

5

排列組合與機率

學測趨勢 機率是高中數學最實用的主題，為了求出機率必須把個數算清楚，所以會用到排列組合。命題老師只要把傳統題型結合情境設計，就可以給人耳目一新的感覺。近二十年來，學測指考已經累積為數可觀的考古題，相信這個趨勢不會有任何改變。

準備方向 請同學注意一般人對於排列組合與機率既存的誤解與迷思，適當分類，清楚計數，不重覆也不遺漏，解題時細膩推敲，反覆深思，這樣子才能切中核心，不為所惑。

年 度	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
學測命題數	1	1	2	1	0	2	2	3	2	3

一、邏輯與集合

讀完可以先練習範例 1

★★★★

① 敘述的否定、且與或

- (1) 可判定真偽的語句稱為「敘述」，敘述 P 取否定得到 \overline{P} (或 P' ，讀作非 P)，其真偽情形與 P 相反。兩個敘述 P 、 Q 可用「且 \wedge 」、「或 \vee 」連接，當 P 、 Q 皆真時 $P \wedge Q$ 才真，當 P 、 Q 皆偽時 $P \vee Q$ 才偽。
- (2) 「 P 且 Q 」的否定為「 \overline{P} 或 \overline{Q} 」。請注意「且」變成「或」。
- (3) 「 P 或 Q 」的否定為「 \overline{P} 且 \overline{Q} 」。請注意「或」變成「且」。

- 例 A** (1) 「全班至少 10 人被當」的否定敘述為 _____。
- (2) x 為實數，「 $1 \leq x \leq 5$ 」的否定敘述為 _____。
- (3) x 、 y 為整數，「 $x < 3$ 或 $y = 1$ 」的否定敘述為 _____。

讀完可以先練習範例 2

★★★★

② 充分與必要

- (1) 推論「若 P 則 Q 」若成立，可記為 $P \Rightarrow Q$ ，稱敘述 P 為 Q 的充分條件，敘述 Q 為 P 的必要條件。若敘述 P 與敘述 Q 可互推，記為 $P \Leftrightarrow Q$ ，稱 P 、 Q 互為充要條件。若要說明「 $P \Rightarrow Q$ 」不成立，只要舉反例即可。
- (2) 「若 P 則 Q 」與「若 \overline{Q} 則 \overline{P} 」同義。如「若 $x = 3$ 則 $y = 5$ 」與「若 $y \neq 5$ 則 $x \neq 3$ 」意思相同。

例 A 設 x 、 y 為實數，請問：

- (1) $x^2 = y^2$ 是 $x^3 = y^3$ 的 _____ 條件 (2) $x^3 \neq y^3$ 是 $x \neq y$ 的 _____ 條件。
- (A) 充分非必要 (B) 必要非充分 (C) 充要 (D) 非充分且非必要

例 B 下列哪些選項是「 $-2 < x < 3$ 」的充分條件？_____

(A) $x = 0$

(B) $-1 \leq x \leq 1$

(C) $-2 \leq x \leq 2$

(D) $-3 \leq x \leq 3$

3 屬於與包含

(1) 若 p 是集合 A 的元素，記為 $p \in A$ 。

(2) 集合 A 的每個元素都在集合 B 內，則 A 為 B 的**子集**（部分集合），記為 $A \subset B$ 。

(3) 已知 A 有 n 個元素，則 A 有 2^n 個**不同的子集**，用樹狀圖可明顯看出。

(4) **空集合** ϕ 為任意集合的子集。

(5) **數系**：自然數 $N \subset$ 整數 $Z \subset$ 有理數 $Q \subset$ 實數 R 。

例 A 集合 A ，已知 $n(A) = 5$ ，則 A 有_____個不同的子集合。

例 B 集合 $A = \{3, 5, \{1, 2\}\}$ ，則下列何者正確？_____

(A) $n(A) = 4$

(B) $1 \in A$

(C) $\{5\} \in A$

(D) $\{1, 2\} \subset A$

(E) $3 \in A$

例 C 下列哪些正確？_____

(A) $0 \in N$

(B) $3 \in Q$

(C) $\sqrt{16} \in Z$

(D) $0^0 \in R$

讀完可以先練習範例 3

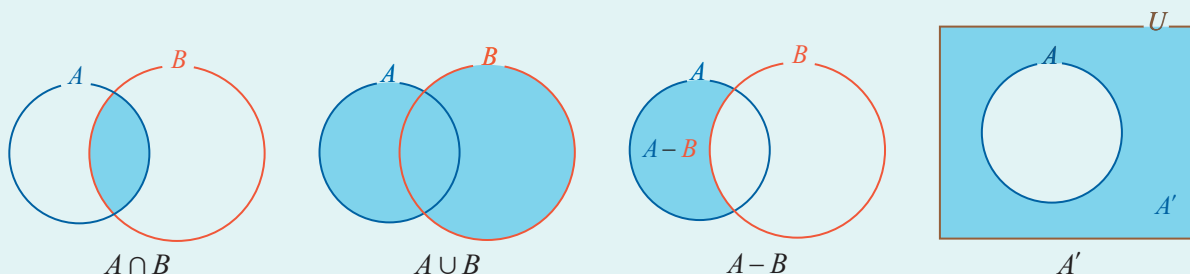
4 集合的運算：集合 A 、 B 都在字集 U 內，則其運算與圖示如下。

(1) 集合 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 為 A 與 B 的**交集** $A \cap B$ ，取 A 、 B 的**共同**部分。

(2) 集合 $\{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 為 A 與 B 的**聯集** $A \cup B$ ，取 A 、 B 的**全部**。

(3) 集合 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 為 A 與 B 的**差集** $A - B$ ，即 A **扣掉** B 。

(4) 集合 $\{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ 為 A 的**補集** A' ，就是 A 的**外面**。



例 A $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ，則 $A \cap B =$ _____，

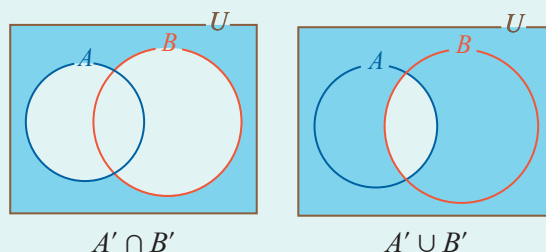
$A \cup B =$ _____， $A - B =$ _____。

例 B $A = \{x \mid -1 < x \leq 3, x \in R\}$, $B = \{x \mid 2 \leq x < 5, x \in R\}$, 求：

