

$\because\ \cos\theta < \sin\theta$，取 $\cos\theta - \sin\theta = -\sqrt{\dfrac{14}{9}} = -\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

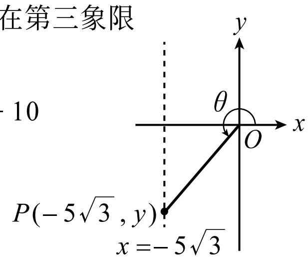
5. $\because\ \tan\theta > 0$，故 θ 角終邊落在第三象限

(A)設 $P(-5\sqrt{3}, y)$

則 $\dfrac{y}{-5\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore\ y = -10$

(B) $\sin\theta = \dfrac{-10}{\overline{OP}} = \dfrac{-10}{\sqrt{175}}$

$= -\dfrac{2}{\sqrt{7}} = -\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

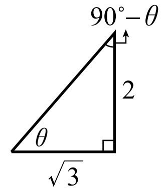


(C) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = -\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(D) $\sin(\theta - 270^\circ) = \sin(\theta + 90^\circ)$

$= \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(E)如右圖，$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



134 6. (A) $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$，$30^\circ$ 和 150° 不是同界角

(B) $180^\circ + 360^\circ \times n < \theta < 270^\circ + 360^\circ \times n$

當 $n = 0$ 時，$90^\circ < \dfrac{\theta}{2} < 135^\circ \ \Rightarrow\ \cos\dfrac{\theta}{2} < 0$

當 $n = 1$ 時，$270^\circ < \dfrac{\theta}{2} < 315^\circ \ \Rightarrow\ \cos\dfrac{\theta}{2} > 0$

(C) $\because\ a + b > c \ \Rightarrow\ 2R\sin A + 2R\sin B > 2R\sin C$

$\Rightarrow\ \sin A + \sin B > \sin C$

$\Rightarrow\ \sin A + \sin B > \sin[180^\circ - (A + B)]$

$\therefore\ \sin A + \sin B > \sin(A + B)$

(D)利用正弦定理，ΔABC 中，$\angle A < \angle B \ \Rightarrow\ a < b$

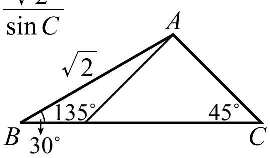
$\Rightarrow\ 2R\sin A < 2R\sin B \ \Rightarrow\ \sin A < \sin B$

(E)利用正弦定理

$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}$

$\Rightarrow\ \sin C = \sqrt{2} \times \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \angle C = 45^\circ$ 或 135°



7. (A)由正弦定理，$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 8$

(B)設 $a = 7k$，$b = 5k$，$c = 8k$

$\cos C = \dfrac{49k^2 + 25k^2 - 64k^2}{2 \times 7k \times 5k} = \dfrac{10k^2}{70k^2} = \dfrac{1}{7}$

(C) $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$，$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

$\therefore\ \overline{AB} = 2R\sin C = 14 \times \dfrac{4\sqrt{3}}{7} = 8\sqrt{3} < 16$

(D) $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 8 : 7 : 5 = 8\sqrt{3} : \overline{BC} : \overline{CA}$

$\therefore\ \overline{BC} = 7\sqrt{3}$，$\overline{CA} = 5\sqrt{3}$

$s = \dfrac{8\sqrt{3} + 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

$\Delta ABC = \sqrt{10\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}} = 30\sqrt{3}$

(E)設內切圓半徑為 r，則 $\Delta = rs$，$30\sqrt{3} = 10\sqrt{3}r$

$\therefore\ r = 3$

8. A、B 在 L 的兩側，$(a + 2 - 1)(\sqrt{3}a - 1) < 0$

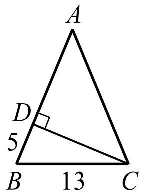
$\Rightarrow\ (a + 1)(\sqrt{3}a - 1) < 0 \ \Rightarrow\ -1 < a < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

直線 L 的斜率為 a，又 $\tan\theta = a$

$-1 < \tan\theta < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow\ \tan(-45^\circ) < \tan\theta < \tan 30^\circ$

$\therefore\ -45^\circ < \theta < 30^\circ$

9. 設 $\overline{AD}=x$，則 $\overline{AC}=x+5$



$\overline{CD}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$(x+5)^2=x^2+12^2$

$\Rightarrow\ x^2+10x+25=x^2+144\quad \therefore\ x=\dfrac{119}{10}$

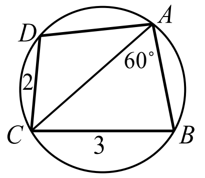
$\sin\angle ACD=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{x}{x+5}=\dfrac{119}{169}$

10. 設 $\overline{AC}=x$，$\Delta ABD+\Delta ACD=\Delta ABC$

$\dfrac{1}{2}\times 8\times 3\sqrt{3}\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{3}x=\dfrac{1}{2}\times 8x\sin 120^\circ$

得 $x=12$，$\dfrac{\Delta ABD}{\Delta ABC}=\dfrac{\frac{1}{2}\times 8\times 3\sqrt{3}\times\sin 30^\circ}{\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\sin 120^\circ}=\dfrac{1}{4}$

11. 設外接圓半徑 R



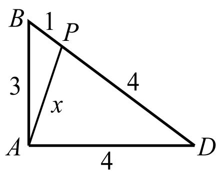
$\dfrac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=2R\quad\Rightarrow\quad R=\sqrt{3}$

令 $\angle CAD=\theta$ 且在 ΔACD 中

$\dfrac{2}{\sin\theta}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12. $\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=4$



$\Rightarrow\ \overline{BD}=5$，$\overline{BP}=5\times\dfrac{1}{5}=1$

設 $\overline{AP}=x$，利用餘弦定理

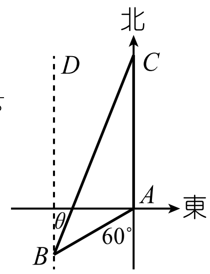
$\cos\angle ABD=\dfrac{3}{5}=\dfrac{9+1-x^2}{2\times 3\times 1}$

$\Rightarrow\ x^2=\dfrac{32}{5}\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{\dfrac{32}{5}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

令 $\angle APE=\theta$，$\tan\theta=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AP}}=\dfrac{4}{\frac{4\sqrt{10}}{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{5\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，故 $k=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

13. (1) $\angle BAC=120^\circ$，$\overline{AB}=6$



$\overline{AC}=5\times 2=10$，由餘弦定理得

$\overline{BC}=\sqrt{6^2+10^2-2\times 6\times 10\times\cos 120^\circ}$

$=\sqrt{196}=14$

漁船甲的速度為 $\dfrac{14}{2}=7$ 浬／小時

(2) $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}\quad\Rightarrow\quad\angle ACB=\theta$

由正弦定理得 $\dfrac{6}{\sin\theta}=\dfrac{14}{\sin 120^\circ}$

$\sin\theta=\dfrac{6\sin 120^\circ}{14}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

課後練習本

第 1 回

1.(C)(E)	2.$(-1,2)$	3.(A)(D)	4.(A)(C)(D)
5. 6	6. -10	7. 6；$a=3$，$b=2$	
8. $(-2,5)$	9. $\frac{1}{2}$	10. $-\frac{2}{3}<x<2$	

1

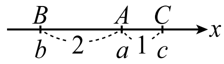
1. (A)反例：如 $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$

(B)取 $a=3+\sqrt{2}$，$b=4$

(C) $\dfrac{21a+14b}{35}-\dfrac{20a+15b}{35}=\dfrac{a-b}{35}<0$

$\therefore\ \dfrac{3a+2b}{5}<\dfrac{4a+3b}{7}$

(D)如右圖，$|b-c|=3$



(E) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}$，$(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}=9+2\sqrt{20}$

$\therefore\ \sqrt{6}+\sqrt{3}<2+\sqrt{5}$

2. $\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}+\dfrac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)}$

$=(x^2+2x+4)+(2x-4)$

$=x^2+4x=(\sqrt{2}-1)^2+4(\sqrt{2}-1)$

$=3-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4=-1+2\sqrt{2}$

故數對 $(a,b)=(-1,2)$

3. (A)左式 $=\dfrac{7}{9}+\dfrac{3}{9}$，右式 $=\dfrac{6}{9}+\dfrac{4}{9}$　$\therefore$左式 = 右式 $=\dfrac{10}{9}$

(B)左式 $=\dfrac{72}{99}+\dfrac{28}{99}=\dfrac{100}{99}$，右式 $=\dfrac{11-1}{9}=\dfrac{10}{9}=\dfrac{110}{99}$

$\therefore$左式 < 右式

(C) $\dfrac{7}{9}+\dfrac{3}{9}=\dfrac{10}{9}>1$

(D)左式 $=\dfrac{5}{9}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{9}$，右式 $=\dfrac{11-1}{9}=\dfrac{10}{9}$

$\therefore$左式 = 右式

(E)左式 $=\dfrac{49}{99}=\dfrac{490}{990}<\dfrac{495}{990}=0.5=$ 右式

4. (A) $0.1\overline{3}=\dfrac{13-1}{90}=\dfrac{12}{90}=\dfrac{2}{15}$

(B)(E) $3+\sqrt{2}$、π 皆為無理數　(D) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{12}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{2}$

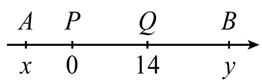
5. $\sqrt{16+\sqrt{252}}=\sqrt{16+2\sqrt{63}}=\sqrt{9}+\sqrt{7}=3+\sqrt{7}$

$\because\ 2<\sqrt{7}<3\quad\Rightarrow\quad 5<3+\sqrt{7}<6$

$3+\sqrt{7}=5+(\sqrt{7}-2)\quad\therefore\ a=5$，$b=\sqrt{7}-2$

$2a+b-\dfrac{3}{b}=10+\sqrt{7}-2-\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}=8+\sqrt{7}-(\sqrt{7}+2)=6$

6. 設 $A(x)$、$B(y)$



$\begin{cases}\dfrac{3x+y}{4}=0\\ \dfrac{2x+3y}{5}=14\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}3x+y=0\\ 2x+3y=70\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=-10$

故 A 點坐標為 -10

7. $\dfrac{2a+3b}{2}\ge\sqrt{2a\cdot 3b}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{12}{2}\ge\sqrt{6ab}$

平方得 $36\ge 6ab\quad\Rightarrow\quad ab\le 6$

$\therefore\ ab$ 的最大值為 6，此時 $2a=3b=6$

即 $a=3$，$b=2$

8. $x\ge 3$ 或 $x\le -2\quad\Rightarrow\quad x-\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{5}{2}$ 或 $x-\dfrac{1}{2}\le-\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow\ \left|x-\dfrac{1}{2}\right|\ge\dfrac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad\left|-(x-\dfrac{1}{2})\right|\ge\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow\ \left|-x+\dfrac{1}{2}\right|\ge\dfrac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad|2|\times\left|-x+\dfrac{1}{2}\right|\ge|2|\times\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \quad \left|2(-x+\frac{1}{2})\right| \ge 2\times\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad |-2x+1| \ge 5$

