4 數列級數與數據分析

學測趨勢 「數列級數」注重數字規律的察覺與演算，「數據分析」則幫助我們掌握狀況並進行推論。在素養的要求下，結合實際數據並引用圖表判讀，相信是考題的必然趨勢。

準備方向 數列級數以等差、等比及求和公式為主，數據分析的重點則是平均數、標準差、相關係數與迴歸直線。公式不只要熟背，更要多看常用，才能應付解題的需要。

年　度	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
學測命題數	1	2	2	2	1	2	1	2	2	2

一、等差、等比與級數求和

讀完可以先練習範例 1、2、3 ★★★★

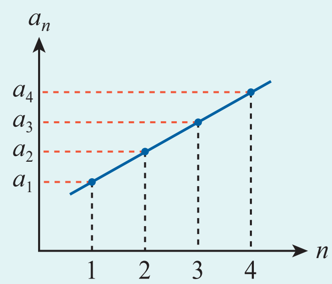
❶ 等差數列與級數：首項 a_1，公差 d，為線型函數 $y=ax+b$ 的離散情形，如右圖。

(1)第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$。

(2)前 n 項和 $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\times n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\times n$。

(3)若三數 a、b、c 成等差，則 $2b=a+c$，稱 b 為等差中項。

(4)等差數列共有 n 項，且 n 為奇數，則正中間項即為算術平均數，可乘上 n 得此 n 項的和。



例 A 等差數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_3=100$，$a_{10}=79$，則首項為________，第________項開始為負，前 20 項之和為________。

例 B 某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排（即第 13 排），發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有________個座位。

例 C 公司有三種薪資方案如下，請問哪一種年薪算法對受薪者最有利？________

甲：起薪為年薪 1000 元，每年加薪 160 元

乙：起薪為半年薪 500 元，每半年加薪 40 元

丙：起薪為三個月薪 250 元，每三個月加薪 10 元

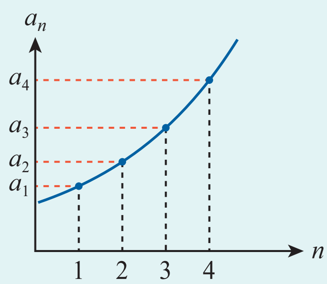
讀完可以先練習範例 4、5、6
★★★★

❷ 等比數列與級數：首項 a_1，公比為 r，為指數函數 $y=a^x$ 的離散情形，如右圖。

⑴第 n 項 $a_n=a_1\times r^{n-1}$。

⑵前 n 項和為 $S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$。

⑶若三數 a、b、c 成等比，則 $b^2=ac$，稱 b 為等比中項。



例A 等比數列 $\langle a_n\rangle=1,6,36,216,\cdots$，從第______項開始會超過 10^{10}。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

例B 等比級數 $\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}+\cdots+512$ 共有______項，其和為__________。

讀完可以先練習範例 7
★★★★

❸ 複利：複利的本利和 = 本金 × (1 + 期利率)^{期數}，隨期數成等比數列。

例A 某人存入銀行 10000 元，言明年利率 4%，以半年複利計息，滿一年本利和為 Q 元，則 $Q=$__________。

例B 阿宏有 6 萬元要存入銀行，按日依複利計息，可分三天或四天存入，則哪一個方案在第 10 天的本利和是最少的？______

(A)甲　(B)乙　(C)丙　(D)丁　(E)戊

存入金額	第一天	第二天	第三天	第四天
甲方案	1 萬元	2 萬元	3 萬元	
乙方案	3 萬元	2 萬元	1 萬元	
丙方案	2 萬元	2 萬元	2 萬元	
丁方案	1 萬元	1 萬元	2 萬元	2 萬元
戊方案	2 萬元	2 萬元	1 萬元	1 萬元

讀完可以先練習範例 8
★★★★

❹ 求和公式：⑴ $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，為等差級數。

⑵ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

⑶ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$。

例 A (1) $1+2+3+\cdots+24=$ ______ (2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+24^2=$ ______

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+24^3=$ ______。

例 B 利用公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$，可計算出 $(11)^3+(12)^3+\cdots+(20)^3$ 之值為______。

(A) 41075 (B) 41095 (C) 41115 (D) 41135 (E) 41155

★★★★

5 給前 n 項和 S_n：若已知前 n 項和 S_n，可得一般項為 $\begin{cases} a_1=S_1 \\ a_n=S_n-S_{n-1}，n\ge 2 \end{cases}$。若前 n 項和為 $S_n=pn^2+qn$，則可推知 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，且公差為 $2p$。

例 A 數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 $S_n=3n+2$，則此數列的前五項為______。

例 B 若數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 $S_n=3n^2+2n$，則公差為______，第 n 項的通式為 $a_n=$ ______。

例 C 若數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $2a_1+4a_2+8a_3+\cdots+2^na_n=3^n$，則 $a_5=$ ______。

讀完可以先練習範例 9、10

★★★★

6 遞迴數列：給數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項及前後項的關係式，稱為該數列的遞迴式，代入數字即可猜測數列的規則。常依題意採用累加法或累乘法來求一般項。

例 A 下列各選項的遞迴關係式：(1)哪一個所得的 $\langle a_n\rangle$ 為等差？______

(2)哪一個所得的 $\langle a_n\rangle$ 為等比？______

(A) $a_{n+1}=a_n+n$ (B) $a_{n+1}=3a_n$ (C) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

(D) $a_{n+1}=a_n+5$ (E) $a_{n+1}=2a_n+3$

例 B 每週同一時間點記錄某植物的成長高度，連續五週的數據為 $a_1=1, a_2=2, a_3=6, a_4=15, a_5=31$。請問此成長高度數列滿足下列選項中哪一個式子？______

(A) $a_{t+1}=3a_t-1$，$t=1,2,3,4$　(B) $a_t=t!$，$t=1,2,3,4,5$

(C) $a_{t+1}=a_t+t^2$，$t=1,2,3,4$　(D) $a_t=2^t-1$，$t=1,2,3,4,5$

(E) $a_{t+1}=ta_t+1$，$t=1,2,3,4$

答對率 88%　104 學測

例 C 數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=\dfrac{1}{7}$，若 $n\ge 1$，則 $a_{n+1}=\dfrac{7}{2}a_n(1-a_n)$，求 $a_{100}=$______。

★★★★

7 **數學歸納法的證明**：關於正整數的式子或性質，具有遞推的特性時來使用。分成下列兩個步驟，缺一不可：

(1)針對初始值（經常是 1）檢驗原式成立。

(2)假設對 $n=k$ 時成立，推導出 $n=k+1$ 時也成立。

則由數學歸納法原理，得證對所有正整數都成立。

例 A 下列關於自然數的數式，何者為真？______

(A) $n\in N$，則 n^2-n+41 必為質數　(B) $n\in N$，則 $2^n\ge n^2$

(C) $n\in N$，則 $2+6+10+\cdots+(4n-2)=2n^2+2$　(D)以上皆非

二、一維數據的分析

讀完可以先練習範例 11、12

★★★★

8 **平均數**：數值 x_1、x_2、$\cdots$、x_n，有下列幾種平均數，為全體數據的代表性量值：

(1)**算術平均數**：即 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，習慣記為 μ。

(2)**加權平均數**：第 k 個值 x_k 的權數為 p_k，則加權平均數為

$\mu_{加}=\dfrac{x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$。

(3)**幾何平均數**：若 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 均為正數，則幾何平均數為 $G=\sqrt[n]{x_1\times x_2\times\cdots\times x_n}$，適用於平均成長率的計算。