- (1) $A \cap B =$ _____。
 (2) $A \cup B =$ _____。
 (3) $A - B =$ _____。

5 笛摩根律： A' 、 B' 視為 A 、 B 的否定，交集為「且」，聯集為「或」，所以根據邏輯規則知：

- (1) $A' \cap B' = (A \cup B)'$ 。
 (2) $A' \cup B' = (A \cap B)'$ 。



例 A 設字集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, 求：

- (1) $A' \cap B' =$ _____ (2) $A' \cup B' =$ _____。

例 B 已知 $n(U) = 10$, $n(A \cap B) = 2$, $n(A \cup B) = 9$, 求：

- (1) $n(A' \cap B') =$ _____ (2) $n(A' \cup B') =$ _____。

讀完可以先練習範例 4

6 取捨原理（排容原理）：即求兩個或三個集合取聯集的元素個數。

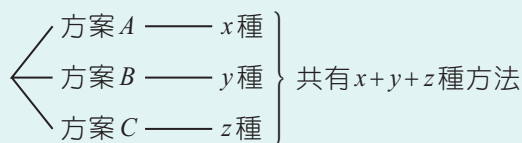
- (1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 。
 (2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ 。

例 A 已知 $n(A) = 10$, $n(B) = 20$, $n(A \cap B) = 5$, 求 $n(A \cup B) =$ _____。

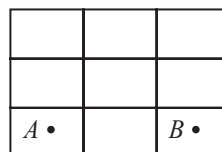
例 B 有甲、乙、丙三個社團，參加者共 40 人，其中參加甲的有 27 人，參加乙的有 30 人，參加丙的有 32 人，參加甲和乙的有 20 人，參加乙和丙的有 23 人，參加甲和丙的有 25 人，則三社團均參加的有 _____ 人。

二、計數原理與排列組合

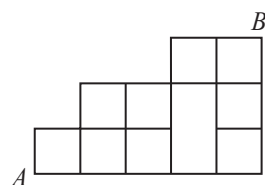
7 加法原理：完成一件事的方法可分成若干類，則其方法數為分類相加。常用樹狀圖或表列法來求解。



例 A 右圖中，至少包含 A 或 B 兩點之一的長方形共有 _____ 個。



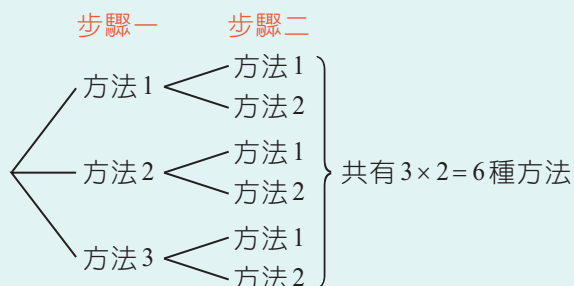
例 B 如右圖所示，由 A 到 B 走捷徑，有 _____ 種走法。



讀完可以先練習範例 5、6



8 乘法原理：完成一件事可分為幾個步驟，則各階段的方法數相乘，為完成整件事的方法數，可看成是「加法原理」的速解。常用樹狀圖或表列法來求解。



例 A $n = 2^9 \cdot 3^5 \cdot 7^4$ 的正因數中，完全平方數有 _____ 個。

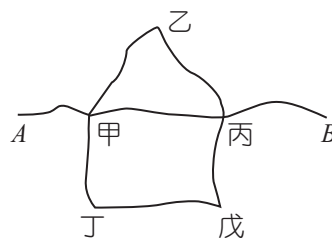
例 B 大雄口袋裡有 4 個一元硬幣、8 個十元硬幣、2 張百元鈔，到商店買了一件商品，付帳時，不用找錢，若已知此商品至少 10 元，則其價錢共有 _____ 種可能。

讀完可以先練習範例 7、8

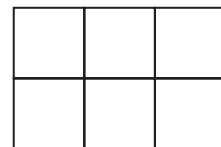


9 排列 P_r^n 的涵義： n 個相異物取出 r 個做直線排列的排法，算法為 $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ ，即 n 往下共 r 個整數連乘。規定 $0! = 1$ ，故 $P_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$ 。 P_r^n 是乘法原理的應用。

例 A A 城到 B 城之間有甲、乙、丙、丁、戊五城，其間連結的道路如右圖所示。今從 A 城出發走向 B 城，要求每條道路都要經過並且只經過一次，則總共有 _____ 種走法。



例 B 有一個兩列三行的表格如右圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有 _____ 種。



例 C 6 個不同的獎品選其中 4 個分給甲、乙、丙、丁四個人，每人一個，分法有 _____ 種。

例 D 10 個點最多可形成 _____ 條射線。

- ⑩ 有相同物的直線排列：看有幾個相同，就除以幾階乘。如 $a、a、a、b、b、c、d$ 的排列數為 $\frac{7!}{3!2!}$ 。

例 A 在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點。若經過 6 次跳動後運動物體落在點 +4 處，則此運動物體共有 _____ 種不同的跳動方法。

例 B 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有 7 節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則 7 節車廂一共有 _____ 種畫法。

例 C 將 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 排成八位數，共有 _____ 種排列方式。

- ⑪ 組合 C_r^n 的涵義： n 個相異物取出 r 個成一組的算法為 $C_r^n = C_{n-r}^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}$ 。

例 A 平面上 7 條直線，最多有 _____ 個交點，最多可圍成 _____ 個三角形。

例 B 拳擊賽規定每位選手必須和所有其他選手各比一場，賽程總計為 78 場，則選人數為 _____。

例 C 將八位新生平均分發到甲、乙、丙、丁四班，共有 _____ 種分法。

例 D 9 本不同的書分成三堆，每堆三本，共有 _____ 種分法。

- ⑫ 巴斯卡定理： $C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$ （【口訣】上同加 1，下差 1 取大）。

例 A 若 $C_3^9 + C_7^9 = C_k^{10}$ ，則 $k =$ _____。

例 B $C_0^3 + C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8 + C_6^9 = C_r^{10}$ ，且 $r \leq 5$ ，求 $r =$ _____。

讀完可以先練習範例 13

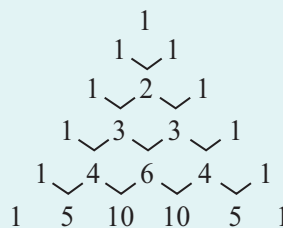
★★★★

13 二項式定理：為 $(a \pm b)^2$ 、 $(a \pm b)^3$ 的推廣

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \cdots + C_{n-1}^n xy^{n-1} + C_n^n y^n$$

