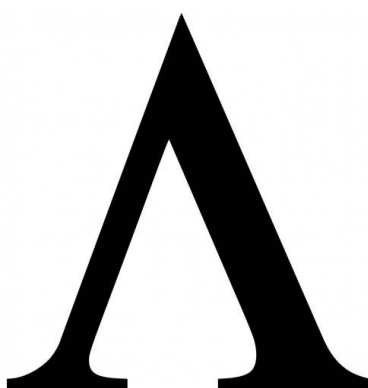

Skorður á hulduorku með sprengistjörnumælingum

13. maí 2013



Nemandi:
Guðmundur Kári Stefánsson

Efnisyfirlit

1	Inngangur	2
2	Bakgrunnur	3
2.1	Sögulegt ágríp	3
2.2	Fræði	3
2.2.1	Sveigja tímarúmsins og þéttustikar	3
2.2.2	Heimsfasti	5
2.2.3	Ýmsar kenningar	6
3	Sprengistjörnur að gerð Ia	8
3.1	Sprengistjörnur að gerð Ia	8
3.1.1	Ljósferlar	9
3.1.2	Ljósfjarlægðir	10
3.2	Mælingar	11
3.2.1	Óvissupættir	12
3.3	Mat á líkönum	14
4	Markov-keðju Monte Carlo líkanagerð	19
4.1	Grundvallaratriði	19
4.1.1	Markov-keðju Monte Carlo	19
4.1.2	Metropolis-Hastings reikniritið	20
4.2	Notkun í tengslum við sprengistjörnur	22
4.3	CosmoMC	23
4.3.1	Stíkar og inntök	23
4.4	Niðurstöður	24
5	Lokaorð	28
A	Útleiðsla á eftirálíkum	31
B	Uppsetning á <i>CosmoMC</i>	32
B.1	Lýsing á forritinu	32
B.2	Leiðbeiningar við uppsetningu	32
B.2.1	Niðurhal	32
B.2.2	cfitsio	33
B.2.3	LAPACK	33
B.2.4	WMAP kóðinn	33

1 Inngangur

Heimsfræði er ung fræðigrein þó vangaveltur um alheiminn, upphaf hans og endalok hafi fylgt mannkyninu frá alda öðli. Það var ekki fyrr en við upphaf 20. aldar sem stjarnedlisfræðilegar athuganir og mæliniðurstöður urðu nógu nákvæmar til að gefa nýtanleg gögn til vísindalegra líkanagerða sem unnt var að beita á alheiminn í heild sinni. Með tækniframförum og tölvuvæðingu hefur heimsmyndin smátt og smátt tekið að skýrast. Fræðigrein, sem áður hafði verið hluti hreinnar heimspeki, hafði með tilheyrandi gagnasöfnun náð fótfestu í heimi vísindanna.

Heimsfræði er að miklu leyti frábrugðin öðrum vísindagreinum, en heimsfræðingum er ógerlegt að gera beinar tilraunir á viðfangsefni sínu; alheiminum í heild sinni. Heimsfræðingar hafa þó ekki setið auðum höndum og hafa grundvallað fræðigreinina á því besta sem býðst; athugunum. Niðurstöður athugana á alheiminum eru síðan notaðar til að styðja eða hrekja tilgátur sem komið hafa fram til lýsingar á honum. Nú á dögum er slíkur sam-
anburður á athugunum og fræðilegum líkönum yfirleitt framkvæmdur með hjálp tölva. Þetta á við um fyrirbærið *hulduorku* - orsök þess að útpensla alheimsins herðir á sér. Margar kenningar hafa litið dagsins ljós sem lýsa fyrirbærinu og gera henni misgóð skil. Fremst í flokki þeirra lýsinga er hin svokallaða heimsfastakenning þar sem tómarúminu er eignaður sá eiginleiki að leitast við að þenjast út.

Markmið þessarar ritgerðar er að skoða gögn um hröðun útpenslu alheimsins, þ.e. sönnunargögn fyrir tilvist *hulduorku* og hvernig draga meg út gildi á þéttustika hennar, Ω_Λ , út úr gögnunum. Í fyrstu var lagt upp með að máta líkön við núverandi heildargagnasafn um sprengistjörnur að gerð Ia og bera þau saman við niðurstöður gagnauðrænnislu Perlmutter et al. [1] og Reiss et al. [2] árin 1998-1999 sem byltu bókstaflega heimsmyndinni.

Þegar leið á misserið, var ákveðið að athuga aðra aðferð sem gæfi mat á líkur ólíkra gilda þéttustika *hulduorkunnar*. Í þessari aðferð fólust Markov-keðju Monte-Carlo reikningar (MCMC) á tölvuþyrpingunni *Jötuni* við Háskóla Íslands, með hjálp forritsins *CosmoMC*, vinsælu forriti við slíka reikninga í heimsfræði. Forritið *CosmoMC* býður upp á notkun nokkurra gagnasafna samtímis. Aðalathyglinni er beint að slíku mati með sprengistjörnugögnunum sem notuð eru í fyrri aðferðinni og eru þær bornar saman við niðurstöður þar sem einnig er tekið tillit til óháðar mælingar WMAP geimfarsins á örbylgjukliðnum¹.

Ég vil þakka Viðari Guðmundssyni fyrir góð ráð og umræður varðandi vinnureglur í kringum tölvuþyrpingar og ofurtölvur. Ennfremur vil ég þakka Andreasi og Mette, ásamt öðrum sem komu og fóru og/eða deildu með mér vinnuaðstöðu meðan á verkefninu stóð, fyrir ýmsa fimmaurabrandara í tengslum við stjörnufræði og almennan félags- og nördaskap. Síðast en ekki síst vil ég þakka leiðbeinanda mínum, Páli Jakobssyni, fyrir það frelsi sem ég fékk við vinnu þessa verkefnis. Það er von mín að textinn sé aðgengilegur, jafnvel svo að leikmenn geti haft gagn og vonandi gaman af.

¹Í mars 2013 gaf Planckverkefnið - nokkurskonar arftaki WMAP - út sínar fyrstu niðurstöður á athugunum á örbylgjukliðnum, með tilheyrandi uppfærslu á forritinu *CosmoMC*. Ekki gafst tími til að uppfæra forritið fyrir þessa viðamiklu uppfærslu, en það væri fróðlegt að athuga þau gögn síðar.

2 Bakgrunnur

2.1 Sögulegt ágríp

Sú staðreynd að heimurinn er að þenjast út uppgötvaðist á fyrri hluta síðustu aldar. Á öðrum áratugi 20. aldar mældi Vesto Slipher (1875-1969) u.þ.b. 50 nálægar vetrarbrautir með því að beina ljósi þeirra gegnum prismu og skrá litróf þeirra á filmur. Niðurstöður hans komu öllum að óvörum; vetrarbrautirnar sem hann skoðaði reyndust vera hliðraðar til rauðs hluta litrófsins - heimurinn var að þenjast út! Það var síðan árið 1929 sem Edwin Hubble (1889-1953) og Milton Humason (1891-1972) náðu að mæla fjarlægðir til slíkra vetrarbrauta með því að skoða litróf og mæla sveiflutíma og sýndarbirtu sefíta - ein gerð staðlanlegra kerta². Niðurstöður þeirra voru afgerandi, bein tengsl reyndust vera á milli fjarlægðar vetrarbrautar frá jörðu og burthraða hennar,

$$v_0 = H_0 d_p(t_0) \quad (1)$$

kallað *lögmál Hubbles*, þar sem $H_0 = 70,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ er svokallaður Hubblestuðull og v_0 lýsir burthraða stjörnnunnar í fjarlægðinni $d_p(t_0)$ við núverandi aldur alheimsins, t_0 .

Ef við þræðum okkur til baka í tíma þegar vetrarbrautirnar voru nærri hver annarri, þá að lokum endum við í einum punkti, upphafi alheimsins í Miklahvelli. Út frá Hubblestuðlinum má því finna aldur alheimsins miðað við fastan útbreiðsluhraða,

$$t_H = \frac{1}{H_0} \approx 13,8 \text{ milljarðar ára} \quad (2)$$

Þessi tími er nefndur *Hubblestíminn*. Nýjustu mælingar Planck gervitungslins á örbylgjukliðnum gefa til kynna að alheimurinn sé $13,8 \pm 0,1$ milljarða ára. Hubblestíminn metur raunaldur alheimsins vel þótt að hann geri ráð fyrir föstum útbreiðsluhraða. Þegar betur er að gáð og hraðabreytingar í útþenslunni eru teknar með í reikninginn sést að undanfarin hröðun útþenslunnar hefur um það bil jafnað út hægari útþenslu fyrr í sögu alheimsins.

Uppgötvun Hubble og Milton steypiti hugmyndum manna um stöðugan alheim um koll og Miklahvellskenningin festist fljótt í sessi.³

2.2 Fræði

2.2.1 Sveigja tímarúmsins og þéttustikar

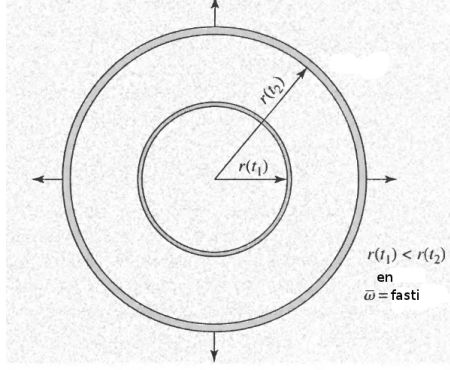
Í rúmi sem þenst út í tíma er eiginfjarlægð milli tveggja atburða háð tíma. Ef atburðirnir hafa gefna hnita-fjarlægð, ϖ , eykst eiginfjarlægð þeirra, $r(t)$, með tímanum þegar rúmið þenst út, en hnita-fjarlægð þeirra helst sú sama. Þessi tvö hnit eru tengd saman með jöfnunni

²Staðlanleg kerti eru stjarnæðlisfræðileg fyrirbæri með þekkta reyndarbirtu, eftir að þau hafa verið *stöðluð* til með einhverjum hætti.

³Svokölluð sístöðukenning sem lýsir stöðugum alheimi var um skeið keppinautur Miklahvellskenningarinnar. Hún átti þó í erfiðleikum með að útskýra bakgrunnsgeislun alheimsins og var því almennt hafnað.

$$r(t) \equiv R(t)\varpi \quad (3)$$

þar sem $R(t)$ er einingarlaus, tímaháður kvörðunarstiki sem lýsir útþenslunni, sjá mynd 1 að neðan.



Mynd 1: Útþensla kúlu í tíma. Eiginfjarlægð milli gefinna atburða á tíma $t_2 > t_1$ er meiri en við tíma t_1 sökum útþenslu rúmsins. Hnitafjarlægðir haldast þó þær sömu. *Mynd fengin frá Carroll & Ostlie [3].*

Fyrir alheim í útþenslu teygist á upphaflegri bylgjulengd ljóss gefins ljósgjafa λ_1 , sökum rauðviks. Almennit má tengja rauðvik ljósgjafa, z , við gildi kvörðunarstikans nú, $R(t_0) = 1$, og gildi hans þegar ljósið var sent, $R(t_1)$,

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1 - R(t_1)}{R(t_1)} \quad (4)$$

Því hlutfallsleg bylgjulengdarlenging ljóssins er jöfn hlutfallslegri stækkun alheimsins, lýst með $R(t)$. Þessa niðurstöðu má einnig rita

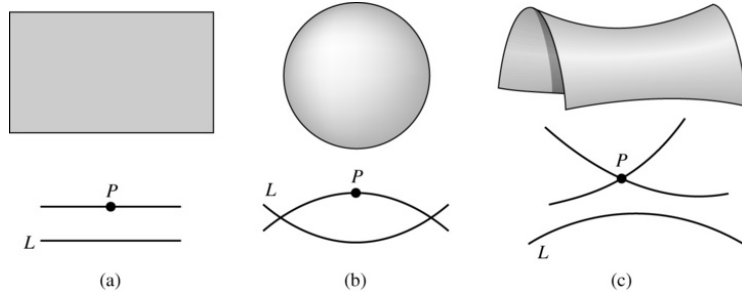
$$R(t_1) = \frac{1}{1 + z} \quad (5)$$

Þróun á stækkun alheimsins með tíma má því auðveldlega lesa út frá rauðviksmælingum fjarlæggra fyrirbæra.

Einfalt er að tengja sveigju alheimsins við efnispéttleika hans, ρ , sem er nátengdur útþenslu hans, þróun og örlögum. Áhrif þyngdarkrafta leitast við að draga heiminn saman, meðan hulduorka leitast við að þenja hann út. Sá efnispéttleiki alheimsins sem svarar til flats alheims, þ.e. þéttleikinn sem nær að stöðva útþenslu hans að lokum, ρ_c , er kallaður markþéttleiki. Þéttustikinn

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho}{\frac{3H_0^2}{8\pi G}} \quad (6)$$

er oftast notaður til lýsingar á efnispéttleikanum. Flat alheimur svarar því til $\Omega = 1$, neikvætt sveigður til $\Omega < 1$ og jákvætt sveigður til $\Omega > 1$, sjá mynd 2. Það er því nóg að mæla efnispéttleika alheimsins til að ákvarða lögun hans.



Mynd 2: Sveigja í tvívíðum alheimi, þrjú tilfelli koma til greina; (a) Engin sveigja, $\Omega = 1$ (b) Jákvæð sveigja, $\Omega > 1$ (c) Neikvæð sveigja, $\Omega < 1$. Mynd fengin frá [3].

2.2.2 Heimsfasti

Árið 1915 setti Albert Einstein fram sviðsjöfnur almennu afstæðiskenningarinnar sem lýsa áhrifum orku og massa á sveigju tímarúmsins. Sviðsjöfnurnar má almennt setja fram á forminu

$$\mathcal{G} = -\frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T} \quad (7)$$

þar sem \mathcal{T} er orkutensor sem metur áhrif orku–massadreifingar á sveigju tímarúmsins eins og tensorinn \mathcal{G} segir til um. Þyngdarfasti Newtons, G , endurspeglar útvíkkun takmörkuðu afstæðiskenningarinnar til að taka áhrif þyngdaraflsins með í reikninga [3].

Árið 1922 setti rússneski stærðfræðingurinn Alexander Friedmann (1888-1925) fram lausn á sviðsjöfnum Einsteins fyrir einsleitann og stefnusnaðan alheim,

$$\left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho \right] R^2 = -kc^2, \quad (8)$$

kölluð *jafna Friedmann*. Fastinn k er háður heildarorku alheimsins og gefur mat á sveigju hans líkt og þéttustíkið Ω gerir; $k = 0$ svarar til flats alheims, $k < 0$ til opins og $k > 0$ til lokaðs alheims.

