2 直線與圓

學測趨勢 「點、直線、圓」是坐標平面上的基本圖形，結合算式之後，提供命題老師大量的靈感，處理的工具還可加上三角及向量，題目的設計、變化及解法相當地豐富。

準備方向 「畫圖」可以幫助理解題意，閱讀題目時可以先畫草圖，若有需要再畫精確圖形，並儘量聯想可能會用到的觀念，請同學見招拆招。

年　度	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
學測命題數	1	1	2	1	2	1	1	1	2	1

一、坐標平面與直線方程式

★★★★

❶ 點的移動與對稱

(1)**點的平移**：平面上點 (a,b) 向右平移 p 單位再向上平移 q 單位，所得的新坐標為 $(a+p,b+q)$。

(2)**特殊的對稱**：已知點 (a,b)，則：

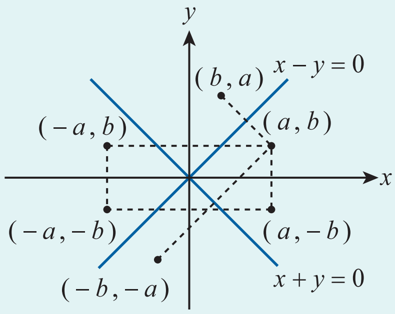
①對 x 軸的對稱點為 $(a,-b)$。

②對 y 軸的對稱點為 $(-a,b)$。

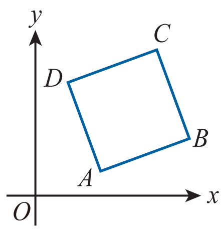
③對原點的對稱點為 $(-a,-b)$。

④對直線 $x-y=0$ 的對稱點為 (b,a)。

⑤對直線 $x+y=0$ 的對稱點為 $(-b,-a)$。



例 A 正方形 $ABCD$ 如右圖，已知 $A(5,1)$、$B(12,4)$，求 C 坐標為__________，D 坐標為__________。



例 B 設 p、q 為相異正數，點 $A(p,q)$ 對 x 軸的對稱點為 B，A 點對 y 軸的對稱點為 C，A 點對 $x-y=0$ 的對稱點為 D，請用 p、q 表示 ΔABC 的面積為__________，ΔBCD 的面積為__________。

例 C 坐標平面上點 $A(1,2)$ 到直線 L 的垂足是 $D(3,2)$。問 A 對於 L 的對稱點是下列哪一點？______

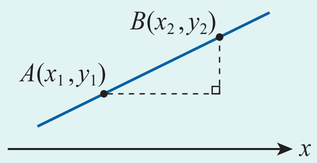
(A) $(-2,0)$　(B) $(-1,2)$　(C) $(2,0)$　(D) $(2,2)$　(E) $(5,2)$

讀完可以先練習範例 1

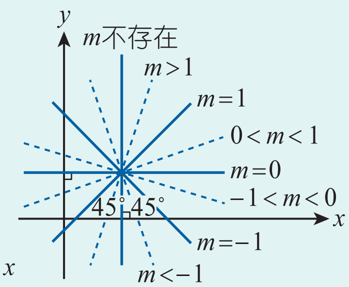
★★★★

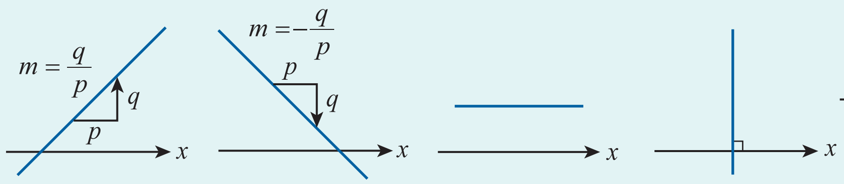
❷ 斜率的定義、求法與概念

(1) 設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，且 $x_1 \neq x_2$，則稱 $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜率，代表該直線在坐標平面上的傾斜程度。



(2) 斜率為 m，若 $|m|$ 愈大則直線愈接近鉛直，$|m|$ 愈小則直線愈接近水平。





往右上，$m>0$　往右下，$m<0$　水平，$m=0$　鉛直，m不存在

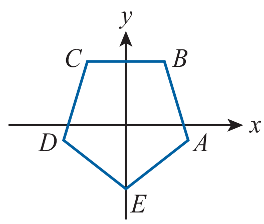
(3) 坐標平面上，點 A 向右移 p 再向上移 q 到達 B 點，則 $m_{AB}=\dfrac{q}{p}$，所以

① 直線 $y=mx+k$ 的斜率即為 m，且直線的 y 截距為 k，即通過點 $(0,k)$。

② 直線 $ax+by=c$，$b\neq 0$，可移項成 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$，斜率即為 $-\dfrac{a}{b}$。

例 A 坐標平面上有正五邊形 $ABCDE$，如右圖。五個邊長中，何者的斜率最大？______何者的斜率最小？______

(A) $\overline{AB}$　(B) $\overline{BC}$　(C) $\overline{CD}$　(D) $\overline{DE}$　(E) $\overline{EA}$



例 B (1) 已知 $\overline{AB}$ 斜率為 2，若 $A(3,7)$、$B(-1,x)$，則 $x=$______。

(2) 由 A 向右移 5，再向上移 y 到達 B 點，若 $\overline{AB}$ 的斜率為 2，則 $y=$______。

(3) 設直線方程式為 $kx+(k-6)y=1$ 的斜率為 2，求 $k=$______。

例 C 坐標平面上兩直線之斜率分別為 $\sqrt{3}$ 與 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，則下列何者為其一交角？______

(A) $30°$　(B) $36°$　(C) $45°$　(D) $60°$　(E) $90°$

例 D 設 $A(1,1)$、$B(3,5)$、$C(5,3)$、$D(0,-7)$、$E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 各恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為 ______。