例 A 正數 a 與 b 的算術平均數為 37，幾何平均數為 24；正數 c、d、e、f 的算術平均數為 13，幾何平均數為 3，求 a、b、c、d、e、f 的算術平均數為______，幾何平均數為______。

例 B 有 5 個數值如下：21、30、31、40、52，其權數依序為 1、1、2、3、3，求加權平均數為________。

例 C 如果二月的薪水比一月成長 10%，三月的薪水比二月衰退 10%，則三月的薪水和一月的薪水哪個比較多？________（一月／三月／一樣多），其平均月成長率約為________%。（$\sqrt{0.99} \approx 0.995$）

讀完可以先練習範例 13

★★★★

9 百分位數：n 個數值由小而大為數列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其第 k 百分位數為數列的第 r 個數 x_r，或是 x_r 與下一項 x_{r+1} 的平均，視 $n \times \dfrac{k}{100}$ 是否為整數而定：

(1)若 $n \times \dfrac{k}{100}$ 不是整數，則直接進位為 r，第 k 百分位數即為 x_r。

(2)若 $n \times \dfrac{k}{100}$ 為整數 r，則第 k 百分位數為 $\dfrac{x_r + x_{r+1}}{2}$。

特別地，「第 1 四分位數 Q_1」即為第 25 百分位數，「第 3 四分位數 Q_3」即為第 75 百分位數，「中位數 Me 或 Q_2」即為第 50 百分位數。

例 A 由小而大的 16 個數值 $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23$，請問：
(1)第 40 百分位數為______ (2)第 3 四分位數為______
(3)若第 k 百分位數為 13，求 k 值最小為______，最大為______。

★★★★

10 離差平方和：數值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算術平均數為 μ，稱數列 $x_1-\mu, x_2-\mu, \cdots, x_n-\mu$ 為離差。將離差的各項平方相加為離差平方和。

$$\underset{\text{定義}}{S_{xx}} = \underbrace{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}_{\text{公式一}} \underset{\text{乘開化簡}}{=} \underbrace{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-n\mu^2}_{\text{公式二}}。$$

例 A 五個數 1、2、3、4、5 的離差平方和為 $S_{xx}=$______。

例 B 若 $x_1+x_2+\cdots+x_6=12$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2=100$，則離差平方和為 $S_{xx}=$______。

★★★★

⑪ **變異數與標準差**：變異數 $\sigma^2=\dfrac{S_{xx}}{n}$，標準差 $\sigma=\sqrt{\dfrac{S_{xx}}{n}}$，即

$$\sigma=\sqrt{\dfrac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}-n\mu^2}{n}}$$

，為衡量全體數據離散程度的統計量，標準差愈大表示數據愈分散。

例A 五個數值 2、4、6、8、10 的變異數為____，標準差為______。

例B 下列五組資料（每組各有 10 筆）：

A：1,1,1,1,1,10,10,10,10,10　　B：1,1,1,1,1,5,5,5,5,5

C：4,4,4,5,5,5,5,6,6,6　　D：1,1,2,2,3,3,4,4,5,5

E：1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

試問哪一組資料的標準差最大？_____，哪一組標準差最小？_____

★★★★

⑫ **資料的平移**：若一維數據的每個數字都加 k，則：

(1)均量如中位數、算術平均數也跟著加 k。

(2)差量如全距、四分位距、標準差的值不變。

例A a、b、c、d 的算術平均數為 4，標準差為 8，求 $a+3$、$b+3$、$c+3$、$d+3$ 的算術平均數為_____，標準差為_____。

例B 某班數學老師算出學生學期成績後，鑑於學生平時都很用功，決定每人各加 5 分（加分後沒人超出滿分），則加分前與加分後，成績統計數值絕對不會改變的有：________

(A)算術平均數　(B)中位數　(C)標準差　(D)全距　(E)四分位距

讀完可以先練習範例 14

★★★★

⑬ **資料的伸縮**：若一維數據的每個數字都乘以 m，則：

(1)均量如中位數、算術平均數也成為 m 倍。

(2)差量如全距、四分位距、標準差會成為 $|m|$ 倍，而變異數是變成 m^2 倍。

例A a、b、c、d 的算術平均數為 5，標準差為 8，求 $1-4a$、$1-4b$、$1-4c$、$1-4d$ 的算術平均數為_______，標準差為______。

例 B 根據一百多年來的氣象紀錄，美國費城年雨量平均值為 41.0 英吋，標準差為 6.1 英吋。今欲將此項統計資料的單位由英制換為公制，請問該城市一百多年來年雨量的標準差最接近下列的哪一個選項？______（註：1 英吋等於 25.4 毫米。）
(A) 0.240 毫米　(B) 1.61 毫米　(C) 6.10 毫米　(D) 155 毫米　(E) 1041 毫米

★★★★

⑭ 資料的標準化：一維數據 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算術平均為 μ，標準差為 σ，若 $\sigma \neq 0$，則先同減 μ 再同除以 σ 得 $\frac{x_1-\mu}{\sigma}, \frac{x_2-\mu}{\sigma}, \cdots, \frac{x_n-\mu}{\sigma}$，稱為數值的標準化。可用來客觀比較不同類型的數據排名。標準化後的算術平均必為 0，標準差必為 1。

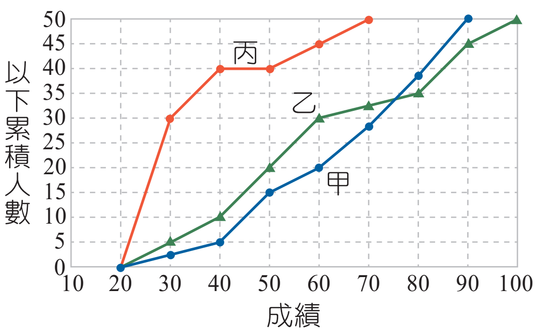
例 A 資料 $5, 11, \cdots$，共 100 個數值，標準化之後 5 會變成 1，11 會變成 3，求這 100 個數值之和為______。

例 B 若 $x>0$，一維資料 $x, x, -x, -x, y, y, y, y, y$ 為標準化數據，求 $x=$______，$y=$______。

★★★★

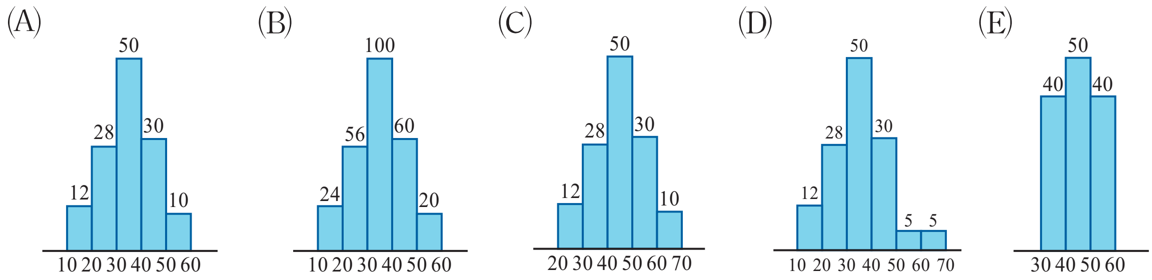
⑮ 圖表的判讀：由次數分配表、長條圖、折線圖等統計圖表，可判讀各均量、差量的大小，並可進一步求各統計量值。