Í upphafi 20. aldar bentu athuganir stjörnufræðinga til að stjörnur og önnur fyrirbæri alheimsins væru ýmist að fjarlægjast jörðina eða nálgast hana í jöfnum hlutföllum. Því var almennt talið að heimurinn væri stöðugur í stórgerð sinni. Þeirra helsta ágreiningsmál var hvort mælingar þeirra lýstu stjörnum innan okkar vetrarbrautar eða fjarlægari fyrirbærum, heilum stjörnuþokum óháðar okkar eigin. Einstein hafði sjálfur gert sér grein fyrir því að sviðsjöfnur hans, eins og hann setti þær fyrst fram, spá óneitanlega fyrir um óstöðugan alheim, alheim sem fellur saman af eigin þyngdarkrafti. Hann setti því fram jöfnur sínar að nýju tveimur árum seinna, örlítið breyttar, til að þær samrýmdust viðhorfum um stöðugan alheim. Breytingarnar fólust í því að bæta við svonefndum heimsfasti, Λ , en lausn á jöfnu 7 verður þá,

$$\left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho - \frac{1}{3} \Lambda c^2 \right] R^2 = -kc^2. \quad (9)$$

Jafnan að ofan er því eins og Friedmannjafnan að heimsfastaliðnum, $\frac{1}{3} \Lambda c^2$, undanskildum. Þótt að þessi leiðrétting sé stærðfræðilega auðveld hefur hún mikla eðlisfræðilega þýðingu.

Nú vita menn þó með vissu að alheimurinn er ekki stöðugur - hann þenst út með sívaxandi hraða - og er heimsfastakenning Einsteins notuð til að tjá þá staðreynd.

2.2.3 Ýmsar kenningar

Niðurstöður Perlmutter et al. [1] og Reiss et al. [2] frá lok síðustu aldar hafa leitt til hrynu kenninga sem leitast við að útskýra og greina útþenslu alheimsins til að spá fyrir um þróun hans og endalok. Mest ber á þremur kenningum sem einkennast af mismunandi gildum ástandsstikans w_Λ sem þær eigna hulduorkunni í svokallaðri *ástandsjöfnu* hennar. Kenningarnar eru heimsfastakenningin, kenningin um eisu⁴ (*e. quintessence*) og draugaorkukenningin (*e. phantom energy*) [6]. Ástandsjöfnu fyrir efni og/eða orku að gerð i í alheiminum má almennt rita

$$P_i = w_i \rho_i c^2 \quad (10)$$

þar sem $i = m, r, \Lambda$ eftir því hvort jafnan lýsir þrýstingsframlagi óafstæðilegs efnis, geislunar eða hulduorku.

Gildi w fyrir efni og geislun reynast vera,

$$w_m = 0 \quad \text{og} \quad w_r = \frac{1}{3} \quad (11)$$

Kenningar um hulduorku gera allar ráð fyrir að gildi w_Λ sé neikvætt en spár þeirra um endalok alheimsins eru háð tölugildi w_Λ sem þarf ekki að vera fasti; ef hulduorkunni er lýst með skalarsviðum myndi w_Λ breytast með tíma. Til að fá fram hinn sívaxandi útþensluhraða þarf jafnframt $w_\Lambda < -\frac{1}{3}$ en þar með er komin hin neikvæða þrýstingsorka hulduorkunar sem má einnig líta á sem einhverskonar spennukraft sem þenur rúmið út [7].

Heimsfasti (*e. cosmological constant*) Staðallíkan heimsfræðinnar, oft kallað Λ CDM-líkanið, gerir ráð fyrir að hulduorku sé líst með heimsfasta sem svarar til fasts gildi ástandsstikans, $w_\Lambda = -1$. Heimsfastanum má svo gera grein fyrir skammtafræðilega með orku tómarúmsins. Tómarúmið má líta á sem fullkominn vökva með orkupéttleika ρ_{vac} og einsleitan þrýsting $p_{vac} = -\rho_{vac}$ þ.e. $w = -1$ [8]. Þó mælingar undanfarinna ára hafi fært rök fyrir því að heimurinn sé því sem næst flatur, þ.e. að hulduorkan samsvari heimsfastaliðnum í jöfnu Friedmanns, þá er eðlisfræðileg merking heimsfastans enn mjög umdeild. Staðallíkan öreindafræðinnar tileinkar orkupéttleika tómarúmsins gildi sem er 30 stærðargráðum meiri en mælingar gefa til kynna [9]. Mikið ósamræmi ríkir því á milli fræða og athugana.

Endalok alheims þar sem hulduorka er útskýrð með heimsfasta er kölluð Miklakul (*e. Big-Chill*). Eftir því sem heimurinn þenst út verða áhrif hulduorkunnar sífellt meiri og kemur hann til með að þenjast út í hið óendanlega á óendanlega löngum tíma.

Eisa (*e. quintessence*) Kenningin um eisu svarar til $-1 < w_\Lambda < -\frac{1}{3}$. Ólíkt heimsfastakenningunni þá lýsir eisukenningin hulduorku sem breytilegu sviði orku sem er bæði rúm- og tímaháð. Gildi w_Λ er því ekki fasti. Eisuusvið má líkja við svið gorma í sérhverjum rúmpunkti þar sem hver þeirra er misstrekktur en heimsfastahugmyndin myndi þá svara til gorma þar sem allir væru jafnstrekkir [10].

⁴Sjá [4] og [5]

Draugaorka (*e. phantom energy*) Fyrir $w < -1$ svarar hulduorka til svokallaðar draugorku. Hún spáir endalokum í Miklusundrun (*e. Big-rip*) sem svipar nokkuð til Miklakuls heimsfastakenningarinnar. Þó er stigsmunur þar á, því í draugaorkukenningu eykst orkuþéttleiki hulduorkunnar eftir því sem á liður og orkuþéttleiki hennar stefnir á óendanlegt á endanlega löngum tíma [11]. Vetrarbrautir koma til með að sundrast, sólkerfi og plánetur og að lokum sameindir og kjarnar þeirra, skynmörk sérhvers punkts í alheiminum stefna á núll⁵.

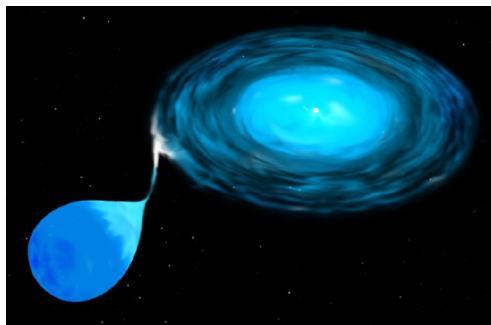
⁵Skynmörk (*e. event horizon*) koma til vegna endanlegs hraða ljóssins. Þau eru mörk hins kannanlega alheims.

3 Sprengistjörnur að gerð Ia

Á undanförunum áratugum hefur komið í ljós að sprengistjörnur að gerð Ia geta nýst vel til fjarlægðamælinga í heimsfræði. Nota má niðurstöður gagna um birtustig og rauðvik þeirra til að skoða útþensluþróun alheimsins og þannig sýna fram á tilvist hulduorku svo ekki verði um villst. Árið 1998-1999 sýndu tveir rannsóknarhópar, annar undir leiðsögn Adam G. Reiss (f. 1969) og Brian P. Schmidt (f. 1967) í Australian National Observatory í Ástralíu og hinn undir leiðsögn Saul Permuter (f. 1969) í Lawrence Berkeley National Laboratory í Bandaríkjunum, að heimurinn væri að þenjast út með auknum hraða sem sýndi fram á tilvist hulduorku á óyggjandi hátt. Mælingar beggja hópa grundvölluðust á notkun sprengistjarna að gerð Ia til fjarlægða- og rauðviksmælinga.

3.1 Sprengistjörnur að gerð Ia

Sprengistjörnur eru almennt flokkaðar í tvo undirflokka eftir því hvort sterkar vetnislínur finnast í litrófi þeirra (gerð II) eða ekki (gerð I). Sprengistjörnur að gerð I hafa síðan þrjá undirflokka. Sprengistjörnur eru sagðar af gerð Ia ef einkennandi Si II toppar eru til staðar í litrófi sprengistjörnnar, annars af gerð Ib eða Ic eftir litrófslínunum He. Undirflokkurinn Ia samanstendur af mjög stöðluðum sprengistjörnum sem finnast í öllum gerðum vetrarbrauta enda taldar eiga rætur sínar að rekja til tvístirna ólíkt öðrum gerðum sprengistjarna[12].



Mynd 3: Aðdragandi sprengistjörnu að gerð Ia í tvístirni. Önnur stjarnan sem er hvítur dvergur, sagnar að sér efni frá hinnu stjörnunni. *Mynd fengin frá Wikipedia.*

Ef önnur stjarna tvístirnis er massameiri en hin þróast sú þyngri hraðar, verður að rauðum risa og síðan að hvítum dverg meðan sú massaminni er enn á meginröð. Þegar sú léttari tekur að færast af meginröðinni, þá þenst hún út og getur hvíti dvergurinn, ef fjarlægðarskilyrði eru rétt, safnað að sér efni í formi aðsópsskífu eins og sést á mynd 3. Við efnisfærsluna þyngist hvíti dvergurinn og hitnar. Sé réttum skilyrðum náð getur vetnissamruni hafist skyndilega og stjarnan blossað upp og myndað svokallað nýstirni (*e. nova*). Nýstirnisfasinn stendur þó stutt yfir því vetnið breytist fljótt í helín sem hleðst utan á hvíta dverginn. Ferli þetta endurtekur sig þar til massi hvíta dvergsins fer yfir svokölluð Chandrasekharsmörk, $1.38M_{\odot}$, hámarksmassi sem rafeindaþrýstingur getur haldið uppi hvítum dverg. Við það fellur hvíti dvergurinn saman og springur í

formi sprengistjörnu Ia. Ljósafi þeirra er gífurlegt, oft á tíðum á sömu stærðargráðu og ljósafi hýsilvetrarbrauta þeirra. Slíkir atburðir sjást því yfir gífurlegar vegalengdir.

3.1.1 Ljósferlar

Sprengistjörnur að gerð Ia reynast hafa einkennandi ljósferla; graf ljósafis þeirra sem fall af tíma breytist lítið og kerfisbundið milli sprengistjarna. Auðvelt er að skala ljósferla þeirra til - þær reynast staðlanleg kerti.

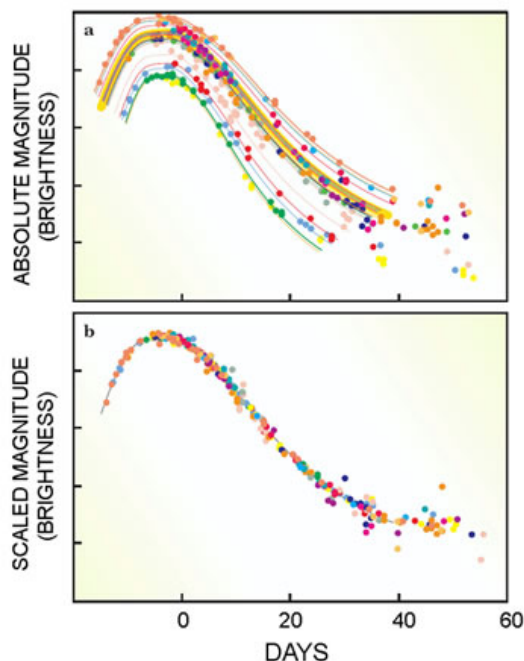
Perlmutter et al. sýna í [13] að ljósbirtuhámark þeirra, m_B , megi staðla með eftirfarandi jöfnu

$$m_B^{\text{corr}} = m_B + \Delta_{\text{corr}}(s) \quad (12)$$

sem kölluð er *breiddar-ljósafis* vensl (*e. width-luminosity relation*) sprengistjarna að gerð Ia (þar sem *corr* stendur fyrir *corrected*). Í jöfnunni að ofan er Δ_{corr} einhalla fall sem er háð svokölluðum *þenslustika* ljósferilsins, s , sem þenur eða dregur saman tímaás samanturðarljósferilsins svo hann passi sem best við mældu gögnin (sjá mynd 4).

$$\Delta_{\text{corr}(s)} = \alpha(s - 1) \quad (13)$$

þar sem stuðullinn α er “suð-stuðull” (*e. nuisance parameter*), metinn fyrir hverja sprengistjörnu. Með þessum hætti má leiðrétta ljósferla eins og sprengistjörnurnar hefðu ljósferilsbreidd sem næmi $s = 1$ fyrir sprengistjörnur að gerð Ia fyrir bæði há og lág rauðvik.



Mynd 4: Ljósferlar mældra sprengistjarna af gerð Ia, fyrir og eftir hámarksbirtustig. Efri myndin sýnir raunbirtustig sem fall af tíma en seinni myndin sýnir stöðlun hennar. *Mynd fengin frá Supernova Cosmology Project í [12].*

Perlmutter et al. taka fram að leiðrétta þurfi bæði fyrir deyfingu, A , í merki mældra sprengistjarna sökum vetrarbrautar okkar⁶ og gera svokallaða K -leiðréttingu á gögnunum en um hana er rætt betur seinna í þessum yfirkafli. Þegar tekið er tillit til þessara leiðréttinga, höfum við eftirfarandi jöfnu fyrir virku birtustigi sprengistjarnanna,

$$m_B^{\text{eff}} = m_B + \alpha(s - 1) - K_{BR} - A_R \quad (14)$$

þar sem K_{BR} táknar K -leiðréttinguna að fara frá litsíu B til síu R .

Út frá óháðum litrófsgögnum má svo finna við hvaða rauðvik sprengistjörnurnar mældust. Þar með eru kominn öll gögn sem þarf til að skoða Hubble-graf sprengistjarnanna (*e. Hubble-diagram*) þ.e. skoða birtustig þeirra sem fall af rauðviki.

3.1.2 Ljósfjarlægðir

Ljósfjarlægð gefins hlutar, D_L , er notuð í tengslum við breytingu á sýndarbirtu hans sem falli af rauðviki z . Ljósfjarlægðina má leiða út eins og sýnt er í [14, 15] og er þá gefin með tölulega heildanlegri jöfnu,

$$D_L = \frac{c}{H_0}(1+z)\kappa_0^{-1/2}S \left\{ \sqrt{\kappa_0}^{-1/2} \int_0^z dz' \left[\sum_i \Omega_i(1+z')^{3+3w_i} - \kappa_0(1+z')^2 \right]^{-1/2} \right\} \quad (15)$$

þar sem $S(x) = \sin(x)$, x eða $\sinh(x)$ fyrir lokaðan, flatan eða opinn alheim, og krappastíkin κ_0 er skilgreindur þ.a. $\kappa_0 = \sum_i \Omega_i - 1$.

