

1

數與式

1

第1至2回

2

直線與圓

17

第3至4回

3

多項式

38

第5至7回

4

數列級數與數據分析

60

第8至10回

5

排列組合與機率

88

第11至14回

6

三角比的定義及其性質

115

第15至16回



學測趨勢 這是一到四冊各章教材中最為「混亂」的一章，所介紹的觀念包山包海，從數字結構到指數對數，因各題型之間欠缺連貫性，導致各版本教科書都有各自的編寫順序，請同學當成是總複習的前菜拼盤吧！

準備方向 解題時為了能夠即時想到應對的方法，請同學務必反覆熟讀本章的概念。在大考試題的「素養」要求之下，本單元各題型很容易被加工成為情境閱讀試題，請同學要有心理上的準備。

年 度	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
學測命題數	1	2	3	0	2	2	0	2	1	2

★★★★

- ① **分數化成小數**：最簡分數 $\frac{b}{a}$ 可用除法化成小數，若分母 a 沒有 2、5 以外的質因數，則 $\frac{b}{a}$ 可化成有限小數，否則就是無限循環小數。

例 A 下列哪些分數可化成有限小數？_____

(A) $\frac{7}{8}$

(B) $\frac{8}{7}$

(C) $\frac{21}{75}$

(D) $\frac{3}{2^{10}}$

例 B 將 $\frac{1234}{9999}$ 化成小數形式為 $0.\overline{1234}$ ，設小數點後第 n 位的數字為 $f(n)$ ，求 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(99) =$ _____。

★★★★

- ② **循環小數化成分數**：利用解方程式可以把循環小數化成分數，如 $x = 1.2\overline{34}$ ，則 $10x = 12.\overline{34}$ ， $1000x = 1234.\overline{34}$ ，所以 $1000x - 10x = 1234 - 12$ ，得 $x = \frac{1234 - 12}{990}$ 。依此類推，如 $3.\overline{4} = \frac{34 - 3}{9}$ ， $5.6\overline{789} = \frac{56789 - 56}{9990}$ 。請注意 $0.\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$ 。

例 A 設 a 、 b 為循環小數， $a = 0.1\overline{2}$ ， $b = 0.0\overline{1}$ ，則 $a - b$ 的值是下列哪一個選項？

(A) 0.11

(B) 0.1111

(C) $\frac{1}{9}$

(D) $\frac{10}{99}$

(E) $\frac{100}{999}$

答對率 80% 108 指考乙

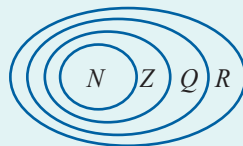
例 B 化簡 $\sqrt{\left(\frac{1}{1.1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3.3}\right)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

讀完可以先練習範例 1、2



3 有理數、無理數與數系構造

- (1) 有限小數與循環小數都可以化成分數 $\frac{b}{a}$ 的形式，其中 a 、 b 為整數，且 $a \neq 0$ ，稱為有理數，如 $\frac{-5}{1}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 0 、 $2.\bar{3}$ 。全體有理數記為 Q 。兩個相異有理數之間有無限多個有理數，稱為稠密性。
- (2) 不循環的無限小數無法表為分數形式，稱為無理數，如 π 、 $\sqrt{3}$ 。
- (3) 有理數與無理數合稱為實數，與實數線上的點一一對應。全體實數記為 R 。
- (4) 有理數及實數的四則運算都具有封閉性（除數不可為 0），其加法與乘法有交換律、結合律、分配律，可利用等量公理對等式進行移項處理。
- (5) 任兩個實數 a 、 b 可比較大小，「 $a > b$ 、 $a = b$ 、 $a < b$ 」恰有一個成立。可利用等量公理對不等式進行移項處理。
- (6) 全體正整數記為 N （又稱自然數），全體整數記為 Z 。兩個相異整數的差至少是 1，稱為離散性。數系構造如右圖。



例 A 試選出正確的選項：_____

- (A) $0.3\overline{43}$ 不是有理數 (B) $0.3\overline{4} > \frac{1}{3}$ (C) $0.3\overline{4} > 0.343$
 (D) $0.3\overline{4} < 0.35$ (E) $0.3\overline{4} = 0.34\overline{3}$