例 A 某校高三甲、乙、丙三班各有 50 位同學，數學科模擬考成績的以下累積次數折線圖如右（各組不含上限）。根據右圖中的資料，請問：
(1)哪一班不及格的人數最多？______班
(2)哪一班的中位數最大？______班
(3)哪一班的第 80 百分位數最大？______班



數列級數與數據分析

例 B 下列五個直方圖表示的資料，何者之標準差最大？______



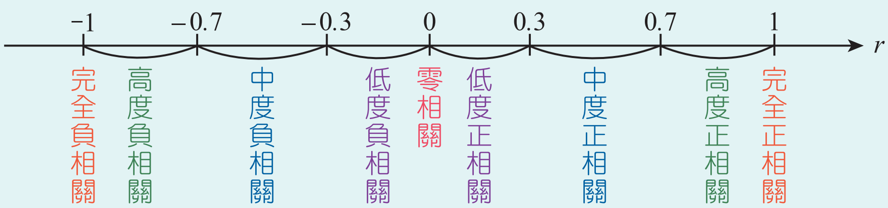
三、二維數據的分析

讀完可以先練習範例 15

⑯ **相關係數**：n 筆數對資料 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 記為 (X,Y)，先求得 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算術平均為 μ_x，標準差為 σ_x，離差平方和為 S_{xx}；$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的算術平均為 μ_y，標準差為 σ_y，離差平方和為 S_{yy}；X 與 Y 的離差乘積和為 $S_{xy}=(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+\cdots+(x_n-\mu_x)(y_n-\mu_y)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n-n\cdot\mu_x\cdot\mu_y$

⑴ X 與 Y 的相關係數為 $r=\dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\times\sqrt{S_{yy}}}=\dfrac{S_{xy}}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}$。

⑵由「柯西不等式」可推得 r 的範圍為 $-1\le r\le 1$，其相關程度以 ± 0.3 及 ± 0.7 為分界，如下圖：



例 A 10 個數對 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、$\cdots$、(x_{10},y_{10})，已知 $\dfrac{x_1+\cdots+x_{10}}{10}=3$，$\dfrac{y_1+\cdots+y_{10}}{10}=5$，$x_1^2+\cdots+x_{10}^2=150$，$y_1^2+\cdots+y_{10}^2=310$，$x_1y_1+\cdots+x_{10}y_{10}=120$，求 X 與 Y 的相關係數為________，相關程度為____________。

例 B 數對 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、$\cdots$、(x_{20},y_{20})，已知 x_1、x_2、$\cdots$、x_{20} 的標準差為 12，y_1、y_2、$\cdots$、y_{20} 的標準差為 5，且 $(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+\cdots+(x_{20}-\mu_x)(y_{20}-\mu_y)=900$，其中 $\mu_x=\dfrac{x_1+\cdots+x_{20}}{20}$，$\mu_y=\dfrac{y_1+\cdots+y_{20}}{20}$，求 X 與 Y 的相關係數為________。

讀完可以先練習範例 16

⑰ **迴歸直線**：數對資料 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_n,y_n)，符號說明如上述重點，則用最小平方法可求得二維資料 (X,Y) 的迴歸式為 $y-\mu_y=m(x-\mu_x)$（又稱為最佳直線），其中 $m=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 為其斜率。當 X 與 Y 呈高度相關時，適合利用迴歸直線進行預測分析，稱為迴歸預測。

例 A 數對 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_n,y_n)，X 的算術平均為 8，二維數據 (X,Y) 的迴歸直線為 $y=-2x+25$，求 Y 的算術平均為_____。

例 B 數對 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_n,y_n)，其 x_1、x_2、⋯、x_n 的算術平均為 12，標準差為 3；y_1、y_2、⋯、y_n 的算術平均為 25，標準差為 8；若 X 與 Y 的相關係數為 -0.6，求最小平方法所求得的迴歸直線為__________。

例 C 數對 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_{10},y_{10})，$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=60$，$y_1+y_2+\cdots+y_{10}=90$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=460$，$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}=690$，求 $(x_1,y_1)\sim(x_{10},y_{10})$ 的迴歸直線為________，若 $x=8$，請利用迴歸直線預測 y 值為_____。

讀完可以先練習範例 17

⑱ **資料的平移伸縮與標準化**

(1)若 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_n,y_n) 的 x_i 同加 p，y_i 同加 q，其中 p、q 為定實數，則相關係數不變，迴歸直線隨著平移。

(2)若 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_n,y_n) 的 x_i 同乘 p，y_i 同乘 q，其中 p、q 為定實數，則相關係數不變或變號，即把 r 乘上 $\dfrac{pq}{|pq|}$，但是迴歸直線會隨著改變。

(3)若二維數據 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_n,y_n) 的相關係數為 r，則 X 標準化且 Y 標準化後，新數據的相關係數仍為 r，且迴歸直線變成 $y=rx$。

例 A 已知 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_n,y_n) 的 X 與 Y 之相關係數為 0.8，求：

(1) (x_1+5,y_1-2)、(x_2+5,y_2-2)、⋯、(x_n+5,y_n-2) 的相關係數為______。

(2) $(2x_1,3y_1)$、$(2x_2,3y_2)$、⋯、$(2x_n,3y_n)$ 的相關係數為______。

(3) $(2+x_1,3-y_1)$、$(2+x_2,3-y_2)$、⋯、$(2+x_n,3-y_n)$ 的相關係數為______。

例 B 二維數據 (X,Y) 的迴歸直線之斜率為 4，則 $(2X+7,3Y-5)$ 表 x 值同乘 2 再同加 7，且 y 值同乘 3 再同減 5，則迴歸直線的斜率變為_____。

例 C 數對 $(5,7)$、(a,b)、(c,d)、(e,f) 的相關係數為 0.8，且 $5,a,c,e$ 的算術平均數為 8，標準差為 4；$7,b,d,f$ 的算術平均數為 3，標準差為 6，請問：

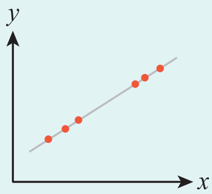
(1)點 $(5,7)$ 經標準化後成為 ________。

(2) y 對 x 的迴歸直線原本為 ________，標準化後變成為 ________。

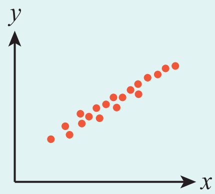
★★★★

⑲ **散布圖**：將數對 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、⋯、(x_n,y_n) 畫在 xy 平面上，觀察其分布狀況，可判定相關程度：

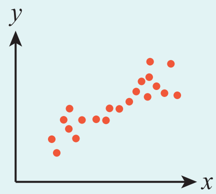
(1)**正相關**：點沿著朝右上的直線分布，為正相關，即大致上 y 隨 x 增加而增加。



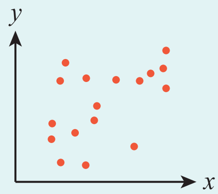
完全正相關



高度正相關

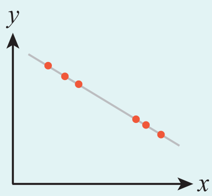


中度正相關

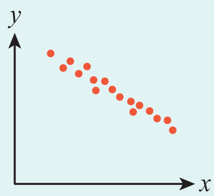


低度正相關

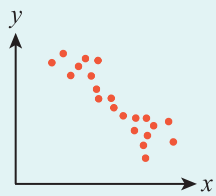
(2)**負相關**：點沿著朝右下的直線分布，為負相關，即大致上 y 隨 x 增加而減少。