Í Friedmann-Lemaitre-Walker heimsfræðilíkönunum, þá er heildarsýndarbirta staðlanlegs kertis, $m(z)$, fall af þéttustika hulduorkunnar, Ω_Λ , og þéttustika efnis, Ω_m , og Hubblestuðlinum, H_0 :

$$m(z) = M + 5 \log D_L(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda, H_0) + 25 \quad (16)$$

Finna má reyndarbirtuna M út frá mælingum sprengistjarna við lág rauðvik, og fengu Hamuy et al. 1996 fengu meðalgildið $\mathcal{M} = -3.17 \pm 0.03$ út frá sprengistjörnum við lág rauðvik; $z = 0.01 - 0.10$ [14].

Fjarlægðastíkan, $\mu \equiv m(z) - M$, má því næst gefa með,

$$\mu = 5 \log D_L(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda, H_0) + 25 \quad (17)$$

Ef við höfum gögn $\boldsymbol{\mu}_0$ í höndunum má meta hve vel þau samræmast samsvarandi fræðilega reiknuðum gildum, $\boldsymbol{\mu}_p$, með χ^2 -tölfræði, þar sem χ^2 sennileikametillinn (*e. likelihood estimator*) er gefinn með eftirfarandi jöfnu,

$$\chi^2(\boldsymbol{\mu}_0; H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) = \sum_i \frac{[\mu_{p,i}(z_i; H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) - \mu_{0,i}]^2}{\sigma_{\mu_{0,i}}^2} \quad (18)$$

þar sem $\mu_{p,i}(z_i; H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)$ táknar samsvarandi i -ta fræðilega reiknað gildi fyrir mældan fjarlægðarstíka $\mu_{0,i}$. Sérhver liður í summunni er viktaður með dreifninni, $\sigma_{\mu_{0,i}}^2$, á

⁶Perlmutter et al. taka þó fram í grein sinni frá 1999 [1] að ekki hafi verið leiðrétt fyrir deyfingu í hýsilvetrarbrautum sprengistjarnanna eða sökum annarra vetrarbrauta sem gætu ollið meiri deyfingu.

mælda fjarlægðarstíkanum. Oft er skilgreindur svokallaður minnkaður (*e. reduced*) χ^2 -sennileikametill, χ_ν^2 , með

$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (19)$$

þar sem ν er fjöldi frelsisgráða í kerfinu sem eru $N - n - 1$ -talsins, þar sem N er fjöldi mælipunkta og n er fjöldi stika sem skoðaðir eru. Yfirleitt er notuð sem þumalputtaregla að líkön lýsi gögnunum vel ef þau eru með χ_ν^2 -gildi nálægt 1. Ef hins vegar $0 < \chi_\nu^2 < 1$ er oft talað um ofaðlögun (*e. over-fitting*).

3.2 Mælingar

Eiginbirtustig sprengistjarna gerir það að verkum að hægt er að gera athuganir á þeim við gífurlegar fjarlægðir. Á 9. áratug síðustu aldar reyndist það þó þrautinni þyngri að finna, ákvarða og mæla sprengistjörnur, jafnvel við lág rauðvik. Sprengistjörnur eru handahófskennd fyrirbæri, ógerlegt reyndist að spá fyrir hvar og hvenær þær spryngju. Margir efuðust um gagnsemi þeirra til stjarnedlisfræðilegra fjarlægðamælinga.

Afstaðan breyttist nokkuð þegar nýr undirhópur sprengistjarna, sprengistjörnur að gerð Ia, uppgötvaðist. Þær reyndust springa á svipaðan máta og auðveldlega mátti greina þær í sundur frá öðrum litrófsflokkum með hjálp víðra sjónauka og sjálfvirkar gagna- og myndvinnslu.

Fljótlega var fyrsta leitarverkefnið að slíkum sprengistjörnum keyrt áfram af dönskum rannsóknarhóp, Norgaard-Nielsen et al. [16], við lok 9. áratugsins. Eftir mikla vinnu í tvö ár tókst þeim að finna eina sprengistjörnu, sprengistjörnu að gerð Ia við $z = 0.3$. Sprengistjarnan fannst löngu eftir hámarksbirtustig sitt, þ.e. aftarlega á ljósferlinum á handahófskenndri nóttu, og veitti fundur hennar takmarkaðar heimsfræðilegar upplýsingar. Fundurinn sýndi þó fram á að sprengistjörnur að gerð Ia við svo há rauðvik mætti finna en margt benti til þess að notagildi þeirra væri takmarkað til heimsfræðilegra ályktana.

Rannsóknarhópurinn *Supernova Cosmology Project* (SCP) við *Lawrence Berkeley National Laboratory* var stofnaður árið 1988 til að ráða fram úr þessu. Hópurinn setti markmiðið hátt; að mæla sprengistjörnur við há rauðvik ($z > 0.3$) og mæla þannig þá talda hægingu á útbenslu alheimsins⁷, ásamt því að gefa mat á ýmsum stikum heimsfræðinnar út frá rauðviks-birtustigs gögnum. Við svo há rauðvik þurfti hópurinn að staðfesta að um sprengistjörnur að gerð Ia væri að ræða út frá mælingum með stærstu sjónaukum þess tíma. Erfitt, og jafnvel ógerlegt reyndist að fá athuganartíma við slíka sjónauka þegar á honum þurfti helst að halda. Venjulega þarf að panta tíma marga mánuði fram í tímann og erfiðlega gekk að sannfæra stjórnendur sjónaukanna að fá úthlutað tíma til að athuga svo handahófskennd stjarnedlisfræðileg fyrirbæri.

Árið 1994 höfðu þau leyst þetta vandamál. Þau þróðu með sér athugunarskema sem tryggði fund á sprengistjörnum fyrir fyrirfram ákveðna dagsetningu, og þá fyrir eða nálægt hámarksbirtustigi sprengistjörnnunnar. Fyrstu meginniðurstöður rannsóknarhópsins voru gefnar út árið 1997. Þar voru skoðaðar 7 sprengistjörnur að gerð Ia við rauðvik $z \sim 0.4$ [13]. Niðurstöðurnar reyndust í samræmi við flatan alheim með $\Lambda = 0$ en með mjög hárrí óvissu.

⁷Á þeim tíma var almennt talið að útbensla alheimsins sem átti upphaf sitt í Miklahvelli væri að hægja á sér sökum þyngdaráhrifa. Engar fyrrum niðurstöður höfðu bent til tilvists hulduorku.

Um svipað leyti hafði annar hópur, *High-Z Supernova Search Team*, hafið störf undir leiðsögn Brian P. Schmidt og Adam G. Reiss sem komust að svipaðri aðferð til að tryggja fund á slíkum sprengistjörnum. Fleiri sprengistjörnur að gerð Ia bættust í hópinn. Árin 1998-1999 gáfu svo báðir rannsóknarhóparnir út afgerandi niðurstöður sýnar (sjá [2] og [1]). Niðurstöðurnar voru skýrar: heimurinn er að þenjast út, og það með sívaxandi hraða - sökudólgurinn fékk nafnið *hulduorka*.

3.2.1 Óvissuþættir

Sífelld fleiri sprengistjörnur hafa bæst í hópinn frá lok síðustu aldar. Þessi aukni fjöldi hefur gert okkur kleift að lágmarka ýmsa óvissuþætti, en þó spila þar einnig inn ýmsir kerfisbundnir þættir, t.a.m. kvarðanir á rauðviksmælingum sprengistjarnanna og frábrugðinna aðferðafræða mismunandi rannsóknahópa. Nú eru sprengistjörnugagnasöfnin orðin það stór að tölfræðilegar óvissur eru orðnar lægri en kerfisbundnar skekkjur [1].

Fjarlægðir til sprengistjarna að gerð Ia eru vel ákvarðaðar fyrir $z < 0.1$, en athuganir við hærri rauðvik krefjast enn frekari nákvæmni þar sem fleiri óvissuþættir spila inn. Ef ekki er leiðrétt fyrir þessum þáttum hefur það veruleg áhrif á gagn sprengistjarna að gerð Ia sem mælistikur. Hér að neðan eru nefndir helstu óvissuþættir sem leiðrétta þarf fyrir.

K-leiðréttingar Við athuganir sprengistjarna við hækandi rauðvik, þá færast ljósmerki þeirra til lengri bylgjulengda. En þar sem stjarnedlisfræðilegar athuganir eru venjulega gerðar með ákveðnum litsíum í senn, sem sigta út ákveðið fast bylgjulengdarbil, þarf að taka tillit til bylgjulengdarfærslunnar milli litsía. Þessar leiðréttingar felast yfirleitt í því að heilda litróf sprengistjörnnar yfir viðkomandi litsíuglugga (*e. band pass*) litsíunnar, hliðra svo litrófinu til til að leiðrétta fyrir rauðviki og svo heilda á ný. Perlmutter & Schmidt nefna í [14] að óvissuþætti megi lágmarka ef valinn er litsíugluggi nálægt eiginlitsíuglugga (*e. rest-frame bandpass*) rauðvikuðu bandbreiddarinnar. Ennfremur nefna þeir að milli-bands (*e. inter-band*) *K*-leiðréttingu megi gefa með

$$K_{ij}(z) = 2.5 \log \left[(1+z) \frac{\int F(\lambda) S_i(\lambda) d\lambda}{\int F(\lambda/(1+z)) S_j(\lambda) d\lambda} \frac{\int Z(\lambda) S_j(\lambda) d\lambda}{\int Z(\lambda) S_i(\lambda) d\lambda} \right] \quad (20)$$

þar sem $K_{ij}(z)$ er *K*-leiðréttingin að fara frá síu i til síu j og $Z(\lambda)$ er tilsvareandi litróf sem fæst við núllbirtustig.

Birtustig hlutar sem fall af rauðvikinu z er háð *K*-leiðréttingunni eins og nefnt var í jöfnu 14,

$$m_i(z) = 5 \log \left[\frac{D_L}{\text{Mpc}} \right] + 25 + M_j + K_{ij}(z) \quad (21)$$

þar sem ljósfjarlægðin er gefin með jöfnu 15, M_j er eiginbirtustig sprengistjörnnar við síu j og K_{ij} er gefin með jöfnu 20 að ofan.

Óvissur í *K*-leiðréttingu eru einkum háðar eftirfarandi þáttum:

1. *Nákvæmni í rófljósmælingum (e. spectrophotometry) sprengistjarnanna:* Til að reikna *K*-leiðréttinguna þá þarf að heilda róf sprengistjarnanna í jöfnu 20. Slík heildi geta bjagast við bylgjulengdarháðar kvarðanir á ljósflæði sprengistjarnanna.

2. *Nákvæmni í kvörðun litsíugluggana á staðalstjörnunum:* Jafna 20 sýnir að K -leiðréttingarnar eru háðar lögun litsíuglugga-rófanna og lögun þeirra við núllbirtustig.
3. *Nákvæmni í vali á viðeigandi sniðmátum til að reikna leiðréttingarnar:* Þrátt fyrir að sprengistjörnur að gerð Ia megí teljast einsleitur hópur stjarnedlisfræðilegra fyrirbæra, er eitthvað um breytileika í litrófum þeirra.

Fyrsta óvissuþáttinn má auðveldlega lágmarka ef tækjabúnaður er notaður eins nákvæmlega og hægt er. Perlmutter & Schmidt nefna í [14] að annar óvissuþátturinn er venjulega metinn sem litill (~ 0.01 mag) en rófljósmælingar á staðalstjörnunum Sirius og Vega reynast mjög samrýmanlegar. Til að lækka þennan óvissuþátt enn frekar, myndi það krefjast nýrra og betri leiða til að kvarða og staðla stjörnur eins og Vega og Sirius til að draga betri ályktanir um útlit litsíuglugganna sem skilgreina ljósmælikerfi í nútíma sjónaukum. Þriðji óvissuliðurinn krefst stórs gagnasafns til að bera saman mælt litróf sprengistjörnu við litrófsmælingarnar sem notaðar eru til að reikna K -leiðréttingarnar.

Frávik í K -leiðréttingum hafa verið ákvarðaðar út frá gögnum frá mismunandi sjónaukum sem gefur mat á áhrif fyrsta og þriðja óvissuþáttarins; þeir reynast vera samanlagt í kringum 0.01 mag.

Deyfing Í hinum nálæga alheimi sjáum við sprengistjörnur að gerð Ia í mismunandi vetrarbrautum og hluti sprengistjarnanna virðast hafa orðið fyrir mikill deyfingu. Fyrstu gráðu leiðréttingar fyrir deyfingu má auðveldlega gera með því að gera athuganir við tvær eða fleiri mismunandi bylgjulengdir. Erfiðar er þó að leiðrétta fyrir kerfisbundnar skekkjur, eins og t.d. þróun og breytingum geimryks með tíma, en núverandi mat á slíkri skekkju á nýjustu gögnum hefur verið í kringum < 0.06 mag. Ennfremur þarf að taka tillit til þess að umhverfis vetrarbrautina okkar er einnig að finna þunnt lag af geimryki sem hefur áhrif á sprengistjörnumælingar. Almennt séð reynist þessi þáttur ekki hafa mikil áhrif. Geimrykið reynist hafa nokkuð jöfn áhrif á stjarnedlisfræðilegar mælingar innan vetrarbrautarinnar en eftir því sem við gerum athuganir við hækkanði rauðvik minnka þau áhrif (því dofnunaráhrif minnka með hækkanði bylgjulengd) sem leiðir til kerfisbundinnar skekkju svipaðri að stærð og þeirri að ofan. Heildaróvissumat sökum dofnunarþátta reynist því vera < 0.12 mag.

Valáhrif Eftir því sem við finnum fleiri og fleiri sprengistjörnur þá geta komið fram ýmis óæskileg valáhrif. Við birtustigstakmarkaðar athuganir þá er líklegra að finna bjartari stjörnur umfram þær daufari sem gefur bjagaða mynd af meðalbirtustigi þeirra. Þessi áhrif kallast *Malmquist-bjögun*. Perlmutter & Schmidt nefna að nota megí Monte Carlo líkön til að draga verulega úr áhrifum Malmquist-bjögunar, allt að ~ 0.01 mag [14].

