

# 机器人学基础

DX

2019 年 10 月 9 日



# 目录

<b>1 绪论</b>	<b>5</b>
<b>2 数学基础</b>	<b>7</b>
2.1 位姿和坐标系描述 . . . . .	7
2.2 平移和旋转坐标系映射 . . . . .	7
2.3 平移和旋转其次坐标变换 . . . . .	7
2.4 物体的变换和变换方程 . . . . .	7
2.5 通用旋转变换 . . . . .	7
<b>3 Robotics 运动学</b>	<b>9</b>
3.1 机器人运动方程的表示 . . . . .	9
3.1.1 机械手运动姿态和方向角的表示 . . . . .	9
3.2 机器人运动方程的求解 . . . . .	9
3.2.1 逆运动学求解的一般问题 . . . . .	9
3.2.2 逆运动学的代数解法和几何解法 . . . . .	10
3.2.3 逆运动学的其他解法 . . . . .	10
3.3 机器人运动方程的求解 . . . . .	10
3.4 机器人运动分析和综合举例 . . . . .	10
3.5 机器人的雅可比公式 . . . . .	10
3.5.1 机器人的微分运动 . . . . .	10
3.5.2 雅可比矩阵的定义与求解 . . . . .	11
<b>4 机器人动力学</b>	<b>13</b>
4.1 机器人刚体动力学 . . . . .	13
4.1.1 刚体的动能与位能 . . . . .	13
4.1.2 机械手动力学方程的求法 . . . . .	14
4.2 机械手动力学方程的计算与简化 . . . . .	14
4.2.1 速度的计算 . . . . .	14
4.2.2 动能和位能的计算 . . . . .	14



## Chapter 1

## 绪论



## Chapter 2

# 数学基础

### 2.1 位姿和坐标系描述

### 2.2 平移和旋转坐标系映射

### 2.3 平移和旋转其次坐标变换

### 2.4 物体的变换和变换方程

### 2.5 通用旋转变换

公式

$$Rot(\mathbf{f}, \theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x vers\theta + c\theta & f_y f_x vers\theta - f_z s\theta & f_z f_x vers\theta + f_y s\theta \\ f_x f_y vers\theta + f_z s\theta & f_y f_y vers\theta - c\theta & f_z f_y vers\theta + f_x s\theta \\ f_x f_z vers\theta + f_y s\theta & f_y f_z vers\theta - s\theta & f_z f_z vers\theta + c\theta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$





## Chapter 3

# Robotics 运动学

### 3.1 机器人运动方程的表示

#### 3.1.1 机械手运动姿态和方向角的表示

**A 矩阵** 描述连杆坐标系间相对平移和旋转的齐次变换矩阵

**T 矩阵** 描述连杆坐标系与基坐标系相对平移和旋转的齐次变换矩阵

$$T_6 = A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 A_1$$

相对前一坐标系运动为左乘

### 3.2 机器人运动方程的求解

#### 3.2.1 逆运动学求解的一般问题

解的存在性

多解性问题

机器人系统在执行操控时只能选择一组解

- 最短行程解 - 较长行程解

## 逆运动学的求解方法

### 3.2.2 逆运动学的代数解法和几何解法

#### 代数解法

#### 几何解法

### 3.2.3 逆运动学的其他解法

#### 欧拉变换解法

欧拉方程表示运动姿态 P37

公式 (3.48)

公式 (3.49) - (3.57) 不可使用反三角函数直接求解 (未知数周期性)

P51

**概括** 如果已知一个表示任意旋转的齐次变换，那么就能确定其等价欧拉角：

$$\begin{cases} \phi = \text{atan2}(a_y, a_x), \phi = \phi + 180^\circ \\ \theta = \text{atan2}(c\phi a_x + s\phi a_y, a_x) \\ \psi = \text{atan2}(-s\phi n_x + c\phi n_y, -s\phi o_x + c\phi o_y) \end{cases} \quad (3.1)$$

## 3.3 机器人运动方程的求解

## 3.4 机器人运动分析和综合举例

以 PUMA600 为例

## 3.5 机器人的雅可比公式

### 3.5.1 机器人的微分运动

#### 微分平移与旋转

基坐标系中左乘，运动坐标系中右乘

基坐标系：

$$\begin{aligned} T + dT &= \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(f, d\theta) T \\ dT &= [\text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(f, d\theta) T - I] T \end{aligned}$$

坐标系  $T$ ：

$$\begin{aligned} T + dT &= T \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(f, d\theta) \\ dT &= T[\text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(f, d\theta) - I] \end{aligned}$$

当微分运动是对基系进行时，我们规定它为  $\Delta$ ；而运动是相对于坐标系  $T$  来进行时，记为  ${}^T\Delta$ 。

### 微分运动的等价变换

**目的** 把一个坐标系内的位子变换到另一坐标系内

由  $dT = \Delta T = T^T \Delta$  可得  ${}^T\Delta = T^{-1} \Delta T$

### 向量叉乘

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = (y_a z_b - z_a y_b) \vec{i} + (z_a x_b - x_a z_b) \vec{j} + (x_a y_b - y_a x_b) \vec{k}$$

P65

$$\begin{bmatrix} {}^T d \\ {}^T \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T S(p) \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix}$$

### 变换式中的微分关系

P67

## 3.5.2 雅可比矩阵的定义与求解

### 定义

机械手的操作速度与关节速度的线性变换定义为机器人的雅可比矩阵

### 雅可比矩阵的求法

### 矢量积法 P69

对移动关节

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i, \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

对转动关节

P70 (3.143)



## Chapter 4

# 机器人动力学

两类问题：

- 动力学正问题：已知机械手各关节的作用力或力矩，求各关节的位移、速度、加速度、运动轨迹；
- 动力学逆问题：已知机械手的运动轨迹，即各关节的位移、速度和加速度，求各关节的驱动力和力矩。

### 4.1 机器人刚体动力学

**拉格朗日函数** 定义为系统的动能  $K$  和位能  $P$  之差：

$$L = K - P$$

**Lagrange 方程**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j$$

$T$  系统动能

$q_j$  广义坐标

$Q_j$  对应于广义坐标的广义力

#### 4.1.1 刚体的动能与位能

P80

求取动力学方程的关键是求出各能量函数  $K, P, D, W$  的广义坐标表达式

**矩阵形式** P81

### 4.1.2 机械手动力学方程的求法

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

## 4.2 机械手动力学方程的计算与简化

### 4.2.1 速度的计算

P 87

对任意连杆上的某一点，其位置为

$${}^0\mathbf{r} = \mathbf{T}_i^i \mathbf{r} \quad (4.1)$$

**矩阵的迹** 对于  $n$  阶方阵来说，其迹即为它的主对角线上各元素之和

$$Trace = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**速度平方**

$$\mathbf{v}^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = \text{Trace} \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} {}^i\mathbf{r} \sum_{k=1}^i \left( \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} {}^i\mathbf{r} \right)^T \right] \quad (4.2)$$

### 4.2.2 动能和位能的计算

**伪惯量矩阵  $I$**  P88

简化公式 P89 (4.18)