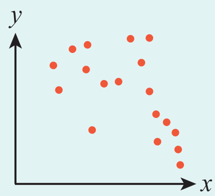
完全負相關



高度負相關

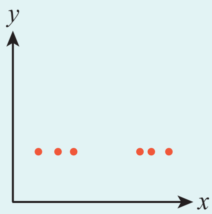


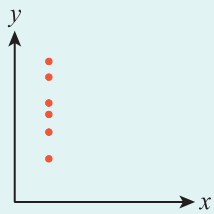
中度負相關

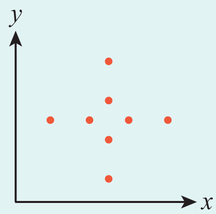


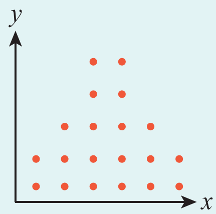
低度負相關

(3)**零相關**：看不出 y 值隨 x 值遞增或遞減，如圖形呈左右或上下對稱，為零相關。



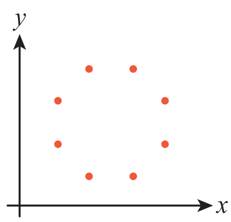






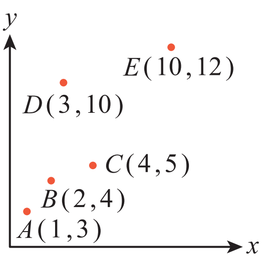
例 A 右圖表兩組數據 x、y 的分布圖，其相關係數 r 最接近下列何值？________

(A) 1　(B) 0.5　(C) 0　(D) -0.5　(E) -1



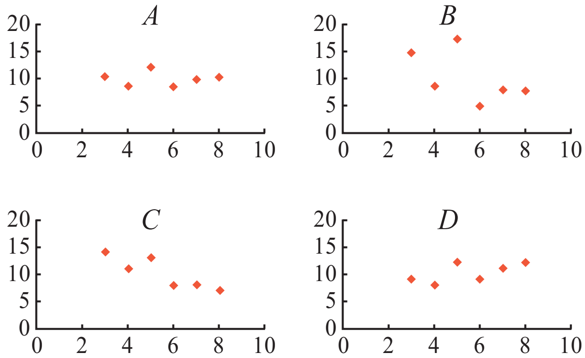
例 B 如右圖所示有 5 筆 (X,Y) 資料。試問：去掉哪一筆資料後，剩下來 4 筆資料的相關係數最大？________

(A) A　(B) B　(C) C　(D) D　(E) E



例 C　A、B、C、D 是四組資料的散布圖，如右圖所示。利用最小平方法計算它們的迴歸直線，發現有兩組資料的迴歸直線相同，試問是哪兩組？______

(A) A、B　(B) A、C　(C) A、D
(D) B、C　(E) B、D



範例 1　觀察數字的規則

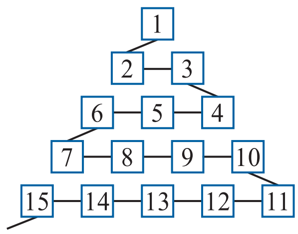
將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如右表所示，試問第 100 列第 3 個數是______。

第 1 列	1
第 2 列	2、3
第 3 列	4、5、6
第 4 列	7、8、9、10
第 5 列	11、12、13、14、15
…	…

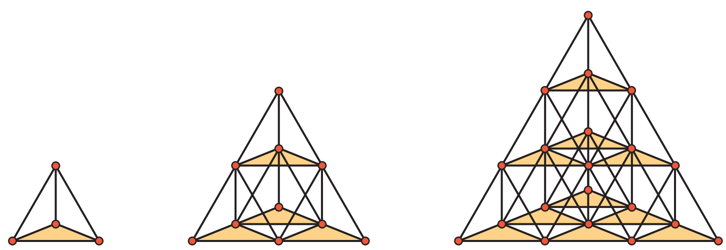
解

關鍵想法
看各列的最後一項會比較容易看出規律

類題 1　如右圖所示是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：數字 1 出現在第 1 列；數字 2、3 出現在第 2 列；數字 6、5、4（從左至右）出現在第 3 列；數字 7、8、9、10 出現在第 4 列；依此類推。試問第 99 列，從左至右算，第 67 個數字為______。



類題 2　用單位長的不銹鋼條焊接如下圖系列的四面體鐵架，圖中的小圈圈「•」表示焊接點，圖㈠有兩層共 4 個焊接點，圖㈡有三層共 10 個焊接點，圖㈢有四層共 20 個焊接點。試問依此規律，推算圖㈤有六層共______個焊接點。


圖㈠　圖㈡　圖㈢　…

範例 2	等差數列	全對率28%	108 學測

設各項都是實數的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$之公差為正實數 α。試選出正確的選項。______

(A)若 $b_n = -a_n$，則 $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$

(B)若 $c_n = a_n^2$，則 $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots$

(C)若 $d_n = a_n + a_{n+1}$，則 $d_1, d_2, d_3, \cdots$是公差為 α 的等差數列

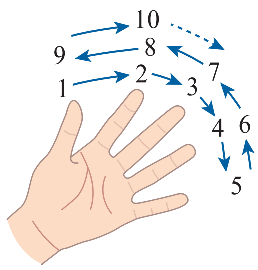
(D)若 $e_n = a_n + n$，則 $e_1, e_2, e_3, \cdots$是公差為 $\alpha + 1$ 的等差數列

(E)若 f_n 為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算術平均數，則 $f_1, f_2, f_3, \cdots$是公差為 α 的等差數列

解

類題 3 阿宏伸出左手的 5 根手指頭，從大拇指開始，如右圖所示那樣數數數字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots$，則數到 1000 時，他會數在哪一個手指頭上？______

(A)大拇指 (B)食指 (C)中指 (D)無名指 (E)小指



類題 4 設 $a_1 = 1$ 且 $a_1, a_2, a_3, \cdots$為等差數列。請選出正確的選項。______

(A)若 $a_{100} > 0$，則 $a_{1000} > 0$ (B)若 $a_{100} < 0$，則 $a_{1000} < 0$

(C)若 $a_{1000} > 0$，則 $a_{100} > 0$ (D)若 $a_{1000} < 0$，則 $a_{100} < 0$

(E) $a_{1000} - a_{10} = 10(a_{100} - a_1)$

全對率 32% 103 學測

範例 3	等差級數求和

若一個等差數列前 5 項的和為 24，最後 5 項的和為 186，且所有項的和為 609，則這個數列共有______項。

解

小小叮嚀

可以硬解聯立求出 a_1、d 及 n，但是數字很醜

類題 5 一個 101 項的等差數列 a_1、a_2、a_3、…、a_{101}，其和為 0，且 $a_{71}=71$，則下列選項哪些正確？＿＿＿＿

(A) $a_1+a_{101}>0$　(B) $a_2+a_{101}<0$　(C) $a_3+a_{99}=0$　(D) $a_{51}=51$　(E) $a_1<0$