Þyngdarlinsur Geislun frá fjarlægum sprengistjörnum getur orðið fyrir örlinsuhrifum á ferð sinni frá upptökum til athuganda. Stærð þessara áhrifa eru háð dreifingu efnisins sem geislunin fer um; þétt efnissvæði magna ljósið meira, meðan þunn efnissvæði breyta litlu um ljósmerkið. Þessi áhrif hafa ekki mikil áhrif við lág rauðvik ($z \sim 0.5$) en við hærri rauðvik, $z > 1$, getur óvissan aukist allverulega, allt upp í 25% (sjá [14]). Þó að leiðrétta megí fyrir þessi áhrif með athugunum á bjögun vetrarbrauta nálægt sjónlínu

hverrar sprengistjörnu fyrir sig, þá krefst það stórs úrtaks sprengistjarna við $z > 1$, til að fá ásættanlegt mat á meðalbjögun þessa óvissupáttar.

Þróun Athuganir hafa sýnt fram á að sprengistjörnur að gerð Ia þróast með aldrinum. Ljósferlar þeirra eru því háðir aldri hýsilvetrarbrautar þeirra. Sprengistjörnur í eldri hýsilvetrarbrautum (*e. early-type*) - vetrarbrautir með minni nýmyndun stjarna - reynast bæði rísa að ljóshámarki og dofna fyrr en yngri vetrarbrautir (*e. late-type*) með virkri nýmyndun stjarna. Hins vegar eftir leiðréttingar á lögun ljósferlanna, eins og rætt var um að ofan, reynast allar skekkjur sem rekja mætti til gerð og aldur hýsilvetrarbrauta þeirra hverfa, sem ýtir aftur undir notkun þeirra til fjarlægðamælinga í heimsfræði.

3.3 Mat á líkönum

Í þessum hluta eru tvenn gagnasöfn skoðuð, kölluð *Gögn (2004)* og *Union 2.1*:

Gögn (2004): Samansafn birtustigs-rauðviksmælinga fyrir sprengistjörnur að gerð Ia frá ýmsum rannsóknarhópum allt fram til ársins 2004, með alls 157 sprengistjörnur. Gögnin fengust frá leiðbeinanda.

Union 2.1 Samansafn birtustigs-rauðviksmælinga fyrir sprengistjörnur að gerð Ia frá ýmsum rannsóknarhópum allt fram til ársins 2011, með alls 580 sprengistjörnur. Gögn fengin frá *Supernova Cosmology Project*, sjá [17].

Mátuð eru fræðileg líkön við bæði gagnasöfnin með jöfnum 15 og 17. Þrjú líkön (sjá töflu 1 að neðan) eru mátuð við hvort gagnasafnið, og fundið hvert þessara þriggja líkana lýsir gögnunum best, með hjálp χ^2 -tölfræði (sjá jöfnur 18 og 19).

Tafla 1: Skilgreining líkana sem eru mátuð við sprengistjörnugögn. Líkan I og II gera ráð fyrir flötum alheimi, meðan líkan III gerir ráð fyrir neikvætt sveigðum alheimi og engum heimsfasta.

Líkan	Ω_m	Ω_Λ
I	0.3	0.7
II	1.0	0.0
III	0.3	0.0

Á myndunum að neðan sjáum við líkönin þrjú í töflu 1 borin saman við gagnasöfnin tvö.

Mynd 5: Fjarlægðarstuðull $\mu \equiv m - M$ sem fall af rauðviki z sýndur fyrir bæði gagnasöfnin, ásamt líkansgildum

Mynd 6: Fjarlægðarstuðull $\mu \equiv m - M$ sem fall af rauðviki z á log-skala sýndur fyrir bæði gagnasöfnin, ásamt líkansgildum. Einnig eru sýnd frávik líkans I og II og sprengistjörnugagnanna frá líkani III.

Mynd 7: Sýnir mynd 6b borið saman við gögn Perlmutter, Reiss og Schimidt et al. sem birt voru árin 1998-1999⁸.

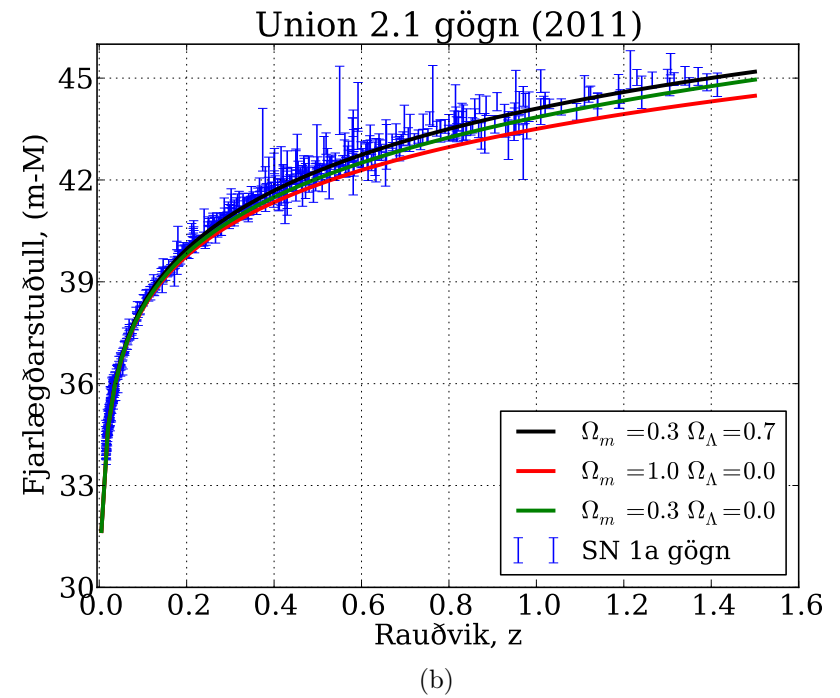
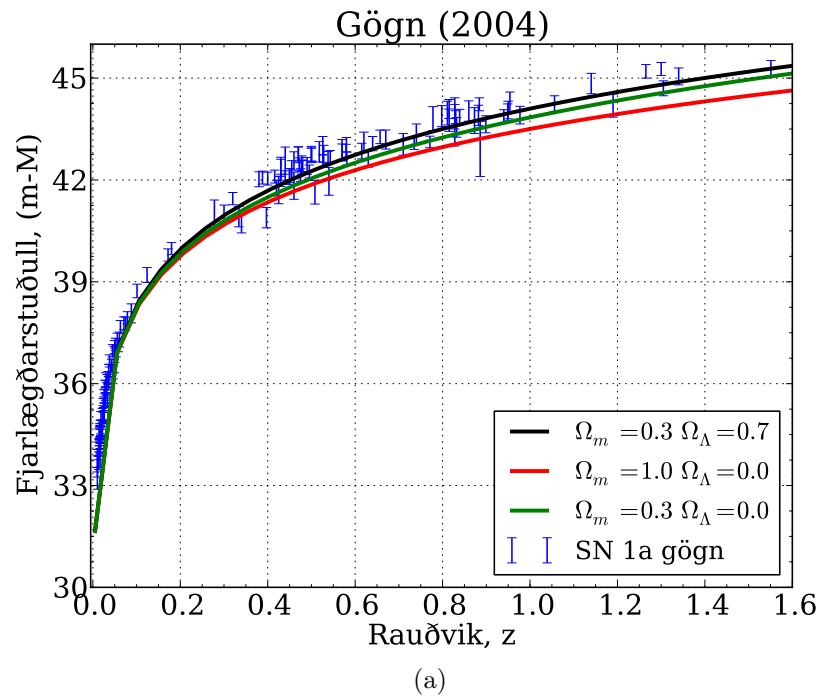
Í töflu 2 er tekin saman minnkaði sennileikametillinn χ^2_ν fyrir líkan I-III. Líkan I reynist lýsa gögnunum best fyrir bæði gagnasöfnin. χ^2_ν gildin fyrir Union 2.1 gagnasafnið reynist lægra í öllum tilvikum. Sérstaklega er tekið fram á heimasíðu rannsóknarhópsins Supernova Cosmology Project að Union 2.1 gagnasafnið innihaldi einungis vel mældar og vel kvarðaðar sprengistjörnur að gerð Ia.

Tafla 2: Samanburður á χ^2_ν -gildum fyrir líkön I-III fyrir bæði gagnasöfnin. Líkan I reynist lýsa báðum gagnasöfnunum best.

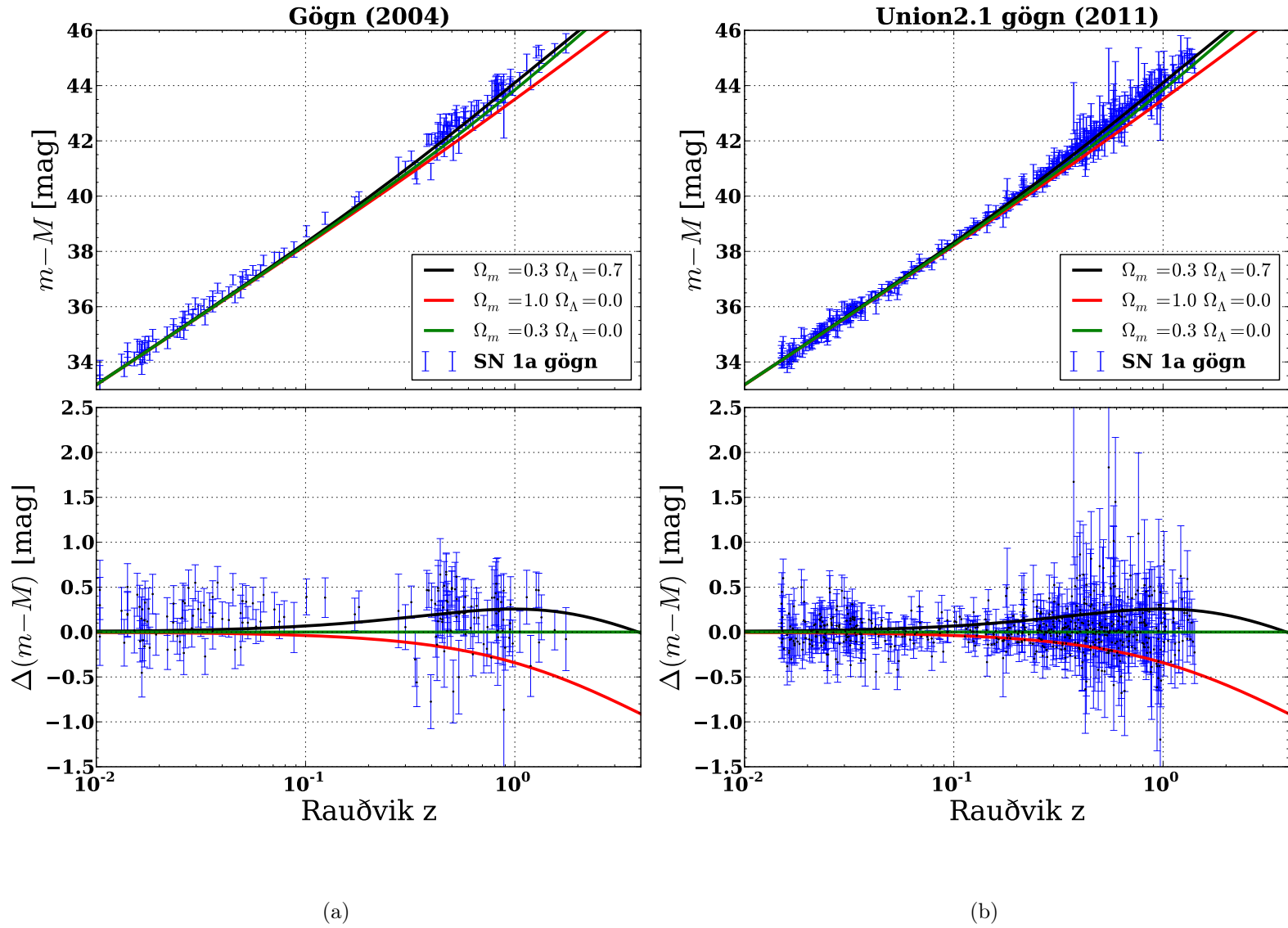
	χ^2_ν		
	I	II	III
Gögn (2004)	1.79	5.73	3.22
Union 2.1 (2011)	0.98	3.70	1.77

Af myndunum 5-7 að dæma eru gögnin í ósamræmi við flatan alheim með $\Lambda = 0$. Perlmutter et al. segja enn frekar að gögnin bendi til jákvæðs heimsfasta með 99% öryggi, þ.e. $P(\Lambda > 0) = 99\%$ [1].

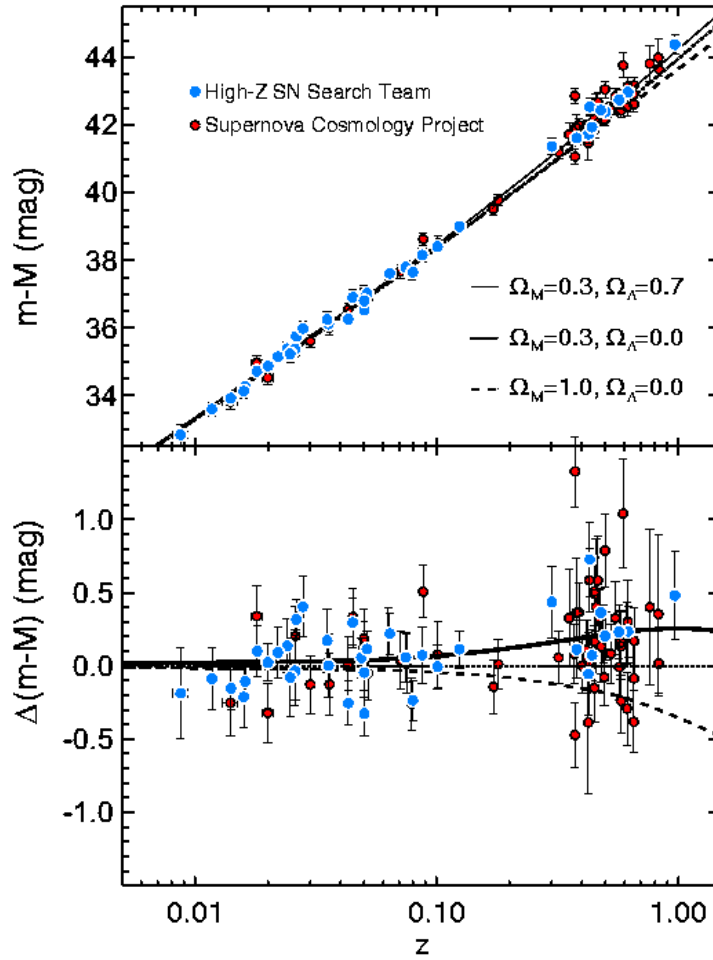
⁸Þessi gögn færðu þeim Nóbelsverðlaunin árið 2011.