為恆等式，代 $x=1$ ， $y=1$ 得 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$ 。

請同學熟記係數到 5 次方的展開係數，解題比較方便。



例 A 求 $(2x+y)^7$ 展開後：(1) x^3y^4 項係數為 _____ (2) x^2y^6 項係數為 _____。

例 B 設 $(1+\sqrt{2})^6 = a+b\sqrt{2}$ ，其中 a 、 b 為整數。請問 b 等於下列哪一個選項？ _____



(A) $C_0^6 + 2C_2^6 + 2^2C_4^6 + 2^3C_6^6$

(B) $C_1^6 + 2C_3^6 + 2^2C_5^6$

(C) $C_0^6 + 2C_1^6 + 2^2C_2^6 + 2^3C_3^6 + 2^4C_4^6 + 2^5C_5^6 + 2^6C_6^6$

(D) $2C_1^6 + 2^2C_3^6 + 2^3C_5^6$

(E) $C_0^6 + 2^2C_2^6 + 2^4C_4^6 + 2^6C_6^6$

答對率 69% 103 學測

例 C 將 $(x^2+y)^{12}$ 展開集項後，請選出正確的選項。 _____

(A) x^{24} 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數

(B) $x^{12}y^6$ 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數

(C) $x^{14}y^5$ 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數

(D) x^8y^8 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數

例 D 計算 $C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + \cdots + C_9^{10} + C_{10}^{10} =$ _____。

三、機率與期望值

★★★★

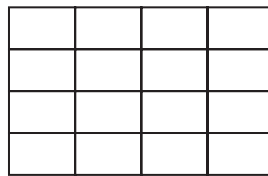
14 機率定義：若樣本空間 S 中，每個樣本發生的機會都相等，規定事件 A 發生的機率為 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ 。範圍為 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。我們常用作記號、分大小等方法，使樣本點發生的機會一樣大。

例 A 擲一公正硬幣 8 次，則正面恰出現 4 次的機率為 _____。

例 B 擲三粒公正骰子，問恰好有兩粒點數相同的機率為 _____。

例 C 在右圖的棋盤方格中，隨機任意取兩個格子。選出的兩個格子不在同行（有無同列無所謂）的機率為何？_____

- (A) $\frac{1}{20}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{4}{5}$



例 D 丟一枚公正銅板 4 次並記錄正反面的過程，下列哪種情形出現機率最大？_____

- (A) 正正正正 (B) 正正正反 (C) 正正反反
(D) 正反反反 (E) 上述四種情形的機率相同

讀完可以先練習範例 14 ~ 20



15 機率的性質：A、B、C 為樣本空間 S 的事件，則：

- (1) $P(\phi) = 0$ ， $P(S) = 1$ 。
- (2) A 不發生的機率為 $P(A') = 1 - P(A)$ ，稱為倒扣法。
- (3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A' \cap B')$ ，即取捨原理。
- (4) $P(A \cup B \cup C)$
 $= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$
 $= 1 - P(A' \cap B' \cap C')$ 。

例 A 袋中有若干個白球與黑球，任取其中 5 球，沒有白球的機率為 $\frac{6}{25}$ ，恰得一白球的機率為 $\frac{11}{25}$ ，求至少取得兩白球的機率為_____。

例 B 已知樣本空間中事件 A 發生的機率為 0.7，事件 B 發生的機率為 0.5，A 或 B 發生的機率為 0.9，求 A 與 B 同時發生的機率為_____。

例 C 設事件 A 發生的機率為 $\frac{1}{2}$ ，事件 B 發生的機率為 $\frac{1}{3}$ 。若以 p 表事件 A 或事件 B 發生的機率，則 p 值的範圍為何？_____

- (A) $p \leq \frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{6} < p \leq \frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{5}{6}$ (E) $p > \frac{5}{6}$

讀完可以先練習範例 21、22



16 試驗的期望值：由莊家對隨機試驗的每一種可能的結果，設定對應的報酬，將各結果的機率乘上報酬之後，相加的和即為該試驗的期望值，記為 E。此報酬必須是同類的數值，如金錢或個數，而期望值的概念就是重複多次試驗的平均報酬。多數情況下，重複操作試驗（無論放回與否），各次的期望值會相同。

例 A 有一箱子，內有 3 黑球與 2 白球。有一遊戲，從箱子中任取出一球。假設每一顆球被取出的機率都相同，若取出黑球可得獎金 50 元，而取出白球可得獎金 100 元，則下列哪一個選項是此遊戲的獎金期望值？_____

(A) 70 元 (B) 75 元 (C) 80 元 (D) 85 元 (E) 90 元 答對率 85% 100 學測

例 B 某公司舉辦年終尾牙餐會，會中安插了一項抽獎活動。在抽獎箱中放了一副 52 張的撲克牌，每人抽出一張牌，且抽後放回；抽到紅心的紅色牌給獎金 8000 元，抽到方塊的紅色牌給獎金 6000 元，而抽到黑桃或梅花的黑色牌則一律給 2000 元的獎金。假設每張牌被抽到的機率相等，那麼抽到獎金的數学期望值為_____元。

例 C 袋子裡有 3 個球，2 個球上標 1 元，1 個球上標 5 元。從袋中任取 2 個球，即可得到兩個球所標錢數的總和。則此玩法所得錢數的期望值是_____元。

例 D 一顆特別的骰子，其六個面中有兩面為 2 點、兩面為 4 點、其餘兩面為 5 點。假設投擲這顆骰子每面出現的機率都相等。擲這顆骰子兩次，所得點數和的數学期望值為_____。（化為最簡分數）

答對率 51% 101 指考乙

範例 1 且、或與否定敘述

下列各選項關於「否定敘述」的內容哪些為真？_____

- (A) x 為實數，則「 $1 \leq x \leq 2$ 」的否定敘述為「 $x < 1$ 且 $x > 2$ 」
- (B) 「整數 a 、 b 、 c 、 d 的乘積為 0」的否定敘述為「整數 a 、 b 、 c 、 d 均不為 0」
- (C) 「點 (x, y) 在第二或第四象限」的否定敘述為「點 (x, y) 滿足 $xy \geq 0$ 」
- (D) 「四邊形 $ABCD$ 是正方形」的否定敘述為「四邊形 $ABCD$ 至少有一內角不等於 90° 」
- (E) 甲、乙、丙、丁、戊共 5 人排成一列，「甲乙丙三人相鄰」的否定敘述為「甲乙丙三人兩兩不相鄰」