例 B 設 a 、 b 、 c 為有理數， x 、 y 為無理數，下列推論哪些為真？_____

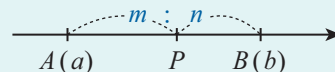
- (A) $ab + c$ 必為有理數 (B) $x + y$ 必為無理數
 (C) $a + x$ 必為無理數 (D) ax 必為無理數

例 C 設 $a = \sqrt{7 + \sqrt{47}}$ ，則 a 在哪兩個連續整數之間？_____

- (A) 0 與 1 (B) 1 與 2 (C) 2 與 3
 (D) 3 與 4 (E) 4 與 5

例 D $x, y \in Z$ ，若 $|x - 7| + 3(y - 4)^2 = 2$ ，則數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- ④ 數線上的分點公式：數線上有 $A(a)$ 、 $B(b)$ 兩點，則 $\overline{AB} = |a - b|$ ，若點 P 在 \overline{AB} 內且 $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$ ，則 P 為 $\frac{mb + na}{m + n}$ 。反之，若 m 、 n 為正數，則點 $\frac{mb + na}{m + n}$ 必在 a 、 b 之間，且到 a 、 b 的距離比為 $m : n$ 。



例 A 點 $P(x)$ 在 $A(5)$ 、 $B(11)$ 之間，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ ，則 $x = a + b\sqrt{6}$ ，其中 a 、 b 為整數，求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 B 已知實數 a 、 b 滿足 $a < b$ ，則下列哪些大小關係必定成立？

(A) $\frac{a+b}{3} < \frac{a+b}{2}$

(B) $\frac{4a+b}{5} < \frac{3a+b}{4}$

(C) 若 $b > 0$ ，則 $\frac{2a-b}{5} < \frac{a-b}{4}$

(D) 若 $b < 0$ ，則 $\frac{2a-b}{5} < \frac{a-b}{4}$

- ⑤ 雙重根號的化簡：設 $a \geq b \geq 0$ ，由 $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab}$ 可得：

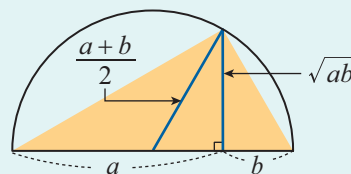
$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

例 A 設 $\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} = a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 為由小而大的自然數，試求 $a + b + c + d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 B 無理數 $\sqrt{14 + \sqrt{180}}$ 的整數部分為 ，小數部分為 。

- ⑥ 算幾不等式：正數 a 與 b 必滿足 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，且兩邊相等的條件為 $a = b$ 。可利用右圖呈現算幾不等式。



例 A 已知實數 x 、 y 的乘積為 15，則 $4x^2 + 9y^2$ 的最小值為 _____，此時 $x^2 =$ _____， $y^2 =$ _____。

例 B 求 $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2 + 1}$ 在 $x =$ _____ 時， $f(x)$ 有最小的函數值為 _____。

讀完可以先練習範例 6



⑦ 三次乘法公式：其中 $(a \pm b)^3$ 可推廣成二項式定理 $(a + b)^n$ ，見本書第 5 章「排列組合與機率」概念 13。

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

例 A 請化簡 $(4 + \sqrt{10})^3 + (4 - \sqrt{10})^3 =$ _____，若 $(4 + \sqrt{10})^3$ 介於自然數 n 與 $n + 1$ 之間，求 $n =$ _____。

例 B 已知 $a - b = 3$ ， $ab = 2$ ，求 $a^3 - b^3 =$ _____。

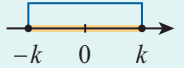
例 C 若 $x + \frac{1}{x} = 5$ ，求 $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ _____。

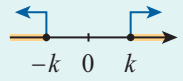
讀完可以先練習範例 7



⑧ 含絕對值的方程式不等式與區間符號：數線上 x 到原點的距離為 $|x|$ ， a 到 b 的距離為 $|a - b|$ 。

(1) 設 k 為正數， $|x| = k$ 的解為 $x = \pm k$ 。

(2) 設 k 為正數， $|x| \leq k$ 的解為 $-k \leq x \leq k$ ，圖形為 ，記為 $[-k, k]$ 。

(3) 設 k 為正數， $|x| \geq k$ 的解為 $x \leq -k$ 或 $x \geq k$ ，圖形為 ，記為 $(-\infty, -k] \cup [k, \infty)$ 。