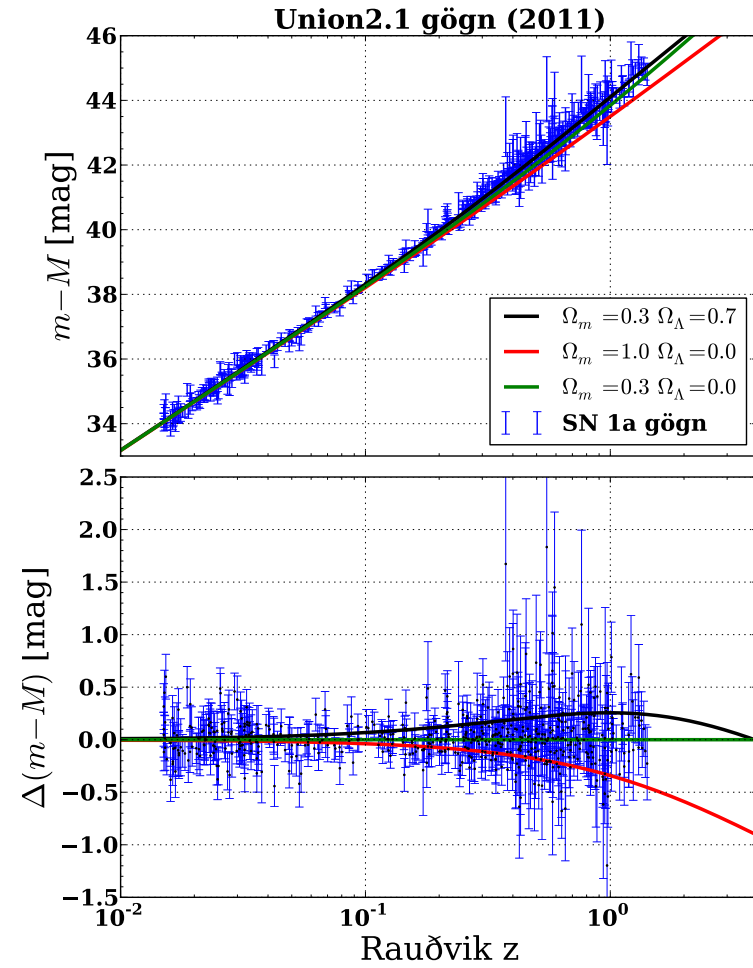
Mynd 5: Fjarlægðarstuðull sem fall af rauðviki fyrir (a) *Gögn (2004)* gagnasafnið og (b) Union 2.1 gagnasafnið. Þrjú fræðileg heimsfræðilíkön eru borin saman við gagnasöfnin tvö.



Mynd 6: Fjarlægðarstuðull sem fall af rauðviki á *log*-skala fyrir (a) *Gögn (2004)* gagnasafnið og (b) Union 2.1 gagnasafnið. Þrjú fræðileg heimsfræðilíkön eru borin saman við gagnasöfnin tvö. Ennfremur eru sýnd frávik líkans I og II og sprengistjörnugagnanna frá líkani III.



(a) Reiss et al. 1998



(b) Union 2.1

Mynd 7: Samanburður (a) Sprengistjörnugagna Perlmutter, Reiss og Schmidt et al. sem birt voru árin 1998-1999 og (b) Union 2.1 gagnasafnsins. Töluvert af gagnapunktum hafa bæst í hópinn sem gera okkur betur kleyft að meta gildi bæði Ω_Λ og Ω_m . *Vinstri myndin er fengin frá heimasíðu High-Z verkefnisins, [18].*

4 Markov-keðju Monte Carlo líkanagerð

Í heimsfræði koma oft upp margvíð og flókin heildi sem erfitt getur reynst að reikna með hefðbundnum tölulegum aðferðum. Í slíkum tilfellum er oft gripið til Monte Carlo (MC) reiknirit. Slík reiknirit byggjast á slembiferlum sem nota má til að nálga heildi sem oft eru væntigildi líkindadreifinga. Þegar Monte-Carlo reiknirit nota Markov-keðjur er venja að kalla þau Markov-keðju Monte Carlo, yfirleitt skammstafað MCMC.

Í hefðbundnum tölulegum heildunaraðferðum (t.d. Simpson-reglan) minnkar samleitnihraði þeirra hratt með fjölgandi viddum og reiknitíminn eykst með vísisvaxtarfalli. Þetta á hins vegar ekki við um Monte Carlo reikninga. Samleitnihraði slíkra aðferða reynist mikið til óháður fjölda vídda sem skoðuð eru; er $O(n^{-1/2})$ fyrir gefinn fjölda ítrana, n , þ.e. ef ítranafjöldi er fjórfaldaður, helmingar það að meðaltali óvissur [19]. Skiljanlega hefur notkun Monte Carlo aðferða aukist með batnandi tölvubúnaði - tölvur eiga sífellt auðveldara með að framkvæma fleiri reikniaðgerðir á gefnum tíma. Fyrir tíma tölvunnar var þrautinni þyngra að líkja eftir slembiferlum, en nú má yfirleitt finna þar til gerða pakka í flestum forritunarmálum sem dregið geta úrtök úr helstu líkindadreifingum.

Hér á eftir fylgir stutt kynning á helstu hugtökum sem mér þótti nauðsynleg til að skilja í stórum dráttum hvað felst í MCMC aðferðum, einkum hvað varðar Metropolis-Hastings reikniritið sem er vinsæl slík útfærsla. Áhugasömum lesendum er einkum bent á fyrirlestrarglósur I. A. Cosma et al. [19] fyrir frekari umræðu.

4.1 Grundvallaratriði

4.1.1 Markov-keðju Monte Carlo

Markov-keðju Monte Carlo er ein gerð Monte Carlo aðferða sem getur nálgad flóknar líkindadreifingar sem kölluð er markdreifing (*e. stationary distribution*). Hugmyndin þar er yfirleitt að draga stök úr einföldum líkindadreifingum sem auðvelt er að líkja eftir til að nálga flóknari líkindadreifingar. Stökin sem dregin eru mynda svokallaða Markov-keðju sem hoppar um í stikarúminu sem skoðað er. Hvar Markov-keðjan eyðir tíma sínum endurspeglar svo líkindaþéttleikann sem líkt er eftir.

Formlega er *Markov-keðja* röð slembistærða,

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)}, \dots \quad (22)$$

þannig að líkindaþéttleiki slembistærðarinnar $x^{(t+1)}$ á tíma $t+1$ er einungis háð ástandinu á undan, $x^{(t)}$ (sjá mynd 8a). Því er oft er sagt að Markov-keðjur hafi ekkert minni, því þróun Markov-keðju er einungis háð núverandi ástandi hennar. Líkur keðjunnar að fara frá núverandi ástandi $x^{(t)}$ í næsta ástand $x^{(t+1)}$ eru skilgreindar með svokölluðum færslulíkum, táknaðar $K(x^{(t+1)}|x^{(t)})$.

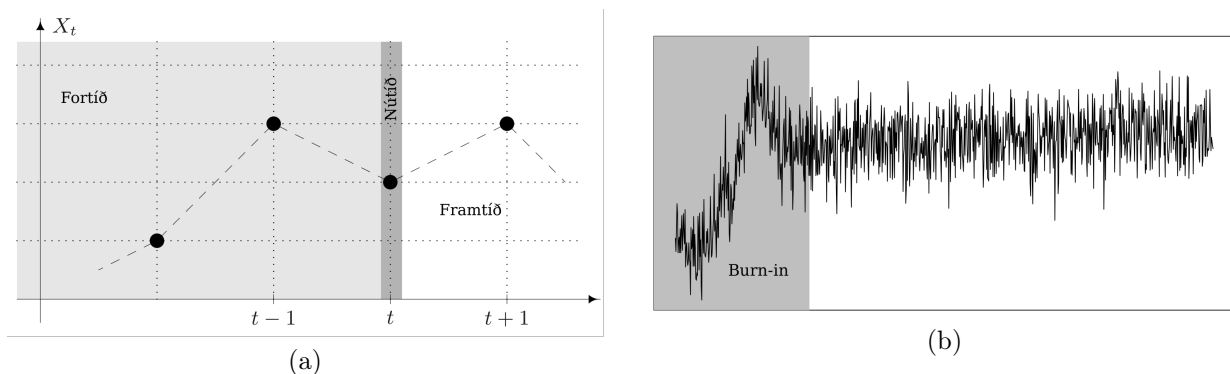
En er tryggt að keðjan sé samleitin að markdreifingunni, $P(x)$, dreifingunni sem við höfum áhuga á að nálga? Jú, undir vissum skilyrðum; Markov-keðjan þarf að uppfylla nákvæmt jafnvægi (*e. detailed balance*) sem stærðfræðilega má lýsa með

$$K(x^{(t+1)}|x^{(t)})P(x^{(t)}) = K(x^{(t)}|x^{(t+1)})P(x^{(t+1)}) \quad (23)$$

sem í grófum dráttum segir að færslurnar $x^{(t)} \rightarrow x^{(t+1)}$ og $x^{(t+1)} \rightarrow x^{(t)}$ eru jafnlíklegar⁹.

⁹Oft er sagt að Markov-keðjan sé þá tímaspeglanleg.

Sé þetta skilyrði uppfyllt er tryggt að Markov-keðjan sé samleitin að markdreifingunni, en ekkert er sagt til um hve mörg skref þarf til að fá góða nálgun. Slíkt vandamál er sýnt á mynd 8b; keðjan byrjar á handahófskenndum stað í líkindarúminu og eyðir fyrstu skrefunum í að leita að þungamiðju dreifingarinnar (gráa svæðið). Þegar þungamiðjan er fundin gefur hún úrtök sem gefa gott mat á dreifingunni. Gráa svæðið á mynd 8b, sem á ensku er kallað *burn-in period*, gefur ekki gott mat á dreifingunni og er yfirleitt hent.



Mynd 8: (a) Skref Markov-keðju: næsti punktur, x^{t+1} , á tímanum $t+1$ er einungis háður núverandi stöðu, x^t ; (b) Dæmi um *burn-in*: keðjan nær jafnvægisdreifingu eftir nokkur skref (gráa svæðið), þau skref eru ekki notuð við matið á markdreifingunni. Myndir fengnar frá I. A. Cosma et al. [19] og vinstri myndin staðfærð á íslensku.

Skoðum nú reiknirit sem útfærir Markov-keðju þar sem skilyrðið í jöfnu 23 er uppfyllt.

4.1.2 Metropolis-Hastings reikniritið

Metropolis-Hastings reikniritið er vinsælt MCMC reiknirit, fyrst sett fram af Metropolis et al. [20] árið 1953 og síðar útvíkkað af Hastings [21] árið 1970.

Í stuttu máli má taka reikniritið saman á eftirfarandi hátt, þar sem gott er að hafa myndir 9a og b til hliðsjónar:

Byrjun: Líkja skal eftir dreifingunni $P(x)$ þar sem x er punktur í stikarúminu (oft margvitt). Valið er fall $f(x) \propto P(x)$. Því næst er valinn handahófskenndur byrjunarpunktur $x^{(0)}$ í stikarúminu fyrir keðjuna. Valin er uppástungudreifing, táknuð $Q(x^{(t+1)}|x^{(t)})$ (e. *proposal density*), sem er háð núverandi staðsetningu keðjunnar fyrir hverja ítrun. Um uppástungudreifinguna verður að gilda að hún sé samhverf, þ.e. $Q(x^{(t+1)}|x^{(t)}) = Q(x^{(t)}|x^{(t+1)})$, til að uppfylla skilyrðið um *nákvæmt jafnvægi*. Venjulega er Q valin sem Gaussdreifing með miðju í $x^{(t)}$ með dreifni σ sem gefur mat á meðalskrefstærðinni sem lögð er til í hvert skipti. Slíkt val tryggir að líklegra er að stinga upp á fulltrúum nálægt núverandi ástandi frekar en þeim sem fjærri eru¹⁰.

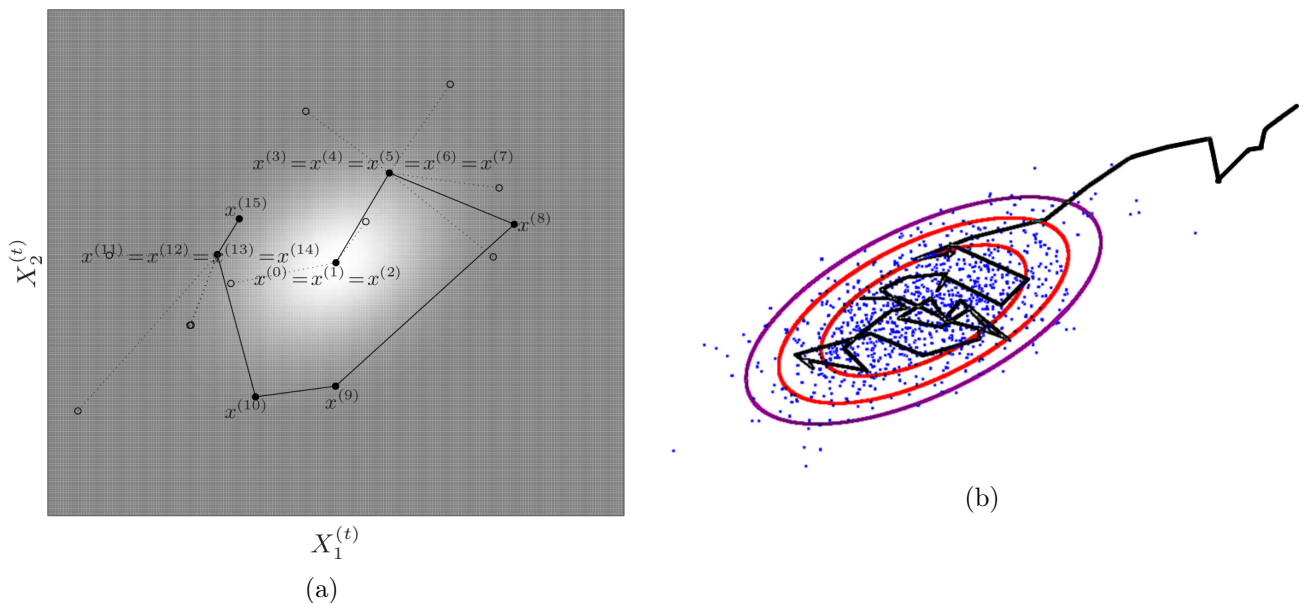
Ítrun t : Við hverja ítrun t eru framkvæmd nokkur skref:

- Dreginn er fulltrúi x^* úr uppástungudreifingunni $Q(x^*|x^{(t)})$.

