

目录

矩阵代数与行列式 1

1.概念与矩阵运算1

2.矩阵的逆.....2

2.1 伴随矩阵求逆矩阵.....2

2.2 逆矩阵的应用-方程求解.....3

2.3 可逆矩阵定理、判断是否可逆.....3

3.矩阵因式分解-LU分解.....4

3.1 LU分解算法.....5

3.2 算法性能分析.....6

3.3 LUP分解 and 置换矩阵.....6

3.4 应用.....7

4.行列式.....8

4.1 行列式的计算.....8

4.2 行列式的性质.....9

4.3 逆矩阵公式.....9

4.4 有关行列式的证明.....10

4.5 用行列式表示面积或体积.....11

矩阵代数与行列式

1.概念与矩阵运算

若A是 $m \times n$ 矩阵，即有 m 行 n 列的矩阵，A的第 i 行第 j 列的元素用 a_{ij} 表示，称为A的 (i,j) 元素，如下图所示

设 A,B,C 是相同维数的矩阵， r 与 s 为数，则有

- a. $A + B = B + A$
- b. $(A + B) + C = A + (B + C)$
- c. $(A + 0) = A$
- d. $r(A + B) = rA + rB$
- e. $(r + s)A = rA + sA$
- f. $r(sA) = (rs)A$
- g. $AB \neq BA$

若乘积 AB 有定义， AB 的第 i 行第 j 列的元素是A的第 i 行与B的第 j 列对应元素乘积之和。

若 $(AB)_{ij}$ 表示 AB 的 (i, j) 元素, A 为 $m \times n$ 矩阵, 则

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

矩阵乘法的理解可以参照前面有关矩阵方程的介绍。

矩阵的乘幂表示为 A^k , 其中 A 是 $n \times n$ 矩阵, A^k 表示 k 个 A 的乘积。 A^0 为单位矩阵。

$$A^k = A \cdots A$$

矩阵的转置表示为 A^T , 其中 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 则 A 的转置是一个 $n \times m$ 矩阵, 它的列是由 A 对应行构成的。

设 A 与 B 表示矩阵, 其维数使下列和与积有定义, 则

- a. $(A^T)^T = A$
- b. $(A + B)^T = A^T + B^T$
- c. 对任意实数 r , $(rA)^T = rA^T$
- d. $(AB)^T = B^T A^T$

2.矩阵的逆

一个 $n \times n$ 矩阵 A 是可逆的, 若存在一个 $n \times n$ 矩阵 C 使

$$AC = I \text{ 且 } CA = I$$

这时称 C 是 A 的**逆阵**, A 可逆, 且它的逆矩阵唯一。我们将 C 记为 A^{-1} , 于是

$$AA^{-1} = I \text{ 且 } A^{-1}A = I$$

不可逆矩阵也称为**奇异矩阵**, 可逆矩阵也称为**非奇异矩阵**。

我们从这个定义可以知道, 可逆矩阵一定是方阵。后面还会引入左逆和右逆。下面是有关可逆矩阵的一些性质。

2.1 伴随矩阵求逆矩阵

将 A 和 I 排在一起构成增广矩阵 $[A \ I]$, 则对此矩阵进行行变换时, A 和 I 受到同一变换。要么有一系列行变换把 A 变成 I , 同时 I 变成 A^{-1} ; 要么 A 是不可逆的。例如

如求 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 。

$$B = [A|I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

故 A 可逆并且, 由右一半可得逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

伴随矩阵求 A^{-1} 时间复杂度为 $O(n^4)$, 开销大, 更高效的算法可以应用矩阵的因式分解, 请参考 [3.4 应用](#)。

2.2 逆矩阵的应用-方程求解

可逆矩阵的一个重要性质就是用于求解方程组。

若 A 可逆，则对每一个 \mathbb{R}^n 中的 \vec{b} ，方程 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ 。

我们举一个例子来说明可逆矩阵的作用。比如我们要解如下方程

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 = 7 \end{cases}$$

解 该方程组就是 $A\vec{x} = \vec{b}$ ，可以看成

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

所以有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2.3 可逆矩阵定理、判断是否可逆

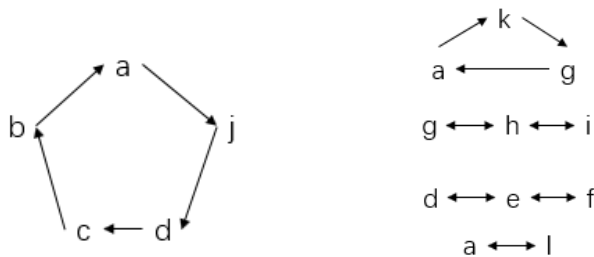
下面是有关可逆矩阵的两个基本定理：

- a. $(A^{-1})^{-1} = A$
- b. 若 A, B 可逆，则有 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

接着是可逆矩阵定理。设 A 为 $n \times n$ 矩阵，则下列命题是等价的，即对某一特定的 A ，它们同时为真或同时为假。

- a. A 是可逆矩阵
- b. A 等价于 $n \times n$ 单位矩阵
- c. A 有 n 个主元位置
- d. 方程 $A\vec{x} = \mathbf{0}$ 仅有平凡解
- e. A 的各列线性无关
- f. 线性变换 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ 是一一对应的
- g. 对 \mathbb{R}^n 中任意 \vec{b} ，方程 $A\vec{x} = \vec{b}$ 至少有一个解
- h. A 的各列生成 \mathbb{R}^n
- i. 线性变换 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ 把 \mathbb{R}^n 映上 \mathbb{R}^n 上
- j. 存在 $n \times n$ 矩阵 C 使 $CA = I$
- k. 存在 $n \times n$ 矩阵 D 使 $DA = I$
- l. A^T 是可逆矩阵