(4) $f(x) = |x - a| + |x - b|$ 為「 x 到 a 與 b 的距離和」，所以 $f(x)$ 的最小值為 $|a - b|$ 。

例 A 方程式 $|2x + 1| = 9$ 的解為 $x =$ _____。

例 B 不等式 $|-2x + 7| \leq 10$ 的整數解有 _____ 個。

例 C $f(x) = |x + 1| + |x - 5|$ ，則 $f(x)$ 的最小值為 _____，此時 x 的範圍為 _____。

★★★★

9 指數符號的定義：若 $a \neq 0$ ，則 $a^0 = 1$ ， $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。若 $a > 0$ ，可取分數次方為 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ ，其中 m 、 n 為正整數且 $m \geq 2$ 。無理數次方可用分數次方來估計。

例 A 下列哪一個選項是正確的？_____

(A) $(-2)^{-3} = 8$ (B) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ (C) $16^{-\frac{3}{4}} = -8$ (D) $(-\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$

例 B 對任意實數 x 而言， $27^{(x^2 + \frac{2}{3})}$ 的最小值為 _____

(A) 3 (B) $\sqrt{3}$ (C) 9 (D) 27 (E) $81\sqrt{3}$

例 C $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}} \times (0.25)^{-2.5} =$ _____。

➡ 讀完可以先練習範例 8

★★★★

10 指數律：指數符號皆能滿足指數律，如 a 、 $b > 0$ ， x 、 y 為實數，則：

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$$

例 A $(3 + \sqrt{7})^{10} (3 - \sqrt{7})^{10} =$ _____。

例 B $\frac{(2^{-5})^{\frac{7}{3}}}{8^{\frac{4}{9}}} = 16^x$ ，則 $x =$ _____。

例 C 下列哪些選項等於 81^x ? _____

- (A) 3^{4x} (B) 4^{3x} (C) $(3^x)^4$ (D) 9^{2x} (E) $9^{(x^2)}$

★★★★

- 11 科學記號：正數 x 寫成 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ 且 n 為整數，稱為 x 的科學記號表法。若 $n \geq 0$ ，則 x 的整數部分有 $n+1$ 位；若 $n < 0$ ，則 x 為純小數且自小數點後第 $|n|$ 位始不為 0，如 3.19×10^4 為 5 位數， 7.18×10^{-4} 自小數點後第 4 位始不為 0，兩者的有效數字 3.19 和 7.18 都是三位。

例 A 亞佛加厥數是一莫耳物質所含的粒子數，數值約為 6.022×10^{23} ，此數值共有 4 位有效數字，寫成整數為 _____ 位數，最高位數字為 _____。

例 B 一個電子的質量約為 9.11×10^{-28} 公克，此數值共有 3 位有效數字，自小數點後第 _____ 位開始出現不為 0 的數字，此數字為 _____。

讀完可以先練習範例 9、10

★★★★

- 12 常用對數：設 a 為正實數， k 為實數，滿足 $10^k = a$ ，則次數 k 可記為 $\log a$ ，即 $10^k = a \xleftrightarrow{\text{符號互換}} k = \log a$ ，由符號的替換可得：(1) $10^{\log a} = a$ (2) $\log(10^k) = k$ 。

操作計算機可知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ，即 $10^{0.3010} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$ 。利用常用對數可將指數符號換成以 10 為底數，再用指數律化成科學記號。

例 A 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ，若 $10^k = 6$ ，則次數 k 用常用對數表示為 $k =$ _____，估計 k 的大小為 _____。

例 B 將 $(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號 $(\sqrt[3]{49})^{100} = a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ，且 n 為正整數。若 a 的整數部分為 m ，則數對 $(m, n) =$ _____。
($\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$)

答對率 26% 110 學測

例 C 已知 $\log 3 \approx 0.4771$ ，試求 3^{100} 乘開後為 _____ 位數。

學校園遊會的摸彩攤位有消費滿額的獎金放送活動，主辦人阿財準備了一個摸彩箱，箱中有五張字卡，每張字卡各有一個數值，分別是

$$|\sqrt{2} + 2| + |\sqrt{2} - 2|$$

同學同時從摸彩箱取出三張字卡，獲得三個字卡的數字後，根據下列規則領取獎金：

{	有理數的個數比無理數還少	最大數比 4 還小	⇒	獲得獎金 10 元
		最大數比 4 還大	⇒	獲得獎金 8 元
{	有理數的個數比無理數還多	最大數比 4 還小	⇒	獲得獎金 5 元
		最大數比 4 還大	⇒	獲得獎金 3 元