¹⁰Slíkt slembiferli er oft kallað á ensku *random walk*.

- Reiknað er viðtökuhlutfall (*e. acceptance ratio*) $\alpha = f(x^*)/f(x^{(t)})$ sem er notað til að ákveða hvort fulltrúinn verði samþykktur. Þar sem $f \propto P$ þá höfum við að $\alpha = f(x^*)/f(x^{(t)}) = P(x^*)/P(x^{(t)})$.
- **Ef** $\alpha \geq 1$ þá er fulltrúinn líklegri en $x^{(t)}$ og hann er sjálfkrafa samþykktur; $x^{(t+1)} = x^*$.
- **Ef ekki**, þá er fulltrúinn samþykktur með líkum $0 < \alpha < 1$, þ.e. valin er tala a úr jafnaðardreifingu milli 0 og 1 og ef $a < \alpha$ þá er fulltrúinn samþykktur, þ.e. $x^{(t+1)} = x^*$, annars hafnað, þ.e. $x^{(t+1)} = x^{(t)}$.

Lok: Reikniritið er svo stöðvað þegar nægar ítranir eru komnar, en þar þarf að hafa í huga *burn-in*. Hversu mörgum fyrstu stökunum þarf að henda er metið eftir á. Þegar þeim hefur verið hent eru stökin yfirleitt talin saman í hópum í stöpla til að nálgast dreifinguna $P(x)$.



Mynd 9: Dæmi um tvívíðar Markov-keðjur reiknaðar með Metropolis-Hastings reikniritinu (a) Fylltu hringirnir tákna samþykkt skref keðjunnar, opnir hringir ósamþykkt; (b) Fyrstu skref eru sýnd með svörtum strikum, eftirfarandi skref eru sýnd með bláum punktum. *Burn-in* skref eru auðséð, keðjan hefur byrjað aðeins fyrir utan þungamiðju dreifingarinnar. *Myndir fengnar frá I. A. Cosma et al. [19]*

Þetta reiknirit myndar því Markov-keðju sem hoppar um í stikarúminu, samþykkir stundum færslur og er stundum kyrr. Ef stungið er upp á fulltrúa úr uppástungudreifingunni sem er líklegri en núverandi staða (líkindaþéttleikinn $P(x)$ er hærri þar) er hann sjálfkrafa samþykktur. Ef hins vegar stungið er upp á ólíklegri fulltrúa er hann samþykktur stundum, nánar tiltekið með líkum α . Þetta tryggir að keðjan leitar til að eyða mestum tíma á svæðum þar sem líkindaþéttleikinn $P(x)$ er meiri, en fer þó stundum til

að skoða ólíklegri svæði dreifingarinnar. Tryggt er að Markov-keðjan stefni að lokum á markdreifinguna $P(x)$.

Helstu kostir og gallar reikniritsins eru eftirfarandi:

Kostir Hægt er að nálgast hvaða dreifingu sem er svo lengi sem finna megir fall $f \propto P$. Að reikna einungis f en ekki P sparar oft mikla reikninga sem fólgnir eru í normunarstuðlum á P .

Gallar Stökin sem dregin eru úr dreifingunni eru ekki óháð; hvert stak er háð því sem kom á undan. Fylgnin milli hlekkja keðjunnar er sérstaklega áberandi ef fulltrúinn sem stungið er upp á er ekki samþykktur en þá eru tvö samliggjandi stök nákvæmlega sami punkturinn í stikarúminu. Þetta er oft leiðrétt með því að *þynna keðjuna* en þá eru einungis notuð stök með ákveðnu millibili úr keðjunni notuð.

4.2 Notkun í tengslum við sprengistjörnur

Hvernig tengjum við þessi fræði um Markov-keðju Monte Carlo aðferðir við gögn um sprengistjörnur að gerð Ia?

Slíkt má gera með reglu Bayes.

Regla Bayes gefur líkindamat á hversu vel safn stika, θ , í líkani lýsa gefnum gögnum, μ . Þetta líkindamat er kölluð eftirádreifing (*e. posterior distribution*) og er táknuð með $p(\theta|\mu)$. En samkvæmt reglu Bayes má tengja eftirádreifinguna við sennileikafall (*e. likelihood*), $p(\mu|\theta)$, og fyrirframskorður stikanna, (*e. priors*), $p(\theta)$ með eftirfarandi hætti;

$$p(\theta|\mu) = \frac{p(\mu|\theta)p(\theta)}{p(\mu)} \quad (24)$$

þar sem $p(\mu)$ er normunarstuðull háður gögnunum sem notuð eru.

Sprengistjörnugögnin sem unnið er með (Union 2.1, köllum þau μ_0) eru í meginatriðum háð þremur stikum; H_0 , Ω_m og Ω_Λ . Með hliðsjón að jöfnu 24 að ofan má því rita,

$$p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda|\mu_0) = \frac{p(\mu_0|H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)}{p(\mu_0)}. \quad (25)$$

Með stuttlegri útleiðslu (sjá nánar í viðauka A) getum við sýnt fram á að eftirálíkurnar fyrir stikana tvo sem við höfum áhuga á (Ω_m og Ω_Λ) megir gefa með

$$\begin{aligned} p(\Omega_m, \Omega_\Lambda|\mu_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda|\mu_0) dH_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) d\Omega_m d\Omega_\Lambda dH_0} dH_0 \end{aligned} \quad (26)$$

þar sem fallið, $\chi^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \mu_0)$, er háð stikunum sem skoðaðir eru, ásamt gögnunum μ_0 ;

$$\chi^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \mu_0) = \sum_i \frac{[\mu_{p,i}(z_i; H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) - \mu_{0,i}]^2}{\sigma_{\mu_{0,i}}^2}. \quad (27)$$

4.3 CosmoMC

Í fyrstu prófaði ég að heilda jöfnu 26 að framan með hefðbundnum tölulegum heildunar- aðferðum í forritunarmálinu `python`. Sú útfærsla reyndist ekki vel; vandamál reyndust með samleitni og óvissur varðandi normunarstuðullinn - stuðullinn fyrir neðan brotastríkið í jöfnu 26. Leitað hvort slíkir reikningar hefðu verið útfærðir af öðrum í sama tilgangi og það höfðu heimsfræðingarnir Anthony Lewis og Sarah Bridle gert, með forritinu *CosmoMC* sem stendur fyrir *Cosmological Monte Carlo*.

Forritið útfærir Metropolis-Hastings reikniritið með Gaussísku uppástungufalli í forritunarmálinu `Fortran` og getur metið gildi ýmissa heimsfræðistika út frá ólíkum gagnasöfnum. Einnig býður það upp á öll tilsvareandi töl til greiningar á keðjunum og til að teikna upp ýmis gröf í ein- tví- og þrívídd. Forritið er mjög vinsæl MCMC útfærsla fyrir heimsfræðilíkön og hefur verið notað í ýmsum heimsfræðitengdum greinum en vitnað hefur verið í greinina [22] sem lýsir forritinu hátt í 1200 sinnum.

Reikningarnir sem forritið framkvæmir eru ýtarlegir og krefjast tölvu með mikla reiknigetu ef spara skal tíma. Forritið var prófað á almennri borðtölvu. Þar var einungis raunhæft að framkvæma reikninga á einni keðju í einu og varð reiknitíminn því of langur. Því var sótt um aðgang að tölvuþyrpingunni, *Jötni*, í umsjón Anil Thapa, hjá Háskóla Íslands. Þetta gerði því kleift að keyra margar keðjur samtímis en forritið styður samhliða vinnslu (bæði MPI og OpenMP)¹¹, reiknitíminn styttest og gagnaúrvinnslan varð mun skilvirkari. Að auki var prófað að þýða forritið bæði með *gfortran*-þýðandanum og *ifort*-þýðandanum, *ifort*-uppsetningin reyndist hátt í tvöfalt hraðari.

Nálgast má forritið frítt á netinu á heimasíðu annars höfundarins, Antony Lewis¹². Þar má finna stuttlegar uppsetningarleiðbeiningar sem hentar frekar þeim með góðan bakgrunn í að þýða `Fortran` forrit. Þar sem ég hafði engan bakgrunn í þýðingu slíkra forrita lenti ég í erfiðleikum við að setja forritið upp. Því ákvað ég að taka saman leiðarvísi að uppsetningu á forritinu en hann má sjá í viðauka B.

Forritið býður upp á notkun ýmissa gagnasafna á ólíkum fyrirbærum í heimsfræði; t.a.m. mælingum á bakgrunnsgeislun alheimsins (WMAP, COBE o.fl.), langbylgjusveiflum þungeinda (*e. baryonic acoustic oscillations*) og sprengistjörnumælingum að gerð Ia. Hægt er að velja á milli gagnasafnanna að vild og nota má eitt gagnasafn eða mörg gagnasöfn samtímis þegar keyrslur eru framkvæmdar.

4.3.1 Stíkar og inntök

Grunnstíkar sem forritið hníkar yfir eru 13 talsins og tekur hver stíki inn ákveðin inntaksgildi. Taka þarf inn bæði há- og lággildi stíkans, ásamt miðgildi hans en þessi inntök eru notuð sem fyrirframskorður (dæmi um inntaksgildi má sjá í töflu 4). Einnig þarf að gefa upp skrefstærð sem uppástungudreifingin í Metropolis-Hastings reikniritinu notar. Ekki er æskilegt að gera ráð fyrir of þröngum né of víðum fyrirframskorðum. Hæfilega rúmar skorður tryggja að Markov-keðjurnar skoði viðkomandi stíkarúm á nægilega stóru svæði, meðan of þröngar fyrirframskorður gefa engar upplýsingar um óskoðuð svæði í dreifingunni og of víðar skorður koma til með að eyða reiknitíma í óáhugaverð svæði sem jafnvel

¹¹Gróflega sagt hjálpar *OpenMP* við vinnslu mismunandi þráða í *sömu tölvunni* eða *nóðu* meðan *OpenMPI* gerir því kleift að framkvæma samhliða vinnslu milli *mismunandi* tölva/nóða.

¹²Sjá vefslóð: <http://cosmologist.info/cosmomc/>

gætu bjagað lokaniðurstöðuna.

Í töflu 3 eru taldir upp þeir grunnstikar forritsins sem áhugaverðir þóttu í þessu verkefni. Ekki þótti ástæða að telja upp alla stika forritsins í töflu 3 þar sem hinir stikarnir tengdust flestir heimsfræði sem ég hafði ekki tók á að kynnast við þessa vinnu.

Tafla 3: Grunnstikar *CosmoMC* sem áhugaverðir þóttu í þessu verkefni. Þéttustiki hulduorkunnar, Ω_Λ er leiddur út frá öðrum grunnstikum. Rætt er um stjörnumerktu stikana í næsta undirkafla.

Nafn	Tákn
Þéttleiki þungeinda	$\Omega_b h^2$
Þéttleiki huldufnis	$\Omega_c h^2$
Sveigjustiki	$\Omega_K \equiv 1 - \Omega_{\text{tot}}$
Deyfiþykkt endurröfunar	τ^*
Hlutfall sjónbaugs og hornbils	θ^*

Þéttustiki hulduorkunnar er ekki einn af grunnstikunum og er hann leiddur út frá öðrum stikum. Gert er ráð fyrir að,

$$\Omega_K + \Omega_\Lambda + \Omega_m = 1 \quad (28)$$

þar sem Ω_m er þéttustiki alls efnis í alheiminum,

$$\Omega_m \equiv \Omega_c + \Omega_b \quad (29)$$

og þar með er Ω_Λ -stikinn auðfundinn.

4.4 Niðurstöður

Í þessum hluta eru tvær keyrslur CosmoMC, keyrslur A og B, skoðaðar með tilliti til tveggja mismunandi gagnasafna; annars vegar reikninga sem nota sprengistjörnur úr Union 1 gagnasafninu¹³ (keyrsla A) og hins vegar niðurstöður út frá mælingum WMAP-9 á örbylgjukliðnum (keyrsla B). Í töflu 4 eru inntök beggja keyrslana tekin saman.

¹³Union 1 gagnasafnið er fyrirrennari Union 2.1 gagnasafnsins sem notað var í kafla 3, með gögn um 307 sprengistjörnum að gerð Ia. Þessi útgáfa CosmoMC bauð upp á Union 1 gagnasafnið, meðan nýjasta útgáfan býður upp á Union 2.1.