類題 6 若數列 $\langle a_n\rangle$ 為一等差數列且 $a_4=7$，$a_{10}=5$，則下列哪些正確？＿＿＿＿

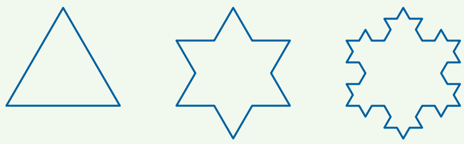
(A) $a_1=8$　(B) $a_{20}=\frac{5}{3}$

(C)自第 24 項開始為負　(D)前 n 項總和最大時，$n=24$

(E)若前 n 項和 $S_n=pn^2+qn+r$，則 $p<0$ 且 $r=0$

範例 4　等比數列

設 T_1、T_2、T_3、…為一群多邊形，其作法如下：T_1 為邊長等於 1 之正三角形；以 T_n 每一邊中間三分之一的線段為一邊，向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去即為多邊形 T_{n+1}，$n=1$、2、…（如右圖）。請計算：(1) T_3 的面積為＿＿＿＿。(2) T_6 的周長為＿＿＿＿。



T_1　T_2　T_3

解

再想一想

請同學推想 T_n 的面積及周長的一般式

類題 7 設 a_1、a_2、a_3、…、a_{11} 為等比數列且均為正數，$a_{11}=\frac{1}{a_1}$，$a_4=4$，則 $a_3=$＿＿＿＿。

類題 8 在等比數列 $\langle a_n\rangle$ 中，$a_1=1$，$a_4=2-\sqrt{5}$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$n\geq 1$，則 $\langle a_n\rangle$ 的公比為＿＿＿＿。

範例 5 等比級數求和　答對率28%　105 學測

設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 80$，前五個奇數項的和為 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$，請選出首項 a_1 的正確範圍。________

(A) $a_1 < 80$　(B) $80 \le a_1 < 90$　(C) $90 \le a_1 < 100$　(D) $100 \le a_1 < 110$　(E) $110 \le a_1$

解

類題 9 若自然數 n 使 9^n 為 20 位數，則等比級數 $1 + 81 + 81^2 + \cdots + 81^n$ 之和是________位數。（$\log 2 \approx 0.301$，$\log 3 \approx 0.477$）

類題 10 一數列共 20 項，奇數項和為 24，偶數項和為 84，試問：

(1)若為等差數列，則公差為________　(2)若為等比數列，則公比為________。

範例 6 等差、等比的綜合問題

已知 a_1、a_2、a_3 為一等差數列，而 b_1、b_2、b_3 為一等比數列，且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？________

(A) $a_1 < a_2$ 與 $a_2 > a_3$ 可能同時成立　(B) $b_1 < b_2$ 與 $b_2 > b_3$ 可能同時成立

(C)若 $a_1 + a_2 < 0$，則 $a_2 + a_3 < 0$　(D)若 $b_1 b_2 < 0$，則 $b_2 b_3 < 0$

(E)若 b_1、b_2、b_3 皆為正整數且 $b_1 < b_2$，則 b_1 整除 b_2

解

小小叮嚀

這是「未定數」的推理題，多舉一些例子，若有反例就是錯的

類題 11 假設實數 a_1、a_2、a_3、a_4 是一個等差數列，且滿足 $0 < a_1 < 2$ 及 $a_3 = 4$。若定義 $b_n = 2^{a_n}$，則以下哪些選項是對的？＿＿＿＿＿

(A) b_1、b_2、b_3、b_4 是一個等比數列　(B) $b_1 < b_2$　(C) $b_2 > 4$

(D) $b_4 > 32$　(E) $b_2 \times b_4 = 256$

類題 12 設實數組成的數列 $\langle a_n \rangle$ 是公比為 -0.8 的等比數列，實數組成的數列 $\langle b_n \rangle$ 是首項為 10 的等差數列。已知 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$。請選出正確的選項。＿＿＿＿＿

(A) $a_9 \times a_{10} < 0$　(B) $b_{10} > 0$　(C) $b_9 > b_{10}$　(D) $a_9 > a_{10}$　(E) $a_8 > b_8$

全對率 21%　102 學測

範例 7	利息的計算	答對率 26%	104 學測

小華準備向銀行貸款 3 百萬元當做創業基金，其年利率為 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳＿＿＿＿元。

解

類題 13 張老闆急需用錢，打算借十萬元並在三個月後還清，他向銀行詢問利息的算法，銀行提出四個方案如下：

甲：月利率為 2%，每個月複利一次

乙：月利率為 2%，每半個月複利一次

丙：第一個月利率為 1%，第二個月為 2%，第三個月為 3%，每月複利計息

丁：第一個月利率為 3%，第二個月為 2%，第三個月為 1%，每月複利計息

這四個方案以哪一個方案對張老闆最不利，即所還的本利和為最多？＿＿＿＿

(A)甲方案　(B)乙方案　(C)丙方案

(D)丁方案　(E)四個方案的本利和都一樣

4 數列級數與數據分析

類題 14 王小姐想利用銀行的薪資帳戶定時定額扣款，以年繳的方式參加「大吉大利」儲蓄方案，希望在 10 年後存滿 10 萬元，若每年複利一次且年利率為 4%，請問她接下來這 10 年，每年年初會在帳戶固定提撥________元給銀行。（已知 $(1.04)^{10} \approx 1.48$，整數以下四捨五入）

範例 8 求和公式的應用

在科技公司的尾牙晚會上，餐廳人員打算把酒杯一層一層往上堆疊，預計有 12 層，希望最上面的第一層有 3×5 個，第二層有 4×6 個，第三層有 5×7 個，依此類推。經過計算，餐廳應該提供________個酒杯。

解

小小叮嚀
若項數少就暴力算，用求和公式反而慢。但是千萬不可算錯，要檢查、重算來確定答案

類題 15 ⑴試證明：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$。

⑵一個袋子內有 1 號球 2 顆、2 號球 3 顆、3 號球 4 顆、⋯、n 號球 $(n+1)$ 顆，若此袋內球號之總和為 1938，則 $n=$________。

類題 16 從 1 到 n 的連續整數平方和為 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，小芳誤記為 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$，結果在使用公式計算 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$ 時得到錯誤的答案 1771，請問 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$ 的正確的和應為________。

範例 9 遞迴關係式

設 a_1、a_2、⋯、a_n、⋯為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足 $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}-a_n$。請問下列哪些選項是正確的？＿＿＿＿

(A)如果 $a_1=1$，則 $a_2=1$

(B)如果 a_1 是整數，則此數列的每一項都是整數

(C)如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數

(D) $a_2\le a_4\le\cdots\le a_{2n}\le\cdots$（$n$ 為正整數）

(E)如果 a_k 是奇數，則 a_{k+2}、a_{k+4}、⋯、a_{k+2n}、⋯都是奇數（n 為正整數）

解

怎麼解決

前幾個選項是容易的，最後一個選項要舉反例

類題 17 已知一數列 $\langle a_n\rangle$ 定義為 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$，$n=1$、2、3、⋯。求 $a_2=$＿＿＿＿、$a_3=$＿＿＿＿、$a_4=$＿＿＿＿，並推測第 n 項 $a_n=$＿＿＿＿。（以 n 表示之）

類題 18 實數數列 $\langle a_n\rangle$ 的各項均非 0，設 $a_3=a_2+a_1$，下列選項哪些為真？＿＿＿＿

(A)若 $a_1a_2>0$，則 $a_2a_3>0$

(B)若 $\langle a_n\rangle$ 成等差數列，則 $a_4=a_3+a_2$

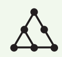
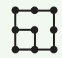
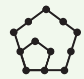
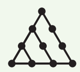
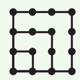
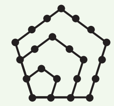
(C)若 $\langle a_n\rangle$ 成等差數列，則 $a_4=4a_1$

