6 三角比的定義及其性質

學測趨勢 三角形是最基本的圖形，應用三角比可以把三角形的邊邊角角算得一清二楚，只要題目牽涉到圖形的角度、長度與面積，請同學要能動腦聯想定理的使用。

準備方向 本章的命題重點在於銳角、廣義角的三角比定義，與相關定理、公式的計算，請同學先把公式弄熟，遇到題目才能即時反應。

年　度	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
學測命題數	1	1	3	3	2	2	2	1	3	3

一、三角比的定義及關係

讀完可以先練習範例 1

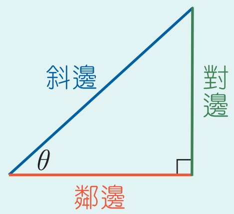
★★★★

❶ 銳角的三角比：銳角 θ 為直角三角形的內角，兩股為其對邊與鄰邊，則：

(1) $\sin\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$，稱為 θ 的正弦值。

(2) $\cos\theta=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$，稱為 θ 的餘弦值。

(3) $\tan\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，稱為 θ 的正切值。



例 A 有一等腰三角形底邊為 10，頂角 72°，下列何者可以表示腰長？＿＿＿＿

(A) $5\cdot\sin 36^\circ$　(B) $5\cdot\tan 36^\circ$　(C) $\dfrac{5}{\tan 36^\circ}$　(D) $\dfrac{5}{\cos 36^\circ}$　(E) $\dfrac{5}{\sin 36^\circ}$

例 B θ 為銳角，若 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，則 $\cos\theta=$＿＿＿＿，$\tan\theta=$＿＿＿＿。

例 C 設 ΔABC 三頂點 A、B、C 對邊的邊長分別為 a、b、c，$\overline{AH}$ 為高，$\overline{AH}=$＿＿＿＿

(A) $b\cdot\sin B$　(B) $c\cdot\sin C$　(C) $b\cdot\sin C$　(D) $c\cdot\sin B$　(E) $a\cdot\sin A$

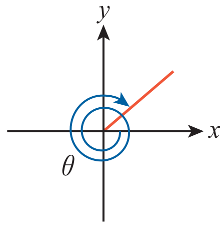
★★★★

❷ 有向角與同界角：坐標平面上，有向角 θ 從 x 軸正向轉到終邊，逆時針方向為正，順時針方向為負，稱為標準位置角。若終邊在第 i 象限，稱 θ 為第 i 象限角。若 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的終邊重合，則互為同界角，相差 360° 的整數倍。

例 A 950° 是第______象限角，其最小正同界角為______。

例 B 若有向角 θ 如右圖示，則 θ 最接近：______

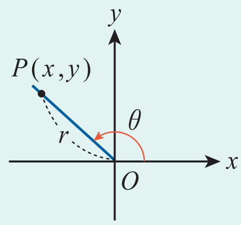
(A) 40°　(B) 400°　(C) -320°　(D) -680°



讀完可以先練習範例 2

★★★★

❸ **極坐標與有向角的三角比**：有向角 θ 終邊上任一點 $P(x,y)$，令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，則 P 點的極坐標表法為 $[r,\theta]$。定義 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，當 θ 為銳角時，此定義與對邊、鄰邊的定義吻合。



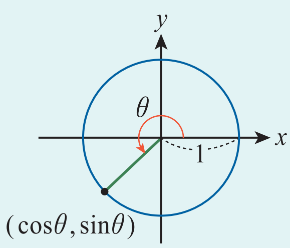
例 A 有向角 θ 終邊通過 $(2,-3)$，則 $\sin\theta=$______，$\cos\theta=$______，$\tan\theta=$______。

例 B 標準位置角 θ 的終邊通過點 $(k+1,2k-3)$，若 $\tan\theta=\dfrac{5}{2}$，求 $k=$______。

例 C 平面上兩點 $P[3,70^\circ]$ 與 $Q[4,160^\circ]$ 的距離為______。

★★★★

❹ **單位圓的點坐標與特別角**：圓的半徑為 1，圓心在原點，有向角 θ 的終邊與此圓交於一點，其點坐標的 x 值為 $\cos\theta$，y 值為 $\sin\theta$。常使用的特別角有 30°、45°、60°、120°、135°、150°、210°、225°、240°、300°、315°、330°。另外 15°、18°、36°、54°、72°、75° 若需要都會註明。



例 A 請問 $\sin 73^\circ$、$\sin 146^\circ$、$\sin 219^\circ$、$\sin 292^\circ$、$\sin 365^\circ$ 這五個數值的中位數是哪一個？______

答對率 53%　105 學測

(A) $\sin 73^\circ$　(B) $\sin 146^\circ$　(C) $\sin 219^\circ$

(D) $\sin 292^\circ$　(E) $\sin 365^\circ$

例 B (1) $\sin 0^\circ=$______，$\cos 0^\circ=$______　(2) $\sin 90^\circ=$______，$\cos 90^\circ=$______