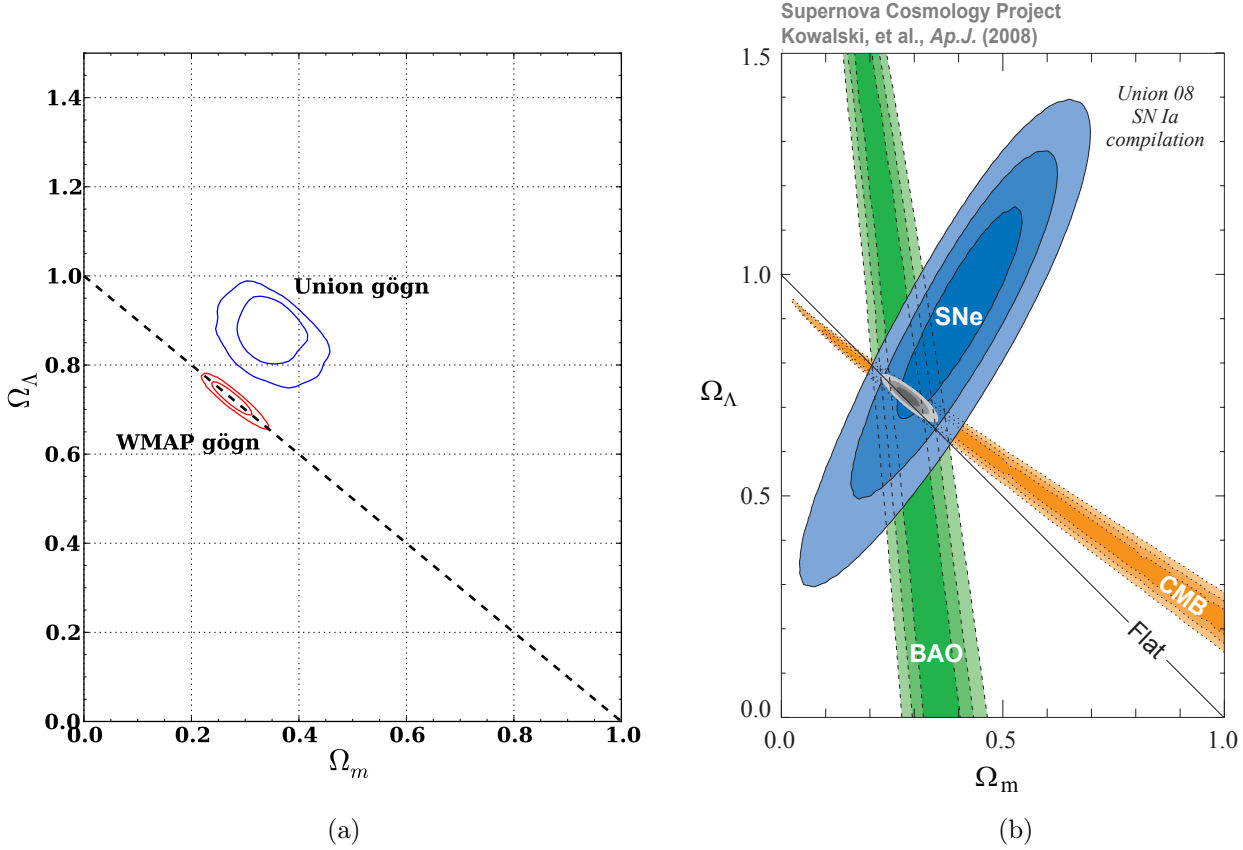
Tafla 4: Samantekt á inntökum keyrslu A (sprengistjörnugögn) og B (WMAP-9). Báðar keyrslur gera ráð fyrir að hulduorkunni sé lýst sem heimsfasta, með ástandsstikann $w = -1$.

Gagnasafn	Stiki	Miðgildi	Lággildi	Hággildi	Skrefstærð
Keyrsla A	$\Omega_b h^2$	0.0223	0.0005	0.4	0.3
Union	$\Omega_c h^2$	0.105	0.0001	0.99	0.3
	Ω_k	0	-1.3	1.3	0.3
	w	-1	-1	-1	0
	θ	1.04	0.03	40	0.5
	τ	0.088	0.05	0.1	0.001
Keyrsla B	$\Omega_b h^2$	0.0223	0.005	0.1	0.001
WMAP	$\Omega_c h^2$	0.105	0.01	0.99	0.01
	Ω_k	0	0	0	0
	w	-1	-1	-1	0
	θ	1.04	0.5	10	0.002
	τ	0.09	0.01	0.8	0.03

Mynd 10 sýnir niðurstöður keyrsla A og B (68.3% og 95.4% öryggisbil) í Ω_m - Ω_Λ planinu, borið saman við niðurstöður Kowalski et al. [23] á Union gagnasafninu. Á hægri myndinni eru sýndar niðurstöður Kowalski et al. frá gögnum um sprengistjörnur að gerð Ia (SNe - blátt), mælingum á örbylgjukliðnum (CMB - rauðgult) og mælingum á langbylgjusveiflum þungeinda (BAO - grænt). Samanborið við niðurstöður þeirra þá virðist keyrsla A staðsett á áþekktum stað þó vængir öryggisbilanna teygi sig ekki jafn langt upp og niður. Inntaksgildi þéttustikanna sem koma fyrir í töflu 4 ættu þó vel að leyfa slíka vængi. Spurning er þá hvort keðjan hafi ekki náð að skoða allt stikarúmið á reiknitímanum sem hún fékk, en hámark var sett á 200.000 ítranir. Einnig benti höfundur forritsins á notkun aðferðar sem heitir vegin úrtaksskönnun (*e. importance sampling*) sem einnig má nota til að skoða margar keðjur samtímis. Áhugavert væri að athuga slíkt við annað tækifæri.

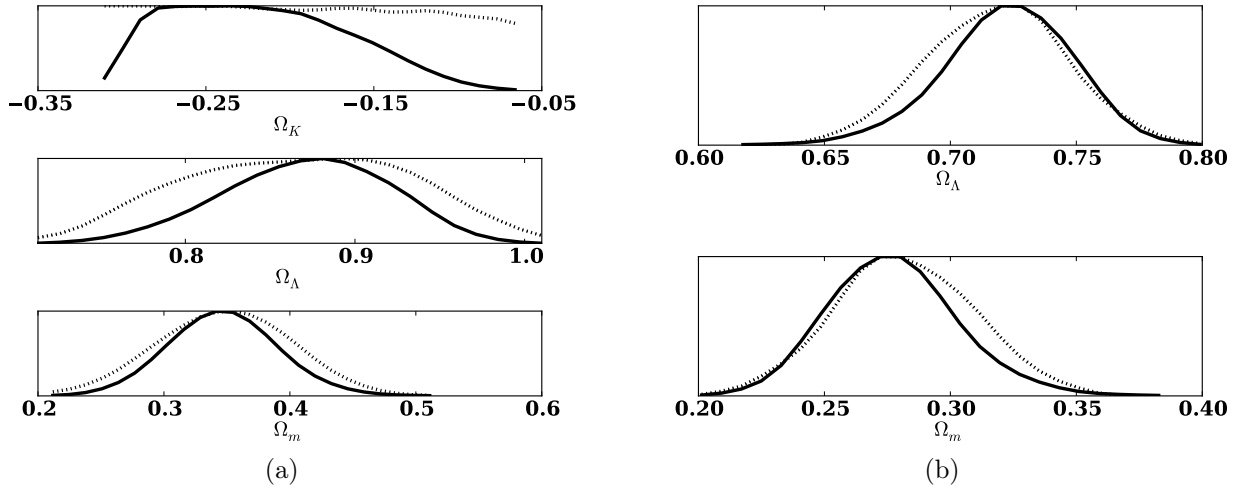
Á hinn bóginn virðast niðurstöður keyrslu B samsvara ágætlega niðurstöðum gráa svæðis Kowalski et al. en það svæði er byggt á reikningum sem nýta mælingar á öllum þremur fyrirbærunum samtímis (SNe+CMB+BAO). Ástæða þess að keyrsla B, sem einungis notar WMAP-9 mælingar, gefur svona þröngt svæði er líklega að gert ráð fyrir heldur þröngum skorðum.

Í töflu 3 eru tveir stjörnumerktir stikar, τ^* , og θ^* sem einnig koma fram í töflu 4. Við fyrstu keyrsluprófanir athugaði ég ekki þessa stika sérstaklega og hafði inntaksgildi þeirra óbreytt frá grunngildunum sem fylgdu með uppsetningu forritsins. Þau inntaksgildi reyndust ekki vel til reikninga á Union sprengistjörnugögnunum; samleitni gekk stundum illa, og niðurstöður samsvöruðu lítið niðurstöðum sem borið var saman við (sjá myndir og umræðu að neðan). Eftir að hafa borið þetta vandamál undir höfund forritsins, benti hann mér á að athuga þessa stika nánar sem sennilega hefðu óheppilegar inntaksskorður fyrir þá reikninga. Þessar ábendingar komu að gagni og eftir frekari prófanir þá sá ég að τ stikinn var of víður og hafði of stóra skrefstærð, meðan θ var of þröngur með of litla skrefstærð. Eftir þær breytingar urðu niðurstöður meira í samræmi við það sem búast mátti við.



Mynd 10: Samanburður á (a) niðurstöðum keyrsla A og B með 68.3% og 95.4% öryggisbilum (b) og niðurstöðum Kowalski et al. með 68.3%, 95.4% og 99.7% öryggisbilum. Mynd Kowalski et al. er fengin frá [23].

Mynd 11 sýnir samanburð á einvíðum líkindadreifingum sem fengust úr keyrslum A og B. Punktaferlarnir tákna reiknaðan meðal-sennileika stikans sem skoðaður er, meðan sléttu ferlarnir tákna jaðardreifingu (*e. marginalized distribution*) hans. Höfundur forritsins nefnir að fyrir Gauss-dreifingar ættu þessir ferlar að falla saman. Við sjáum að fyrir keyrslu A ber punkta-og sléttu ferlunum ágætlega saman fyrir Ω_Λ og Ω_m en illa saman fyrir Ω_k . Gildi Ω_Λ og Ω_m eru þó heldur stærri en búist var við með hágildi í $\Omega_\Lambda^A = 0.88$ og $\Omega_m^A = 0.35$. Ennfremur sjáum við að keyrsla A bendir til þess að $\Omega_k < 0$ þ.e. að heimurinn sé neikvætt sveigður. Sú niðurstaða er í ósamræmi við flestar nýjustu niðurstöður í heimsfræði (sjá t.d. [17, 22, 23]). Keyrsla B gerir beint ráð fyrir flötum alheimi $\Omega_k = 0$ líkt og sýnt er í töflu 3.



Mynd 11: Jaðardreifingar þéttustikanna sem skoðaðir eru fyrir (a) keyrslu A og (b) keyrslu B. Punktaferlarnir tákna reiknaðan meðal-sennileika, meðan sléttu ferlarnir tákna jaðardreifingu stikans sem skoðaður er. Höfundur forritsins tekur fram að vísvitandi sé ekki kvarði á y-ás grafanna, þar sem í slíkum jaðardreifi-gröfum sé tilgangur þeirra einungis að lýsa afstæðri dreifingu stikanna. Í keyrslu B var gert ráð fyrir að $\Omega_k = 0$.

Til samanburðar við keyrslu B eru formlegar niðurstöður WMAP-9 verkefnisins eftirfarandi,

$$\Omega_\Lambda^{\text{WMAP}} = 0.721 \pm 0.025 \quad \Omega_m^{\text{WMAP}} = 0.2793 \pm 0.0254 \quad \Omega_k^{\text{WMAP}} = -0.037^{+0.044}_{-0.042}. \quad (30)$$

Keyrsla B reynist vel í samræmi við þessi gildi eins og sést á mynd 11b.

Að lokum sjáum við þá að keyrsla B sem nýtir gögn frá WMAP-9 verkefninu reynast samrýmast betur niðurstöðum sem borið var saman við. Fróðlegt væri að skoða hvaða áhrif það hefði að breyta stikunum enn frekar í keyrslu A og jafnvel athuga aðra stika sem gætu mögulega haft áhrif á niðurstöðurnar en látnir voru kyrrt liggja.

5 Lokaorð

Skilningur okkar á fortíð alheimsins nær frá upphafi¹⁴ til dagsins í dag og spágeta okkar um framtíð og endalok hans hefur aukist gífurlega á síðustu árum og áratugum. Enn vantar þó margt í heildarmyndina. Mælingar benda til þess að við byggjum því sem næst flatan alheim og að sýnilegt efni sé einungis brot (um 4%) af heildarþéttleika hans. Afgangurinn samanstendur að mestu úr *hulduefni* og *hulduorku*, fyrirbærum sem enn eru mjög torskilin.

Í þessu verkefni voru tvær aðferðir notaðar til athugunar á mælingum tengdum hulduorku og þéttustika hennar. Í fyrsta lagi, að nýta sprengistjörnur að gerð Ia sem staðlanleg kerti og bera saman fræðileg líkön af fjarlægðarstuðli þeirra sem falli af rauðviki, við niðurstöður mæligagna síðustu áratuga. Þrjú heimsfræðilíkön með mismunandi þéttustikum Ω_m og Ω_Λ voru athuguð, og reyndist líkanið með $(\Omega_\Lambda, \Omega_m) = (0.3, 0.7)$ lýsa sprengistjörnu-gögnunum best - hulduorkan reynist meginuppistaða alheimsins.

Í öðru lagi var Markov-keðju Monte Carlo reiknirit notað með hjálp forritsins *CosmoMC* til að gefa mat á þéttustika hulduorkunnar. Athugaðar voru bæði niðurstöður sem fengust frá sprengistjörnugagnasafninu, Union, og þær bornar saman við niðurstöður sem fengust út frá WMAP-9 mælingunum. WMAP-9 mælingarnar reyndust gefa nákvæmari og betri niðurstöðu en samsvarandi reikningar á sprengistjörnugögnunum.

Niðurstöður rannsókna á sprengistjörnum hafa umbylt heimsmyndinni. Við vitum nú með vissu að alheimurinn er að þenjast út og að útpensluhraði hans er að aukast. Allt lítur út fyrir að endalok hans verða heldur tómleg en það virðist nægur tími til stefnu áður en sá atburður á sér stað. Ljóð Hannesar Péturssonar um stjörnufræðinginn fræga, *Kópernikus*, sem á sínum tíma umbreytti heimsmyndinni finnst mér eiga einkum vel við í lok þessarar ritgerðar;

Á kvöldin undir kveiktu tungli og stjörnum
koma þeir heim af ökrunum. Lágan óm
ber vindur frá klukku er álútu höfði og hljóðir
halda þeir stígin hjá veðruðum róðukrossi með
feðranna gömlu, gnúðu amboð á herðum
en glaðir að allt skuli bundið svo föstum skorðum:
sjá, þarna tungl og vindar, hér vegur og blóm.

Þeir vita' ekki að hann sem heilsar þeim oft á daginn
hjó þessa jörð af feyskinni rót – og henti
sem litlum steini langt út í myrkur og tóm.

¹⁴Nánar tiltekið frá Plancktímanum, $t_P \approx 5.4 \times 10^{-44} s$.