答對率 39%　101 學測

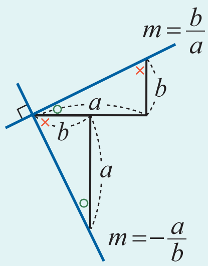
讀完可以先練習範例 2、3

★★★★

❸ 斜率的應用：已知相異兩直線 L_1 與 L_2 的斜率均存在（即均非鉛直線），則：

(1) L_1 與 L_2 平行 $\Leftrightarrow$ 斜率相等。

(2) L_1 與 L_2 垂直 $\Leftrightarrow$ 斜率的乘積為 -1。所以兩直線 $ax+by=p$ 與 $bx-ay=q$ 互相垂直。



例 A 三點 $P(1,a)$、$Q(2,a+3)$、$R(-1,5)$，若：

(1)在同一直線上，則 $a=$ ______　　(2) $\angle PQR=90^\circ$，則 $a=$ ______。

例 B 若 $3x+2y=5$ 與 $y=mx+7$ 互相垂直，則 $m=$ ______。

例 C 下列各選項的三個數字代表三條直線的斜率，請問哪些選項的三直線可能圍成直角三角形？______

(A) $1,2,-3$　(B) $5,3,\frac{1}{3}$　(C) $2,5,-\frac{1}{2}$　(D) $-\frac{1}{3},3,3$　(E) $0,5$,不存在

例 D 過點 $(3,4)$ 且與直線 L：$2x-5y=7$ 垂直的直線方程式為 ______。

讀完可以先練習範例 4、5、6

★★★★

❹ 直線方程式：平面上的直線可用二元一次方程式表示，依所給條件可表示為：

(1)**點斜式**：平面上過點 (a,b)，斜率為 m 的直線方程式為 $y-b=m(x-a)$。

(2)**截距式**：平面上直線 L 過 x 軸的截距為 a，過 y 軸的截距為 b，即過 $(a,0)$、$(0,b)$ 兩點，若 $ab\neq 0$，則方程式可寫為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$。可推廣到空間中的平面。

例 A 已知 $A(3,4)$、$B(-5,2)$，則：(1) $\overline{AB}$ 方程式為 ______。

(2) $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式為 ______。

2 直線與圓

例 B 坐標平面上直線 L 與 x 軸交於 $(-k,0)$，與 y 軸交於 $(0,2k)$，且點 $(9,8)$ 在 L 上，求 $k=$ ______ 。

例 C 坐標平面上有兩條平行直線。它們的 x 截距相差 20，y 截距相差 15。則這兩條平行直線的距離為 ______ 。

★★★★

❺ 兩直線的關係：平面上直線 $L_1：a_1x+b_1y=c_1$ 與 $L_2：a_2x+b_2y=c_2$，則：

(1) $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ $\Rightarrow$ 兩線**相交於一點**，可解聯立求交點坐標。

(2) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ $\Rightarrow$ 兩線**平行**不相交。

(3) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ $\Rightarrow$ 兩線**重合**。

以上情形可用二階行列式描述，請見《對話式數學 3A－4A 冊學測複習講義》。

例 A 平面上直線 $L：2x+6y=4$，請問：(1)下列哪一個選項的直線與 L 相平行？______
(2)下列哪一個選項的直線與 L 相垂直？______

(A) $3x-9y=1$　(B) $3x-y=1$　(C) $x+3y=1$　(D) $3x+9y=6$

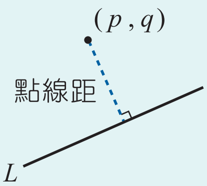
例 B 直線 $ax+y=2$ 與 $4x-3y=b$ 重合，求數對 $(a,b)=$ ______ 。

讀完可以先練習範例 7

★★★★

❻ 距離公式

(1)**點到直線的距離公式**：點 (p,q) 到直線 $L：ax+by=c$ 的最近距離為 $\dfrac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。即點 (p,q) 與投影點的連線段長度。



(2)**兩平行直線的距離公式**：兩平行直線 $L_1：ax+by=c_1$ 與 $L_2：ax+by=c_2$ 的距離為 $\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

例 A 點 $(2,k)$ 到直線 $3x-4y=1$ 的距離為 3，求 $k=$ ______ 。

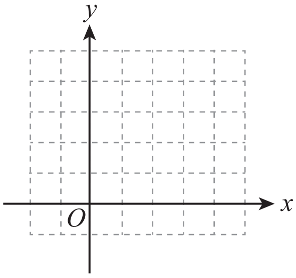
例 B 坐標平面上兩平行線 L_1：$5x+12y=3$ 與 L_2：$10x+24y=17$ 的距離為______。

讀完可以先練習範例 8 ★★★★

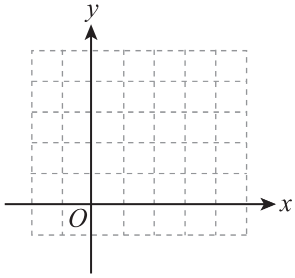
⑦ 二元一次不等式：$ax+by=c$ 為平面上的直線，若 $a>0$，則滿足 $ax+by>c$ 的點 (x,y) 為直線的右半平面，滿足 $ax+by<c$ 的點 (x,y) 為直線的左半平面。方程式、不等式的聯立表示取交點部分（即交集），常用聯立的二元一次不等式表示平面上的多邊形及其內部區域。

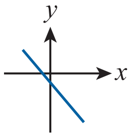
例 A 作圖：(1) $2x+3y\le 6$　　(2) $\begin{cases}2x+3y>6\\ x-y<1\end{cases}$

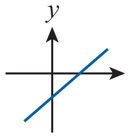
(1)



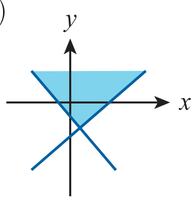
(2)