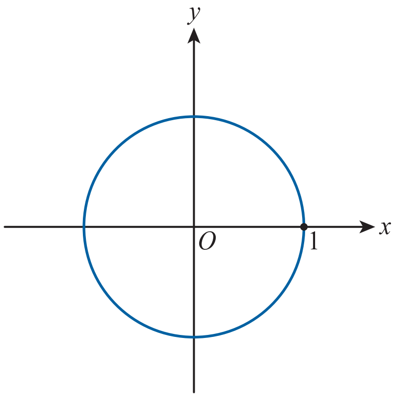
(3) $\sin 180^\circ=$______，$\cos 180^\circ=$______　(4) $\sin 270^\circ=$______，$\cos 270^\circ=$______。

例 C (1) $\sin 120^\circ =$ ______，$\cos 120^\circ =$ ______。

(2) $\sin 135^\circ =$ ______，$\cos 135^\circ =$ ______。

(3) $\sin 150^\circ =$ ______，$\cos 150^\circ =$ ______。

(4) $\sin 240^\circ =$ ______，$\cos 240^\circ =$ ______。



例 D 最接近 1300° 且使 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 的角度 $\theta =$ ______。

讀完可以先練習範例 3

★★★★

❺ 平方關係：由定義直接推得 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，即為畢氏定理。

例 A 若 $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$，則 $\sin x \cos x =$ ______。

例 B 設有向角滿足 $2\sin\theta - \cos\theta = 1$，求 $\cos\theta =$ ______。

例 C 設 $x \in R$，$f(x) = \cos^2 x + \frac{1}{2}\sin x - 1$，則 $f(x)$ 最大值為 ______，最小值為 ______。

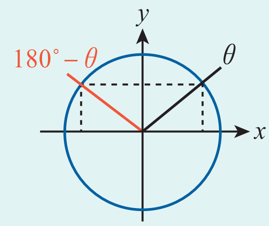
讀完可以先練習範例 4

★★★★

❻ 三角比的角度變換

(1)取餘角，要正餘互換。

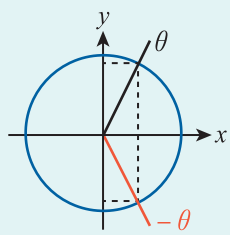
① $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$　② $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$。



(2)取補角，sin 不變：當角度在 90° ～ 180° 內，可取補角。

① $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$　② $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

③ $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$。



(3)角變號，cos 不變。

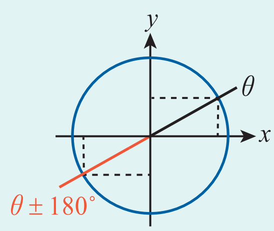
① $\sin(-\theta) = -\sin\theta$　② $\cos(-\theta) = \cos\theta$

③ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$。

(4)加減 180°，tan 不變：若角度在 180° ～ 360° 之間，則可先減 180°。

① $\sin(\theta \pm 180^\circ) = -\sin\theta$　② $\cos(\theta \pm 180^\circ) = -\cos\theta$

③ $\tan(\theta \pm 180^\circ) = \tan\theta$。



例 A 取餘角：(1) $\sin 40^\circ =$ ________ (2) $\cos 20^\circ =$ ________。

例 B 取補角：(1) $\sin 100^\circ =$ ________ (2) $\cos 130^\circ =$ ________

(3) $\tan 170^\circ =$ ________。

例 C 角變號：(1) $\sin(-10^\circ) =$ ________ (2) $\cos(-40^\circ) =$ ________

(3) $\tan(-80^\circ) =$ ________。

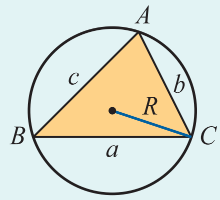
例 D 減 180°：(1) $\sin 220^\circ =$ ________ (2) $\cos 250^\circ =$ ________

(3) $\tan 290^\circ =$ ________。

二、正、餘弦定理與面積公式

讀完可以先練習範例 5 ★★★★

7 **正弦定理**：ΔABC 中，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R = \dfrac{abc}{2\Delta}$，其中 R 為外接圓半徑，Δ 為三角形面積。適用於 ASA 或 AAS 的三角形。可得 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$。

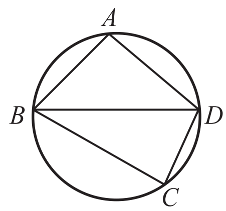


例 A ΔABC 中，已知 $\sin A = \dfrac{1}{4}$，$\sin B = \dfrac{1}{3}$，$\overline{BC} = 6$，則：

(1) $\overline{AC} =$ ____ (2)外接圓半徑 $R =$ ____。

例 B ΔABC 中，若 $\angle A = 30^\circ$，$\angle B = 45^\circ$，則 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} =$ ____________。

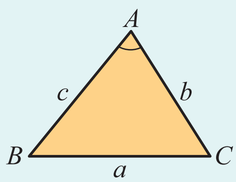
例 C 如右圖所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\angle DBC = 30^\circ$，$\angle ABD = 45^\circ$，$\overline{CD} = 6$，則線段 $\overline{AD} =$ ______。



讀完可以先練習範例 6、7 ★★★★

8 **餘弦定理**：ΔABC 中，$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$，

即 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$。適用於 SSS 或 SAS 的三角形。



例 A ΔABC 中，已知 $\overline{AB} = 4$，$\overline{BC} = 6$，$\overline{CA} = 7$，則 $\cos A =$ ______。