$\therefore$ 數對 $(a,b)=(-2,5)$

9. $\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}+\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2}=4 \quad \Rightarrow \quad \left|x+\frac{1}{x}\right|+\left|x-\frac{1}{x}\right|=4$

$\Rightarrow \quad (x+\frac{1}{x})+(\frac{1}{x}-x)=4 \quad \therefore \frac{2}{x}=4$，得 $x=\frac{1}{2}$

10. ①當 $x\ge 1$ 時，$x+2(x-1)<4$

$\Rightarrow \quad 3x<6 \quad \Rightarrow \quad x<2$

在 $x\ge 1$ 的限制下，其解為 $1\le x<2$…❶

②當 $0\le x<1$ 時，$x+2(1-x)<4$

$\Rightarrow \quad x+2-2x<4 \quad \Rightarrow \quad -x<2 \quad \Rightarrow \quad x>-2$

在 $0\le x<1$ 的限制下，其解為 $0\le x<1$…❷

③當 $x<0$ 時，$-x+2(1-x)<4$

$\Rightarrow \quad -x+2-2x<4 \quad \Rightarrow \quad -3x<2 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{2}{3}$

在 $x<0$ 的限制下，其解為 $-\frac{2}{3}<x<0$ …❸

綜合❶❷❸得 $-\frac{2}{3}<x<2$

第 2 回

1.(1) 63　(2) 7	2.(1) $\frac{19}{2}$　(2) 72	3.(E)	
4. $4\sqrt{2}$	5. $(2.92,-7)$	6. $\frac{1}{4}$	7. 28
8. 10000	9. $10\sqrt{10}$	10.(1) 6　(2) 0.0003	

3　1. (1) $8^x+(\frac{1}{4})^{-x-1}=2^{3x}+4^{x+1}=(2^x)^3+4\cdot(2^x)^2$

$=3^3+4\times3^2=27+36=63$

(2) $4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}$

$=9-2=7$

2. (1) $\left[(\frac{2}{3})^4\right]^{-0.25}+(5\times\frac{4}{5})^{\frac{3}{2}}=(\frac{2}{3})^{-1}+(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}+8=\frac{19}{2}$

(2) $25\times(10^{\log5})^{-2}+10^1\times10^{\log7.1}$

$=25\times5^{-2}+10\times7.1=1+71=72$

3. $a^5=(\sqrt[3]{10})^5=10^{\frac{5}{3}}=10\sqrt[3]{100}$

$4^3\le100<5^3$，$4.5^3=91.125 \quad \therefore 4.5^3\le100<5^3$

$4.5\le10^{\frac{2}{3}}<5 \quad \Rightarrow \quad 45\le10^{\frac{5}{3}}<50 \quad \Rightarrow \quad 45\le a^5<50$

4. 1.5 小時 = 90 分鐘，$128\times(\frac{1}{2})^{\frac{90}{20}}=2^7\times2^{-4.5}=2^{2.5}=4\sqrt{2}$

故 1.5 小時後剩下 $4\sqrt{2}$ 公克

5. $a-b=3\times10^{-7}-0.08\times10^{-7}=2.92\times10^{-7}$

$k=2.92$，$n=-7$，故 $(k,n)=(2.92,-7)$

6. $2^a+2^{-3b}\ge2\sqrt{2^a\cdot2^{-3b}}=2\sqrt{2^{a-3b}}=2\sqrt{2^{-6}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

7. $x=10^9+1$

$x^3=(10^9+1)^3=10^{27}+3\times10^{18}+3\times10^9+1\approx10^{27}$

$\therefore x^3$ 是 28 位整數

8. $\begin{cases} 40=10\log\frac{I_1}{I_0} \quad \therefore \log\frac{I_1}{I_0}=4\text{，得 }\frac{I_1}{I_0}=10^4\cdots① \\ 80=10\log\frac{I_2}{I_0} \quad \therefore \log\frac{I_2}{I_0}=8\text{，得 }\frac{I_2}{I_0}=10^8\cdots② \end{cases}$

則②÷①，得 $\frac{I_2}{I_1}=\frac{10^8}{10^4}=10000$

9. 設釋放出的能量為 E'

$\log E'=11.8+1.5(r+1)=13.3+1.5r$，$\log E=11.8+1.5r$

$k=\frac{E'}{E}=\frac{10^{\log E'}}{10^{\log E}}=\frac{10^{13.3+1.5r}}{10^{11.8+1.5r}}$

$=10^{13.3-11.8}=10^{1.5}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

10. (1) $10^n<10^{\log5432100}<10^{n+1}$

$\Rightarrow \quad 10^n<5.4321\times10^6<10^{n+1}$，得 $n=6$

(2) $\log x\approx-3-0.5229=-4+0.4771$

$\Rightarrow \quad x\approx10^{-4+0.4771}=10^{-4}\times10^{0.4771}\approx10^{-4}\times10^{\log3}$

$=3\times10^{-4}=0.0003$

第 3 回

1.(C)	2.(1) 1　(2) $\frac{1}{2}$	3.(1) $x-y+2=0$　(2) $3\sqrt{2}$	
4. 4	5. 33	6. 75	7. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{26}{3}$	9. $k<-2$	10. $\frac{625}{24}$	

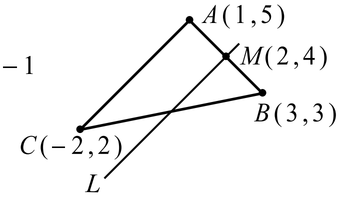
5　1. $m_1>0$，$m_2<0$，$m_3<0$

又 $|m_3|>|m_2| \quad \Rightarrow \quad m_3<m_2$，得 $m_3<m_2<m_1$

2. (1) $\frac{-k}{2k-1}=-1 \quad \Rightarrow \quad k=2k-1 \quad \Rightarrow \quad k=1$

(2)斜率不存在 $\Rightarrow$ 鉛直線，即 $k=3k-1 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{1}{2}$

3. (1) $\overline{AB}$ 中點 $M(2,4)$



$\overline{AB}$ 斜率 $m_{\overline{AB}}=\frac{3-5}{3-1}=-1$

中垂線 L 垂直 $\overline{AB}$

因此 $m_L=1$

由點斜式知 L 的方程式

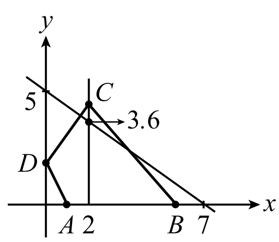
為 $y-4=1(x-2)$，即 $x-y+2=0$

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式 $y-5=-(x-1)$

$\Rightarrow \quad y-5=-x+1 \quad \Rightarrow \quad x+y-6=0$

$d(C,\overleftrightarrow{AB})=\frac{|-2+2-6|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

4. L 過 $(7,0)$ 與 $(0,5)$ 兩點



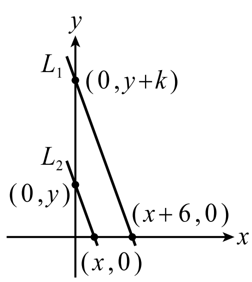
則 L 為 $\frac{x}{7}+\frac{y}{5}=1$

令 $x=2$ 代入 L 得 $\frac{2}{7}+\frac{y}{5}=1$

$\Rightarrow \quad y=\frac{25}{7}\approx3.6$

作圖如右　$\therefore a$ 至少為 4

5. 設 L_1 的 y 截距比 L_2 多 k 單位



$m_1=\frac{-y}{x}=-\frac{11}{2} \quad \Rightarrow \quad 11x=2y$

$m_2=\frac{-(y+k)}{x+6}=-\frac{11}{2}$

$\Rightarrow \quad 11x+66=2y+2k$

$\Rightarrow \quad 2k=66 \quad \Rightarrow \quad k=33$

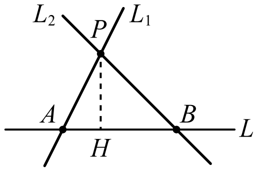
6. 設 L 與 L_1、L_2 交於 A 與 B，L_1 與 L_2 交於 P

P 投影到 L 為 H

設 $\overline{AH}=k$，則 $\overline{BH}=\overline{PH}=2k$

$\overline{AB}=3k=15$，得 $k=5$

則所求 $=\dfrac{3k\times 2k}{2}=3k^2=75$



7. $\begin{cases}4x+y=1\\ x-y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ L_1 和 L_2 的交點 $P(\frac{1}{5},\frac{1}{5})$

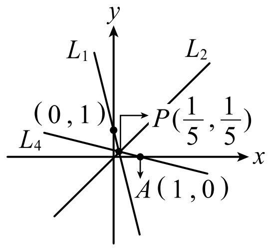
在直線 L_1 上取一點 $(0,1)$

關於 L_2 的對稱點為 $A(1,0)$

L_4 為過 A、P 兩點的直線

$m_4=\dfrac{\frac{1}{5}-0}{\frac{1}{5}-1}=-\dfrac{1}{4}$，$m_3=\dfrac{2}{m}$

$\because$ $L_4\perp L_3$ $\therefore$ $-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{m}=-1$ $\Rightarrow$ $m=\dfrac{1}{2}$

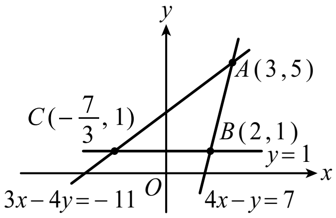


8. 如右圖

鈍角 ΔABC

$=\dfrac{1}{2}\times\left[2-(-\dfrac{7}{3})\right]\times 4$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{13}{3}\times 4=\dfrac{26}{3}$



9. $[2(k+2)-3+3](-4-15+3)>0$

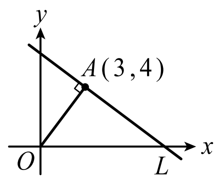
$\Rightarrow$ $-16(2k+4)>0$ $\Rightarrow$ $2k+4<0$，得 $k<-2$

10. $m_{\overline{OA}}=\dfrac{4}{3}$，$\overline{OA}\perp L$ $\therefore$ $m_L=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ L：$y-4=-\dfrac{3}{4}(x-3)$

$\Rightarrow$ $4y-16=-3x+9$

$\Rightarrow$ $3x+4y=25$



x	$\frac{25}{3}$	0
y	0	$\frac{25}{4}$

，$\Delta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{25}{3}\times\dfrac{25}{4}=\dfrac{625}{24}$

第 4 回

1.(A)(B)(C)　2. -20；-4　3. $m<-2$ 或 $m>\frac{1}{2}$

4. $(x+3)^2+y^2=5$　5. 4　6. 3　7. $(5,-2)$　8.(B)