Heimildir

- [1] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and Supernova Cosmology Project. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *ApJ*, 517:565–586, June 1999.
- [2] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *AJ*, 116:1009–1038, September 1998.
- [3] B. W. Carroll and D. A. Ostle. *An Introduction to Modern Astrophysics*. San Fransisco: Addison Wesley, 2007.
- [4] Guðmundsson, E. H. and Björnsson, G. . Hulduorka og þróun hins sýnilega alheims. *Eðlisfræði á Íslandi X*, 2002.
- [5] Guðmundsson, E. H. and Björnsson, G. . Dark Energy and the Observable Universe. *Ap.J.*, 2002.
- [6] L. Kruesi. Will dark energy tear the universe apart? *Astronomy*, 2009.
- [7] Ottó Eliasson og Páll Jakobsson. Gerð og þróun alheims. *Raust*, 2010.
- [8] M. S. Turner. Dark energy and the new cosmology. Sótt 15. mars af <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0108103v1>, 2001.
- [9] S. M Carroll. The cosmological constant. *Living Rev. Relativity*, 2001.
- [10] E. Linder. Finding a way to test for dark energy. Sótt 15. mars af <http://www.lbl.gov/Science-Articles/Archive/Phys-SNAP-dark-energy.html>, August 2005.
- [11] R. R Caldwell, M. Kamionkowski, and N. N. Weinberg. Phantom energy and cosmic doomsday. *Phys. Rev. Lett.*, 2003.
- [12] Saul Perlmutter. Supernovae, dark energy, and the accelerating universe. *Physics Today*, 2003.
- [13] S. Perlmutter, S. Gabi, G. Goldhaber, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, R. Pain, C. R. Pennypacker, I. A. Small, R. S. Ellis, R. G. McMahon, B. J. Boyle, P. S. Bunclark, D. Carter, M. J. Irwin, K. Glazebrook, H. J. M. Newberg, A. V. Filippenko, T. Matheson, M. Dopita, W. J. Couch, and Supernova Cosmology Project. Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First Seven Supernovae at $Z \geq 0.35$. *ApJ*, 483:565, July 1997.
- [14] S. Perlmutter and B. P. Schmidt. Measuring Cosmology with Supernovae. In K. Weiler, editor, *Supernovae and Gamma-Ray Bursters*, volume 598 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pages 195–217, 2003.
- [15] David W. Hogg. Distance measures in cosmology. 1999.
- [16] Norgaard-Nielsen and Hans U. The discovery of a type ia supernova at a redshift of 0.31. *Nature*, 339:523, 1989.
- [17] N. Suzuki, D. Rubin, C. Lidman, G. Aldering, R. Amanullah, K. Barbary, L. F. Barrientos, J. Botyanszki, M. Brodwin, N. Connolly, K. S. Dawson, A. Dey, M. Doi, M. Donahue, S. Deustua, P. Eisenhardt, E. Ellingson, L. Faccioli, V. Fadeyev, H. K. Fakhouri, A. S. Fruchter, D. G. Gilbank, M. D. Gladders, G. Goldhaber, A. H. Gonzalez, A. Goobar, A. Gude, T. Hattori, H. Hoekstra, E. Hsiao, X. Huang, Y. Ihara, M. J. Jee, D. Johnston, N. Kashikawa, B. Koester, K. Konishi, M. Kowalski, E. V. Linder, L. Lubin, J. Melbourne, J. Meyers, T. Morokuma, F. Munshi, C. Mullis, T. Oda, N. Panagia, S. Perlmutter, M. Postman, T. Pritchard, J. Rhodes, P. Ripoché, P. Rosati,

- D. J. Schlegel, A. Spadafora, S. A. Stanford, V. Stanishev, D. Stern, M. Strovink, N. Takanashi, K. Tokita, M. Wagner, L. Wang, N. Yasuda, H. K. C. Yee, and T. Supernova Cosmology Project. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above $z > 1$ and Building an Early-type-hosted Supernova Sample. *ApJ*, 746:85, February 2012.
- [18] Reiss et. al. The high z sn search. Sótt 15. mars af <http://www.cfa.harvard.edu/supernova/highz/figures/pictures.html>, 1998.
 - [19] Iona A. Cosma and Ludger Evers. Markov chains and monte carlo methods. Lecture Notes, University of Cambridge & University of Glasgow, March 2010.
 - [20] Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, and Edward Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21:1087–1092, 1953.
 - [21] W.K. Hastings. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, pages 97–109, 1970.
 - [22] A. Lewis and S. Bridle. Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach. 66(10):103511, November 2002.
 - [23] M. Kowalski, D. Rubin, G. Aldering, R. J. Agostinho, A. Amadon, R. Amanullah, C. Balland, K. Barbary, G. Blanc, P. J. Challis, A. Conley, N. V. Connolly, R. Covarrubias, K. S. Dawson, S. E. Deustua, R. Ellis, S. Fabbro, V. Fadeyev, X. Fan, B. Farris, G. Folatelli, B. L. Frye, G. Garavini, E. L. Gates, L. Germany, G. Goldhaber, B. Goldman, A. Goobar, D. E. Groom, J. Haissinski, D. Hardin, I. Hook, S. Kent, A. G. Kim, R. A. Knop, C. Lidman, E. V. Linder, J. Mendez, J. Meyers, G. J. Miller, M. Moniez, A. M. Mourão, H. Newberg, S. Nobili, P. E. Nugent, R. Pain, O. Perdureau, S. Perlmutter, M. M. Phillips, V. Prasad, R. Quimby, N. Regnault, J. Rich, E. P. Rubenstein, P. Ruiz-Lapuente, F. D. Santos, B. E. Schaefer, R. A. Schommer, R. C. Smith, A. M. Soderberg, A. L. Spadafora, L.-G. Strolger, M. Strovink, N. B. Suntzeff, N. Suzuki, R. C. Thomas, N. A. Walton, L. Wang, W. M. Wood-Vasey, J. L. Yun, and Supernova Cosmology Project. Improved Cosmological Constraints from New, Old, and Combined Supernova Data Sets. *Apj*, 686:749–778, October 2008.

A Útleiðsla á eftirálíkum

Hér fylgir stutt útleiðsla á eftirálíkunum sem nefnd eru í jöfnu 26 eins og Reiss et al. leiða út í [2].

Með reglu Bayes fæst eins og nefnt er í jöfnu 25

$$p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda | \boldsymbol{\mu}_0) = \frac{p(\boldsymbol{\mu}_0 | H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)}{p(\boldsymbol{\mu}_0)} \quad (31)$$

Nú gera Reiss et al. í [2] ráð fyrir að fyrirframlíkurnar, $p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)$, og normunarfastinn, $p(\boldsymbol{\mu}_0)$, séu fastar með tilliti til stikanna þriggja. Þar með fæst

$$p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda | \boldsymbol{\mu}_0) \propto p(\boldsymbol{\mu}_0 | H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) \quad (32)$$

Ennfremur fæst ef gert er ráð fyrir að fjarlægðarstikarnir séu óháðar normaldreifðar mælingar,

$$p(\boldsymbol{\mu}_0 | H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{\mu_0,i}^2)}} \exp \left\{ -\frac{[\mu_{p,i}(z_i; H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) - \mu_{0,i}]^2}{2\sigma_{\mu_0,i}^2} \right\} \quad (33)$$

þ.e. sennileikadreifingin verður margfeldi Gauss-falla. Notum skilgreininguna á χ^2 (sjá jöfnu 27) og ritum,

$$p(\boldsymbol{\mu}_0 | H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) = \left[\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{\mu_0,i}^2)}} \right] \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right) \quad (34)$$

Við sjáum þá að eftirádreifingin er háð fallinu χ^2 á eftirfarandi hátt,

$$p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda | \boldsymbol{\mu}_0) \propto \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right). \quad (35)$$

Eina sem eftir er er að staðla með normunarstuðli,

$$p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda | \boldsymbol{\mu}_0) = \frac{\exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right) d\Omega_m d\Omega_\Lambda dH_0} \quad (36)$$

Til að finna eftirálíkurnar óháðum Hubblestuðlinum, H_0 , tegrum við yfir öll möguleg gildi hans;¹⁵,

$$\begin{aligned} p(\Omega_m, \Omega_\Lambda | \boldsymbol{\mu}_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda | \boldsymbol{\mu}_0) dH_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right) d\Omega_m d\Omega_\Lambda dH_0} dH_0 \end{aligned} \quad (37)$$

þar sem gert er ráð fyrir að $\Omega_m < 0$ svari ekki til raunverulegs alheims.

¹⁵Þetta heitir á ensku að skoða *marginalize* yfir stikann H_0 .

B Uppsetning á *CosmoMC*

Ég ákvað að skrifa stuttan leiðarvísi að uppsetningu á *CosmoMC*, en þær eru af mjög skorum skammti á netinu. Þær upplýsingar sem fundust gerðu allar ráð fyrir kunnáttu á *fortran-makefile*-a. Ég hafði ekki komist í kynni við slíkt við byrjun þessa verkefnis. Þessi leiðarvísir ætti mögulega að geta hjálpað öðrum sem vildu setja upp þennan hugbúnað og sparað þannig tíma sem fór í það að átta sig á hinum ýmsu stikum sem *makefile*-arnir reiða sig á.

B.1 Lýsing á forritinu

CosmoMC er Markov-Keðju Monte-Carlo (MCMC) forrit sem skoðar heimsfræðilegt stikarúm.

Frekari upplýsingar má finna á heimasíðu forritsins,

<http://cosmologist.info/cosmomc/readme.html>

ásamt í grein Lewis et al [22] með ýtarlegri kynningu á ýmsum hugtökum sem eldri útgáfa af forritinu sem byggði sem notaðist við eldri WMAP gögn.

Í aðalmöppunni, *cosmomc/* eru tvö forrit:

- *cosmomc*
- *getdist*

Fyrra forritið, *cosmomc*, framkvæmir Monte-Carlo reikningana og býr til *.txt* skrár sem inniheldur Monte-Carlo keðjurnar. Seinna forritið, *getdist*, greinir *.txt* skrárnar og framkvæmir ýmsa tölfræðilega reikninga og getur skilað niðurstöðum í ýmsum einvíddar, tvívíddar og/eða þrívíddargröfum. Forritin eru óháð hvor öðru - nota mætti til dæmis *getdist* forritið á heimatölvu til að framkvæma tölfræðiútreikningana á tilbúnum keðjum, meðan fleiri keðjur eru reiknaðar með *cosmomc* á tölvuþyrpingu. Slíkt skipulag reyndist mér vel.

B.2 Leiðbeiningar við uppsetningu

Hér á eftir fylgja upplýsingar hvernig skal setja forritið upp á hefðbundinni tölvu eða tölvuþyrpingu sem keyrir linux (eða mögulega annað UNIX stýrikerfi).

B.2.1 Niðurhal

Fyrst þarf að skrá sig frítt á heimasíðu forritsins,

<http://cosmologist.info>

áður en hægt er að sækja sjálft *CosmoMC* forritið. Ná þarf að ná í eftirtaldar skrár, á heimasíðunni er bent á hvar þær megi finna:

- *cosmomc.tar.gz*
- *cfitsio3310.tar.gz*
- *wmap_likelihood_full_v5.tar.gz*

ATH: Það getur vel verið að nöfnin á skránum breytist við nýjar uppfærslur.
Miðað er þá við eftirfarandi skráaruppsetningu:

```
cosmomc/  
- cosmomc/  
  - [CosmoMC kóðinn]  
- cfitsio/  
- wmap_likelihood_data/  
  - wmap_likelihood_v5/  
    - [WMAP kóðinn]  
- myPackages/
```

þar sem mappan `myPackages` er búin til að halda utan um ýmis *library*.

B.2.2 cfitsio

CosmoMC reiðir sig á forritið `cfitsio`.

Uppsetning Keyra þarf eftirfarandi skipanir til að setja forritið upp (gert er ráð fyrir að unnið sé í möppunni `cosmomc/`;

```
$ tar -zxvf cfitsio3310.tar.gz  
$ cd cfitsio/  
$ ./configure --prefix=/home/{yourAcc}/cosmomc/myPackages/  
$ make  
$ make install
```

þar sem `{yourAcc}` er nafnið á aðgangnum sem notaður er - velja má aðra möppu.

Prófun Prófa má hvort uppsetningin hafi gengið upp með því að keyra eftirfarandi skipanir í `cfitsio/` möppunni;

```
$ make testprog  
$ ./testprog > testprog.lis  
$ diff testprog.lis testprog.out  
$ cmp testprog.fit testprog.std
```

þar sem síðustu tvær skipanirnar athuga hvort einhver munur sé á milli skráanna tveggja sem tekið er inn - ef enginn munur gekk allt upp!

B.2.3 LAPACK

Það getur verið að setja þurfi upp línulegu-algebru pakkan `LAPACK` ef `gfortran`-þýðandinn er notaður. Ef `ifort`-þýðandinn er notaður er það óþarfi því hann notast við tilsvareandi `intel-mkl` línulegu-algebru pakka sem af mínum prófunum reyndust í kringum 2x hraðari en `LAPACK`.

Uppsetning

B.2.4 WMAP kóðinn

WMAP kóðann má þýða bæði með `gfortran` og `ifort` - mælt er með `ifort`. Í báðum tilfellum þarf að breyta `Makefile`-skránni undir `cosmomc/wmap_likelihood_data/wmap_likelihood_v5/`. Skráin er skjöluð að einhverju leiti.

gfortran Í Makefile-skránni þarf að breyta CFITSIO-línunni þ.a. hún bendi á tilsvaramandi möppu

```
CFITSIO=/home/{yourAcc}/cosmomc/cfitsio/
```

Ef þú settir upp LAPACK-pakkann sjálf/sjálfur (þ.e. pakkinn er ekki staðsettur á sínum hefðbundna stað) þá þarf að bæta við tilsvaramandi línu hvar LAPACK er að finna;

```
CFITSIO=/home/{yourAcc}/cosmomc/cfitsio/
```

```
LAPACKDIR=/home/{yourAcc}/cosmomc/lapack-3.4.2
```

Nú þarf að *commenta* út ifort-þýðenda línurnar - alls 4 - og *uncommenta* NAG-þýðenda línurnar. Ef þú settir upp LAPACK-pakkan sjálf/sjálfur þá þarf að breyta eftirtöldum línunum í NAG-þýðenda línunum: Breyta þarf eftirfarandi línunum:

```
INCS      = -I. -I$(CFITSIO)/include -I<lapack path>/include
```

```
LIBS      = -L. -L$(CFITSIO)/lib -L<lapack path>/lib -llapack -lcfitsio
```

í þessar:

```
INCS      = -I. -I$(CFITSIO)/include -I$(LAPACKDIR)/include
```

```
LIBS      = -L. -L$(CFITSIO)/lib -L$(LAPACKDIR)/lib -lblas -llapack -lcfitsio
```

Ennfremur gæti þurft að breyta FLAGS-línunni úr

```
FLAGS=
```

í

```
FLAGS= -g -O2 $(WMAPFLAGS)
```

ifort Ég prófaði bæði *ifort* uppsetningu og *gfort* uppsetningu á forritinu og reyndist *ifort* hátt í tvöfalt hraðari.

Uppsetningin verður svipuð og fyrir *gfortran* en aðlaga þarf *makefile-ana* að ifort. Ég sá ekki ástæðu til að gera ítarlegan leiðarvísi fyrir slíka uppsetningu því ágætis leiðbeiningar er að finna hvernig *intel-mkl* er sett upp á heimasíðu intel. Ef einhverjar spurningar vakna má endilega senda á mig póst á gks4@hi.is