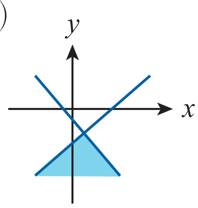


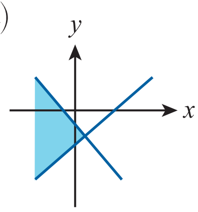
例 B 設 $a>0$ 且 $p<0$，$ax+by=c$ 圖形為 

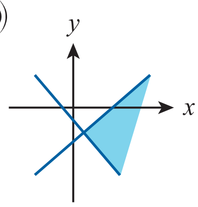
，$px+qy=r$ 圖形為 

，則 $\begin{cases}ax+by\ge c\\ px+qy\le r\end{cases}$ 的圖形為下列哪一個選項？______

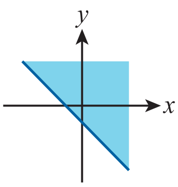
(A)


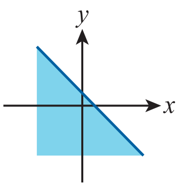
(B)


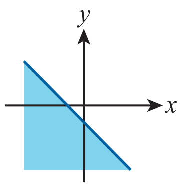
(C)


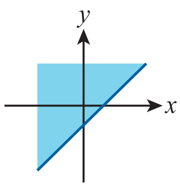
(D)


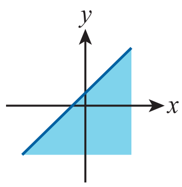
例 C 不等式 $ax+by\ge c$ 的圖形為下列哪一個選項，可使實數 a、b、c 均小於 0？______

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


例 D 坐標平面上，直線 $y=2x$ 與直線 $y=-3x+5$ 將坐標平面分割成四個區域。試問下列哪一個選項中的點會和點 $(1,1)$ 在同一個區域？______

(A) $(20,-56)$　(B) $(13,-33)$　(C) $(-1,1)$　(D) $(-15,-29)$　(E) $(-20,-29)$

二、圓方程式

★★★★

8 圓標準式：坐標平面上，以 (p,q) 為圓心、r 為半徑決定一個圓，由距離公式可知圓上任一點 (x,y) 滿足二元二次方程式 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$。

例A 圓心 $(1,-3)$ 且半徑為 4 的圓方程式為 ＿＿＿＿＿＿＿＿。

例B 坐標平面上兩圖形 Γ_1、Γ_2 的方程式分別為：$\Gamma_1:(x+1)^2+y^2=1$、$\Gamma_2:(x+y)^2=1$。請問 Γ_1、Γ_2 共有幾個交點？＿＿＿

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個　(E) 0 個　　答對率 54%　105 學測

例C 在坐標平面上，下列五組條件中，哪幾組恰可決定一圓？＿＿＿＿

(A)過三點 $(1,-3)$、$(2,6)$、$(4,24)$

(B)以 $(1,0)$ 與 $(3,4)$ 為一直徑的兩端點

(C)過四點 $(1,0)$、$(-1,0)$、$(0,1)$ 與 $(0,-1)$

(D)圓心為 $(-1,2)$ 且與 x 軸、y 軸都相切

(E)與直線 $x+y-1=0$、x 軸、y 軸都相切

讀完可以先練習範例 9、10、11

★★★★

9 圓一般式：二元二次方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的圖形若為平面上的圓，則必為 $a=c$ 且 $b=0$，稱為一般式。其圖形可能退化成一點或無圖形。

例A 若 $x^2+y^2+6x-4y+k=0$ 為一點，則 $k=$ ＿＿＿。

例B $x^2+pxy+qy^2+4x-6y-5=0$ 為圓，則 $p=$ ＿＿＿，$q=$ ＿＿＿，圓心為 ＿＿＿＿＿＿，半徑為 ＿＿＿＿。

例C 在坐標平面上，以 $(1,1)$、$(-1,1)$、$(-1,-1)$ 及 $(1,-1)$ 等四個點為頂點的正方形，與圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 有幾個交點？＿＿＿

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個　(E) 0 個　　答對率 73%　103 學測

★★★★

⑩ **阿波羅尼斯圓**：給定平面上相異兩點 A、B 及正數 k，已知點 P 到 A、B 兩點的距離比值為 k，即 $\overline{PA}=k\overline{PB}$，若：

(1) $k=1$，P 點的軌跡圖形是 $\overline{AB}$ 的中垂線。

(2) $k\neq 1$，P 點的軌跡圖形是一圓（阿波羅尼斯圓）。

例A 已知兩點 $A(0,1)$、$B(1,0)$ 且 P 為平面上的動點：

(1)若 $\overline{PA}=\overline{PB}$，則點 P 的軌跡方程式為__________。

(2)若 $\overline{PA}=2\overline{PB}$，則點 P 的軌跡方程式為________________。

★★★★

⑪ **直線與圓的平移**：設平面上圖形的方程式為 $f(x,y)=0$，則往右平移 h 單位再往上平移 k 單位（若 h、k 為負值，則方向相反）的圖形方程式為 $f(x-h,y-k)=0$。如直線 $ax+by=c$ 向右移 h 單位再向上移 k 單位，方程式為 $a(x-h)+b(y-k)=c$。圓 $x^2+y^2=r^2$ 向右移 h 單位再向上移 k 單位，方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，圓心由 $(0,0)$ 變成 (h,k)。

例A 直線 L：$3x+5y=1$ 向右平移 4 單位再向下平移 7 單位，所成圖形的方程式為______________。

例B 圓 $x^2+y^2-6x+4y+1=0$ 向左移 h 單位再向上移 k 單位，所成圖形的方程式為 $x^2+y^2+2x-10y+p=0$，請問序組 $(h,k,p)=$____________。