(D)若 $\langle a_n\rangle$ 成等比數列，則 $a_4=a_3+a_2$

(E)若 $\langle a_n\rangle$ 成等比數列，則公比必為有理數

範例 10 圖形的遞迴關係

用大小一樣的鋼珠排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊 1 個鋼珠	•	•	•
每邊 2 個鋼珠			
每邊 3 個鋼珠			
每邊 4 個鋼珠			

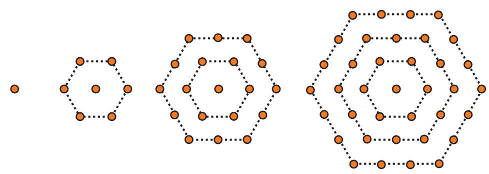
已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n=$ ______，$m=$ ________。

解

再想一想

這一題很適合讓老師修改成為新的題目。請同學想想可以怎麼改？

類題 19 用大小相同的圓點，一邊排 n 個圓點的正六邊形，共需圓點 a_n 個，如右圖。（例：當 $n=3$，得 $a_3=19$）



$n=1$　$n=2$　$n=3$　$n=4$

(1)觀察 a_{n+1} 與 a_n，列出 a_{n+1} 與 a_n 的關係為 ____________________。

(2)求 $a_{10}=$ ________。

類題 20 (1)平面上 n 條相異直線最多可把平面分割成 a_n 個區域，請問數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為何？________________

(2)平面上 4 條相異直線把平面分割成 k 個區域，則 k 值可為下列哪些選項？________

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10　(E) 12

範例 11 算術平均數

在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：先將 15 位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過 15 分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。現在有一位參賽者所獲 15 位評審的平均成績為 76 分，其中有三位評審給的成績 92、45、55 應剔除，則這個參賽者的比賽成績為______分。

解

類題 21 某校想要瞭解全校同學是否知道中央政府五院院長的姓名，出了一份考卷。該卷共有五個單選題，滿分 100 分，每題答對得 20 分，答錯得零分，不倒扣。閱卷完畢後，校方公布每題的答對率如上。請問此次測驗全體受測同學的平均分數是：______

題　號	一	二	三	四	五
答對率	80%	70%	60%	50%	40%

(A) 70 分　(B) 65 分　(C) 60 分　(D) 55 分

類題 22 某校一、二、三年級各派學生參加注音比賽，高一派 x 人，高二派 y 人，高三派 12 人，各年級的平均成績為：高一 60 分，高二 65 分，高三 74 分。若合併高一與高二，則平均變成 63 分，若合併高一、高二、高三，則平均變成 69 分，請問 $x=$______，$y=$______。

範例 12 成長率的計算

答對率 49%　107 學測

某貨品為避免因成本變動而造成售價波動太過劇烈，當週售價相對於前一週售價的漲跌幅定為當週成本相對於前一週成本的漲跌幅的一半。例如下表中第二週成本上漲 100%，所以第二週售價上漲 50%。依此定價方式以及下表的資訊，試選出正確的選項。＿＿＿＿

【註：成本漲跌幅 $=\dfrac{\text{當週成本}-\text{前週成本}}{\text{前週成本}}$，售價漲跌幅 $=\dfrac{\text{當週售價}-\text{前週售價}}{\text{前週售價}}$】

	第一週	第二週	第三週	第四週
成　本	50	100	50	90
售　價	120	180	x	y

(A) $120=x<y<180$　(B) $120<x<y<180$　(C) $x<120<y<180$

(D) $120=x<180<y$　(E) $120<x<180<y$

解

類題 23 某公司的員工張三和李四在去年的月薪固定且相同。自今年一月起，公司決定以該月的業績高低來決定月底發放的薪資。張三因表現優異，一、二、三月每月加薪 10%，四、五、六月表現不佳，每月減薪 10%。李四一、二、三月表現不佳，每月減薪 10%，四、五、六月表現優異，每月加薪 10%。請問下列選項哪些為真？＿＿＿＿

(A)張三 6 個月來所領的總薪資高於李四　(B)張三六月份所領的薪資高於李四

(C)張三六月份所領的薪資和李四相同　(D)張三六月份所領的月薪和去年相等

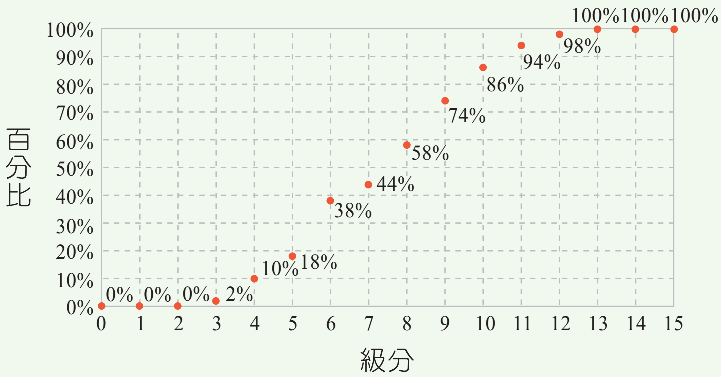
(E)李四六月份所領的月薪比去年低

類題 24 公司老闆看完一月份的帳目後，設立接下來五個月的獲利目標，希望每月的平均獲利成長率為 4%，結果二月、三月、四月、五月的獲利成長率均只有 3%，請利用下表求出六月份的獲利成長率應達到＿＿＿＿%，才能達成老闆當初設立的目標。（四捨五入至小數點後第一位）

n	2	3	4	5
$(1.03)^n$	1.0609	1.0927	1.1255	1.1593
$(1.04)^n$	1.0816	1.1249	1.1699	1.2167

範例 13 中位數與百分位數

右圖為某班 50 名學生參加數學科學科能力測驗成績的以下累積相對次數折線圖（以 15 級分制表示）。圖上各點的數字代表測驗成績在該級分以下（包含該級分）之學生人數占全班人數的百分比。請問這 50 個成績的：



(1)眾數為_____級分。

(2)中位數（即第 50 百分位數）為_____級分。

(3)此班的前標（第 75 百分位數）與後標（第 25 百分位數）的差距為_____級分。

解

類題 25 九十一學年度指定科目考試約有 5 萬 4 千名考生報考「數學甲」，考生得分情形（由低至高）如右表，第一列為得分範圍（均含下限不含上限），第二列為得分在該區間之人數占全體考生之百分比。試問下列有關該次考試考生得分之敘述有哪些是正確的？_____

0 ～ 10	10 ～ 20	20 ～ 30	30 ～ 40	40 ～ 50
10.45	8.18	11.85	14.96	16.0
50 ～ 60	60 ～ 70	70 ～ 80	80 ～ 90	90 ～ 100
15.28	10.81	7.06	3.84	1.57

(A)全體考生得分之中位數在 40 分（含）與 50 分（不含）之間

(B)全體考生得分（由低至高）之第一四分位數在 20 分（含）與 30 分（不含）之間

(C)全體考生得分（由低至高）之第三四分位數在 50 分（含）與 60 分（不含）之間

(D)不到三成的考生得分少於 30 分

(E)如果將得分 ≥ 60 分看成及格，則有四成以上的考生成績及格

4 數列級數與數據分析

類題 26 某班某科成績製表如下，其中 70 分的人數被塗汙看不清楚，因此不知該組有幾人。請問：中位數 Me 共有______種不同的值，最大值為______，最小值為______。