9. $x+2y-11=0$　10. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

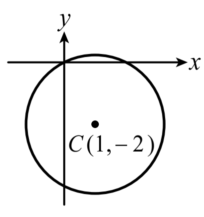
7 1. (C)圓心到 x 軸距離為 2，小於 $\sqrt{5}$

故和 x 軸交兩點

(D) $(0,0)$ 代入

$(0-1)^2+(0+2)^2=5$，在圓上

(E)半徑 $=\sqrt{5}$ $\therefore$圓周長 $=2\sqrt{5}\pi$



2. $x^2+y^2-2x+4y+a=0$

$\Rightarrow$ $(x-1)^2+(y+2)^2=-a+5$

圓心 $(1,-2)$ 且 $r^2=-a+5$

$\begin{cases}-2=b+2\\ -a+5=25\end{cases}$ $\therefore$ $a=-20$，$b=-4$

3. L：$mx-y-3=0$，圓心 $O(2,3)$，$d(O,L)<r$

$\dfrac{|2m-3-3|}{\sqrt{m^2+1}}<2\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $(2m-6)^2<20(m^2+1)$

$\Rightarrow$ $4m^2-24m+36<20m^2+20$

$\Rightarrow$ $16m^2+24m-16>0$ $\Rightarrow$ $2m^2+3m-2>0$

$\Rightarrow$ $(2m-1)(m+2)>0$ $\Rightarrow$ $m<-2$ 或 $m>\dfrac{1}{2}$

4. 由題意知 A 點與 B 點的 x 坐標相同

即 $2a=-4$ $\Rightarrow$ $a=-2$

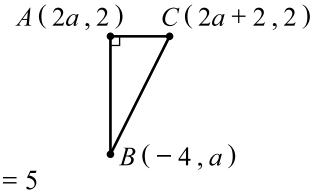
得 $B(-4,-2)$、$C(-2,2)$，$\overline{BC}=2\sqrt{5}$

圓半徑 $r=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{5}$

圓心坐標

$(\dfrac{-4-2}{2},\dfrac{-2+2}{2})=(-3,0)$

$\therefore$圓方程式為 $(x+3)^2+y^2=5$



5. 設半徑為 r

則 $\overline{OC}=r-5$，$\overline{AC}=15$

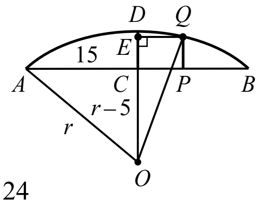
$r^2=(r-5)^2+15^2$ $\Rightarrow$ $r=25$

ΔOEQ 中

$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{EQ}^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$

$\overline{OE}=\overline{OC}+\overline{CE}$ $\Rightarrow$ $24=20+\overline{CE}$

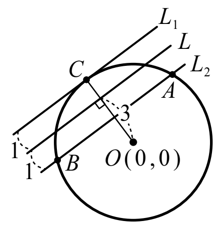
$\Rightarrow$ $\overline{CE}=4=\overline{PQ}$



6. $d(O,L)=\dfrac{|0+0+15|}{\sqrt{9+16}}=3$，$r=4$

如右圖所示，A、B、C 三點和

L 的距離皆為 1



7. 設 $\overleftrightarrow{OA}$ 的方程式 $3x+y=k$

切點 $(4,1)$ 代入得 $k=13$

$\therefore\overleftrightarrow{OA}$：$3x+y=13$

圓心必在直線 OA 上

設圓心坐標 $(t,13-3t)$

$\overline{OA}=r$

$\Rightarrow$ $\sqrt{(t-4)^2+(12-3t)^2}=\sqrt{10}$

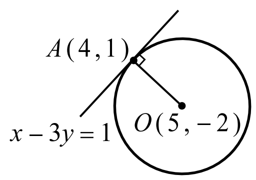
$\Rightarrow$ $10t^2-80t+160=10$ $\Rightarrow$ $t^2-8t+15=0$

$\Rightarrow$ $(t-3)(t-5)=0$ $\Rightarrow$ $t=3$ 或 5

$\Rightarrow$ 圓心坐標為 $(3,4)$ 或 $(5,-2)$

但 $(3,4)$ 代入 $x-3y\geq 1$ 不合

故圓心坐標為 $(5,-2)$



8. 圓心 $C(2,0)$，半徑 $r=\sqrt{2}$

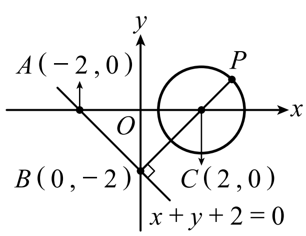
P 點到直線 AB 的最大距離

$=d(C,\overleftrightarrow{AB})+r$

$=\dfrac{|2+0+2|}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

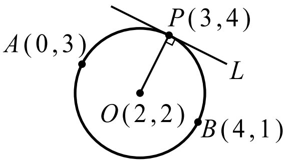
$\overline{AB}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ ΔABP 的最大面積 $=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$



9. 圓心 $O(\frac{0+4}{2},\frac{3+1}{2})=(2,2)$

$m_{\overline{OP}}=\frac{4-2}{3-2}=2$



切線垂直 $\overline{OP}$

則切線斜率為 $-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\quad y-4=-\frac{1}{2}(x-3)$

$\Rightarrow\quad -2y+8=x-3\quad\Rightarrow\quad x+2y-11=0$

10. 設過 $Q(2,0)$ 之切線斜率為 m

$\therefore$ 切線方程式為 $y=m(x-2)\quad\Rightarrow\quad mx-y-2m=0$

圓心 $(0,0)$ 到切線之距離為半徑 1

$\Rightarrow\quad \frac{|m\times 0-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1\quad\Rightarrow\quad m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$（正值不合）

切線方程式為 $-\frac{1}{\sqrt{3}}x-y+\frac{2}{\sqrt{3}}=0$

$(-2,h)$ 代入得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

第 5 回

1.(A)(C)	2. $-x-1$	3. 10	4.(A)(C)(E)
5. 56	6.(1) -5　(2) 51	7. $8x-8$	8. 8
9. 420	10.(1) -5　(2) 6.97		

9 1. (A)(B) $f(x)=(x+3)g(x)+r=(10x+30)\cdot\frac{1}{10}g(x)+r$

商式為 $\frac{1}{10}g(x)$，餘式為 r

(C)(D) $2f(x)=2(x+3)g(x)+2r=(x+3)\cdot 2g(x)+2r$

商式為 $2g(x)$，餘式為 $2r$

(E) $xf(x)=x(x+3)g(x)+rx$

$=x(x+3)g(x)+r(x+3)-3r$

$=(x+3)[xg(x)+r]-3r$，商式為 $xg(x)+r$

2.
$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+1 \\
\hline
x^2+0x+1 & 2x^3+\ x^2+\ x+0 \\
 & 2x^3+0x^2+2x \\
\hline
 & x^2-\ x+0 \\
 & x^2+0x+1 \\
\hline
 & -\ x-1
\end{array}
$$

$f(x)=(x^4-1)Q(x)+2x^3+x^2+x$

$=(x^2+1)[(x^2-1)Q(x)]+(x^2+1)(2x+1)-x-1$

$=(x^2+1)[(x^2-1)Q(x)+(2x+1)]-x-1$

故 $f(x)$ 除以 x^2+1 的餘式為 $-x-1$

3. $(2x^3+ax^2+9x-2)-(x+b)$ 是 x^2+2x+3 的倍式

利用長除法如下

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x\ +1 \\
\hline
x^2+2x+3 & 2x^3+\quad a\quad x^2+8x+(-2-b) \\
 & 2x^3+\quad 4\quad x^2+6x \\
\hline
 & (a-4)x^2+2x+(-2-b) \\
 & x^2+2x+\quad 3 \\
\hline
 & (a-5)x^2+0x+(-5-b)
\end{array}
$$

$\begin{cases} a-5=0 \\ -5-b=0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} a=5 \\ b=-5 \end{cases}\quad\therefore a-b=5-(-5)=10$

4. 由餘式定理知 $f(3)=-2$

$f(x)=(2x^2-7x+3)Q(x)+r(x)$

$=(x-3)(2x-1)Q(x)+r(x)$

$x=3$ 代入，$f(3)=r(3)=-2$

(A)若餘式為 $x+1$，則 $r(3)=4$，不合

(B)若餘式為 $x-5$，則 $r(3)=-2$，有可能

(C)若餘式為 $x-1$，則 $r(3)=2$，不合

(D)若餘式為 $-2x+4$，則 $r(3)=-2$，有可能

(E)若餘式為 $2x-7$，則 $r(3)=-1$，不合

5. 已知 $g(x)=(x+1)(x-2)\times$ 商 $+3x+1\quad\therefore g(2)=7$

則 $f(2)+g(2)=40+28-8+3=63$

$\therefore f(2)=63-7=56$，即為所求

6. (1) $3x^{18}-7x^{12}+5x^3-x+3=(x+1)Q(x)+r$

令 $x=-1$ 代入 $\quad\Rightarrow\quad 3-7-5+1+3=r$

$\therefore r=-5$

(2) $f(x)$ 被 $x-11$ 除的餘式為 $f(11)$

$\therefore f(11)=51$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -4 & -72 & -56 & +15 & +7 & 11 \\
 & +11 & +77 & +55 & -11 & +44 & \\
\hline
1 & +7 & +5 & -1 & +4 & +51 &
\end{array}
$$

7. $f(x)=(x-2)(x-3)q(x)+12x-16\quad\therefore f(2)=8$

$f(x)$ 有 $x-1$ 的因式 $\quad\therefore f(1)=0$

設 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$\Rightarrow\quad\begin{cases} f(2)=2a+b=8 \\ f(1)=a+b=0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} a=8 \\ b=-8 \end{cases}$，餘式為 $8x-8$

8. $f(x)=(x-1)Q(x)+a=(x-1)[(x-2)q_1(x)+3]+a$

$=(x-1)(x-2)q_1(x)+3(x-1)+a$

$=(x-1)(x-2)[(x-3)\cdot q_2(x)+4]+3(x-1)+a$

$=(x-1)(x-2)(x-3)q_2(x)+4(x-1)(x-2)$
$+3(x-1)+a$

$f(2)=3+a$，$f(3)=14+a$

$2f(2)=f(3)\quad\Rightarrow\quad 6+2a=14+a\quad\Rightarrow\quad a=8$

9. 設 $f(x)=(x-2)(x-3)(ax+e)$

$f(-1)=12(-a+e)=-48\quad\Rightarrow\quad -a+e=-4$

$f(5)=6(5a+e)=48\quad\Rightarrow\quad 5a+e=8$

得 $a=2$，$e=-2\quad\therefore f(x)=(2x-2)(x-2)(x-3)$

故 $f(8)=420$

10. (1) $a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=7$

$\therefore a-b+c-d=1-2+3-7=-5$

(2) $f(x)=(x-2)^3+2(x-2)^2$
$+3(x-2)+7$

$f(1.99)=(-0.01)^3+2(-0.01)^2$
$+3(-0.01)+7\approx 6.97$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -4 & +7 & +1 & 2 \\
 & +2 & -4 & +6 & \\
\hline
1 & -2 & +3 & +7 & \to d \\
 & +2 & +0 & & \\
\hline
1 & +0 & +3 & & \to c \\
 & +2 & & & \\
\hline
1 & +2 & & & \to b \\
\downarrow & & & & \\
a & & & &
\end{array}
$$