解

類題 1 請問下列各選項的敘述哪些為真？_____

- (A) 不等式 $x^2 \leq 4$ 的解寫成「 $-2 \leq x \leq 2, x \in R$ 」，其中的逗號代表「或」
- (B) 「整數 x 不是 2 的倍數也不是 3 的倍數」相當於「整數 x 不是 6 的倍數」
- (C) 「整數 $x、y、z$ 均為奇數」的否定為「整數 $x、y、z$ 的乘積為偶數」
- (D) $x、y$ 為實數，「 $x^2 + y^2 = 0$ 」的否定為「 $xy \neq 0$ 」
- (E) 「三角形 ABC 是正三角形」的否定為「三角形 ABC 至少有一個內角不是 60° 」

類題 2 中山高速公路在重慶北路交流道南下入口的匝道分成內、外兩線車道，路旁立有標誌「外側車道，大客車專用」。請選出不違反此規定的選項：_____

- (A) 小型車行駛內側車道
- (B) 小型車行駛外側車道
- (C) 大客車行駛內側車道
- (D) 大客車行駛外側車道
- (E) 大貨車行駛外側車道

範例 2 充分條件與必要條件

請問下列各選項的推論或敘述哪些為真？_____

- (A) 若 $2 < x < 5$ ，則 $1 \leq x \leq 8$
- (B) 若 $-1 \leq x \leq 2$ ，則 $1 \leq x^2 \leq 4$
- (C) 某生「段考各科成績都不是班上的第一名」，是「段考總成績不是全班第一名」的充分條件
- (D) 「 $\angle BAC = 60^\circ$ 」是「 $\triangle ABC$ 是正三角形」的必要條件
- (E) 「 $(x-1)(x-2) < 0$ 」是「 $1 < x < 2$ 」的充要條件

解

.....

.....

.....

.....

類題 3 已知「 $a < 3$ 且 $b > 5$ 」是「 $x = 1$ 或 $y \neq 2$ 」的充分條件，則下列哪些選項是被允許可以發生的？_____

- (A) $a = 3, b = 6, x = 5, y = 8$
- (B) $a = 2, b = 8, x = 4, y = 5$
- (C) $a = 0, b = 9, x = 3, y = 2$
- (D) $a = 1, b = 4, x = 1, y = 2$
- (E) $a = 5, b = 3, x = 9, y = 1$

類題 4 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。



一、國文成績或英文成績 70 分（含）以上

二、數學成績及格

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格，請問下列哪一個選項的推論是正確的？_____

(A) 小文的英文成績未達 70 分

(B) 小文的數學成績不及格

(C) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格

(D) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格

(E) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

答對率 70% 102 學測

範例 3 集合的符號與運算

有集合 A 、 B 、 C 、 D ，已知 $A \cap B = \{1\}$ ， $A \cap C = \{2, 3\}$ ， $A - D = \{4\}$ ，則下列各選項敘述哪些為真？_____

(A) $B \cap C = \phi$

(B) $A \cap B \cap C = \phi$

(C) $4 \in (B \cup C)$

(D) $1 \in (B \cap D)$

(E) $\{1, 2, 3\} \subset D$

解

類題 5 $A = \{x | x^2 + ax - 12 = 0\}$ ， $B = \{x | x^2 + bx + c = 0\}$ ，若 $A \neq B$ ， $A \cup B = \{-3, 4\}$ ， $A \cap B = \{-3\}$ ，求實數 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

類題 6 設 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 、 c_1 、 c_2 為實數，已知集合 $A = \{x | a_1 < x < a_2, x \in R\}$ ， $B = \{x | b_1 < x < b_2, x \in R\}$ ， $C = \{x | c_1 < x < c_2, x \in R\}$ ，若 $A \cap B = \{x | 2 < x < 6, x \in R\}$ ， $A \cup B = \{x | -3 < x < 8, x \in R\}$ ， $A \cap C = \{x | 4 < x < 8, x \in R\}$ ， $a_1 > b_1$ ， $a_2 > b_2$ ，則 $B \cap C = \{x | p < x < q, x \in R\}$ ，試求數對 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

範例 4 取捨原理

熱舞社共 48 人，持有 A 、 B 、 C 三種飲料者如下表，且每一學生至少持有一種飲料。

種類	A	B	A 或 B	B 或 C	B 且 C	C 且 A
人數	22	20	37	36	8	8

則：(1) 持有 C 的有 _____ 人 (2) 持有 A 且 B 且 C 三者的有 _____ 人。

解

💡 關鍵想法

把文字表格化成集合的算式吧！

類題 7 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而且球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有 _____ 種不同款式的「阿民」公仔。

類題 8 某一班共有 45 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 24 人有平板電腦。設：



A 為同時有手機與平板電腦的人數

B 為有手機，但沒有平板電腦的人數

C 為沒有手機，但有平板電腦的人數

D 為沒有手機，也沒有平板電腦的人數

請選出恆成立的不等式選項。_____

(A) $A > B$ (B) $A > C$ (C) $B > C$ (D) $B > D$ (E) $C > D$

全對率 21% 104 學測

範例 5 樹狀圖與表列法

有甲、乙、丙、丁、戊共 5 人，排成一列拍了一張照片，如右圖。拍完後這 5 人還想再拍一張，且限定每個人都不可以待在原本的位置，其中甲因身高最高只能站在兩側，請問下一張照片中，這 5 人共有 _____ 種不同的排列方式。



解

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

小小叮嚀

想要完整列出所有情形，用樹狀圖或作表格來呈現最清楚了！是計數原理的基本功，請多練習

類題 9 試問共有多少組正整數 (k, m, n) 滿足 $2^k 4^m 8^n = 512$? _____



- (A) 1 組 (B) 2 組 (C) 3 組 (D) 4 組 (E) 0 組

答對率 66% 108 學測

類題 10 圓筒中有半打乒乓球，編號為 ①～⑥，如右圖。圓筒的兩端各有開口可將球取出，一次取一球，依取出的順序將球由左而右排成一列，請問：

(1) 下列哪些選項是可能出現的排列方式？ _____

- (A) ⑥ ⑤ ④ ① ② ③ (B) ① ② ⑥ ③ ⑤ ④ (C) ① ③ ⑤ ② ④ ⑥
(D) ① ⑥ ② ⑤ ③ ④ (E) ⑥ ③ ① ⑤ ④ ②

(2) 請問球號的排列共有 _____ 種情形。

(3) 在所有的排列情形中，球號先增加再減少的情形有 _____ 種。



5

排列組合與機率

範例 6 計數原理

棒球比賽每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：

- (一) 投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；
- (二) 外野手 4 位（每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備）；
- (三) 另外 1 位是全隊人氣最旺的明星球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。