讀完可以先練習範例 12 ★★★★

⑫ **圓內與圓外**：已知圓方程式為 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$，則：

(1)點 (x,y) 在圓內 $\Leftrightarrow$ 點 (x,y) 滿足 $(x-p)^2+(y-q)^2<r^2$。

(2)點 (x,y) 在圓外 $\Leftrightarrow$ 點 (x,y) 滿足 $(x-p)^2+(y-q)^2>r^2$。

例A 若點 $(a,-a)$ 在圓 $x^2+y^2+3x=0$ 的內部，則 a 的範圍為____________。

例B 滿足 $4\leq x^2+y^2\leq 10$ 的點 (x,y) 所成區域面積為______。

★★★★

⑬ **半圓的方程式**：把圓方程式移項開根號，例如由 $x^2+y^2=r^2$ 可得上、下半圓的方程式為 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，左、右半圓的方程式為 $x=\pm\sqrt{r^2-y^2}$。

例 A　函數 $y=\sqrt{9-(x-1)^2}+5$ 的圖形在一個圓上，則圓心為________，半徑為_____。

例 B　坐標平面上，方程式 $y=\sqrt{8-x^2}$ 與直線 $x+y=k$ 只有一個交點，且此交點位在第一象限，請問此交點坐標為________，$k=$_____。

★★★★

⑭ **圓與直線的關係**

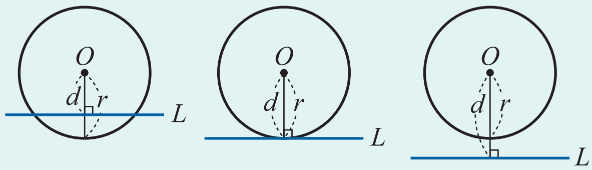
(1)**代數法**：利用直線與圓的聯立方程式消去 x 或 y 得到一元二次方程式，此方程式的判別式 D：① $D>0$ ⇔ 相交　② $D=0$ ⇔ 相切　③ $D<0$ ⇔ 相離。

(2)**幾何法**：設圓的半徑為 r，圓心到直線的距離為 d，則：

① $d<r$ ⇔ 直線與圓相交於兩點。

② $d=r$ ⇔ 直線與圓相切於一點。

③ $d>r$ ⇔ 直線與圓沒有交點。



例 A　圓 $x^2+y^2+kx-3ky+k+4=0$ 與直線 $x-y=0$：

(1)若相切，求 $k=$________。

(2)若相切且 k 為正數，求切點坐標為________。

例 B　圓 $x^2+y^2=9$ 與直線 $3x+4y=k$ 相切，則 $k=$_______。

例 C　圓 $x^2+y^2=9$ 與直線 $3x+4y=5$ 交於 P、Q 兩點，則弦長 $\overline{PQ}=$_______。

讀完可以先練習範例 13、14

★★★★

⑮ **圓的切線段長與切線**

(1)由畢氏定理可求圓外一點對圓所做的切線段長度。

(2)**過圓上一點 $P(x_0,y_0)$ 的切線方程式**：先求切點與圓心連線的斜率為 m，再由垂直關係求得切線斜率為 $-\dfrac{1}{m}$，則利用點斜式即可求出切線方程式。

(3)**過圓外一點 $P(x_0,y_0)$ 的切線方程式**：設切線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$，由「圓心到切線的距離等於半徑」求出 m。若 m 只有一解，則另一條切線為鉛直線。

例 A 點 $A(7,-2)$ 對圓 $(x-3)^2+(y+4)^2=5$ 所作的切線段長度為 ______ 。

例 B 點 $A(3,1)$ 在圓 $(x+2)^2+(y-5)^2=41$ 上，求過 A 點所作圓的切線方程式為 ______ 。

範例 1 點的移動與最小距離和

坐標平面上，直線 $L：x+y=8$，A 點對 L 的投影點及對稱點依序為 A_0、A'，設 A_0 的橫坐標為 3，且 A 點向右移動 12 單位恰落在 L 上。請問：

(1) A 點往右移 12 單位長到達 L，應再如何移動才能到達 A'？______

(2) A 及 A' 的坐標為何？______

(3)已知點 $B(-6,3)$ 與 A 點在 L 的同側，動點 P 在 L 上移動，請問 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 的距離和最小值為何？______

解

類題 1 坐標平面上，正方形 $ABCD$ 的中心點為 $P(7,9)$，已知 P 點向右移 2 單位長再向上移 5 單位長恰到達 A 點，B 點位於 A 點左下方，請問：

(1)四個頂點的坐標為何？______

(2)此正方形的四個邊共有兩個斜率值，其正的斜率值為 ______ 。

(3)將此正方形在坐標平面中任意平移，但不可轉動，下列哪些選項的情形有可能發生？______

(A)四個頂點恰落在四個象限，每個象限有一個頂點

(B)四個頂點恰有兩個在第一象限，兩個在第三象限

(C)四個頂點恰有兩個在第一象限，兩個在第四象限

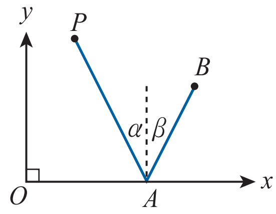
(D)四個頂點恰有兩個在坐標軸上

(E)四個頂點恰有三個在坐標軸上

類題 2 如右圖，球從坐標平面上點 $P(2,6)$ 打出，碰到檯邊 A 點，再折向撞擊到 B 球，已知 B 球的坐標為 $(7,4)$，則：

(1) A 點坐標為________。

(2)該球所行的距離為 $\overline{PA}+\overline{AB}=$________。

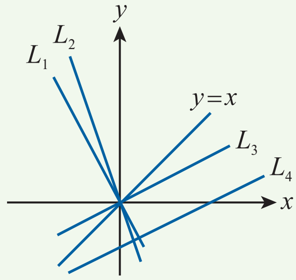


範例 2 由圖形判斷斜率

坐標平面上四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4 與 x 軸、y 軸及直線 $y=x$ 的相關位置如右圖所示，其中 L_1 與 L_3 垂直，而 L_3 與 L_4 平行。設 L_1、L_2、L_3、L_4 的方程式分別為 $y=m_1x$，$y=m_2x$，$y=m_3x$ 以及 $y=m_4x+c$。試問下列哪些選項是正確的？________