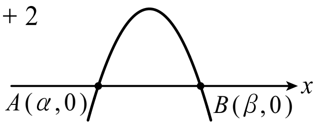
第 6 回

1.(B)(D)(E)	2. $2\sqrt{6}$	3. 19	4. $(2,-1)$	5. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
6.(C)(E)	7.(C)(E)	8. 4	9.(A)	10.(C)

11

1. 開口向下　$\therefore a<0$，對稱軸方程式為 $x=1$
　$\therefore \dfrac{b}{-2a}=1$，$2a+b=0$，$b=-2a$　$\Rightarrow$　$b>0$
　$f(0)=c>0$　$\therefore abc<0$ 且 $b^2-4ac>0$
　(C) $a-b+c=f(-1)=0$
　(D)對稱軸方程式 $x=1$　$\therefore f(0)=f(2)$
　　$\Rightarrow$　$f(2)-f(0)=0$

2. 設 $f(x)=a(x-3)(x+1)+2$
　$f(1)=-4a+2=6$
　$\Rightarrow$　$a=-1$
　$f(x)=-(x-3)(x+1)+2$
　　$=-x^2+2x+5$

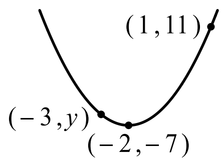


$$\begin{cases} y=-x^2+2x+5 \\ y=0\ (x\text{ 軸}) \end{cases}$$

　得 $-x^2+2x+5=0$　$\Rightarrow$　$x^2-2x-5=0$
　令方程式兩根為 α、β，則 $\alpha+\beta=2$ 且 $\alpha\beta=-5$
　$\overline{AB}=|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4+20}=2\sqrt{6}$

3. $y=7(x-2)^2+51(x-2)+64-1$
　$=7(x^2-4x+4)+51x-102+63$
　$=7x^2+23x-11$
　得 $a=7$，$b=23$，$c=-11$　$\Rightarrow$　$a+b+c=19$

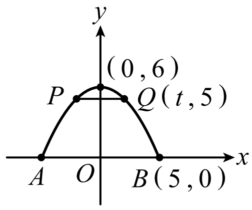
4. $f(x)=a(x^2+4x+4)-4a-b$
　　$=a(x+2)^2-4a-b$



　如右圖 $\begin{cases} f(-2)=-4a-b=-7 \\ f(1)=5a-b=11 \end{cases}$

　$\Rightarrow$　$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$，故數對 $(a,b)=(2,-1)$

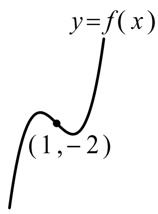
5. 建立坐標系，設 $\overline{AB}$ 在 x 軸上，拋物線頂點為 $(0,6)$
　$\overline{AB}=10$　$\Rightarrow$　$B(5,0)$
　設 $y=ax^2+6$，將 $(5,0)$ 代入
　得 $a=-\dfrac{6}{25}$　$\Rightarrow$　$y=-\dfrac{6}{25}x^2+6$
　令 $Q(t,5)$　$\Rightarrow$　$5=-\dfrac{6}{25}t^2+6$
　$\Rightarrow$　$t^2=\dfrac{25}{6}$　$\Rightarrow$　$t=\pm\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$
　故 $\overline{PQ}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}-(-\dfrac{5\sqrt{6}}{6})=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$



6. (A)直線斜率為負　$\therefore a_1<0$
　(B)拋物線開口向下　$\therefore a_2<0$
　(C)三次函數圖形由左下往右上　$\therefore a_3>0$
　(D)將 $y=a_2x^2$ 的圖形向下移　$\therefore k<0$
　(E)將 $y=a_3x^3$ 的圖形向右平移　$\therefore h<0$

7. $f(0)=f(1)=f(-2)=0$
　$\therefore f(x)$ 有 x、$(x-1)$、$(x+2)$ 的因式
　設 $f(x)=ax(x-1)(x+2)=ax^3+ax^2-2ax$
　比較係數得 $b=a$，$c=-2a$，$d=0$
　圖形的最右方是向下沉的，所以 $a<0$
　(A) $a<0$　(B) $b=a<0$　(C) $c=-2a>0$
　(D) $d=0$　(E) $f(1)=a+b+c+d=0$

8. $h=-\dfrac{-3a}{3a}=1$，得對稱中心為 $(1,-2)$
　$f(1)=-2$　$\Rightarrow$　$a-3a+2-2=-2$
　$\Rightarrow$　$-2a=-2$　$\Rightarrow$　$a=1$
　得 $f(x)=x^3-3x^2+2x-2$
　$f(3)=27-27+6-2=4$



9. 直線 L 的斜率大於 0　$\therefore a>0$
　L 的 y 截距小於 0　$\therefore b<0$
　則 $y=ax^3+bx$ 在 x 大些時會往右上，在原點附近往右下　(E)非三次函數圖形

10. $f(x)=x^3-2x$
　　$=(x-1)^3+3(x-1)^2+(x-1)-1$
　可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次函數圖形
　會近似於 $g(x)=(x-1)-1=x-2$

$$\begin{array}{l|l} 1+0-2+0 & 1 \\ \quad +1+1-1 & \\ \hline 1+1-1 & -1 \\ \quad +1+2 & \\ \hline 1+2 & +1 \\ \quad +1 & \\ \hline 1+3 & \end{array}$$

第 7 回

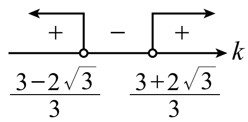
1.(A)	2. $-3<x<-\dfrac{1}{2}$	3. $k<\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$	4.(B)(E)
5. $1\le x\le 2$ 或 $x=-4$	6.(A)(C)(E)	7. 16	
8. $-8<a<8$	9. $-3<x<\dfrac{1}{2}$	10. -3；-4	

13

1. (B) $x>5$ 或 $x<-1$　(C) $(x-2)^2>0$ 的解 $x\neq 2$
　(D) $(x+1)^2\le 0$ 的解為 $x=-1$
　(E) $ax-5a>0$　$\Rightarrow$　$a(x-5)>0$，若 $a<0$
　　則 $x-5<0$，即 $x<5$

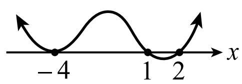
2. 由 $\dfrac{1}{3}<x<2$　$\Rightarrow$　$(x-\dfrac{1}{3})(x-2)<0$
　$\Rightarrow$　$(3x-1)(x-2)<0$　$\Rightarrow$　$3x^2-7x+2<0$
　$\Rightarrow$　$-3x^2+7x-2>0$，得 $a=-3$，$b=7$
　$2x^2+7x+3<0$　$\Rightarrow$　$(x+3)(2x+1)<0$
　$\therefore -3<x<-\dfrac{1}{2}$

3. ① $k<0$
　② $D=(k+1)^2-4k(k-1)<0$
　　$\Rightarrow$　$3k^2-6k-1>0$
　　$\Rightarrow$　$k<\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k>\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$
　$\therefore$取①②交集得 $k<\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$



4. (A) $x\neq 1$ 時，$x^2-2x+1=(x-1)^2>0$ 才成立
　(B) x^2 係數為 1，判別式 $=1-4<0$
　(C) x^2 係數為負數，圖形開口朝下，不可能恆正
　(D) $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 時才成立
　(E) $(x^2+x+\dfrac{1}{4})+(y^2+y+\dfrac{1}{4})+\dfrac{1}{2}$
　　$=(x+\dfrac{1}{2})^2+(y+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}>0$ 恆成立

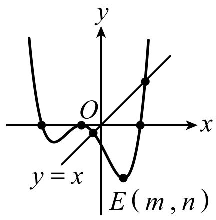
5. $(x^2+1)(25x+100)^2$
　　$-(3x-1)(25x+100)^2\le 0$
　$\Rightarrow$　$(x^2+1-3x+1)(25x+100)^2\le 0$
　$\Rightarrow$　$(x^2-3x+2)(25x+100)^2\le 0$
　$\Rightarrow$　$(x-1)(x-2)(25x+100)^2\le 0$
　$\Rightarrow$　$1\le x\le 2$ 或 $x=-4$



6. (A) $f(-3)=f(-1)=f(2)=0$，$x=-3$、-1、2 是方程式 $f(x)=0$ 的根

(B) $y=f(x)$ 與 $y=100$ 交於兩點
即 $f(x)=100$ 有 2 個實數解

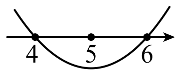
(C) $y=f(x)$ 與 $y=x$ 交於兩點
即 $f(x)=x$ 有 2 個實數解



(D) $f(x)<0$ 的解應為 $-3<x<2$
但 $x\neq-1$

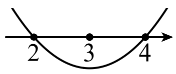
(E) $y=f(x)$ 的最低點為 E
∴當 $x=m$ 時，函數最小值 $f(m)=n$

7. $5<\sqrt{n}\le 6 \Rightarrow 25<n\le 36$



$\Rightarrow$ n 有 11 種

$2\le\sqrt{n}<3 \Rightarrow 4\le n<9$



$\Rightarrow$ n 有 5 種

∴ n 共有 $11+5=16$ 種

8. $x^2+ax+16>0$ 恆成立 $\Rightarrow$ 判別式 $D=a^2-64<0$

$\Rightarrow (a+8)(a-8)<0 \Rightarrow -8<a<8$

再考慮：若 $a=8$，則 $(x+4)^2(x+3)(x-1)\le 0$
解為「$x=-4$，$-3\le x\le 1$」，不合
若 $a=-8$，則 $(x-4)^2(x+3)(x-1)\le 0$
解為「$x=4$，$-3\le x\le 1$」，不合

9. ∵ $(2x-1)(x+3)=2x^2+5x-3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-1+\ \ 1 \\
\hline
2+5-3 & 2+3+\ \ a\ \ +\ \ b\ \ -3 \\
 & 2+5-\ \ 3 \\
\hline
 & -2+(a+3)+\ \ b \\
 & -2-\ \ 5\ \ +\ \ 3 \\
\hline
 & (a+8)+(b-3)-3 \\
 & 2\ \ +\ \ 5\ \ -3 \\
\hline
 & (a+6)+(b-8)+0
\end{array}
$$

∴ $f(x)=(2x-1)(x+3)(x^2-x+1)<0$

∵ x^2-x+1 恆正

∴ $f(x)<0$ 的解和 $(2x-1)(x+3)<0$ 相同

得 $-3<x<\frac{1}{2}$

10. $f(x)$ 的對稱軸 $x=\frac{k+(k+4)}{2}=\frac{(2k+1)+(k+6)}{2}$

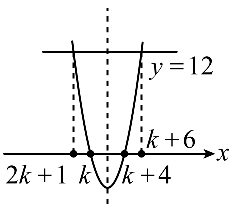
$2k+4=3k+7 \Rightarrow k=-3$

∵ $f(x)$ 的對稱軸 $x=\frac{-3+1}{2}=-1$

可設 $f(x)=(x+1)^2+t$

又 $f(1)=0$

即 $4+t=0$　∴ $t=-4$



第 8 回

1. (B)(C)(D)	2. (1) 805	(2) 684	3. 10000	4. 5
5. 10	6. (D)	7. 9900	8. (1) $\frac{4}{5}$	(2) 見詳解
9. (1) $3n+2$	(2) 1455	10. $\frac{1333}{729}$		