已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並由人氣最旺的明星球員擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有_____種先發守備陣容。（當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容）

解

解題心得

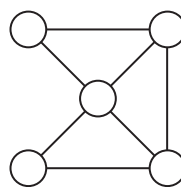
字很多，但是不難，只要閱題之後篩去無用的訊息，解題的脈絡就會慢慢浮現。這也是素養的方向之一

類題 11 阿美的衣櫥中有 5 件上衣、2 件裙子、4 件長褲、3 雙長襪、4 雙短襪，每件衣裙褲襪的款式都不相同。現在阿美與朋友有約，要從衣櫥中選出一件上衣、一件裙或褲及一雙襪子來穿搭，請問：

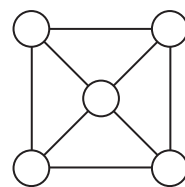
- (1) 共有_____種穿搭方式。
- (2) 若限制裙子只能搭配長襪，則有_____種穿搭方式。
- (3) 若限制長襪只能搭配裙子，則有_____種穿搭方式。

類題 12 有 n 種顏色的塗料， $n \geq 4$ ，要塗入右圖的圓格之中，相連線的圓格不可同色，請問：

- (1) 圖(一)共有_____種塗法。
- (2) 圖(二)共有_____種塗法。（均用 n 表示）



圖(一)



圖(二)

範例 7 相異物的直線排列

甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人排成一列，則：

- (1) 甲乙丙 3 人相鄰，有 _____ 種排法。
- (2) 甲乙相鄰但甲丙不相鄰，有 _____ 種排法。
- (3) 甲乙不相鄰且丙丁不相鄰，有 _____ 種排法。
- (4) 甲乙兩人都不可以排在首位也不可以排在末位，有 _____ 種排法。

解

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

... 小小叮嚀

同學對這個題目一定非常熟悉，
小心老師會編故事來考你

- 類題 13 社團校慶表演，有體重由輕而重的甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬共 9 人要分三組，每組三人排成右圖的形狀，體重最輕的甲、乙、丙三人必須站在最上面，請問演出時這 9 人的位置共有 _____ 種排法。



- 類題 14 學校班級在本學期中，每週有四節藝能課，包含兩節體育課、一節音樂課與一節美術課。根據學校排課原則：
- (1) 兩節體育課不能排在同一天或相鄰的兩天
 - (2) 每班一天中最多只能有兩節藝能課
- 請問該班從星期一至星期五的課表，這四節藝能課的排課有 _____ 種不同的方法。（只考慮此四節藝能課從星期一至星期五分布情形，不考慮在每天的哪一節課）

範例 8 相異物的重複排列

有一種特殊的號碼鎖有 3 個轉輪，每個轉輪有 0, 1, 2, 3, 4, 5 等 6 個數字，正確號碼是一組可重複的數字，例如：035、525、333。

- (1) 在完全不知情的狀況下，要打開鎖，最多要試多少組？_____組
- (2) 已知正確號碼中有一個數字是 5，另外兩個號碼是異於 5 的數字（可相同也可相異），要打開這個鎖，請問最多要試多少組不同的號碼？_____組

解

類題 15 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 *O* 以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如：*AA1234*、*AB4434* 為可出現的車牌號碼；而 *AO1234*、*AB3444* 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 *A* 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為：_____

- (A) 25×9^3 (B) $25 \times 9^2 \times 10$ (C) 25×900
(D) 25×990 (E) 25×999

類題 16 有 4 本不同的書及 2 枝不同的筆要分給甲、乙、丙三個人，請問：

- (1) 任意分配，有_____種分配方式。
- (2) 甲至少拿到一本書，有_____種分配方式。
- (3) 甲有拿到書也有拿到筆的分配方式有_____種。

範例 9 有相同物的直線排列

答對率 29%

106 學測

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：



(甲)每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次

(乙)連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食



根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

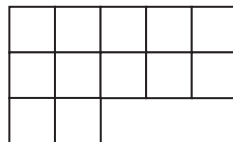
- (A) 52 (B) 60 (C) 68 (D) 76 (E) 84

解

f_x 應用公式

$a、a、a、b、b$ 的排列方法有 $\frac{5!}{3! \times 2!}$

題 17 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即  或 。則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有 種。



答對率 22% 103 學測

類題 18 某社區共有 12 戶住家，舉辦住戶大會時，管委會提供獎品供參加的住戶摸彩，計有特獎一份、頭獎一份、貳獎兩份、參獎三份，結果只有 6 戶的住家派家人前來出席大會，獎品卻有七份，怎麼辦呢？經大家討論，決定先摸出頭獎、貳獎及參獎，各戶恰得一份獎品後，再由抽中參獎的 3 位住戶來抽特獎，請問這樣安排下，抽完籤之後這七份獎品共有 _____ 種分配方法。

範例 10 組合 C_r^n 的基本應用

因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水。若要求停水的兩天不相連，則自來水公司共有 _____ 種選擇方式。

解

再講清楚

雖然只是 C_r^n 的單項使用，但用組合選空隙使被選的相異物不相鄰，這對同學來說比較抽象。此題若不用 C_r^n 也可暴力列出，因為數字不大

類題 19 某遊戲公司在網路上舉辦電玩連線 PK 大戰，參賽的玩家必須與其他每個參賽者對戰一場，計分規則為：勝者得 2 分，輸者得 0 分，平手則各得 1 分。若賽程結束後把各個玩家的分數加起來，其總和為兩千兩百多分，則這個比賽共有 _____ 個玩家參賽。

類題 20 圓周上有 n 個點，若任取兩點連成弦共可得到 a 條弦，若任取三點連成三角形共可得到 b 個三角形，已知 b 是 a 的 4 倍，則 $n =$ _____。

範例 11 結合計數原理使用 C_r^n

整數 1 ~ 15 分組如右表：
現由 1 ~ 15 任取三個相異數字，若這三個數字都沒有同組的情形，請問共有 _____ 種不同的取法。

A	B	C	D	E
1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15

解

概念強化

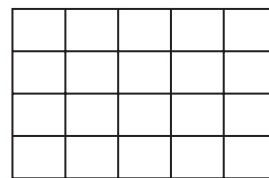
_____：撲克牌共 52 張，有 4 種花色各有 13 種點數 A、2、3、...、J、Q、K，取出 4 張恰成「兩對」