(A) $m_3>m_2>m_1$　(B) $m_1\cdot m_4=-1$　(C) $m_1<-1$

(D) $m_2\cdot m_3<-1$　(E) $c>0$



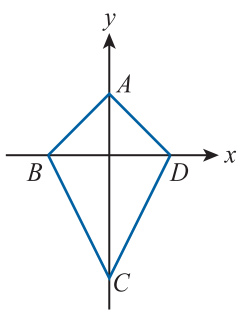
解

類題 3 如右圖所示，坐標平面上一鳶形 $ABCD$，其中 A、C 在 y 軸上，B、D 在 x 軸上，且 $\overline{AB}=\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=\overline{CD}=4$，$\overline{AC}=5$。令 m_{AB}、m_{BC}、m_{CD}、m_{DA} 分別表直線 AB、BC、CD、DA 之斜率。試問以下哪些敘述成立？________

(A)此四數值中以 m_{AB} 為最大　(B)此四數值中以 m_{BC} 為最小

(C) $m_{BC}=-m_{CD}$　(D) $m_{AB}\times m_{BC}=-1$

(E) $m_{CD}+m_{DA}>0$



類題 4 平面上有一個直角三角形，三邊的斜率為 m_1、m_2、m_3，若 $m_1>m_2>m_3$。則下列選項哪些必定為真？________

(A) $m_1m_2=-1$　(B) $m_1m_3=-1$　(C) $m_1>0$

(D) $m_2\leq 0$　(E) $m_3<0$

2 直線與圓

範例 3　由斜率判斷圖形

在坐標平面中，下列三直線 L_1：$103x+101y-101^2=0$、L_2：$103x-101y+101^2=0$ 與 L_3：$y+2=0$，所圍成的三角形為哪種三角形？________

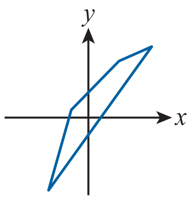
(A)鈍角三角形　(B)直角三角形　(C)銳角三角形　(D)等邊三角形　(E)等腰三角形

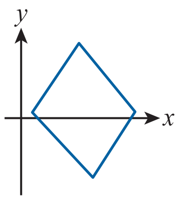
解

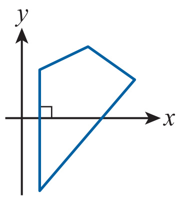
小小叮嚀

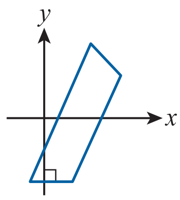
角度的估計與比較，是這一題的關鍵

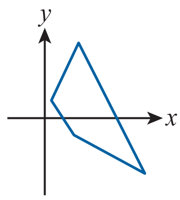
類題 5　坐標平面上有四邊形 $ABCD$，若四個邊長的斜率乘積為負數，則此四邊形的圖形可為下列哪一個選項？________

(A)


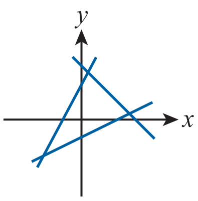
(B)


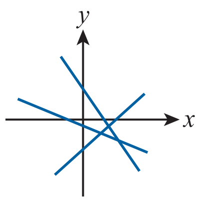
(C)


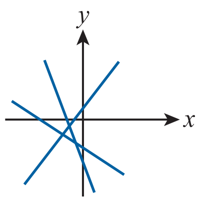
(D)


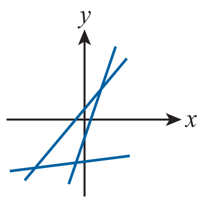
(E)


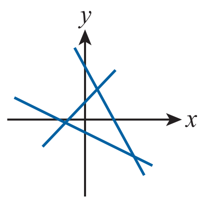
類題 6　平面上三直線 L_1：$y=ax+p$，L_2：$y=bx+q$，L_3：$y=cx+r$，已知 $abc>0$，$pqr<0$，則三直線所成的圖形應為下列哪一個選項？________

(A)


(B)


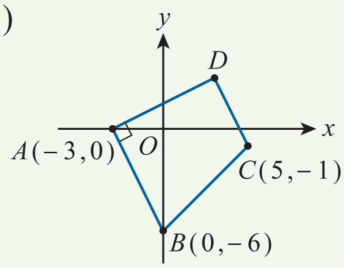
(C)


(D)


(E)


範例 4　點斜式

如右圖，$ABCD$ 為梯形，$\overline{AD}\perp\overline{AB}$，已知三頂點為 $A(-3,0)$、$B(0,-6)$、$C(5,-1)$，求頂點 D 之坐標為________。



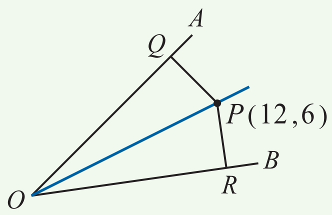
解

類題 7 坐標平面上有一個菱形 $ABCD$，若 $A(1,1)$，$\overleftrightarrow{AB}$ 方程式為 $4x-3y-1=0$，中心為 $M(5,3)$，則此菱形面積為______。

類題 8 平面上直線 L_1 過 $A(4,5)$，L_2 過 $B(7,-1)$，L_1 與 L_2 交於 P 點，且 L_1 的斜率比 L_2 的斜率多 1，若 $\angle ABP=90^\circ$，則 P 坐標為______。

範例 5 對一般直線求投影點與對稱點

坐標平面上，O 為原點，點 $P(12,6)$ 在 $\angle AOB$ 的角平分線上，$\overleftrightarrow{OA}$ 方程式為 $x-y=0$，P 投影到 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的垂足點依序為 Q、R，如右圖。試求出 Q 坐標為______，R 坐標為______。