15

1. (A)(B) $\begin{cases} a_1+d=3 \\ a_1+28d=-51 \end{cases} \Rightarrow 27d=-54$

$\Rightarrow d=-2 \Rightarrow a_1=5$

(C) $a_1+a_2+\cdots+a_{29}+a_{30}$

$=\frac{(a_1+a_{30})\times 30}{2}=\frac{(a_2+a_{29})\times 30}{2}=\frac{-48\times 30}{2}=-720$

(D) $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{2^{a_n}}{2^{a_{n-1}}}=2^{a_n-a_{n-1}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

數列 $\langle b_n\rangle$ 是公比為 $\frac{1}{4}$ 的等比數列

(E) $b_1=2^{a_1}=2^5=32$，$b_{15}=32\times(\frac{1}{4})^{14}$，$b_{20}=32\times(\frac{1}{4})^{19}$

∵ $(\frac{1}{4})^{14}>(\frac{1}{4})^{19}$　∴ $b_{15}>b_{20}$

2. (1) 公差 $d=5-2=3$，$68=2+3(n-1)$

$\Rightarrow n=23$，$S_{23}=\frac{(2+68)\times 23}{2}=35\times 23=805$

(2) 公比 $r=\frac{-8}{4}=-2$，$1024=4\times(-2)^{k-1}$

$\Rightarrow 256=(-2)^{k-1} \Rightarrow k=9$

$S_9=\frac{4\times[1-(-2)^9]}{1-(-2)}=\frac{4}{3}\times 513=684$

3. a_1+b_1、a_2+b_2、$\cdots$、$a_{100}+b_{100}$ 也是等差數列

∵ $a_1+b_1=25+75=100$，$a_{100}+b_{100}=100$

∴公差為 0

所求 $=\underbrace{100+100+100+\cdots+100}_{100\text{個}}=100\times 100=10000$

4. $S_9=\frac{(a_1+a_9)\times 9}{2}<0 \Rightarrow 9a_5<0 \Rightarrow a_5<0$

$a_3+a_8=a_5+a_6>0$　∵ $a_5<0$　∴ $a_6>0$

S_1 ～ S_9 中最小的為 S_5，得 $k=5$

5. 設數列 $\langle b_n\rangle$ 首項為 b_1，公比為 r

$b_5b_6=9 \Rightarrow b_1r^4\cdot b_1r^5=9 \Rightarrow b_1{}^2r^9=9$

$b_1b_2b_3\cdots b_{10}=b_1\cdot b_1r\cdot b_1r^2\cdot\cdots\cdot b_1r^9$

$=b_1{}^{10}r^{(1+2+\cdots+9)}=b_1{}^{10}r^{45}=(b_1{}^2r^9)^5=9^5=3^{10}$

故 $k=10$

6. 由 $a_{n+1}=2a_n$，得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$

∴ $\langle a_n\rangle$ 是公比為 2 的等比數列

$a_n=a_1r^{n-1}=2^{n-1}$

$S_n=1^2-(2^1)^2+(2^2)^2-(2^3)^2+\cdots+(2^{2n-2})^2-(2^{2n-1})^2$

$=1-2^2+2^4-2^6+\cdots+2^{4n-4}-2^{4n-2}$

$=\frac{1\times[1-(-4)^{2n}]}{1-(-4)}=\frac{1}{5}(1-4^{2n})=\frac{1}{5}(1-2^{4n})$

7. $1+1+2+2+3+3+\cdots+99+99$

$=2\times(1+2+\cdots+99)=2\times\frac{100\times 99}{2}=9900$

8. (1) $a_1=\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{2}$

$a_3=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$，$a_4=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\frac{4}{5}$

(2) $a_5=\dfrac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}+1}=\dfrac{8}{9}$，$a_6=\dfrac{\frac{16}{9}}{\frac{8}{9}+1}=\dfrac{16}{17}$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\text{，當 } n=1\\[2mm] \dfrac{2^{n-2}}{2^{n-2}+1}\text{，當 } n\ge 2\end{cases}$$

9. (1)

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_1}=5\\
&\cancel{a_2}=\cancel{a_1}+2\times3+2\\
&\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+3\times3+2\\
&\ \ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\quad\vdots\\
+)\ &a_n=\cancel{a_{n-1}}+n\times3+2 \qquad\Rightarrow\quad a_n-a_{n-1}=3n+2
\end{aligned}$$

$a_n=5+3\times(2+3+\cdots+n)+2(n-1)$

$=(3+2)+3\times(2+3+\cdots+n)+2(n-1)$

$=3\times(1+2+\cdots+n)+2n=3\times\dfrac{n(n+1)}{2}+2n=\dfrac{3n^2+7n}{2}$

(2) $a_{30}=\dfrac{3\times30^2+7\times30}{2}=\dfrac{3\times900+210}{2}=1455$

10.

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_1}=1\\
&\cancel{a_2}=\cancel{a_1}+4\times(\tfrac{1}{3})^2\\
&\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+20\times(\tfrac{1}{9})^2\\
+)\ &\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+100\times(\tfrac{1}{27})^2
\end{aligned}$$

$a_4=1+(\dfrac{4}{9}+\dfrac{20}{81}+\dfrac{100}{729})=1+\dfrac{\frac{4}{9}[1-(\frac{5}{9})^3]}{1-\frac{5}{9}}=\dfrac{1333}{729}$

第 9 回

1. 8；6；6；4；$\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$	2. 7	3. (B)(D)	4. 20%
5. 15；5	6. 78	7. $\sigma_4<\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3<\sigma_5$	
8. (1) $\dfrac{61}{3}$ (2) 14		9. -0.7	10. 2.8

17

1. ①全距 $=10-2=8$ ② $\mu=\dfrac{54}{9}=6$ ③中位數 $Me=6$

④ $\begin{cases}9\times\dfrac{1}{4}=2.25 \ \Rightarrow\ \text{進位為 3，} Q_1=4\\[2mm] 9\times\dfrac{3}{4}=6.75\ \Rightarrow\ \text{進位為 7，} Q_3=8\end{cases}$

$\Rightarrow\quad IQR=Q_3-Q_1=8-4=4$

⑤ $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{9}\times(16+9+4+1+0+1+4+9+16)}$

$=\sqrt{\dfrac{60}{9}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

2. 6、6、6、x、8、9、14

得 $a=\dfrac{49+x}{7}$，$b=x$，$c=6$

若 6、$\dfrac{49+x}{7}$、x 成等差數列

則 $6+x=\dfrac{98+2x}{7}\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{56}{5}$（不合）

若 6、x、$\dfrac{49+x}{7}$ 成等差數列

則 $6+\dfrac{49+x}{7}=2x\quad\Rightarrow\quad x=7$

3. (A)反例：-1、0、1 的算術平均數為 0

(C)反例：-1、0、1 的中位數為 0

(E)反例：1、3、3、3、3、3、5

4. 設平均成長率 x

$(1+x)^4=(1+62\%)(1+28\%)(1+25\%)(1-20\%)$

$1+x=\sqrt[4]{\dfrac{162}{100}\times\dfrac{128}{100}\times\dfrac{125}{100}\times\dfrac{80}{100}}$

$x=\sqrt[4]{\dfrac{2\times3^4\times2^7\times5^3\times2^4\times5}{100^4}}-1=\sqrt[4]{\dfrac{2^{12}\times3^4\times5^4}{100^4}}-1$

$=\dfrac{2^3\times3\times5}{100}-1=1.2-1=0.2=20\%$

故平均成長率為 20%

5. ①算術平均數 $\mu=\dfrac{150}{10}=15$

②標準差 $\sigma=\sqrt{(\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2}{10})-15^2}$

$=\sqrt{250-225}=\sqrt{25}=5$

6. $\begin{cases}\mu_y=a\mu_x+b\\ \sigma_y=a\sigma_x\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}60=48a+b\\ 8=6a\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=\dfrac{4}{3}\\ b=-4\end{cases}$

得 $y=\dfrac{4}{3}x-4$，$100=\dfrac{4}{3}x-4\quad\Rightarrow\quad x=104\times\dfrac{3}{4}=78$

故小穎的原始分數為 78 分

7. $B=-A$，$C=A+2013$

$\therefore\ \sigma_2=|-1|\sigma_1=\sigma_1$，$\sigma_3=\sigma_1$，$\sigma_4=0$

A 組與 E 組的平均數都是 3，但 E 組比較分散

$\therefore\ \sigma_5>\sigma_1$，故 $\sigma_4<\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3<\sigma_5$

8. (1) 1 有 1 個，2 有 2 個，…，30 有 30 個

$\therefore$ 共有 $1+2+3+\cdots+30=\dfrac{30\times31}{2}=465$ 個

總和 $=1^2+2^2+\cdots+30^2=\dfrac{30\times31\times61}{6}$

算術平均數為 $\dfrac{\cancel{30}\times\cancel{31}\times61}{6}\times\dfrac{2}{\cancel{30}\times\cancel{31}}=\dfrac{61\times2}{6}=\dfrac{61}{3}$

(2) $465\times\dfrac{20}{100}=93$ 為整數，由小而大第 93 項和第 94 項均為 14，所以第 20 百分位數為 $\dfrac{14+14}{2}=14$

9. $\dfrac{60-\mu}{\sigma}=-0.1$ 且 $\dfrac{75-\mu}{\sigma}=0.4$，解 $\begin{cases}60-\mu=-\dfrac{\sigma}{10}\\[2mm] 75-\mu=\dfrac{2}{5}\sigma\end{cases}$

得 $\sigma=30$，$\mu=63$，所求為 $\dfrac{42-63}{30}=\dfrac{-21}{30}=-0.7$

10. 由小而大為 a、b、c、d、e

①中位數為 $c=5$

②$\because$ 只有 8 為眾數 $\quad\therefore\ d=e=8$

③平均值為 $\dfrac{a+b+5+8+8}{5}=5\quad\Rightarrow\quad a+b=4$

若 $a=b=2$，則眾數不只有 8 $\quad\Rightarrow\quad a=1$ 且 $b=3$

$\therefore$ 五個數為 1、3、5、8、8

$\therefore\ \sigma=\sqrt{\dfrac{(-4)^2+(-2)^2+0^2+3^2+3^2}{5}}=\sqrt{\dfrac{38}{5}}\approx2.8$

第 10 回

1.(C)(D)(E)　2.(B)　3.(C)　4.(D)　5. $-\frac{2}{3}$

6.(1) -0.8　(2) $y=-0.4x+20.6$　(3) 10.6　7.(B)(D)(E)