請回答下列問題：

- (1) 若小華抽得的三張字卡是 $3.\overline{57}$ 、 $1+\sqrt{5}$ 、 $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$ ，請問小華獲得的獎金為下列哪一個選項？_____
- (A) 10 元 (B) 8 元 (C) 5 元 (D) 3 元
- (2) 若小明獲得獎金 10 元，請問他抽得哪三張字卡？_____
- (3) 許多人抽完字卡領得獎金之後，阿財發現有一個獎額都沒有人領過，請問是哪一個？_____。為什麼沒人領到這個獎額？
- (4) 阿財設計這個活動時，本以為人人有獎，結果卻發現有人領不到獎金，請問有哪些情形會導致沒有獎金？請全部列出。

解

 小小叮嚀

這是結合情境的素養題型，
符合 108 課綱教學新趨勢

類題 1 關於下列不等式，請選出正確的選項。_____



(A) $\sqrt{13} > 3.5$

(B) $\sqrt{13} < 3.6$

(C) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$

(D) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$

全對率 59% 103 學測

類題 2 考慮有理數 $\frac{n}{m}$ ，其中 m 、 n 為正整數且 $1 \leq mn \leq 8$ 。則這樣的數值（例如 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{4}$ 同值，只算一個）共有幾個？_____

(A) 14 個

(B) 15 個

(C) 16 個

(D) 17 個

(E) 18 個

答對率 60% 105 指考乙

範例 2 實數的大小與範圍

請問下列選項哪些正確？_____

(A) $9\sqrt{5} < 20$

(B) $\sqrt{7} + \sqrt{2} > 4$

(C) $\sqrt{13} - \sqrt{10} < \sqrt{11} - 2\sqrt{2}$

(D) 若 $-1 \leq x \leq 3$ ，則 $1 \leq x^2 \leq 9$

(E) 若 $-2 \leq x \leq 5$ 且 $2 \leq y \leq 3$ ，則 $-6 \leq x - 2y \leq -1$

解

類題 3 設實數 a 、 b 滿足 $0 < a < 1$ ， $0 < b < 1$ ，則下列選項哪些必定為真？_____

(A) $0 < a + b < 2$

(B) $0 < ab < 1$

(C) $-1 < b - a < 0$

(D) $0 < \frac{a}{b} < 1$

(E) $|a - b| < 1$

類題 4 $x、y$ 為實數，若 $|2x-1| \leq 7$ ， $|y-4| \leq 2$ ，則下列選項哪些必成立？_____

(A) $-5 \leq x-y \leq 2$

(B) $9 \leq x^2 \leq 16$

(C) $-27 \leq x^3 \leq 64$

(D) $-6 \leq xy \leq 24$

(E) $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

範例 3 分點公式

全對率 38%

103 指考乙

三相異實數 $a、b、c$ 滿足 $b = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c$ ，若將 $a、b、c$ 標示在數線上，則：_____

(A) b 在 a 與 c 之間

(B) $c > b$

(C) 若 $d = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c$ ，則 d 在 a 與 b 之間

(D) a 到 c 的距離是 a 到 b 的距離的 5 倍

(E) 如果 $|b| = \frac{4}{5}|a| + \frac{1}{5}|c|$ ，則 $a \cdot b \cdot c > 0$

解

! 關鍵想法

注意 $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$ ，所以 b 在 $a、c$ 之間，且距離比例固定

類題 5 數線上 $P(3)、Q(6)、R(x)$ 三點都在 $A、B$ 兩點之間，已知 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，

$\overline{QA} : \overline{QB} = 4 : 9$ ， $\overline{RA} : \overline{RB} = 6 : 5$ ，求 $x =$ _____。

類題 6 數線上由 $A(-4)$ 出發朝右步行到達 $P(x)$ ，再騎上單車朝右駛抵達 $B(88)$ ，已知步行的速度是每秒 3 單位，騎單車的速度是每秒 10 單位，且 A 到 P 的時間是 P 到 B 的一半，求 $\overline{PA} : \overline{PB} =$ _____， $x =$ _____。

範例 4 根式的化簡

設 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ 的整數部分為 a ，純小數部分為 b ，則 $a + \frac{b^2}{1-b}$ 之值為_____。

解

fx 應用公式

$a \geq b \geq 0$ ，則

$$\sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

類題 7 介於 $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$ 與 $\frac{11}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}}$ 之間的整數共有_____個。 $(\sqrt{3} \approx 1.732)$