例 B　ΔABC 中，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=2$，$\angle A=120^\circ$，則 $\overline{BC}=$________。

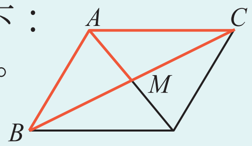
例 C　在三角形 ABC 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，則 $\overline{AD}=$______。

★★★★

9 中線定理與平行四邊形定理：由餘弦定理或向量內積推出，如下：

(1) ΔABC 中，$\overline{BC}$ 之中點為 M，則 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MB}^2)$。

(2)平行四邊形的四個邊長平方和 = 兩對角線長的平方和。



例 A　ΔABC 的重心為 G，若 $\overline{GA}=6$，$\overline{GB}=5$，$\overline{GC}=7$，則邊長 $\overline{BC}=$________。

例 B　邊長為 5 的菱形，其兩對角線長的平方和為________。

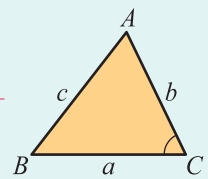
讀完可以先練習範例 8、9、10

★★★★

10 三角形求面積：ΔABC 之三對邊為 a、b、c，其面積依條件有多種求法。

(1)**基本公式**：$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高$=\dfrac{1}{2}ab\sin C$。

(2)**海龍公式**：$\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 為半周長，r 為內切圓半徑。



(3)**向量公式**：$\vec{a}$、$\vec{b}$ 張成的三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$，後者為外積的應用，僅適用於空間坐標。若 $\vec{a}=(x_1,y_1)$、$\vec{b}=(x_2,y_2)$，則 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 張成的三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$。所以三角形面積的向量公式有內積、外積、行列式三種版本，其題型應用請見《對話式數學 A 3－4 冊學測複習講義》。

例 A　ΔABC，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\angle A=60^\circ$，則 ΔABC 面積為________。

例 B　ΔABC，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=10$，$\angle BAC=120^\circ$，點 P 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AP}$ 平分 $\angle BAC$，求 $\overline{AP}=$________。

例 C　ΔABC 的邊長為 8、5、7，則面積為 ________，內切圓半徑為 ______，外接圓半徑為 ________。

讀完可以先練習範例 11 ★★★★

⑪ 用反三角 $\sin^{-1}$、$\cos^{-1}$、$\tan^{-1}$ 表示角度

(1)若 $-90^\circ \le \theta \le 90^\circ$ 且 $\sin\theta = k$，規定角 $\theta = \sin^{-1}k$，稱為反正弦 arc sin。

(2)若 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ 且 $\cos\theta = k$，規定角 $\theta = \cos^{-1}k$，稱為反餘弦 arc cos。

(3)若 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ 且 $\tan\theta = k$，規定角 $\theta = \tan^{-1}k$，稱為反正切 arc tan。

例 A　化簡：(1) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$ ______　(2) $\cos^{-1}\dfrac{-1}{2} =$ ______　(3) $\tan^{-1}1 =$ ______。

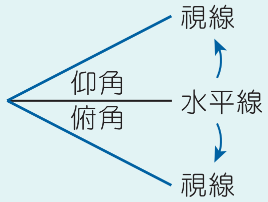
例 B　化簡：(1) $\tan(\tan^{-1}5) =$ ______　(2) $\sin(\cos^{-1}\dfrac{3}{5}) =$ ______　(3) $\cos^{-1}(\sin 100^\circ) =$ ______。

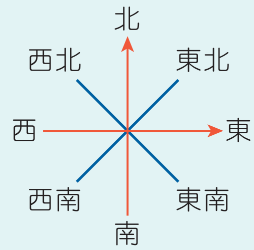
讀完可以先練習範例 12、13 ★★★★

⑫ 仰角、俯角與方位角

(1)仰角：視線在水平線上方時，兩線的夾角稱為仰角。

(2)俯角：視線在水平線下方時，兩線的夾角稱為俯角。





例 A　有一艘船向南航行，在東 30° 南的方位發現一燈塔後，繼續向前進 20 浬，此時燈塔的方向在北 30° 東，則此船航線與燈塔的最短距離為 ________ 浬。

例 B　氣象局測出在 20 小時期間，颱風中心的位置由恆春東南方 400 公里直線移動到恆春南 15° 西的 200 公里處，試求颱風移動的平均速度為 ______ 公里／時。（整數以下，四捨五入）

例 C　某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60°，山頂的仰角為 45°，某人自 A 點向東行 600 公尺到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60°，則山高為＿＿＿＿公尺。

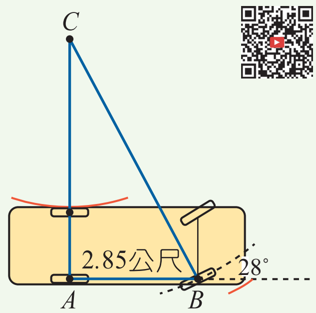
例 D　某甲觀測一飛行中的熱氣球，發現其方向一直在正前方，而仰角則以等速遞減。已知此氣球的高度維持不變，則汽球正以：＿＿＿＿