8.(1) -4　(2) 6　(3) -0.8　(4) $y=-1.6x+1.6$　9.(A)(C)

10.(1) 0.25　(2) $y=0.25x$　(3) $y=0.15x+18.5$

19 1. $a=0$，$b=1$，$0<c<1$，$d=-1$，$-1<e<0$

2. (A)所有點都落在直線上 $\Leftrightarrow$ $|r|=1$

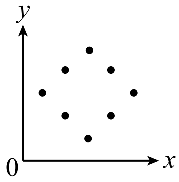
由迴歸直線方程式斜率為正，所以 x、y 為正相關

即 $r>0$，故 $r=1$

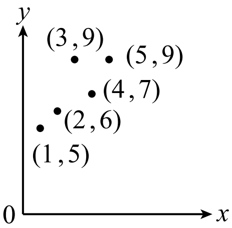
(C)所有點都落在斜率為負的直線上

(D) $|r|$ 愈接近 1，表示兩個變量的相關性愈強，$r=-1$ 為高度負相關

(E)可能為對稱圖形，如右圖



3. $(1,5)$、$(2,6)$、$(5,9)$ 三點在 $y=x+4$ 的直線上，由散布圖知去掉 $(3,9)$ 後，相關係數會變最大



4. 點 $(3,3.7)$ 必在迴歸直線上

代入(A)(C)(E)不合

$\because$ 正相關　$\therefore r>0$

$\Rightarrow$ 斜率 $=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}>0$，而(B)的斜率為負

5. y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y-2=r\cdot\frac{8}{4}(x-5)$

點 $(2,6)$ 代入，$4=2r\times(-3)$ $\Rightarrow$ $r=-\frac{2}{3}$

6. $\mu_x=24$，$\mu_y=11$

x	y	$x-24$	$y-11$	乘	$(x-24)^2$	$(y-11)^2$
20	12	-4	1	-4	16	1
22	13	-2	2	-4	4	4
24	11	0	0	0	0	0
26	9	2	-2	-4	4	4
28	10	4	-1	-4	16	1
120	55	−	−	-16	40	10

(1) $r=\frac{-16}{\sqrt{40}\times\sqrt{10}}=\frac{-16}{20}=-0.8$

(2) $y-11=\frac{-16}{40}(x-24)$，即 $y=-0.4x+20.6$

(3)代 $x=25$，得 $y=-0.4\times25+20.6=10.6$（千箱）

7. (A)迴歸直線斜率 $=(-0.5)\times\frac{\sigma_y}{2}=-2$ $\Rightarrow$ $\sigma_y=8$

(B) (μ_x,μ_y) 在迴歸直線上

$\therefore \mu_y=-2\mu_x+10=-40+10=-30$

(C) $\because r\neq1$　$\therefore$可能是預測值，非真正 y 值

(D) $\sigma_{x'}=\frac{1}{20}\sigma_x=\frac{1}{20}\times2=\frac{1}{10}$

(E) $\frac{1}{20}\times1=\frac{1}{20}>0$　$\therefore r(\frac{1}{20}x+20,y)=r(x,y)=-0.5$

8. (1) $\mu_A=-3\mu_x+2=-6+2=-4$　(2) $\sigma_B=3\sigma_y=3\times2=6$

(3) $\because -3\times3<0$　$\therefore r(A,B)=-r(X,Y)=-0.8$

(4) $y-\mu_B=r\cdot\frac{\sigma_B}{\sigma_A}(x-\mu_A)$ $\Rightarrow$ $y-8=-0.8\cdot\frac{6}{3}(x+4)$

$\Rightarrow$ $y-8=-1.6(x+4)$ $\Rightarrow$ $y=-1.6x+1.6$

9. (A) $\frac{1+2+3+4+5+5}{6}=\frac{10}{3}>\mu_x$

(B) $\frac{6+7+9+8+10+8}{6}=8=\mu_y$

(C) $\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{6}(\frac{49}{9}+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{25}{9}+\frac{25}{9})}$

$=\sqrt{\frac{20}{9}}=\sqrt{2\frac{2}{9}}>\sqrt{2}$

(D) $\sigma_y=\sqrt{\frac{1}{6}(4+1+1+0+4+0)}=\sqrt{\frac{5}{3}}<\sqrt{2}$

(E) x、y 的相關係數變小（畫圖判斷）

10. (1) $r=\frac{1.5\times(-0.5)+0.5\times0+0\times1.5+(-0.5)\times0.5+(-1.5)\times(-1.5)}{5}$

$=\frac{-0.75+0+0+(-0.25)+2.25}{5}=\frac{1.25}{5}=0.25$

(2)迴歸直線為 $y=0.25x$

(3) $y-20=0.25\times\frac{3}{5}(x-10)$

$\Rightarrow$ $y=0.15(x-10)+20=0.15x+18.5$

第 11 回

1.(A)(B)(E)　2.(A)　3.(C)(D)　4. 12；27；2　5. 36

6. 14　7.(D)　8. 16　9. 19　10. 105

21 1. (A) $3\geq3$ $\Rightarrow$ $3>3$ 或 $3=3$（有一成立）

(B) $a^2+b^2=0$ $\Leftrightarrow$ $a=0$ 且 $b=0$

(C) $(x-1)(x-2)=0$，有可能 $x=2$

(D)否定敘述為「$y\neq2$ 或 $x\neq1$」

2. $\because x\geq2$ 且 $y\geq2$　$\therefore x^2+y^2\geq4$

故 $x\geq2$ 且 $y\geq2$ 是 $x^2+y^2\geq4$ 的充分條件

而 $x^2+y^2\geq4$ 不一定可推出 $x\geq2$ 且 $y\geq2$，當 $x\leq-2$ 且 $y\leq-1$ 時，$x^2+y^2\geq4$ 也成立

故 $x\geq2$ 且 $y\geq2$ 不是 $x^2+y^2\geq4$ 的必要條件

3. $\because A\cup B=A$　$\therefore B$ 包含於 A

(A) $|x|>1$ $\Rightarrow$ $x<-1$ 或 $x>1$

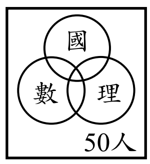
(B) $x^2>4$ $\Rightarrow$ $(x+2)(x-2)>0$ $\Rightarrow$ $x<-2$ 或 $x>2$

(D) $\{x\mid x=2^t，t\in R\}=\{x\mid x>0\}$

(E) $\{x\mid x=t^2-2，t\in R\}=\{x\mid x\geq-2\}$

4. ①恰考一科的有

$(35-17-22+9)+(25-17-15+9)$
$+(33-15-22+9)=12$ 人



②恰考兩科的有

$(17-9)+(15-9)+(22-9)=27$ 人

③應考的學生有 $12+27+9=48$ 人

$\therefore$沒有參加考試的學生有 $50-48=2$ 人

5. ①若 B、D 同色 $\underset{E}{3}\times\underset{A}{2}\times\underset{B}{2}\times\underset{D}{1}\times\underset{C}{2}=24$ 種

②若 B、D 異色 $\underset{E}{3}\times\underset{A}{2}\times\underset{B}{2}\times\underset{D}{1}\times\underset{C}{1}=12$ 種

共 $24+12=36$ 種

6.　　百　個

□□□□□

3　0　⇒　$3\times2\times1=6$

3　2　⇒　$2\times2\times1=4$

3　4　⇒　$2\times2\times1=4$

共 $6+4+4=14$ 個

7. $\underbrace{(26\times26\times26)}_{\text{前三位為字母}}\times\underbrace{(10\times10\times9)}_{\text{末三位為數字}}$

$+\underbrace{(10\times10\times9)}_{\text{前三位為數字}}\times\underbrace{(26\times26\times26)}_{\text{末三位為字母}}$

$=26\times26\times26\times900\times2$

8. 有 $\underbrace{2}_{\text{第五名}}\times\underbrace{2}_{\text{第四名}}\times\underbrace{2}_{\text{第三名}}\times\underbrace{2}_{\text{第二名}}\times\underbrace{1}_{\text{第一名}}=16$ 種

9. 利用取捨原理

所求 $=\underbrace{3\times3\times3}_{\text{任意}}-\underbrace{2\times1\times3}_{T\text{恤、休閒服配西裝褲}}$

$-\underbrace{3\times1\times2}_{\text{西裝褲配運動鞋、休閒鞋}}+\underbrace{2\times1\times2}_{\text{交集}}$

$=27-6-6+4=19$

10. ①第 2 步跳回 a

$\overset{\text{第1步}}{5}\times\underset{\boxed{a}}{\overset{\text{第2步}}{1}}\times\overset{\text{第3步}}{5}\times\underset{\boxed{a}}{\overset{\text{第4步}}{1}}=25$

②第 2 步沒跳回 a

$\overset{\text{第1步}}{5}\times\overset{\text{第2步}}{4}\times\overset{\text{第3步}}{4}\times\underset{\boxed{a}}{\overset{\text{第4步}}{1}}=80$

共 $25+80=105$ 種

第 12 回

1.(A)(B)(C)	2.(E)	3.(1) 48　(2) 336	4. 11
5.(1) 210　(2) 48　(3) 88	6. 28	7. 50	8. 243
9.(1) 62　(2) 50		10.(1) 180　(2) 144	

23　1. (A) $\underbrace{2!}_{\text{甲乙互換}}\times6!$　甲乙×××××

(B) $\frac{6!}{2!}$　戊甲己丁乙丙

(D) $\frac{6!}{4!}$　○○○○×△　(E) 2^6

2. 男女男女男女男女男女　⇒　$5!\times5!$

女男女男女男女男女男　⇒　$5!\times5!$

所求 $=(5!\times5!)\times2$ 種

3. (1) $\underbrace{2}_{\text{飯}}\times\underbrace{1}_{\text{粥}}\times4!=48$ 種

(2) $6!-\underbrace{5!\times2!}_{\text{飯飯相鄰}}-\underbrace{5!\times2!}_{\text{麵麵相鄰}}+\underbrace{4!\times2!\times2!}_{\text{飯飯相鄰且麵麵相鄰}}$

$=720-240-240+96=336$ 種

4. $C_4^{n-1}\times5!=25200$

$\Rightarrow\ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\times3\times2\times1}\times5!=25200$

$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=5040=10\times9\times8\times7$

$\therefore n-1=10$，得 $n=11$

5. (1) 看成 →→→→→→↓↓↓↓ 的排列數

有 $\frac{10!}{4!\times6!}=210$ 種

(2) 有 $\underbrace{\frac{4!}{2!\times2!}}_{A\text{到}C}\times\underbrace{2!}_{C\text{到}D}+\underbrace{\frac{4!}{3!}}_{D\text{到}B}=6\times2\times4=48$ 種

(3) 有 $210-\underbrace{\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{6!}{4!\times2!}}_{A\text{過}C\text{到}B}-\underbrace{\frac{6!}{3!\times3!}\times\frac{4!}{3!}}_{A\text{過}D\text{到}B}+\underbrace{48}_{A\text{過}C\text{且過}D\text{到}B}$