成　績	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
人　數	0	0	2	3	4	7		8	6	4

範例 14 標準差的計算

設某校高一第一次段考數學成績不太理想，多數同學成績偏低；考慮到可能是同學們適應不良所致，數學老師決定將每人的原始成績取平方根後再乘以 10 作為正式紀錄的成績。今隨機抽選 100 位同學，發現調整後的成績其平均為 65 分，標準差為 15 分；試問這 100 位同學未調整前的成績之平均 M 介於哪兩個連續正整數之間？

______

(A) $40 \le M < 41$　(B) $41 \le M < 42$　(C) $42 \le M < 43$　(D) $43 \le M < 44$　(E) $44 \le M < 45$

解

考情分析
這是 94 學測題，只有 8% 的答對率！不少人都以為 $\sqrt{M} \times 10 = 65$，誤選到(C)去了！

類題 27 某生第一次月考六科的平均成績（算術平均）為 80 分，若已知其中五科的成績為 68、80、80、80、86，則其成績的標準差為______分。

類題 28 9 個數值 1、1、1、1、1、1、1、1、x，其中 x 為正整數，若這 9 個數的標準差比 10 大，則 x 最小為______。

範例 15 相關係數的計算

調查某國家某一年 5 個地區的香煙與肺癌之相關性，所得到的數據為 (x_i, y_i)，$i = 1$、2、3、4、5，其中變數 X 表示每人每年香煙消費量（單位：十包），Y 表示每十萬人死於肺癌的人數。若已計算出下列數值：$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 135$，$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 3661$，$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 = 2842$，$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 105$，$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 = 2209$，則 X 與 Y 的相關係數 $r =$ ______。

解

類題 29 十位考生之國文與數學成績列表如下，今已算出國文成績之標準差為 8.9（取至小數點第一位），數學成績之標準差為 7.5（取至小數點第一位），則此十位考生兩科成績之相關係數最接近：______

考生編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
國　　文	89	65	76	69	82	57	66	72	78	66
數　　學	75	57	65	65	83	63	58	62	63	69

(A) -0.85 (B) 0.25 (C) 0.66 (D) 0.78 (E) 0.85

類題 30 數學老師列出上一屆幾位學長姊的段考平均 (x) 與學測級分 (y)，結果如右表，請問兩者的相關係數為______。

座　　號	1	2	3	4	5
段考平均	90	81	84	72	78
學測級分	14	12	10	11	8

範例 16 迴歸直線的計算

從班上抽選 5 位同學，調查段考的國文及英文成績如右表，請利用英文對國文的迴歸直線，預測段考國文考 100 分的同學，其英文得分會在下列哪一個範圍內？______

	甲	乙	丙	丁	戊	合　計
國文	62	78	87	85	88	400
英文	75	80	83	86	81	405

(A) 80 ～ 85 分　(B) 85 ～ 90 分　(C) 90 ～ 95 分　(D) 95 ～ 100 分　(E)超過 100 分

解

概念強化

順便算出這一題的相關係數為______，要高度相關才適合做迴歸預測

類題 31 已知二維數據 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、⋯、(x_n, y_n) 之 y 對 x 的迴歸直線為 $y = 3x - 25$，則下列各選項的推論哪些為真？______

(A)若 X 的算術平均比 10 大，則 Y 的算術平均也比 10 大

(B)若 Y 的算術平均比 15 小，則 X 的算術平均也比 15 小

(C) X 與 Y 的相關性必為正相關

(D) X 的標準差必小於 Y 的標準差

(E) X 的標準差與 Y 的標準差之比值愈大，則相關係數會愈大

類題 32 已知以下各選項資料的迴歸直線（最適合直線）皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。______

(A)

x	2	3	5
y	1	13	1

(B)

x	2	3	5
y	3	10	2

(C)

x	2	3	5
y	5	7	3

(D)

x	2	3	5
y	9	1	5

(E)

x	2	3	5
y	7	4	4

答對率 30%　102 學測

範例 17　資料平移伸縮求相關係數及迴歸直線

英國某實驗研究一金屬圓柱（原高 70.5 英吋）在不同負重下對柱高的影響，其實驗結果如下：$(0,70.5)$、$(2,69.4)$、$(4,68.4)$、$(6,67.2)$、$(8,66.3)$、$(10,65.5)$、$(12,64.4)$，其中測量單位分別為英噸和英吋。將此筆資料的相關係數記為 r，以最小平方法決定的直線斜率記為 m。現為提供臺灣廠商資料，將單位轉換為公噸（1 英噸等於 1.016 公噸）及公分（1 英吋等於 2.54 公分），若單位換算後該資料的相關係數記為 R，以最小平方法決定的直線斜率記為 M。下列關係有哪些是正確的？＿＿＿＿

(A) $r\cdot m>0$　(B) $r>0$　(C) $r=R$　(D) $m=M$

解

概念強化

1. ＿＿＿＿：二維數據 (X,Y) 的相關係數為 r，迴歸直線為 $y=ax+b$，則 r 必與 a 同號
2. ＿＿＿＿：單位換算前後的相關係數不會改變
3. ＿＿＿＿：單位換算前後的迴歸直線不會改變

類題 33　某校高三共有 300 位學生，數學科第一次段考、第二次段考成績分別以 X、Y 表示，且每位學生的成績用 0 至 100 評分。若這兩次段考數學科成績的相關係數為 0.016，試問下列哪些選項是正確的？＿＿＿＿

(A) X 與 Y 的相關情形可以用散布圖表示

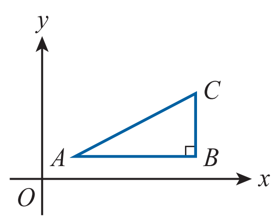
(B)這兩次段考的數學成績適合用直線 $X=a+bY$ 表示 X 與 Y 的相關情形（a、b 為常數，$b\neq 0$）

(C) $X+5$ 與 $Y+5$ 的相關係數仍為 0.016

(D) $10X$ 與 $10Y$ 的相關係數仍為 0.016

(E)若 $X'=\dfrac{X-\mu_x}{\sigma_x}$、$Y'=\dfrac{Y-\mu_y}{\sigma_y}$，其中 μ_x、μ_y 分別為 X、Y 的平均數，σ_x、σ_y 分別為 X、Y 的標準差，則 X' 與 Y' 的相關係數仍為 0.016

類題 34　平面上直角 ΔABC，$\overline{AB}$ 與 x 軸平行，$\overline{BC}$ 與 y 軸平行，如右圖所示，關於 A、B、C 三點之 x、y 坐標的相關係數，下列選項哪些為真？＿＿＿＿



(A)為零相關　(B)為正相關

(C)可求出相關係數確定值　(D)無法求出相關係數確定值

(E)可求出相關係數為有理數

4 數列級數與數據分析

綜　合　實　力　測　驗

一 單選題

____ 1. 一等比數列 $\langle a_n \rangle$，其中 $a_1+a_2=8$，$a_4+a_5=64$，則 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ 之和最接近下列哪一個數？

(A) 907　(B) 908　(C) 909
(D) 910　(E) 911

____ 2. 王老師參加政府的儲金計畫，每月由其薪資轉存一萬元至其帳戶，銀行按月複利計算，年利率為 6%，王老師兩年期滿後去對帳，對帳時他的帳戶應有多少錢？

(A) $10000\times(1.005)^{24}\times 24$　(B) $10000\times(1.005)^{12}\times 24$
(C) $10050\times\dfrac{(1.005)^{24}-1}{1.005-1}$　(D) $24000+500\times(24+23+\cdots+1)$
(E) $24000\times(\dfrac{1+0.005\times 24}{2})$