(A)等速飛行　(B)加速向某甲飛來　(C)減速向某甲飛來

(D)加速離某甲飛去　(E)減速離某甲飛去

範例 1　銳角三角比的定義　答對率 32%　104 學測

右圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。已知在低速前進時，圖中 A 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，B 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為＿＿＿＿公尺。（小數點後第一位以下四捨五入，$\sin 28^\circ \approx 0.4695$，$\cos 28^\circ \approx 0.8829$）



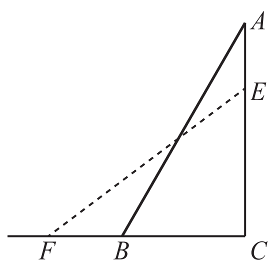
解

考情分析

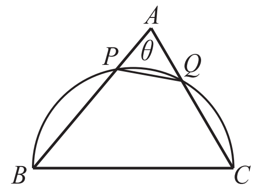
這一題只用到 $\sin\theta = \dfrac{\text{對}}{\text{斜}}$，但因為敘述較長，而且排在當年選填的最後一題，所以答對率只有三成多

類題 1　如右圖所示（只是示意圖），將梯子 $\overline{AB}$ 靠在與地面垂直的牆 AC 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 為 60°。將在地面上的底 B 沿著地面向外拉 51 公分到點 F（即 $\overline{FB} = 51$ 公分），此時梯子 $\overline{EF}$ 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值為 $\sin\angle EFC = 0.6$，則梯子長 $\overline{AB} =$＿＿＿＿公分。

答對率 39%　107 學測



類題 2 如右圖所示，銳角 ΔABC，$\angle A=\theta$，以 $\overline{BC}$ 為直徑作圓，此圓交 $\overline{AB}$ 於 P，交 $\overline{AC}$ 於 Q，則面積比 $\dfrac{\Delta APQ}{\Delta ABC}=$________，$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BC}}=$________。（用 θ 的三角比表示）



範例 2 廣義角三角比的定義

在 ΔABC 中，M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且 $\angle BAC=120^\circ$，則 $\tan\angle BAM=$________。（化成最簡根式）

解

小小叮嚀

若沒有想到坐標，用餘弦定理、中線定理來解的話，推導過程會加長許多

類題 3 有向角 θ 以 x 軸正向為始邊，終邊與直線 $2x+y+3=0$ 相交於 P，已知 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，則 $\sin\theta=$________，$\cos\theta=$________，P 點坐標為________。

類題 4 坐標平面上，點 (x,y) 在有向角 θ 的終邊上，且 x、y 之值滿足 $\begin{cases} x<3 \\ x-y>0 \\ x+2y>1 \end{cases}$，試問下列各選項的推論哪些正確？________

(A) $\sin\theta$ 必大於 0
(B) $\cos\theta$ 必大於 0
(C) $\tan\theta$ 必大於 0
(D) $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ 之值均小於 1
(E) $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ 之值均大於 -1

範例 3　平方關係

設 θ 為三角形 Γ 的一個內角，且 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 是 $3x^2-2x+k=0$ 的兩根，請問下列哪些選項的敘述為真？______

(A) $k<-0.7$

(B) $k>-0.8$

(C) Γ 為鈍角三角形

(D) $\cos\theta>0$

(E) k、$\sin\theta$、$\cos\theta$ 之值均為有理數

解

類題 5 已知 $45^\circ<\theta<50^\circ$，且設 $a=1-\cos^2\theta$，$b=\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$，$c=\dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$。關於 a、b、c 三個數值的大小，試選出正確的選項。______

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $b<a<c$

(D) $b<c<a$　(E) $c<a<b$

答對率 55%　109 指考甲

類題 6 方程式 $4x^2-5x+m=0$ 的兩根是直角三角形的兩銳角的正弦，試求 $m=$______。

範例 4　三角比的角度變換

角 A、B、C、D、E、F 均為有向角，已知 $A+B=180^\circ$，$B+C=90^\circ$，$C-D=180^\circ$，$D+E=0^\circ$，$E-F=270^\circ$，則：(1) $\sin A=$ ______ (2) $\cos A=$ ______。

(A) $\sin F$　(B) $\cos F$　(C) $\tan F$

(D) $-\sin F$　(E) $-\cos F$　(F) $-\tan F$

解

小小叮嚀

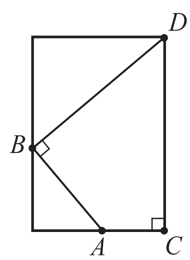
善用「餘角、補角、角變號、加減 180°」這四招

類題 7　設 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0° 與 360° 之間。已知 $|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\dfrac{1}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？______

(A) $\theta_1<45^\circ$　(B) $\theta_1+\theta_2=180^\circ$　(C) $\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$

(D) $\sin\theta_4=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(E) $\theta_4=\theta_3+90^\circ$

類題 8　如右圖，$\angle BAC=\theta$，$\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$，$\overline{AB}=a$，$\overline{BD}=b$，下列選項何者可以表示 $\overline{CD}$？______



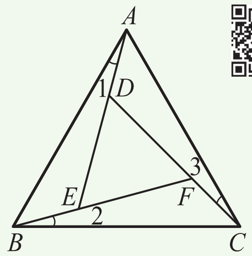
(A) $a\sin\theta+b\cos\theta$　(B) $a\sin\theta-b\cos\theta$