$=210-90-80+48=88$ 種

《另解》可挖去 C、D 用累加法

6. 設跨一階 x 步，跨兩階 y 步，則 $x+2y=9$

列表如下，共有 $1+8+15+4=28$ 種

x	y	方法數
9	0	1
7	1	$\frac{8!}{7!}=8$
5	2	$C_2^6=15$　$\vee\vert\vee\vert\vee\vert\vee\vert\vee\vert\vee$
3	3	$C_3^4=4$　$\vee\vert\vee\vert\vee\vert\vee$
1	4	0

7. ①消 0　⇒　4、4、9、9、9，排法有 $\frac{5!}{2!\times3!}=10$ 種

②消 4　⇒　0、4、9、9、9

排法有 $\underbrace{\frac{5!}{3!}}_{\text{任意排}}-\underbrace{\frac{4!}{3!}}_{0\text{在首位}}=16$ 種

③消 9　⇒　0、4、4、9、9

排法有 $\underbrace{\frac{5!}{2!\times2!}}_{\text{任意排}}-\underbrace{\frac{4!}{2!\times2!}}_{0\text{在首位}}=24$ 種

共 $10+16+24=50$ 種

8. 有兩個 0：$\square\boxed{0}\boxed{0}$　⇒　有 9 個

有一個 0：$\square\boxed{0}\square$　⇒　有 9 個

$\square\square\boxed{0}$　⇒　有 9 個

三位皆非 0：$\square\square\square$　⇒　有 $9\times8\times\frac{3!}{2!}=216$ 個

所求 $=9+9+9+216=243$ 個

9. (1) 有 $2^6-2=62$ 種

(2) 有 $\underbrace{2^6}_{\text{任意搭}}-\underbrace{2}_{6\text{人同車}}-\underbrace{C_5^6\times C_1^1\times2!}_{5\text{人同車}}=64-2-12=50$ 種

10. (1) 有 $C_2^4\times(2^5-\underbrace{2}_{\text{每棟同色}})=6\times30=180$ 種

(2) 四色全用，所以有 2 棟不相鄰的房子必須同色

共有 AC、AD、AE、BD、BE、

CE 六種情況

$(\underbrace{4\times1}_{A\text{、}C\text{同色}}\times\underbrace{3!}_{B\text{、}D\text{、}E\text{任意選}})\times6=144$

第 13 回

1.(A)(B)(C)(D)(E)	2. 250	3.(1) 91　(2) 168		4.(D)
5. 141120	6.(1) 240　(2) 180		7.(1) 2520　(2) 384	
8. 1792	9.(B)(D)	10.(1) 1　(2) 0.94		

25 1. (B) $\frac{5!}{3!2!}=C_3^5$

(C) $\underbrace{\frac{4!}{4!}}_{4個a先排}\times\underbrace{C_3^5}_{5個空隙選3個排b}=1\times C_3^5=C_3^5$　∨a∨a∨a∨a∨

(D) $\underbrace{C_3^5\times3!}_{5個選3個作排列}\times\underbrace{\frac{1}{3!}}_{由小而大排，僅是其中一種，必須除以3!}=C_3^5$

(E) $(a+b)^5=C_0^5a^5+C_1^5a^4b+C_2^5a^3b^2+C_3^5a^2b^3+C_4^5ab^4+C_5^5b^5$

∴ a^3b^2 的係數 $C_2^5=C_3^5$

2. ① 2 男 2 女　⇒　有 $C_2^6\times C_2^5=15\times10=150$ 種

② 3 男 1 女　⇒　有 $C_3^6\times C_1^5=20\times5=100$ 種

共有 $150+100=250$ 種

3. (1)全部－(甲、乙皆不被選到)

$=C_4^9-C_4^7=126-35=91$ 種

(2) $\underbrace{(C_2^2\times C_2^7)}_{必選甲、乙兩人}\times(\underbrace{C_1^2}_{選1人安排在甲、乙中間}\times\underbrace{2!}_{甲、乙互換}\times2!)$

$=21\times8=168$ 種

4. 有 $\underbrace{C_2^3}_{A、B、C選兩點}\times\underbrace{C_1^3}_{D、E、F選一點}+\underbrace{C_1^3}_{A、B、C選一點}\times\underbrace{C_2^3}_{D、E、F選兩點}=9+9=18$ 個

5. $\underbrace{C_2^8\times C_1^7}_{8人選2人，這2人再選1間辦公室}\times6!=28\times7\times720=141120$ 種

6. (1)依 (2, 1, 1, 1) 分組再排列，$\frac{C_2^5C_1^3C_1^2C_1^1}{3!}\times4!=240$

(2)甲分配到 A 校的方法有

$\underbrace{C_1^4C_1^3C_1^2C_1^1}_{A校有2人}+\underbrace{\frac{C_2^4C_1^2C_1^1}{2!}\times3!}_{A校只有甲1人}=24+36=60$ 種

$240-60=180$

7. (1) $\underbrace{C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2}_{8個數任意選2個數大的排上，小的排下}=\frac{8!}{2!\times6!}\times\frac{6!}{2!\times4!}\times\frac{4!}{2!\times2!}\times1$

$=\frac{8\times7!}{16}=\frac{5040}{2}=2520$ 種

(2) $\underbrace{4!}_{\begin{matrix}3&1&7&5\\6&8&2&4\end{matrix}\ 任意排列}\times\underbrace{2^4}_{上下互換}=24\times16=384$ 種

8. 一般項為 $C_k^8(2x)^{8-k}\cdot(\frac{-1}{x^2})^k$

次數為 $(8-k)-(2k)=2$　⇒　$k=2$

代回得 $C_2^8(2x)^6\cdot(\frac{-1}{x^2})^2=28\cdot64x^6\cdot\frac{1}{x^4}=1792x^2$

∴ x^2 項係數為 1792

9. 每一格填法有○或×兩種，故 $2\times2\times\cdots\times2=2^9$

又 $C_0^9+C_1^9+C_2^9+\cdots+C_9^9=2^9$

10. (1) $40^{25}=(1+39)^{25}=1+C_1^{25}39+\cdots+C_{25}^{25}39^{25}$

$=1+39k=1+13\times3k$，$k\in N$，故餘數為 1

(2) $(0.99)^6=(1-0.01)^6=1-C_1^6\times0.01+C_2^6\times(0.01)^2+\cdots$

$\approx1-0.06+0.0015=0.9415\approx0.94$

第 14 回

1.(A)(C)　2.(1) $\frac{1}{5}$　(2) $\frac{1}{5}$　3.(1) $\frac{5}{14}$　(2) $\frac{5}{14}$

4.(1) $\frac{4}{13}$　(2) $\frac{11}{91}$　5. $\frac{181}{196}$　6.(B)　7.(1) $\frac{5}{36}$　(2) $\frac{19}{27}$

8. $\frac{1}{6}\le P\le\frac{1}{2}$　9. 68　10. 36

27 1. (B) $\frac{C_6^{12}}{2^{12}}=\frac{924}{4096}<\frac{1}{2}$　(C) $\frac{C_4^{12}}{2^{12}}=\frac{C_8^{12}}{2^{12}}$

(D) $C_0^{12}<C_1^{12}<C_2^{12}<C_3^{12}<C_4^{12}<C_5^{12}<C_6^{12}$

$C_6^{12}>C_7^{12}>C_8^{12}>C_9^{12}>C_{10}^{12}>C_{11}^{12}>C_{12}^{12}$

(中間項機率最大)

2. $n(S)=5!=120$

(1)末數為 5，即可被 5 整除　∴ $P=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

(2)末兩位為 4 的倍數

□□□□□

$$\left.\begin{matrix}1\ 2 & \Rightarrow & 3!=6\\ 2\ 4 & \Rightarrow & 3!=6\\ 3\ 2 & \Rightarrow & 3!=6\\ 5\ 2 & \Rightarrow & 3!=6\end{matrix}\right\}共24種\quad \therefore P=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

3. (1) 8 人排成一列的方法 $n(S)=8!$

先排丁、戊、己、庚、辛 5 人，再從 6 個空隙中選 3 個排甲、乙、丙，所求為 $\frac{5!\times C_3^6\times3!}{8!}=\frac{5}{14}$

(2) $n(S)=C_3^8$，剩下 5 個數，有 6 個空隙，選 3 個安插 3 數，所求為 $\frac{C_3^6}{C_3^8}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$

4. 共 14 球，$C_2^{14}=91$

(1) $P=\frac{C_2^3+C_2^5+C_2^6}{91}=\frac{3+10+15}{91}=\frac{4}{13}$

(2) $P=\frac{C_2^3+C_2^3+C_2^3+C_2^2+C_2^2}{91}=\frac{3+3+3+1+1}{91}=\frac{11}{91}$

5. 樣本空間 $n(S)=C_2^8\times C_1^7=196$

$1-P$(三格在同一列)

$=1-\frac{C_2^3C_1^2+C_2^2C_1^3+C_2^3C_1^2}{C_2^8\times C_1^7}=1-\frac{15}{28\times7}=1-\frac{15}{196}=\frac{181}{196}$

6. $P_1=\frac{C_1^2\times C_1^1}{2\times2}=\frac{2}{4}$，$P_2=\frac{C_1^2\times3\times3}{6\times6}=\frac{1}{2}$

$P_3=\frac{C_2^4\times C_2^2}{2\times2\times2\times2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$　∴ $P_1=P_2>P_3$

7. (1)有 3 也有 5
- 3、5 各一個　⇒　$C_1^4\times3!=24$ 種
- 3、3、5　⇒　3 種
- 3、5、5　⇒　3 種

∴ $P(A\cap B)=\frac{24+3+3}{216}=\frac{5}{36}$

(2) $P(A\cup B)=1-P($沒 3 且沒 5$)$

$$=1-\frac{4\times4\times4}{6\times6\times6}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

8. $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，$(A\cap B)\subset A$

$\Rightarrow\quad P(A\cap B)\le\frac{1}{2}\cdots$①

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\quad\because P(A\cup B)\le1$

$\therefore\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-P(A\cap B)\le1\quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)\ge\frac{1}{6}\cdots$②

由①②得 $\frac{1}{6}\le P(A\cap B)\le\frac{1}{2}$

9. 不確定的 6 題得分期望值 $=(4\times\frac{1}{3}-1\times\frac{2}{3})\times6=4$ 分

亂猜的 3 題得分期望值 $=(4\times\frac{1}{5}-1\times\frac{4}{5})\times3=0$ 分

故總分期望值 $=16\times4+4+0=68$ 分

10. $100000\times\frac{1}{10000}+20000\times\frac{4}{10000}+(5000\times\frac{9}{10000})\times4$

$=10+8+18=36$

∴一張彩券在開獎前，它的平均價值為 36 元

第 15 回

1.(B)(C)(E)	2.(1) $-\sin\theta$ (2) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$		3.(1) $\frac{9}{4}$ (2) $\frac{1}{4}$	
4. $\frac{81}{16}$	5. $16\sqrt{3}$	6. 3	7.(D)	8. $\frac{15}{4}$；$-\frac{4}{5}$；$-\frac{3}{5}$
9. $(-2,-2\sqrt{3})$		10.(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{7}{6}$ (3) $\frac{22}{27}$		