解

小小叮嚀
其實 $\overleftrightarrow{OP}$ 就是 $\overline{QR}$ 的垂直平分線

類題 9 點 $(2,p)$ 對直線 $3x-y=q$ 的對稱點為 $(8,-3)$，則 $p=$______，$q=$______。

類題 10 平面上有點 $A(7,1)$ 及直線 L：$5x-2y=4$，請找 B 點，使 A、B 在 L 的同側，滿足 $\overleftrightarrow{AB}\perp L$ 且 A 到 B 的距離與 A 到 L 的距離相等，則 B 坐標為______。

範例 6 **截距式**

設 n、k 為正整數，坐標平面上通過兩點 $A(n,0)$ 與 $B(0,2)$ 的直線亦通過點 $P(12,-k)$，請回答下列問題：

(1)數對 (n,k) 共有幾組解？______

(A) 2 組　(B) 4 組　(C) 6 組　(D) 8 組　(E)無限多組

(2)關於數對 (n,k) 的敘述，下列哪些正確？______

(A) n 值愈大，則 k 值會愈小

(B) n 與 k 不會相等

(C) n 與 k 不可均為奇數

(D) n 與 k 不可均為偶數

(E) n 與 k 都可以是 1

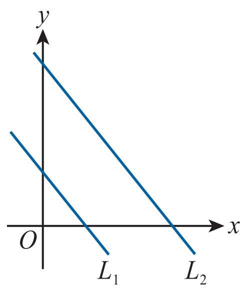
(3) $n+k$ 的最大值為______。

解

考情分析

此題由 96 年學測單選題修改，採卷卡合一的混合題形態命題

類題 11 平面上兩平行線如右圖，若 L_2 的 x 截距是 L_1 的 x 截距之 3 倍，L_2 的 y 截距比 L_1 的 y 截距多 10，且 L_1、L_2 與兩坐標軸所圍成的梯形面積為 80，求 L_1 的方程式為______。



類題 12 設 a、b 為相異正數，坐標平面上直線 L_1：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 與 L_2：$\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1$，請問下列各選項的推論哪些正確？______

(A) L_1 與 L_2 必相交於一點　(B) L_1 與 L_2 的斜率乘積為 -1

(C)原點到 L_1 與 L_2 的距離相等　(D) $x-y=0$ 是 L_1 與 L_2 的銳角平分線

(E)已知圓 C_1：$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$，圓 C_2：$(x-q)^2+(y-p)^2=r^2$，若 C_1 與 L_1 交於兩點，則 C_2 與 L_2 也交於兩點

範例 7	點線距公式	答對率 22%	106 學測

地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為______公尺。

解

小小叮嚀

1.平行線間距公式不用背，用「點線距」即可

2.此題可用特例求解，如用 1 秒及 7 秒的位置來解

類題 13 坐標平面上，點 $P(2k,1)$ 到直線 $L：x+ky=5$ 的最近距離為 $\sqrt{2}$，求實數 k 之值為______。（兩解）

類題 14 已知直線 $L：3x+4y=12$，$P(2,6)$、$O(0,0)$，點 P 在 L 上之投影為 A 點，點 O 在 L 上之投影為 B 點，$\overline{OP}$ 與 L 交點為 M，則：

(1) $\overline{AM}：\overline{MB}=$______　(2) $\overline{AB}=$______。

範例 8	二元一次不等式的圖形	答對率 31%	105 學測

設 a 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式 $\begin{cases} x-3y\le a \\ x+2y\le 14 \end{cases}$ 的所有點所形成之區域面積為 $\dfrac{213}{5}$ 平方單位，則 $a=$______。

解

複習一下

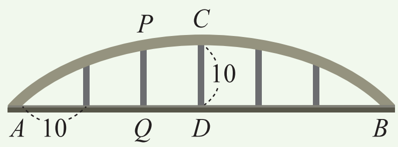
點 P 向右移 h 再向上移 k 到達 Q 點，則 $\overline{PQ}$ 的斜率為 $\dfrac{k}{h}$

類題 15 設 S 為坐標平面上直線 $2x+y=10$ 被平行線 $x-2y+15=0$ 與 $x-2y=0$ 所截的線段（含端點）。若直線 $3x-y=k$ 與 S 有交點，則 k 的最大可能範圍為 $a\le k\le b$，求數對 $(a,b)=$ ________。

類題 16 設 a、b 為實數。已知坐標平面上滿足聯立不等式 $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x+y\le 6 \\ 2x-y\ge 0 \\ y\ge ax-b \end{cases}$ 的區域是一個菱形。試求：(1)此菱形邊長為 ________ (2) $a=$ ______，$b=$ ________。 100 指考乙

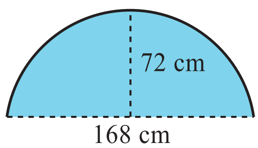
範例 9 畢氏定理在圓的應用

一圓弧形拱橋，如右圖，共有五根垂直支柱，已知相鄰支柱間距離皆為 10 公尺，A、B 兩點與支柱間距離也是 10 公尺，又正中央支柱 $\overline{CD}=10$ 公尺，則圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所在之圓的半徑為 ______ 公尺，$\overline{CD}$ 左方相鄰支柱 $\overline{PQ}$ 長為 ________ 公尺。

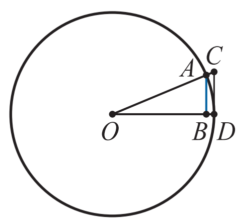


解

類題 17 工匠在窗子外邊想做一個圓弧型的花臺，此花臺在窗口的中央往外伸 72 公分，窗口的寬度是 168 公分。則此圓弧的圓半徑為 ______ 公分。



類題 18 設圓 O 之半徑為 24，$\overline{OC}=26$，$\overline{OC}$ 交圓 O 於 A 點，$\overline{CD}$ 切圓 O 於 D 點，B 為 A 點到 $\overline{OD}$ 的垂足，如右邊的示意圖。則 $\overline{AB}=$ ______ 。（化為最簡分數） 答對率 64% 103 學測