(如    ) 的取法有

$$C_1^{13} \times C_2^4 \times C_1^{12} \times C_2^4$$

類題 21 一組電話號碼共有 7 碼，若前三碼數字相異遞增，且後四碼數字也是相異遞增，則稱這組號碼是「旺數號碼」，現某區域的電話號碼第一個數字必須是 5，則這個區域的「旺數號碼」共有 _____ 組。

- 類題 22 如右圖方格紙，請問：(1)圖中共有_____個矩形
(2)任選兩格，此兩格不在同一行的選法有_____種。



範例 12 用 C_r^n 進行分組與人員選派

答對率 92% 101 指考乙

一乒乓球隊有 6 位選手，其中甲、乙、丙為右手持拍的選手，丁、戊為左手持拍的選手，而己為左右手皆可持拍的選手。現在要派出兩名選手參加雙打，規定由一名可以右手持拍的選手與一名可以左手持拍的選手搭配。請問共有多少種可能的搭配？_____

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

解

- 類題 23 有 6 男 4 女共 10 名學生擔任本週值日生，導師規定在本週五個上課日中，每天 2 名值日生，且至少須有 1 名男生，試問本週安排值日生的方式共有_____種。

- 類題 24 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人。某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有_____種不同的組隊方法。

範例 13 二項式定理

設 $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots + a_nx^n$ ，其中 a_0 、 a_1 、 \cdots 、 a_n 皆為整數，請回答下列問題：

- (1) 若 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 4096$ ，求 $n =$ _____。
(2) 若 $a_4 : a_{n-6} = 3 : 2$ ，則 $n =$ _____。
(3) $(11)^{2004}$ 的十位數字為_____。

解

5

排列組合與機率

類題 25 求 x^{10} 除以 $(x-1)^3$ 的餘式為_____。

類題 26 若正整數 n 、 r 使得 $(2x+3y)^n$ 的展開式中， $x^r y^{n-r}$ 的係數與 $x^{r-1} y^{n-r+1}$ 的係數相等，請問關於 n 與 r 的敘述，下列各選項的敘述哪些為真？_____

- (A) n 必為偶數
- (B) r 可為任意偶數
- (C) 若 n 與 r 都比 10 小，則數對 (n, r) 共有三組解
- (D) 若 n 愈大，則 r 愈大
- (E) 數對 (n, r) 有無限多種情形

範例 14 應用排列組合求機率

坐標平面上，一隻青蛙從原點出發，每次可向上、下、左、右隨機選一個方向移動一單位長，求經過四次的移動後，青蛙又回到原點的機率為_____。

解

考情分析

本題由 94 年學測試題修改而得，後來精準命中 106 年學測的選填 F

類題 27 金先生提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3、一個 8、一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試，請問他只試一次就成功的機率為_____。

類題 28 將 1、2、3、4 四個數字隨機填入右方 2×2 的方格中，每個方格中恰填一數字，但數字可重複使用。試問事件「 A 方格的數字大於 B 方格的數字、且 C 方格的數字大於 D 方格的數字」的機率為多少？_____

A	B
C	D

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{9}{64}$ (C) $\frac{25}{64}$ (D) $\frac{9}{256}$ (E) $\frac{25}{256}$ 答對率 80% 100 指考甲

範例 15 選人的機率問題

答對率 46%

100 學測

高三甲班共有 20 位男生、15 位女生，需推派 3 位同學參加某項全校性活動。班會中大家決定用抽籤的方式決定參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有男也有女的機率為_____。

解

再想一想

如果算成 $C_1^{20} \times C_1^{15} \times C_1^{33}$ 是錯的，想想是多算還是少算？

類題 29 某課外活動社團共有 20 位同學參加，已知其中高一、高二、高三同學所佔比率分別為 55%、25%、20%。若由該社團中任選 2 人，則此 2 人是不同年級學生的機率是_____。

類題 30 阿貴和阿美及其他 8 名同學共 10 名學生輪到本週擔任值日生。本週 5 個上課日每天從尚未當過的同學中抽籤選出 2 位輪值。則阿貴和阿美同一天擔任值日生的機率為_____。

範例 16 取數字的機率問題

臺北銀行最早發行的樂透彩（俗稱小樂透）的玩法是「42 選 6」：購買者從 01 ~ 42 中任選六個號碼，當這六個號碼與開出的六個號碼完全相同（不計次序）時即得頭獎；臺北銀行曾考慮發行「39 選 5」的小小樂透：購買者從 01 ~ 39 中任選五個號碼，當這五個號碼與開出的五個號碼完全相同（不計次序）時即得頭獎。假設原來小樂透中頭彩的機率是 R ，而曾考慮發行的小小樂透中頭彩的機率是 r ，試問比值 $\frac{r}{R}$ 最接近下列哪一個選項？_____

- (A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

解

小小叮嚀

分數的約分絕不能出錯！

5

排列組合與機率

類題 31 樂透是由 1 ~ 42 個號碼開出 6 個號碼，請問開出的 6 個號碼都是偶數的機率，最接近下列哪一個值？_____

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{6}{42}$ (C) $\frac{1}{2^3}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{1}{2^6}$

類題 32 從 1、2、⋯、10 這十個數中隨意取兩個，以 p 表示其和為偶數之機率， q 表示其和為奇數之機率。試問下列哪些敘述是正確的？_____

- (A) $p + q = 1$ (B) $p = q$ (C) $|p - q| \leq \frac{1}{10}$ (D) $|p - q| \geq \frac{1}{20}$ (E) $p \geq \frac{1}{2}$

範例 17 擲硬幣的機率問題

同時拋擲八枚均勻的 1 元硬幣及兩枚均勻的 5 元硬幣，若有硬幣出現正面，則可取走正面的硬幣做為獎金，求獲得 7 元以上（含）的機率為_____。

解

怎麼解決

討論各種情況再相加，是常用的解題手法

類題 33 有四顆特製骰子，各面出現的機率均等，點數如右表，擲其中兩骰，擲出後點數較大者贏，請問哪些選項的推論為真？_____

- (A) 擲甲骰與乙骰，甲骰贏乙骰的機率較大
(B) 擲乙骰與丙骰，乙骰贏丙骰的機率較大
(C) 擲丙骰與丁骰，丙骰贏丁骰的機率較大
(D) 擲甲骰與丁骰，丁骰贏甲骰的機率較大