(C) $a\cos\theta-b\sin\theta$　(D) $a\cos\theta+b\sin\theta$

(E) $a\sin\theta+b\tan\theta$

範例 5 三角形的正弦定理　答對率28%　103 學測

如圖，正三角形 ABC 的邊長為 1，並且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 15^\circ$。已知 $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，則正三角形 DEF 的邊長為________。（化為最簡根式）

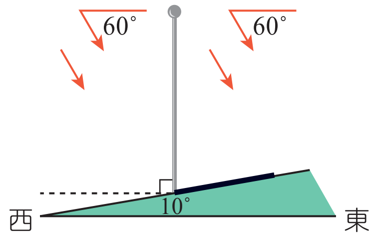


解

關鍵想法

分析 ΔABE，才是正確的方向，思緒不要被 ΔDEF 給牽著走

類題 9 在與水平面成 10° 的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿。當陽光從正西方以俯角 60° 平行投射在山坡上時，旗竿的影子長為 11 公尺，如右圖所示（其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）。請問旗竿的長度最接近以下哪一個選項？______（$\sin 10^\circ \approx 0.174$，$\sin 20^\circ \approx 0.342$，$\cos 10^\circ \approx 0.985$，$\cos 20^\circ \approx 0.940$，$\sqrt{3} \approx 1.732$）



(A) 19.1 公尺　(B) 19.8 公尺
(C) 20.7 公尺　(D) 21.1 公尺
(E) 21.7 公尺

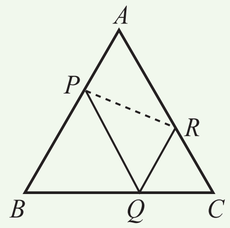
類題 10 在 ΔABC 中，已知 $\overline{BC} = 1$，$\sin A < \sin B$，$\sin A$ 與 $\sin B$ 為 $8x^2 - 4\sqrt{3}x + 1 = 0$ 的兩根，則 ΔABC 的外接圓半徑等於：______

(A) $\sqrt{3}-1$　(B) $2\sqrt{3}-1$　(C) $\sqrt{3}+1$　(D) $\sqrt{3}+2$　(E) $2\sqrt{3}+1$

範例 6 三角形的餘弦定理

答對率 46%　101 學測

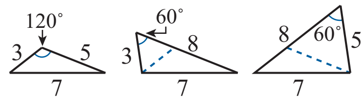
在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P、Q、R，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如右圖所示。若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$，則線段 PR 的長度為______。



解

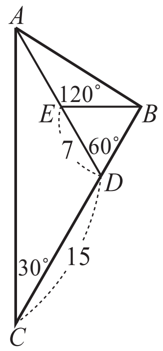
再想一想

如果同學能先記住

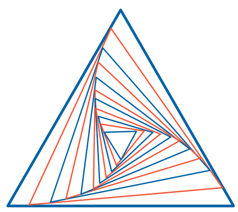


這一題可以直接猜答

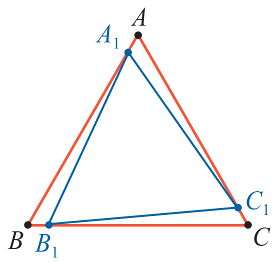
類題 11 如右圖（此為示意圖），在 ΔABC 中，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{BE}$ 交 $\overline{AD}$ 於 E 點，且 $\angle ACB=30^\circ$，$\angle EDB=60^\circ$，$\angle AEB=120^\circ$。若 $\overline{CD}=15$，$\overline{ED}=7$，則 $\overline{AB}=$______。　答對率 62%　108 學測



類題 12 右圖(一)是由 11 個正三角形形成，形成過程中內一層的正三角形頂點落在外一層三角形的邊上，且頂點的分點比例一定是 1：9，如右圖(二)所示，即 $\overline{AA_1}:\overline{A_1B}=\overline{BB_1}:\overline{B_1C}=\overline{CC_1}:\overline{C_1A}=1:9$。則 $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=$______。



圖(一)



圖(二)

範例 7 內對角互補的四邊形

答對率32% | 100 學測

四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=7$，且 $\angle DAB=\angle BCD=90^\circ$，則對角線 $\overline{AC}$ 長為________。

解

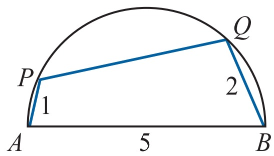
小小叮嚀

內對角互補的四邊形其實就是圓內接四邊形，是高二常見的餘弦定理應用問題

類題 13 圓內接四邊形 $ABCD$，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=2$，$\overline{DA}=3$，試求：

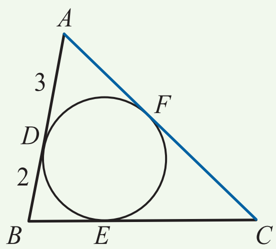
(1) $\overline{AC}=$________ (2)此四邊形面積為________ (3)此圓面積為________。

類題 14 右圖為直徑 $\overline{AB}=5$ 的半圓，P、Q 在圓周上，若 $\overline{AP}=1$，$\overline{BQ}=2$，則 $\overline{PQ}=$________。