29 1. (A) $\cos46^\circ=\sin44^\circ\quad\therefore\sin46^\circ>\cos46^\circ$

(B) $\tan50^\circ>1=\tan45^\circ>\tan40^\circ$

(C) $\tan50^\circ=\frac{\sin50^\circ}{\cos50^\circ}<\frac{1}{\cos50^\circ}$

(D) $\sin225^\circ=-\sin45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos225^\circ=-\cos45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(E) $\cos104^\circ=-\cos76^\circ$，$-1<\cos104^\circ<0$

$\tan104^\circ=-\tan76^\circ<-\tan45^\circ=-1$

$\therefore\cos104^\circ>\tan104^\circ$

2. (1) $\sin\angle COD=\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\overline{CD}$

$\sin\theta=\sin(180^\circ+\angle COD)=-\sin\angle COD=-\overline{CD}$

$\therefore\overline{CD}=-\sin\theta$

(2) $\tan\angle EOF=\tan(270^\circ-\theta)=\frac{\overline{EF}}{\overline{OE}}$

得 $\overline{EF}=\tan(270^\circ-\theta)=\tan(90^\circ-\theta)$

$$=\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

3. (1) $(\frac{1}{2})^2+1^2+\sin^2 31^\circ+\sin^2(90^\circ-31^\circ)$

$=\frac{5}{4}+\sin^2 31^\circ+\cos^2 31^\circ=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$

(2) $(-\cos60^\circ)(\sin30^\circ)+(\cos30^\circ)(\tan30^\circ)$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

4. $\overline{AB}=6\sin\theta$，$\overline{AC}=6\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{25}{16}\quad\Rightarrow\quad\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}$

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times6\sin\theta\times6\cos\theta=18\sin\theta\cos\theta=18\times\frac{9}{32}=\frac{81}{16}$

5. $\angle APD=30^\circ\quad\therefore\overline{AD}=6\tan30^\circ=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\angle BPC=60^\circ\quad\therefore\frac{\overline{BC}}{\overline{PB}}=\tan60^\circ\quad\Rightarrow\quad\frac{2\sqrt{3}}{\overline{PB}}=\sqrt{3}$

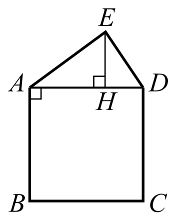
$\Rightarrow\quad\overline{PB}=2\quad\Rightarrow\quad\overline{AB}=6+2=8$

故長方形 $ABCD$ 面積 $=8\times2\sqrt{3}=16\sqrt{3}$

6. 設 $\overline{CD}=x$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{2}{1+x}$

$\tan\alpha=\tan\beta\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}=\frac{2}{1+x}\quad\Rightarrow\quad x=3$ 為所求

7. $\sin(\angle EAD)$



$=\sin(\theta-90^\circ)=\sin[-(90^\circ-\theta)]$

$=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$\overline{EH}=\overline{AE}\sin(\angle EAD)$

$=4(-\cos\theta)=-4\cos\theta$

8. ① $\cos\theta>0$，故 θ 終邊落在第四象限，即 $x>0$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2}{x^2+25}=\frac{9}{25}$

$\Rightarrow\quad x^2=\frac{225}{16}$，$x=\pm\frac{15}{4}$（負不合）

② $\cos\theta=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=-\frac{4}{5}$

③ $\sin(\theta-90^\circ)=\sin[-(90^\circ-\theta)]$

$$=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta=-\frac{3}{5}$$

9. $4\sin^2\theta+8\cos\theta+1=0$

$\Rightarrow\quad4(1-\cos^2\theta)+8\cos\theta+1=0$

$\Rightarrow\quad4\cos^2\theta-8\cos\theta-5=0$

$\Rightarrow\quad(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-5)=0$

$\Rightarrow\quad\cos\theta=-\frac{1}{2}$、$\frac{5}{2}$（不合）$\quad\Rightarrow\quad\theta=120^\circ$ 或 240°

$\because\tan\theta>0\quad\therefore$取 $\theta=240^\circ$

則 $A(4\cos240^\circ,4\sin240^\circ)=(-2,-2\sqrt{3})$

10. (1) $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3}$（根與係數關係）

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{16}{9}\quad\Rightarrow\quad1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{16}{9}$

$\Rightarrow\quad\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$，由根與係數關係知

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{7}{18}=\frac{k}{3}\quad\Rightarrow\quad k=\frac{7}{6}$

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=(\frac{4}{3})^3-3\times\frac{7}{18}\times\frac{4}{3}=\frac{64}{27}-\frac{28}{18}$

$=\frac{64}{27}-\frac{14}{9}=\frac{64}{27}-\frac{42}{27}=\frac{22}{27}$

第 16 回

1.(A)(B)(D)　2. $3:2$　3. $\frac{10\sqrt{3}}{9}$　4.(B)(C)(D)　5. $\frac{9}{2}$

6.(1) 120°　(2) $7\sqrt{3}$　(3) 14　7. $20\sqrt{3}$ 或 $24\sqrt{3}$

8. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　9.(1) 15°　(2) 90°　10. $40\sqrt{10}$

31 1. (A) $\Delta ABC=\frac{1}{2}\times 8\times 7\times\sin 120^\circ=14\sqrt{3}$

(B) $\overline{AB}=\sqrt{8^2+7^2-2\times 8\times 7\times\cos 120^\circ}=\sqrt{169}=13$

(C) $\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \Rightarrow R=\frac{13\sqrt{3}}{3}<10$

(D) $s=\frac{8+7+13}{2}=14$

$\Delta=rs \Rightarrow r=\frac{14\sqrt{3}}{14}=\sqrt{3}<2$

(E)由中線定理知 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{CM}^2+\overline{AM}^2)$

$64+49=2[\overline{CM}^2+(\frac{13}{2})^2] \Rightarrow \frac{113}{2}=\overline{CM}^2+\frac{169}{4}$

$\Rightarrow \overline{CM}^2=\frac{57}{4} \Rightarrow \overline{CM}=\frac{\sqrt{57}}{2}<\frac{8}{2}=4$

2. 連 $\overline{AB}$，設大圓半徑為 R，小圓半徑為 r

ΔABC 中，$\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=2R$，$\Delta ABD$ 中，$\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=2r$

$R:r=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}:\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=\sqrt{2}:\frac{2}{\sqrt{3}}$

面積比 $=R^2:r^2=2:\frac{4}{3}=3:2$

3. 設 $\overline{AD}=x$

ΔABD 面積 $+\Delta ACD$ 面積 $=\Delta ABC$ 面積

$\frac{1}{2}\times 2x+\frac{1}{2}\times 5\times x\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times 2\times 5\times\sin 120^\circ$

$x+\frac{5}{4}x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4x+5x=10\sqrt{3} \Rightarrow x=\frac{10\sqrt{3}}{9}$

4. (A)利用正弦定理，由 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

知 $\sin A+\sin B>\sin C$ 應成立

(B)由 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

知 $a^2+b^2=c^2$，所以 $\angle C=90^\circ$

(C)由平方關係得

$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)=1+(1-\sin^2 C)$

$\therefore \sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B$

則 $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \angle C=90^\circ \Rightarrow \cos C=0$

(D) ΔABC 中大角對大邊

$\angle A<\angle B \Rightarrow a<b \Rightarrow 2R\sin A<2R\sin B$

$\Rightarrow \sin A<\sin B$

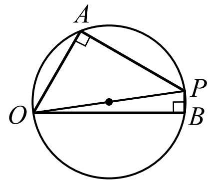
(E) $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle A=60^\circ$ 或 120°

5. $\cos\angle BPC=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\times 5\times 4}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$

$\therefore \cos\angle APQ=-\frac{1}{8}=\frac{3^2+3^2-\overline{AQ}^2}{2\cdot 3\cdot 3}$

$\therefore \overline{AQ}^2=\frac{81}{4}$，得 $\overline{AQ}=\frac{9}{2}$

6. (1) $\overline{PA}\perp\overline{OX}$，$\overline{PB}\perp\overline{OY}$



$\Rightarrow \angle APB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

且 $AOBP$ 四點共圓（對角互補）

(2) $\overline{AB}=\sqrt{2^2+11^2-2\times 2\times 11\times\cos 120^\circ}$

$=\sqrt{147}=7\sqrt{3}$

(3) ΔAOB 中 $\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=2R \Rightarrow \frac{7\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$\Rightarrow 2R=14$　$\because \angle OAP=90^\circ$

$\therefore \overline{OP}$ 為外接圓直徑，故 $\overline{OP}=14$

7. $\overline{BD}=\overline{AD}=7$，$\Delta BCD$ 中，設 $\overline{CD}=x$

$7^2=x^2+8^2-2\times 8\times x\times\cos 60^\circ$

$\Rightarrow 49=x^2+64-8x \Rightarrow x^2-8x+15=0$

$\Rightarrow (x-3)(x-5)=0$

當 $x=3$ 時，即 $\overline{CD}=3$

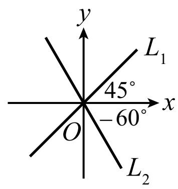
$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times 10\times 8\times\sin 60^\circ=20\sqrt{3}$

當 $x=5$ 時，即 $\overline{CD}=5$

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times 12\times 8\times\sin 60^\circ=24\sqrt{3}$

8. 設 L_1 的斜角為 θ_1，則 $\tan\theta_1=1 \Rightarrow \theta_1=45^\circ$

L_2 的斜角為 θ_2，則 $\tan\theta_2=-\sqrt{3}$



$\Rightarrow \theta_2=-60^\circ$

$\theta=\theta_1-\theta_2=45^\circ-(-60^\circ)=105^\circ$

另一夾角 $180^\circ-105^\circ=75^\circ$

$\tan 2\theta=\tan 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. (1) $\sin(-60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore \sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-60^\circ$

所求 $=(-60^\circ)+120^\circ+(-45^\circ)=15^\circ$

(2)設 $\sin^{-1}\frac{3}{7}=\theta$，則 $\sin\theta=\frac{3}{7}=\cos(90^\circ-\theta)$

$\therefore 90^\circ-\theta=\cos^{-1}\frac{3}{7}$，所求 $=\theta+(90^\circ-\theta)=90^\circ$

10. 設山高 $\overline{OP}=h$，從 ΔAOP 中得 $\overline{PA}=2h$

ΔBOP 中得 $\overline{PB}=\sqrt{2}h$

$\Rightarrow \overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2-2\overline{PA}\times\overline{PB}\times\cos(\angle APB)$

$\Rightarrow 400^2=4h^2+2h^2-2\times 2h\times\sqrt{2}h\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\Rightarrow 400^2=10h^2 \Rightarrow \sqrt{10}h=400$

$\Rightarrow h=\frac{400}{\sqrt{10}}=40\sqrt{10}$

故山高為 $40\sqrt{10}$ 公尺