甲骰	0, 0, 4, 4, 4, 4
乙骰	3, 3, 3, 3, 3, 3
丙骰	2, 2, 2, 2, 6, 6
丁骰	1, 1, 1, 5, 5, 5

類題 34 擲一枚均勻硬幣 4 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 a_n ；擲一枚均勻硬幣 8 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 b_n 。試問以下哪些選項是正確的？_____

- (A) $a_2 = \frac{1}{2}$ (B) $a_2 = b_4$ (C) $b_2 = b_6$
(D) $a_3 > b_3$ (E) $b_0, b_1, b_2, \dots, b_8$ 中的最大值是 b_4

範例 18 擲骰子的機率問題

有一個不公正的骰子，投擲的時候，二點、三點、四點、五點和六點出現的機率都是 $\log_{10}(\frac{3}{2})$ ，今以 a 表 $\log_{10}(\frac{3}{2})$ ，以 b 表投擲的時候一點出現的機率，請選出正確的選項：_____

- (A) $a > 0$ (B) $a > 1$ (C) $b < \frac{1}{6}$ (D) $b < \log_{10}(\frac{4}{3})$ (E) $a > b$

解

複習一下

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$$

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

類題 35 甲、乙兩人各擲一均勻骰子，約定如下：乙得 6 點時乙就贏，兩人同點時（非 6 點），甲贏；其餘情形，則以點數多者為贏，則甲贏的機率為_____。

類題 36 假設有一種特製的骰子，其六個面上的點數各為 2、3、4、5、6、7。現在同時投擲兩顆公正的這種骰子，則其點數和為幾點時機率最大？_____

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

範例 19 取球的機率問題

答對率 66%

101 學測

箱中有編號分別為 0、1、2、…、9 的十顆球。隨機抽取一球，將球放回後，再隨機抽取一球。請問這兩球編號相減的絕對值為下列哪一個選項時，其出現的機率最大？_____



- (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5 (E) 9

解

類題 37 不透明箱中置有編號分別為 1、2、3、6、8 的球各一顆。同時自箱中隨機取出三顆球，則此三球編號之和大於 14 的機率為下列哪一個選項？_____

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{3}{5}$

類題 38 甲箱中有白球和黑球共 5 個，乙箱中有白球和黑球共 20 個，若取球的機會都相等，今隨機從兩個箱子中各取出一球，已知兩個取出的球都是白球的機率是 0.54，試求從兩個箱子中各取出一球時，兩球都是黑球的機率為_____。

範例 20 機率的綜合比較問題

某高中共有 20 個班級，每班各有 40 位學生，其中男生 25 人、女生 15 人。若從全校 800 人中以簡單隨機抽樣抽出 80 人，試問下列哪些選項是正確的？_____

- (A) 每班至少會有一人被抽中
(B) 抽出來的男生人數一定比女生人數多
(C) 已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率
(D) 若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、丙兩人同時被抽中的機率一樣
(E) 學生 A 和學生 B 是兄弟，他們同時被抽中的機率小於 $\frac{1}{100}$

解

類題 39 某校要從高一的「忠、孝、仁、愛」四個班級中隨機選一個班級進行數學抽測。考慮甲、乙兩種抽樣方法：甲方法是從四個班級的導師中隨機選一人，被選中導師的班級為抽測班級；乙方法是從所有高一學生中隨機選一名學生，被選中學生的班級為抽測班級。若各班人數都不相同，其中「愛」班人數最多。則下列敘述有哪些是正確的？_____

- (A) 甲方法中，每位高一學生被抽測的機率相等
(B) 乙方法中，每位高一學生被抽測的機率相等
(C) 甲方法中，四個班級被抽測的機率相等
(D) 乙方法中，四個班級被抽測的機率相等
(E) 「愛」班被抽測的機率，使用甲方法較使用乙方法高

類題 40 某校數學複習考有 400 位同學參加，評分後校方將此 400 位同學依總分由高到低排序：前 100 人為 A 組，次 100 人為 B

	A 組	B 組	C 組	D 組
第一題答對率	100%	80%	70%	20%
第二題答對率	100%	80%	30%	0%

組，再次 100 人為 C 組，最後 100 人為 D 組。校方進一步逐題分析同學答題情形，將各組在填充第一題（考排列組合）和填充第二題（考空間概念）的答對率列表如上，請選出正確的選項。_____

全對率 65% 100 指考乙

- (A)第一題答錯的同學，不可能屬於 B 組
 (B)從第二題答錯的同學中隨機抽出一人，此人屬於 B 組的機率大於 0.5
 (C)全體同學第一題的答對率比全體同學第二題的答對率高 15%
 (D)從 C 組同學中隨機抽出一人，此人第一、二題都答對的機率不可能大於 0.3

範例 21 期望值的基本計算

答對率 41%

108 指考乙

某遊戲的規則為同時擲兩顆公正骰子一次，若兩顆點數和為 6 或者至少有一顆點數為 6，即可獲得獎金 36 元，否則沒有獎金，則這個遊戲獎金的期望值為_____元。

解

類題 41 抽獎遊戲中，參加者自箱中抽出一球，確定顏色後放回。只有抽得藍色或紅色球者可得消費券，其金額分別為（抽得藍色球者）2000 元、（抽得紅色球者）1000 元。箱中已置有 2 顆藍色球及 5 顆紅色球。在抽出任一球之機率相等的條件下，主辦單位希望參加者所得消費券金額的期望值為 300 元，則主辦單位應於箱內再置入_____顆其他顏色的球。

類題 42 有 100 元、200 元、300 元、400 元的紅包各一個，由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 個紅包袋，抽取後不放回。若每個紅包袋被抽取的機會都相等，則甲、乙、丙三人紅包金額總和的期望值為_____元。

答對率 52% 107 指考乙

範例 22 期望值的應用問題

某次考試，有一多重選擇題，有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五個選項。給分標準為完全答對給 5 分，只答錯 1 個選項給 2.5 分，答錯 2 個或 2 個以上的選項得 0 分。若某一考生對該題的 A 、 B 選項已確定是應選的正確答案，但 C 、 D 、 E 三個選項根本看不懂，決定這三個選項要用猜的來作答。則他此題所得分數的期望值為_____分。

解

類題 43 某公司考慮在甲、乙兩地間選擇一地投資開設新廠。經評估，在甲地設廠，如獲利，預計可獲利 10000（萬元）；如不獲利，預計將虧損 7000（萬元）。在乙地設廠，如獲利，預計可獲利 6000（萬元）；如不獲利，預計將虧損 5000（萬元）。又該公司評估新廠在甲、乙兩地獲利的機率分別為 0.6、0.7。如以獲利期望值為決策準則，該公司應選擇甲地或乙地投資？_____。寫出作決策過程。