範例 8 三角形的面積公式

如右圖，圓 O 內切於 ΔABC 中，切點分別為 D、E、F，且 $\overline{AD}=3$，$\overline{BD}=2$，內切圓半徑為 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，求 $\overline{AC}=$________。



解

6 三角比的定義及其性質

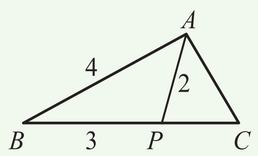
類題 15 四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=13$，$\overline{CD}=15$，$\overline{DA}=10$，又 $\angle A=120^\circ$，求四邊形 $ABCD$ 之面積為 ________。

類題 16 平面上有一箏形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{2}$，$\overline{AD}=\overline{CD}=2$，$\angle BAD=135^\circ$。則 $\overline{AC}=$ ________。（化為最簡根式）

答對率 35%　109 學測

範例 9　三角形的切割

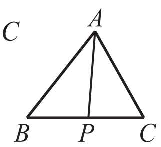
如右圖，$\overline{AP}$ 為 ΔABC 的內角平分線，若 $\overline{AP}=2$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BP}=3$，則 $\overline{AC}=$ ________。



解

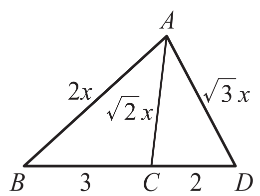
內分比性質

P 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AP}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，則 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{PC}$



類題 17 ΔABC 中，$\angle ABC=60^\circ$，$\angle ABC$ 的角平分線交 $\overline{AC}$ 於 D。已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{BD}=2\sqrt{3}$，則線段 $\overline{AC}$ 的長度為 ________。

類題 18 如右圖所示，求出 x 的值為 ________。



範例 10 決定三角形的條件

全對率 19%　105 學測

在 ΔABC 中，已知 $\angle A = 20^\circ$、$\overline{AB} = 5$、$\overline{BC} = 4$。請選出正確的選項。________

(A)可以確定 $\angle B$ 的餘弦值　(B)可以確定 $\angle C$ 的正弦值

(C)可以確定 ΔABC 的面積　(D)可以確定 ΔABC 的內切圓半徑

(E)可以確定 ΔABC 的外接圓半徑

解

概念強化

由 SSA 的條件可能得到 0 個、1 個或 2 個三角形，由作圖即可判定，也可用正餘弦定理來求解

類題 19 在 ΔABC 中，下列哪些選項的條件有可能成立？________

(A) $\sin A = \sin B = \sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 均小於 $\dfrac{1}{2}$

(C) $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 均大於 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\sin A = \sin B = \sin C = \dfrac{1}{2}$

(E) $\sin A = \sin B = \dfrac{1}{2}$，$\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

類題 20 在 ΔABC 中，已經知道 $\overline{AB} = 4$ 和 $\overline{AC} = 6$，此時尚不足以確定 ΔABC 的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件（例如：再知道 $\overline{BC}$ 的長度），就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。________

全對率 3%　110 學測

(A)如果再知道 $\cos A$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(B)如果再知道 $\cos B$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(C)如果再知道 $\cos C$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(D)如果再知道 ΔABC 的面積，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(E)如果再知道 ΔABC 的外接圓半徑，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

範例 11 用反三角表示角度

設 $0<k<1$，有 5 個角度用反三角表示：$\cos^{-1}k$、$\tan^{-1}k$、$\sin^{-1}(-k)$、$\cos^{-1}(-k)$、$\tan^{-1}(-k)$，請回答下列問題：

(1)這 5 個角度的終邊可能分布在哪些位置？________

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限　(E)坐標軸上

(2)這 5 個角度有兩個可能相同，請問是哪兩個？________

(A) $\cos^{-1}k$　(B) $\tan^{-1}k$　(C) $\sin^{-1}(-k)$　(D) $\cos^{-1}(-k)$　(E) $\tan^{-1}(-k)$

(3)這 5 個角度何者最大？______，何者最小？______

(A) $\cos^{-1}k$　(B) $\tan^{-1}k$　(C) $\sin^{-1}(-k)$　(D) $\cos^{-1}(-k)$　(E) $\tan^{-1}(-k)$

解

類題 21 請問下列各選項的敘述，哪些可找到 ΔABC 使得選項中的條件存在？________

(A) $\angle A=\sin^{-1}1$，$\angle B=\cos^{-1}1$　(B) $\angle A=\sin^{-1}1$，$\angle B=\tan^{-1}2$

(C) $\angle A=\cos^{-1}\dfrac{-1}{2}$，$\angle B=\tan^{-1}2$　(D) $\angle A=\cos^{-1}\dfrac{1}{3}$，$\angle B=\cos^{-1}\dfrac{-1}{4}$

(E) $\angle A=\cos^{-1}\dfrac{-1}{3}$，$\angle B=\cos^{-1}\dfrac{1}{4}$

類題 22 已知 ΔABC 的三邊長為 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=5$，其最大內角 $\angle A$ 恰為 120°，令 $\angle B=\cos^{-1}\dfrac{q}{p}$，$\angle C=\cos^{-1}\dfrac{s}{r}$，其中 p、q、r、s 為正整數且 $\dfrac{q}{p}$、$\dfrac{s}{r}$ 均為最簡分數，試問下列哪些選項的推論為真？________