類題 8 設方程式 $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{6}x - 1 = 0$ 的負實根為 α ，則下列何者正確？_____

- (A) $-1 < \alpha < 0$ (B) $-2 < \alpha < -1$ (C) $-3 < \alpha < -2$ (D) $-4 < \alpha < -3$

範例 5 算幾不等式

答對率 57% 101 指考甲

當 (x, y) 在直線 $2x + y = 3$ 上變動時，關於 $K = 9^x + 3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？_____

- (A) K 有最大值 28、最小值 $6\sqrt{3}$ (B) K 有最大值 28、但沒有最小值
(C) K 沒有最大值、但有最小值 12 (D) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$
(E) K 沒有最大值也沒有最小值

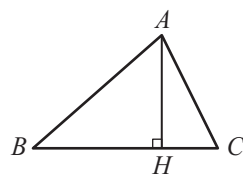
解

小小叮嚀

注意到 $9^x = 3^{2x}$ ，而且
 $3^{2x} \cdot 3^y = 3^{2x+y}$

類題 9 若實數 x, y 滿足 $9x^4 + 25y^4 = 270$ ，求乘積 xy 的最大值為_____。

類題 10 如右圖， $\triangle ABC$ 面積為 25， \overline{BC} 邊上的高為 \overline{AH} ，則 $\overline{AH} + \overline{BC}$ 的最小值為 _____。



範例 6 三次乘法公式

答對率 72%

100 學測

多項式 $4(x^2 + 1) + (x + 1)^2(x - 3) + (x - 1)^3$ 等於下列哪一個選項？_____

- (A) $x(x + 1)^2$ (B) $2x(x - 1)^2$ (C) $x(x - 1)(x + 1)$
(D) $2(x - 1)^2(x + 1)$ (E) $2x(x - 1)(x + 1)$

解

fx 應用公式

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

類題 11 求 $2^{15} + 1$ 的最大質因數為 _____。

類題 12 已知實係數多項式方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 8 = 0$ 的三根相同，請問 b 的值等於下列哪一個選項？_____

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

答對率 78% 101 指考乙

範例 7 絕對值方程式與不等式

大雄的家在數線上點 $A(1)$ 處，學校在點 $B(9)$ 處，有一天大雄和小夫相約在此數線的 $K(x)$ 處要把所借的漫畫還給他，大雄從 A 走到 K 才發現漫畫忘記帶，又走回 A ，但在家中卻找不到漫畫，只好再走到 K 處和小夫商量，這時小夫告訴大雄漫畫可能放在學校，大雄就再從 K 走到 B ，發現漫畫真的放在學校，拿到漫畫後便走回 K 還給小夫。這樣子糊塗的大雄前前後後總共走了 74 單位的距離才把漫畫還給小夫，請算出 $x =$ _____。

解

? 怎麼解決

遇到實數的絕對值問題，如果想不到好的方法，就用「分段討論」來解

類題 13 下列各方程式中，請選出有實數解的選項。



(A) $|x| + |x - 5| = 1$

(B) $|x| + |x - 5| = 6$

(C) $|x| - |x - 5| = 1$

(D) $|x| - |x - 5| = 6$

(E) $|x| - |x - 5| = -1$

全對率 30% 105 學測

類題 14 試問數線上有多少個整數點與點 $\sqrt{101}$ 的距離小於 5，但與點 $\sqrt{38}$ 的距離大於

3 ?

(A) 1 個

(B) 4 個

(C) 6 個

(D) 8 個

(E) 10 個

答對率 68% 109 學測

範例 8 指數符號與指數律

設 a 與 b 均為正實數，滿足 $a^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 且 $b^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ，試問：

(1)關於數值 a 的關係式，下列各選項哪些正確？

(A) $a^2 = 2$

(B) $a^{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

(C) $a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$(D) \ a^{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) 化簡 a^{12} 與 b^{12} ，並判別 a 與 b 的大小關係。

(3) 請使用計算機，求出 a 與 b 的近似值到小數點後第四位。

解

考情分析

108 課綱強調使用計算機，希望大考能配合使用，這是未來的考試趨勢

類題 15 設 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ ， $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ ， $c = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$ ，下列選項何者為真？_____

- (A) $a > b > c$ (B) $a < b < c$ (C) $a = c > b$
(D) $a = c < b$ (E) $a = b = c$