2 直線與圓

範例 10 圓上動點到定點或直線的距離

坐標平面上的圓 $(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有______個點與原點的距離正好是整數值。

解

小小叮嚀

1.重點在於「估計」圓心到原點的距離

2.即圓上有幾個點使得 $\sqrt{x^2+y^2}$ 為整數

類題 19 點 $A(1,0)$ 在單位圓 $\Gamma: x^2+y^2=1$ 上。試問：Γ 上除了 A 點以外，還有幾個點到直線 $L: y=2x$ 的距離，等於 A 點到 L 的距離？______

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個　(E) 0 個　答對率 53%　108 學測

類題 20 設 $\Gamma: x^2+y^2-10x+9=0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？______

(A) Γ 的圓心坐標為 $(5,0)$

(B) Γ 上的點與直線 $L: 3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4

(C)直線 $L_1: 3x+4y+15=0$ 與 Γ 相切

(D) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x+4y=0$ 的距離等於 2

(E) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x+4y-5=0$ 的距離等於 2

範例 11 給條件求圓方程式

圓過 $A(0,2)$、$B(4,10)$ 且與 x 軸正向相切，則此圓的方程式為______。

解

類題 21 已知圓 C 在直線 $L: x-2y-5=0$ 上之投影長為 $2\sqrt{5}$，且圓 C 上與直線 L 相距最遠的點為 $P(-3,6)$，則此圓方程式為 ________。

類題 22 若圓 C 通過點 $A(4,2)$ 及點 $B(1,-5)$，且其圓心在直線 $L: x-3y-7=0$ 上，則圓 C 的方程式為 ________。

範例 12 根據條件進行推論

全對率 9%　108 指考甲

設 Γ 為坐標平面上通過 $(7,0)$ 與 $(0,\frac{7}{2})$ 兩點的圓。試選出正確的選項。________

(A) Γ 的半徑大於或等於 5
(B)當 Γ 的半徑達到最小可能值時，Γ 通過原點
(C) Γ 與直線 $x+2y=6$ 有交點
(D) Γ 的圓心不可能在第四象限
(E)若 Γ 的圓心在第三象限，則 Γ 的半徑大於 8

解

類題 23 在坐標平面上，下列哪些條件恰可決定一圓？________
(A)過 $(1,1)$ 與 $(-1,1)$ 且圓心在 x 軸上
(B)過 $(1,1)$ 與 $(-1,1)$ 且圓心在 y 軸上
(C)過 $(3,4)$ 且與 x 軸、y 軸都相切
(D)與 x 軸、y 軸都相切且圓心在 $x+y=2$ 上
(E)與 x 軸、y 軸都相切且圓心在 $2x+y=3$ 上

類題 24 設 Γ 為坐標平面上的圓，點 $(0,0)$ 在 Γ 的外部且點 $(2,6)$ 在 Γ 的內部。請選出正確的選項。______

(A) Γ 的圓心不可能在第二象限

(B) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10

(C) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於 10

(D) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時圓心的 x 坐標必定小於 10

(E) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10

全對率 11%　106 學測

範例 13 求圓的切線

在坐標平面上 $(7,5)$ 處有一光源，將圓 $x^2+(y-1)^2=1$ 投影到 x 軸的影長為______。

解

小小叮嚀

點 (p,q) 到直線 $ax+by=c$ 的距離為 $\dfrac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

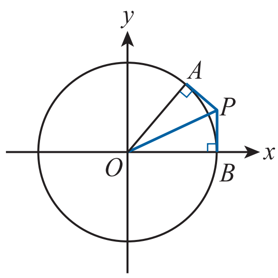
類題 25 O 為原點，自 $P(2,1)$ 向圓 $x^2+y^2=4$ 作兩切線，令切點為 A、B，則：

(1) $\overline{AP}=$______。

(2) 四邊形 $PAOB$ 面積為______。

(3) ΔPAB 外接圓方程式為______。

(4) 切線的方程式為______。



2 直線與圓

類題 26 坐標平面上，一圓通過點 $(-2,7)$，與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1,6)$，若圓方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，則 $a=$ ______，$b=$ ______，$c=$ ______。

範例 14 圓的切線、割線與圖形的平移

坐標平面上，直線 $L：3x+4y=10$ 與圓 $C：(x-6)^2+(y-8)^2=16$ 不相交。若將 L 向右平移 a 單位或 b 單位之後，都可與 C 相切，若將 L 向上平移 c 單位或 d 單位之後，也都可與 C 相切，其中 $a<b$ 且 $c<d$。請問下列選項哪些正確？______

(A) a 與 b 均為整數　(B) c 與 d 均為整數　(C) $a>c$

(D) $b>d$　(E) $a+d>b+c$

解

類題 27 坐標平面上有一圓 C，圓心為 P 點，恰在直線 L 上。將 L 向左或向右平移 12 單位之後恰與圓 C 相切；將 L 向上或向下平移 5 單位之後也可與圓 C 相切。請問：(1)直線 L 的斜率為 ______ (2)圓 C 的半徑為 ______。

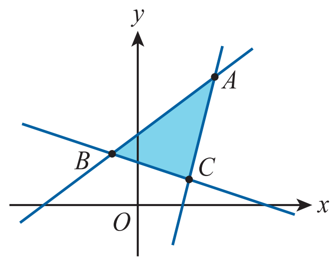
類題 28 坐標平面上圓 $C：x^2+y^2+14x+8y-16=0$ 向右移 p 單位再向上移 q 單位之後，可使圓心落在第一象限且與兩坐標軸都相切，求數對 $(p,q)=$ ______。