(A) $p=r$　(B) $q\geq s$　(C) $|q-s|\geq 3$

(D) q 與 s 均為質數　(E) $\angle B$ 與 $\angle C$ 都小於 45°

範例 12 平面的三角測量

海面上有漁船發出求救訊號，此漁船在燈塔的南 θ 東方向，距離燈塔 15 海浬處，救難艦則位在燈塔的東 2θ 北的方向，距離燈塔 11 海浬處，若救難艦收到求救信號後立刻以每小時 10 海浬的速度趕赴漁船所在位置，已知 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，則該漁船必須等待幾分鐘才能得到救援？請選出最接近的選項。______

(A) 100 分鐘　(B) 110 分鐘　(C) 120 分鐘　(D) 130 分鐘　(E) 140 分鐘

解

類題 23 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10：00 熱氣球的仰角為 30°，到上午 10：10 仰角變成 34°。請利用下表判斷到上午 10：30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？______

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
$\sin\theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos\theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan\theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

(A) 39°　(B) 40°　(C) 41°　(D) 42°　(E) 43°

答對率 39%　102 學測

類題 24 地平面上有 A、B、C 三點，B 在 A 的東 20° 北方向，C 在 B 的西 20° 北的方向，A 在 C 的西 80° 南的方向，若 A 到 B 的距離是 1000 公尺，試求 A 到 C 的距離是______公尺。（整數以下四捨五入）

θ	10°	20°	30°	40°
$\sin\theta$	0.1736	0.3420	0.5000	0.6428
$\cos\theta$	0.9848	0.9397	0.8660	0.7660

範例 13　立體的三角測量

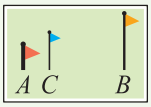
由地面上觀測點 O 測量立於 A、B、C 三處的旗桿仰角，測量結果如下：

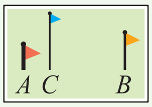
①點 A 位在 O 的正北方 15 呎處，由 O 測得 A 的旗桿頂端仰角為 $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}$

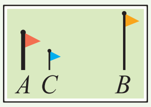
②點 B 位在 A 的正東方 20 呎處，由 O 測得 B 的旗桿頂端仰角為 $\cos^{-1}\dfrac{5}{13}$

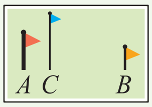
③點 C 位在 B 的正北方 33 呎處，由 O 測得 C 的旗桿頂端仰角為 $\tan^{-1}\dfrac{15}{26}$

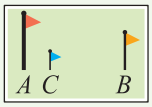
(1)在 O 點地面放置手機朝三個旗桿拍照，A 的旗桿在照片左邊，B 的旗桿在照片右邊，考慮照片中 C 旗桿與 A、B 的遠近，與三根旗桿呈現的高度（有可能因距離較近使短旗桿看起來比較長），請問所拍的照片最接近下列 12 張中的哪一張？______（請使用計算機，或利用 $\tan 22.6^\circ=\dfrac{5}{12}$，$\tan 53.1^\circ=\dfrac{4}{3}$）

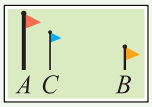
(A)


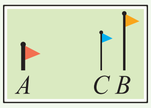
(B)


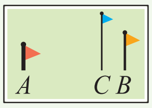
(C)


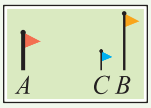
(D)


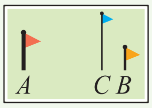
(E)


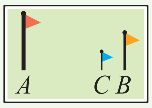
(F)


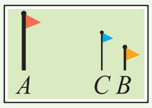
(G)


(H)


(I)


(J)


(K)


(L)


(2)若把三根旗桿擺在一起比較長度，則______旗桿最長，______旗桿最短。

解

類題 25　自地面一點觀測甲、乙兩棟大樓，甲大樓在西北方向距離 60 公尺處，乙大樓在東北方向距離 80 公尺處，且先測得甲大樓樓頂的仰角為 45°，再登上甲大樓的樓頂並從樓頂測得乙大樓的樓頂仰角為 60°，則乙大樓的高度為________公尺（$\sqrt{3}\approx 1.732$，整數以下四捨五入）

類題 26 老張從旗桿底 O 點的正西方 A 點測得桿頂 T 點的仰角為 30°。他向旗桿前進 30 公尺至 B 點，再測得桿頂的仰角為 60°，則：

(1)旗桿高為________公尺　(2) B 點與桿頂 T 點的距離為______公尺

(3)若由 B 點向 A 點走到 C 點，測得桿頂仰角 45°，則 $\overline{BC}=$____________公尺

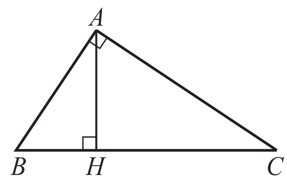
(4)若由 B 點向正南方走到 D 點，測得桿頂仰角 45°，則 $\overline{BD}=$________公尺