類題 16 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？_____



- (A) 1.7 (B) 3 (C) 5.2
(D) 9 (E) 81

答對率 51% 106 學測

範例 9 常用對數與計算機的操作

小明手機開啟計算機的應用程式後，發現許多看不懂的符號按鍵，能夠理解的只有

x^2 、 $\frac{1}{x}$ 、 $\sqrt[2]{x}$ 、 10^x 、 \log_{10} 、...等幾個，試問：

(1) 小明隨意輸入一個比 1 大的數字，再按下列哪些按鍵會讓螢幕顯示的數字比原來還小？_____

- (A) x^2 (B) $\frac{1}{x}$ (C) $\sqrt[2]{x}$ (D) 10^x (E) \log_{10}

(2) 若小明清除數值資料後，輸入一個比 1 小的正數，再按下列哪些按鍵會讓螢幕顯示的數字比原來還大？_____

- (A) x^2 (B) $\frac{1}{x}$ (C) $\sqrt[2]{x}$ (D) 10^x (E) \log_{10}

(3) 小明輸入 0.2，依序按下 $x^2 \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \sqrt[2]{x} \rightarrow 10^x \rightarrow \log_{10}$ ，請問最終螢幕顯示的數字為何？_____

解

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



類題 17

小聰開啟手機的計算機功能後按下 $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{\log}$ ，螢幕會顯示 $\log(1234^2)$ 的值，請問此數值介於哪兩個整數之間？_____

- (A) 3 與 4 (B) 4 與 5 (C) 5 與 6 (D) 6 與 7 (E) 7 與 8

類題 18

設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b) + \log 100 + \log b = 7$ 。試選出正確的選項。_____



- (A) $1 \leq b \leq \sqrt{10}$ (B) $\sqrt{10} \leq b \leq 10$ (C) $10 \leq b \leq 10\sqrt{10}$
 (D) $10\sqrt{10} \leq b \leq 100$ (E) $100 \leq b \leq 100\sqrt{10}$

答對率 54% 108 學測

範例 10 使用對數求科學記號

小華操作計算機得知 $\log 278 \approx 2.44404$ 與 $\log 2.5351 \approx 0.40400$ ，請利用這兩個對數值，求 278^{100} 乘開後的科學記號表法，取三位有效數字為_____，可知 278^{100} 乘開後為_____位數字。

解

類題 19

觀察 2 的次方所形成的等比數列： $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ ，設其中出現的第一個 13 位數為 2^n ，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ）

答對率 59% 101 指考乙

類題 20

若 $(\frac{2}{3})^{100} = 0.00\dots 0 \underbrace{a_1 a_2 a_3 \dots}_{n \text{ 個}}$ ，其中 $a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ ， $a_1 \neq 0$ ，則數對 $(n, a_1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（ $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）

一 單選題

1. 已知 $a = 0.\overline{4} + 0.\overline{6}$ ， $b = \sqrt{(0.9)^3 + 3 \times (0.9)^2 \times 0.1 + 3 \times 0.9 \times (0.1)^2 + (0.1)^3}$ ， $c = \sqrt{(0.9)^2 + 0.18 + (0.1)^2}$ ，則下列哪一個選項正確？
 (A) $a = b = c$ (B) $a > b = c$ (C) $a > b > c$
 (D) $c > a > b$ (E) $b = c > a$
2. 請問下列哪一個選項的數不是有理數？
 (A) $0.\overline{23}$ (B) $\sqrt{361}$ (C) 3.14159
 (D) $10^{0.301}$ (E) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$
3. 設 $k = (\frac{1}{25})^{\frac{1}{4}}$ ，其中 $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ，則下列哪一個選項正確？
 (A) $0.2 < k < 0.3$ (B) $0.3 < k < 0.4$ (C) $0.4 < k < 0.5$
 (D) $0.5 < k < 0.6$ (E) $0.6 < k < 0.7$
4. 水溶液中氫離子的濃度 $[H^+]$ (單位為莫耳／升) 可定義此溶液的酸鹼 pH 值，公式為 $pH = -\log[H^+]$ ，若某一水溶液的氫離子濃度為 $[H^+] = 5.5 \times 10^{-4}$ 莫耳／升，則此溶液的 pH 值約為下列哪一個選項？($55 \approx 10^{1.74}$)
 (A) 3.26 (B) 3.52 (C) 4
 (D) 4.52 (E) 5