類題 44 臺灣彩券公司（中國信託商業銀行承銷）發行多種刮刮樂彩券，可以現刮現中，銷量熱烈。現有一種刮刮樂彩券「至尊王牌」，網路上公告相關資訊如下表：

名稱：至尊王牌	期數：276	銷售：500 元／張	發行 200 萬張	中獎率：40.14%
獎項及張數	500 萬元 × 4 張	8000 元 × 3100 張	600 元 × 184000 張	
	10 萬元 × 8 張	5000 元 × 36000 張	500 元 × 480000 張	
	5 萬元 × 32 張	2000 元 × 19200 張		
	10000 元 × 400 張	1000 元 × 80000 張		

(1) 請問一張「至尊王牌」刮刮樂彩券的獎金期望值是多少元？_____

(2) 若規定彩券的「回報率 = $\frac{\text{獎金期望值}}{\text{售價}} \times 100\%$ 」，請問「至尊王牌」彩券的回報率為何？_____

一 單 選 題

1. 命題：「若及格分數高於 70 分，則 A 、 B 、 C 都沒有人及格」。與下列哪一個命題同義？
 (A) 若及格分數不高於 70 分，則 A 、 B 、 C 都及格
 (B) 若 A 、 B 、 C 都及格，則及格分數不高於 70 分
 (C) 若 A 、 B 、 C 至少有一人及格，則及格分數不高於 70 分
 (D) 若 A 、 B 、 C 至少有一人及格，則及格分數高於 70 分
 (E) 若及格分數不高於 70 分，則 A 、 B 、 C 有人及格
2. a 為實數，已知 $(ax^2 - \frac{1}{x})^5$ 展開式中， x^4 項的係數為 80，則 a 等於下列何者？
 (A) -4 (B) -2 (C) -1 (D) 1 (E) 2
3. 箱子中有 2 顆紅球與 8 顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時取出兩顆球。如果抽出的兩顆球均為紅色，則得獎金 900 元；如果兩球顏色不同，則得獎金 90 元；若兩球均為白色，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何？
 (A) 45 元 (B) 52 元 (C) 76 元
 (D) 88 元 (E) 100 元
4. 若 a_1, a_2, \dots, a_8 中，每一項可為 1, 0, -1 其中一種數字，則有幾種方法使得 $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 4$ ？
 (A) 70 種 (B) 98 種 (C) 196 種
 (D) 238 種 (E) 266 種

二 多 選 題

5. 下列哪些選項正確？
 (A) 甲、乙、丙、丁、戊、己等 6 個人排成一列，甲、乙不相鄰，則有 480 種排法
 (B) 甲、乙、丙、丁、戊、己等 6 個人，甲必排在乙的左邊（不一定要相鄰），則有 360 種排法
 (C) 甲、乙、丙、丁四人分成兩隊，每隊兩人，則有 6 種分法
 (D) 從 6 名男生、4 名女生中任選 3 人，有男生也有女生，則有 120 種排法
 (E) 一排有 10 個空位，甲、乙、丙 3 人入座，且 3 人都不相鄰，則有 56 種坐法
6. 下列選項中哪些是正確的？
 (A) $C_{23}^{50} = C_{22}^{49} + C_{23}^{49}$
 (B) $C_4^9 = C_0^3 C_4^6 + C_1^3 C_3^6 + C_2^3 C_2^6 + C_3^3 C_1^6$
 (C) $C_1^8 + C_3^8 + C_5^8 + C_7^8 = C_2^8 + C_4^8 + C_6^8 + C_8^8$
 (D) $C_{10}^{20} + C_{11}^{20} + \dots + C_{20}^{20} = 2^{19}$
 (E) 12^{10} 被 121 除的餘數為 111

7. 投擲一公正的骰子三次，下列哪些選項正確？

- (A) 第二次出現 5 點的機率為 $\frac{1}{6}$ (B) 至少出現一次 5 點的機率為 $\frac{91}{216}$
(C) 三次點數都相異的機率為 $\frac{5}{9}$ (D) 恰有兩次出現偶數點的機率為 $\frac{3}{8}$
(E) 出現三個點數成等比的機率為 $\frac{1}{36}$

8. 將數字 1、2、3、4、5、6、7、8 填入右圖空格中，每格填入一個數字，數字不重複使用，請選出正確的選項。

- (A) 1, 6, 8 是在第一列的機率為 $\frac{1}{14}$
(B) 第一列的數字皆是奇數，第二列的數字皆是偶數的機率為 $\frac{1}{35}$
(C) 每一直行的數字和均相等的機率為 $\frac{1}{105}$
(D) 每一橫列的數字都是由左而右愈來愈大的機率為 $\frac{1}{576}$
(E) 1 不在第一列且 2 不在第二列的機率為 $\frac{4}{7}$

三 填充題

9. 某班有 35 位同學，班上戴眼鏡的男生有 7 人，班上沒戴眼鏡的女生有 3 人，且班上沒戴眼鏡的男生有 10 人，則班上女生戴眼鏡的有 _____ 人。
10. 有一家義大利餐廳，可以自由搭配主菜、麵條、醬汁，若餐廳提供的食材中，麵條可從 5 種中選 1 種，醬汁可從 3 種中選 1 種，主菜可從 n 種中任選 1 種或 2 種，則該餐廳可搭配出 675 種義大利麵，求 $n =$ _____。
11. 某校有 7 名教師，從中選派 3 名教師到北、中、南三區參加輔導研習，每區 1 人，這 7 名教師中的陳老師不到北區研習，則選派方法有 _____ 種。
12. 一袋中有紅、黃、藍三種顏色的球各 5 個，編號都是從 1 至 5 號，現在從袋中任意取出兩球，兩球不同號碼的機率為 _____。

四 素養導向試題

13. 某蛋糕店推出一款新品蛋糕，該蛋糕成本為 20 元，售價為 35 元，受保鮮期的影響，當天沒有銷售完的蛋糕將全部銷毀，現將最近一個月（30 天）的需求量展示如下：

日需求量 x (個)	20	30	40	50
天 數	5	10	10	5

- (1) 從這 30 天中任取兩天，求兩天的日需求量均為 30 個的機率為 _____。
- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{9}{85}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{9}{87}$ (E) $\frac{9}{97}$
- (2) 求該月，日需求量的期望值為 _____ 個。
- (3) 該店每天應推出 _____ 個蛋糕，才能得到最大利潤為 _____ 元。