(5) $\tan\angle AOD=$______。

綜　合　實　力　測　驗

一 單選題

______ 1. 如右圖，ΔABC 為直角三角形，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{BC}=1$，則 $\overline{AH}=$？

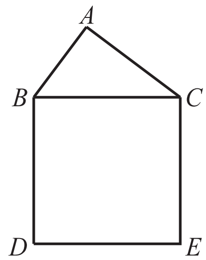


(A) $\sin^2 B$　(B) $\cos^2 B$　(C) $\tan B$　(D) $\sin B\cos B$　(E) $\sin B$

______ 2. 若 $a=\sin 1197^\circ$，$b=\cos 2134^\circ$，$c=\sin(-2405^\circ)$，則其大小次序為何？

(A) $a>b>c$　(B) $c>b>a$　(C) $a>c>b$　(D) $b>a>c$　(E) $c>a>b$

______ 3. 如右圖，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=4$ 且四邊形 $BDEC$ 為正方形，則 $\sin A+\cos(\angle ABD)+\sin(\angle ACE)=$？



(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{3}{5}$　(C) $\frac{4}{5}$　(D) 1　(E) $\frac{6}{5}$

______ 4. $0^\circ<\theta<180^\circ$，若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，則 $\cos\theta-\sin\theta=$？

(A) $-\frac{\sqrt{19}}{3}$　(B) $-\frac{4}{3}$　(C) $-\frac{\sqrt{14}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{14}}{3}$　(E) $\frac{\sqrt{19}}{3}$

二 多選題

______ 5. 設有向角 θ 以 x 軸正向為始邊，若終邊上有一點 $P(-5\sqrt{3},y)$，已知 $\tan\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$，則下列哪些選項正確？

(A) $y=10$　(B) $\sin\theta=\frac{-2\sqrt{7}}{7}$　(C) $\cos\theta=\frac{-\sqrt{21}}{7}$

(D) $\sin(\theta-270^\circ)=\frac{\sqrt{21}}{7}$　(E) $\tan(90^\circ-\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6 三角比的定義及其性質

______ 6. 下列哪些選項正確？

(A)若 $\sin\alpha=\sin\beta$，則 α 與 β 為同界角

(B) θ 是第三象限角，則 $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

(C) ΔABC 中，$\sin A+\sin B>\sin(A+B)$

(D) ΔABC 中，$\angle A<\angle B$，則 $\sin A<\sin B$

(E) ΔABC 中，若 $b=1$，$c=\sqrt{2}$，$\angle B=30^\circ$，則 $\angle C=45^\circ$

______ 7. 已知 ΔABC 中 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}=8:7:5$，且 ΔABC 外接圓半徑為 7，則下列哪些選項正確？

(A) $\sin A:\sin B:\sin C=8:7:5$　(B) $\cos C=\dfrac{1}{7}$

(C) $\overline{AB}$ 小於 16　(D) ΔABC 面積為 180

(E) ΔABC 的內切圓半徑大於 4

______ 8. 已知兩點 $A(1,-2)$、$B(\sqrt{3},0)$ 在直線 $L: ax-y-1=0$ 的異側，設直線 L 的斜角為 θ，則下列哪些選項正確？

(A) $a<-1$ 或 $a>\sqrt{3}$　(B) $-1<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

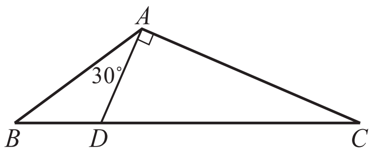
(C) $30^\circ<\theta<135^\circ$　(D) $-90^\circ<\theta<-45^\circ$ 或 $30^\circ<\theta\le 90^\circ$

(E) $-45^\circ<\theta<30^\circ$

三 填充題

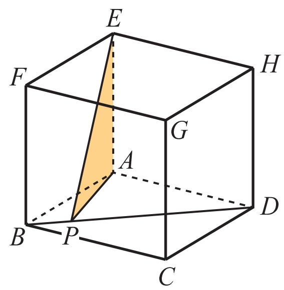
9. 等腰三角形 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\overline{CD}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 D 點，若 $\overline{BD}=5$，$\overline{BC}=13$，則 $\sin\angle ACD=$ ______ 。

10. 如右圖 ΔABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 上一點且 $\angle BAD=30^\circ$，$\angle CAD=90^\circ$，已知 $\overline{AB}=8$，$\overline{AD}=3\sqrt{3}$，則 ΔABD 與 ΔABC 面積的比值為 ______ 。



11. 圓內接四邊形 $ABCD$，已知 $\angle BAC=60^\circ$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=2$，則 $\sin\angle CAD=$ ______ 。

12. 如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=4$，$\overline{AE}=4$，點 P 在 $\overline{BD}$ 上，取 $\overline{BP}:\overline{PD}=1:4$，若 $\angle APE=\tan^{-1}k$，則 k 值為 ______ 。



四 素養導向試題

13. 漁船甲位於某島嶼 A 的南偏西 60° 方向的 B 處，且與島嶼 A 相距 6 海浬，漁船乙以每小時 5 海浬的速度從島嶼 A 沿正北方向航行，若漁船甲也同時從 B 處沿北偏東 θ 度的方向追趕漁船乙，剛好 2 小時追上，則：

(1)漁船甲的速度為 ______ 浬／小時　(2) $\sin\theta$ 的值為 ______ 。