2 直線與圓

綜　合　實　力　測　驗

一 單選題

______ 1. 三角形區域（含邊界）如右圖所示，其三邊直線方程式為 $4x-y-7=0$、$3x-4y+11=0$、$x+3y-5=0$，以聯立不等式組表示，下列哪一個選項正確？

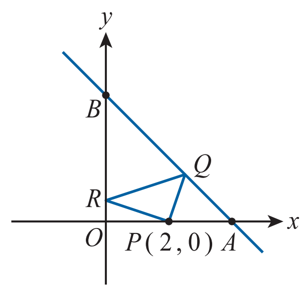


(A) $3x-4y+11>0$，$x+3y-5>0$，$4x-y-7<0$
(B) $3x-4y+11>0$，$x+3y-5>0$，$4x-y-7>0$
(C) $3x-4y+11<0$，$x+3y-5>0$，$4x-y-7>0$
(D) $3x-4y+11<0$，$x+3y-5<0$，$4x-y-7>0$
(E) $3x-4y+11<0$，$x+3y-5<0$，$4x-y-7<0$

______ 2. 設圓 $C：x^2+y^2-10x+9=0$，下列哪一條直線與圓相切？
(A) $L_1：3x-4y-10=0$　(B) $L_2：3x-4y+5=0$　(C) $L_3：3x-4y-15=0$
(D) $L_4：3x+4y=0$　(E) $L_5：3x+4y-5=0$

______ 3. 已知 a、b 為整數，其中 $a>0$，$b<0$，若點 $A(a,0)$、$B(0,b)$、$C(2,-2)$ 三點共線，則 $a+b$ 的最小值為何？
(A) -6　(B) -3　(C) 0　(D) 3　(E) 6

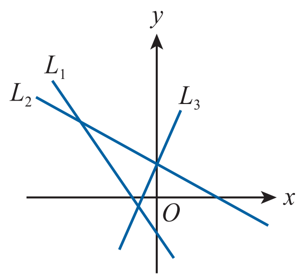
______ 4. 如右圖，已知 $A(4,0)$、$B(0,4)$，從點 $P(2,0)$ 射出的光線經直線 AB 反射到直線 OB 上，最後經直線 OB 反射後回到 P 點，則光線所經過的路徑長為何？



(A) 6　(B) $2\sqrt{11}$　(C) $4\sqrt{2}$
(D) $2\sqrt{10}$　(E) $3\sqrt{5}$

二 多選題

______ 5. 如圖，三直線 L_1、L_2、L_3 方程式依序為 $x+ay+b=0$、$x+cy+d=0$、$y=mx+k$，其中 $L_2\perp L_3$，試問下列選項哪些正確？



(A) $m>0$　(B) $a>c$　(C) $mc=-1$
(D) $m-c=0$　(E) $d-b<0$

______ 6. 坐標平面上有 6 條直線，分別是 L、L_1、L_2、L_3、L_4、L_5，其斜率依序為 2、m_1、m_2、m_3、m_4、m_5，則下列選項哪些正確？
(A)若 L_1 與 L 垂直，則 $m_1=-\dfrac{1}{2}$
(B)若 L_2 與 L 對稱於 x 軸，則 $m_2=-2$
(C)若 L_3 與 L 對稱於原點，則 $m_3=2$
(D)若 L_4 與 L 對稱於 y 軸，則 $m_4=-2$
(E)若 L_5 與 L 對稱於 $x-y=0$，則 $m_5=\dfrac{1}{2}$

____ 7. 直線 L_1：$3x-2y-1=0$，直線 L_2：$6x+py+q=0$，直線 L_3：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，其中 L_1 與 L_2 平行，L_1 和 L_2 的距離為 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$，又 L_1 與 L_3 垂直，L_1 和 L_3 的交點坐標為 $(1,1)$，則下列選項哪些正確？

(A) $p=-4$　(B) $q=2$
(C) $q=2$ 或 -6　(D) $a=\frac{5}{3}$
(E) $b=\frac{5}{2}$

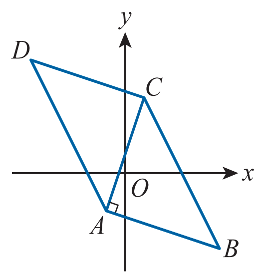
____ 8. 坐標平面上，下列選項哪些正確？

(A)圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ 的圖形會與 x 軸相交
(B)圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 的圖形通過四個象限
(C)圓 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ 上的點到定點 $A(2,0)$ 的距離為整數的點有 8 個
(D)四個點 $A(0,0)$、$B(0,1)$、$C(1,1)$、$D(2,0)$，B 點在過 A、C、D 三點的圓外部
(E) $A(0,0)$、$B(3,0)$、$C(0,2)$、$D(3,2)$ 四點在同一個圓上

三 填充題

9. 等腰直角 ΔABC，$\angle A=90^\circ$，A 在正 x 軸上且 B 在正 y 軸上，若 C 點坐標 $(11,2)$，則 $\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率為 ____。

10. 如右圖，$ABCD$ 為平行四邊形，已知頂點坐標 $A(-1,-2)$、$B(5,-4)$，$\overleftrightarrow{CD}$ 為 $2x+ky=26$，若 $\overline{AC}\perp\overline{AB}$，求 $k=$ ____，D 點坐標為 ____。



11. 已知聯立不等式 $\begin{cases} x+3y\geq 3 \\ 3x+y\leq 3 \\ x\geq 0 \end{cases}$ 所表示的平面區域，恰好被直線 L：$y=mx+2$ 分成面積為 $1:1$ 的兩部分，則 $m=$ ____。

12. 通過點 $A(5,-2)$ 且與直線 L：$3x-y=1$ 相切於點 $B(1,2)$ 之圓的方程式為 ____。

四 素養導向試題

13. 獵人養了大小兩隻獵犬，每次狩獵時，都讓兩隻獵犬守候在相距 50 公尺的兩個位置上。當獵人射下獵物時，兩隻獵犬會同時衝向獵物，若大獵犬的速度是小獵犬的 $\sqrt{3}$ 倍，求：

(1)兩隻獵犬同時抵達獵物的所有可能的點會構成什麼圖形？____
(2)小獵犬會先追到獵物的範圍，其區域面積為 ____。