____ 3. 四個正數 a、b、c、d 的算術平均數為 μ，標準差為 σ。請問下列何者錯誤？

(A)五個數 a、b、c、d、$\dfrac{a+b+c+d}{4}$ 的算術平均數為 μ
(B)五個數 a、b、c、d、$\dfrac{a+b+c+d}{4}$ 的標準差為 σ
(C)八個數 a、a、b、b、c、c、d、d 的算術平均數為 μ
(D)八個數 a、a、b、b、c、c、d、d 的標準差為 σ
(E)四個數 $\dfrac{a-\mu}{\sigma}$、$\dfrac{b-\mu}{\sigma}$、$\dfrac{c-\mu}{\sigma}$、$\dfrac{d-\mu}{\sigma}$ 的標準差為 1

____ 4. 下表是 108 年學測數學科的「級分人數百分比累計表」，請問均標（第 50 百分位數）為幾級分？

級分	人數	百分比	累計人數	累計百分比	級分	人數	百分比	累計人數	累計百分比
15	7,782	5.82	133,693	100.00	7	8,929	6.68	55,047	41.17
14	8,846	6.62	125,911	94.18	6	10,210	7.64	46,118	34.50
13	8,937	6.68	117,065	87.56	5	10,508	7.86	35,908	26.86
12	10,403	7.78	108,128	80.88	4	9,559	7.15	25,400	19.00
11	10,927	8.17	97,725	73.10	3	9,799	7.33	15,841	11.85
10	9,332	6.98	86,798	64.92	2	5,095	3.81	6,042	4.52
9	11,577	8.66	77,466	57.94	1	906	0.68	947	0.71
8	10,842	8.11	65,889	49.28	0	41	0.03	41	0.03

(A) 6 級分　(B) 7 級分　(C) 8 級分
(D) 9 級分　(E) 10 級分

二 多選題

______ 5. 兩個變數 (X, Y) 的 n 筆資料，$\mu_X = 60$，$\mu_Y = 70$，相關係數為 0.9，且 Y 對 X 的迴歸直線通過 $(70, 75)$，則下列選項哪些正確？
(A) Y 對 X 的迴歸直線必通過 $(60, 70)$
(B) n 筆資料為正相關
(C) Y 對 X 的迴歸直線斜率為 0.9
(D)若加進兩筆資料 $(2, 41)$、$(-10, 35)$，則相關係數必大於 0.9
(E)若某筆資料的 x 值為 80，則其 y 值必為 80

______ 6. 已知 S_n 為等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項之和，且 $S_8 > S_9 > S_7$，則下列選項哪些是正確的？
(A)公差為負數　(B) $a_7 < a_8 < a_9$　(C) $S_{16} < 0$
(D) $S_{17} < 0$　(E)數列 $\langle S_n \rangle$ 中的最大項為 S_8

______ 7. $(1 + x)^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11}$，若 $a_0, a_1, \cdots, a_{11}$ 的算術平均數為 μ，中位數為 Me，則下列選項哪些正確？
(A) $a_9 = 55$　(B) $\mu > 170$　(C) $\mu < 170$
(D) Me 為 5 的倍數　(E) Me 為 11 的倍數

______ 8. 下列敘述哪些正確？
(A)數列 $\langle a_n \rangle$ 若 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$，則 $a_4 = 4$
(B) $\langle b_n \rangle$ 為等差數列，若 $b_{13}b_{14} < 0$ 則 $b_{14}b_{15} > 0$
(C) $\langle c_n \rangle$ 為等差數列，且 $c_1 = 1$，若 $c_{10} < 0$，則 $c_{20} < 0$
(D)數列 $\langle d_n \rangle$ 且 $d_1 = 1$，若 $d_n + d_{n-1} = 5$，$n \geq 2$，則 $d_{19} + d_{20} = 5$
(E)數列 $\langle e_n \rangle$ 滿足 $e_1 = 1$，且 $e_n = -2e_{n-1}$，$n \geq 2$，則 $e_{20} < 0$

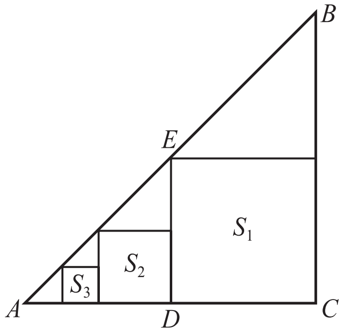
三 填充題

9. 將一等差數列按右列規律排列，每一列比前一列多一個數，則第 20 列的第 5 個數為________。

第 1 列：1
第 2 列：4　7
第 3 列：10　13　16
第 4 列：19　22　25　28
第 5 列：31　34　37　40　43
⋮

10. 某班 35 位學生，數學考試成績不佳，平均分數 40 分，標準差 5 分，老師決定用線型函數 $y = ax + b$ 方式加分（其中 x 為原始分數，y 為加分後分數，$a > 0$），加分後全班平均分數 60 分，標準差 6 分，若某生原始分數 50 分，則加分後成績為________分。

11. 如右圖，等腰直角三角形中，$\angle C = 90^\circ$，$\overline{BC} = 1$，在 ΔABC 的內部作一個最大正方形 S_1，在 ΔADE 的內部再作一個最大正方形 S_2，依此規則，前 5 個正方形的面積總和為________。



數列級數與數據分析

12. 令 X 代表本校每個高一學生平均每天研讀數學的時間（以小時計），則 $W=7(24-X)$ 代表每個高一學生平均每週花在研讀數學以外科目的時間。令 Y 代表每個高一學生數學的月考成績，設 X、Y 的相關係數為 0.8，若 X、W 的相關係數為 r_1，Y、W 的相關係數為 r_2，則 $r_1+r_2=$ ＿＿＿＿。

四 素養導向試題

13. 根據調查，每三個成年人中就有一個人有高血壓，近年國際衛生組織對大量不同年齡層的人進行血壓調查，得出隨年齡變化收縮壓的正常值變化情況如下表：

年齡 x（歲）	28	32	38	42	48	52	58	62	$\mu_x=45$
收縮壓 y（mmHg）	114	118	122	127	129	135	140	147	$\mu_y=129$

其中，$(x_1-\mu_x)^2+(x_2-\mu_x)^2+(x_3-\mu_x)^2+\cdots+(x_8-\mu_x)^2=1032$

$(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+\cdots+(x_8-\mu_x)(y_8-\mu_y)=944$

試求下列問題：

(1)根據表中的數據求 y 對於 x 的迴歸直線斜率為何？（準確到小數點後第 2 位，第 3 位以下四捨五入）＿＿＿＿

(A) 0.90 (B) 0.91 (C) 0.92 (D) -0.91 (E) -0.92

(2)若迴歸直線方程式為 $y=a+bx$，則 a 之值為＿＿＿＿。

(3)若規定一個人的收縮壓為標準值的 0.9 ～ 1.06 倍，為血壓正常人群。收縮壓為標準值的 1.06 ～ 1.12 倍，為輕度高血壓人群。收縮壓為標準值的 1.12 ～ 1.20 倍，為中度高血壓人群。收縮壓為標準值的 1.20 倍以上，為重度高血壓人群。請問一位收縮壓為 180 mmHg 的 70 歲的老人，屬於哪一類人群？＿＿＿＿