二 多選題

5. 已知 a 、 b 是有理數， c 、 d 是無理數，下列選項哪些是正確的？
 (A) $a + b$ 是有理數 (B) $a + c$ 是無理數
 (C) $c \times d$ 是無理數 (D) $c + d$ 是無理數
 (E) $a + c = b + d$ ，則 $a = b$ 且 $c = d$
6. 下列關於數值比較的選項，哪些是正確的？
 (A) $\sqrt{(\pi - 3.15)^2} = \pi - 3.15$ (B) $0.\overline{9} < 1$
 (C) $\sqrt{100} - \sqrt{99} < \sqrt{99} - \sqrt{98}$ (D) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} > (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$
 (E) $\frac{1}{2}(8 + 11) > 2\sqrt{22}$
7. 下列各選項的數值算式有哪些是正確的？
 (A) $(\frac{1}{0.125})^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ (B) $(10\sqrt{10})^{\log 8} = 4$
 (C) $\sqrt[4]{27} \times \sqrt[6]{81} = \sqrt[17]{3^{12}}$ (D) $7^{-\frac{3}{2}} \times 63^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{7}$
 (E) $7.85 \times 10^{-6} - 8.3 \times 10^{-7}$ 以科學記號表示為 7.02×10^{-6}

8. 計算機的按鍵 $\sqrt[n]{x}$ 、 10^x 、 \log_{10} 的功能如下：

- (1) 按下 $\sqrt[n]{x}$ 會把螢幕上的正數開根號，如輸入 9 再按 $\sqrt[n]{x}$ 得到 3
 - (2) 按下 10^x 會把螢幕上的數當成 10 的次數，如輸入 2 再按 10^x 得到 100
 - (3) 按下 \log_{10} 會把螢幕上的正數以 10 為底取對數，如輸入 1000 再按 \log_{10} 得到 3
- 清除螢幕資料後，輸入正數 a ，其中 $a > 1$ ，依序按下 $\sqrt[n]{x}$ 、 10^x 、 \log_{10} 所得的結果與下列哪些選項的操作會有相同的結果？

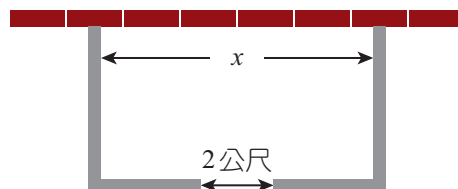
- (A) 輸入 a ，再依序按下 $\sqrt[n]{x}$ 、 \log_{10} 、 10^x
- (B) 輸入 a ，再依序按下 10^x 、 $\sqrt[n]{x}$ 、 \log_{10}
- (C) 輸入 a ，再依序按下 10^x 、 \log_{10} 、 $\sqrt[n]{x}$
- (D) 輸入 a ，再依序按下 \log_{10} 、 $\sqrt[n]{x}$ 、 10^x
- (E) 輸入 a ，再依序按下 \log_{10} 、 10^x 、 $\sqrt[n]{x}$

三 填充題

9. 某種細菌繁殖，每經過一天細菌數目會增加 a 倍，已知從正式實驗開始計算，2 天後細菌數為 300 個，5 天後細菌數為 37500 個，則 _____ 天後細菌數目為 937500 個。
10. 若聯立不等式 $\begin{cases} |3-x| \leq 4 \\ |x+2| \geq 5 \end{cases}$ 和 $|ax+1| \leq b$ 有相同的解，則數對 $(a, b) =$ _____。
11. 已知 a 、 b 為有理數，若 $(\sqrt{6-2\sqrt{5}})^3 = a + b\sqrt{5}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。
12. 若 $k = 269 \times 271 \times (270^2 + 270 + 1)(270^2 - 270 + 1)$ ，化簡後整數 k 為 _____ 位數。
(已知 $\log 3 \approx 0.48$)

四 素養導向試題

13. 社區規劃建造一個面積為 360 平方公尺的矩形場地，此矩形場地的其中一面是利用原有的舊牆並新建其他三面圍牆。另外，在舊牆對面的新牆上要留一個寬 2 公尺的出口，如右圖所示。已知舊牆維修費用為每 1 公尺 180 元，新牆的造價為每 1 公尺 720 元。假設利用舊牆的長度為 x 公尺，修建此矩形場地的總費用為 y 元。



- (1) 將 y 表為 x 的函數為 _____。

- (2) 當 x 為 _____ 時，可求得最少的修建費用為 _____ 元。