它们的推导关系如下所示



(c)→(b)是因为在矩阵有 n 个主元就说明它的简化阶梯形是 I 。

关于(d)，可由(j)推出，即 $CA\vec{x} = \vec{0}$ 推得 $\vec{x} = \vec{0}$ 。

关于(e)，其实就是(d)，可参照 4.1 节。

利用这些定理，我们可以用于判断一个矩阵是否可逆。例如我们有一个矩阵 A ，如下所示。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

解

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

所以 A 有 3 个主元位置，根据可逆矩阵定理(c)， A 是可逆的。

3.矩阵因式分解- LU 分解

矩阵的因式分解是把 A 表示为两个或更多矩阵的乘积，矩阵乘法是数据的综合（把两个或更多线性变换的作用结合成一个矩阵），矩阵的因式分解是数据的分解，把数据组成两个或者更多，这种结构可能更有用，或者更便于计算。

LU 分解，是在工业与商业问题中常见的，解一系列具有相同系数矩阵中的线性方程

$$A\vec{x} = \vec{b}_1, A\vec{x} = \vec{b}_2, A\vec{x} = \vec{b}_3, \dots, A\vec{x} = \vec{b}_p$$

我们解决这个问题是可以通过计算 A^{-1} 来求解方程，但是若 A 不可逆呢？

首先，我们假设 A 是 $m \times n$ 矩阵可以行化简为阶梯形而不必行对换，则 A 可以写成形式 $A = LU$ ， L 是 $m \times n$ 下三角矩阵，主对角线元素全是 1， U 是 A 的一个等价的 $m \times n$ 阶梯形矩阵，例如下图所示，这样一个分解称为 LU 分解，矩阵 L 是可逆的，称为单位下三角矩阵。

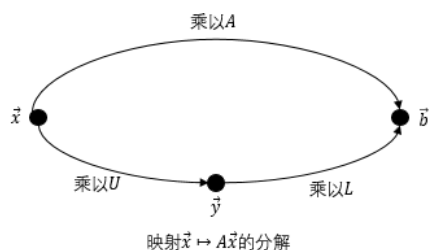
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L \qquad U$

求解 $A\vec{x} = \vec{b}$ 可写成 $L(U\vec{x}) = \vec{b}$ ，因此可以由解下列方程来求解 \vec{x} ：

$$\begin{cases} L\vec{y} = \vec{b} & (1) \\ U\vec{x} = \vec{y} & (2) \end{cases}$$

先解(1)再解(2)即可得到 \vec{x} ，每个方程都很容易解，因为 L 和 U 都是三角矩阵。



下面我们举一个例子来应用 LU 分解。

已知

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU$$

应用 A 的 LU 分解来解 $A\vec{x} = \vec{b}$ ，其中 $\vec{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$ 。

解

$$[L \vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I \vec{y}]$$

$$[U \vec{y}] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [I \vec{x}]$$

$$\text{所以 } \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3.1 LU 分解算法

算法并不复杂，总的来说就是

1. 矩阵 A 经过一系列行变换变成阶梯形矩阵，即为 U
2. 变换过程在每个主元列，把主元以下的元素除以主元即为 L 在该列主元以下的元素。

以一个例子来讲解。求下列矩阵的 LU 分解

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

解

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} = A_1$$

$$\sim A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

接着是在变换过程中求出 L 矩阵。上式中标出的元素确定了 A 化为 U 的行变换，在每个主元列，把标出的元素除以主元后将结果放入 L 。(提问，如果主元为0?)

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} [5] \\ \div 2 \quad \div 3 \quad \div 2 \div 5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = L \end{array}$$

容易证明，所求出的 L 和 U 满足 $LU = A$ 。

3.2 算法性能分析

下列运算次数的计算适用于 $n \times n$ 稠密矩阵 A (大部分元素非零)， n 相当大，例如 $n \geq 30$ 。

1. 计算 A 的 LU 分解大约需要 $2n^3/3$ 浮算，而求 A^{-1} 大约需要 $2n^3$ 浮算。
2. 解 $L\vec{y} = \vec{b}$ 和 $U\vec{x} = \vec{y}$ 大约需要 $2n^3$ 浮算，因为任意 $n \times n$ 三角方程组可以用大约 n^3 浮算接触。
3. 把 \vec{b} 乘以 A^{-1} 也需要 $2n^3$ 浮算，但结果可能不如 L 和 U 得出的精确(由于计算 A^{-1} 及 $A^{-1}\vec{b}$ 的舍入误差)
4. 若 A 是稀疏矩阵 (大部分元素为0)，则 L 和 U 可能也是稀疏的，然而 A^{-1} 很可能是稠密的，显然用 LU 分解来解 $A\vec{x} = \vec{b}$ 很可能比用 A^{-1} 快很多。

3.3 LUP分解 and 置换矩阵

考虑下面一个矩阵的 LU 分解。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

根据之前所述算法，先将矩阵 A 化为阶梯形矩阵，并在变换的过程中求出 L 。但是很明显，在这种情况下，会出现除数为0的情况，这当然是灾难性的。

除了除数为0外，还有除数很小的情况，这会产生数值不稳定，因此我们希望能选一个较大的主元。所以有的时候我们必须在矩阵的非对角线元素中选主元。

我们先引入一个置换矩阵的概念，考虑下面两个矩阵的相乘。

$$\text{已知 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \text{ 计算 } P \cdot A$$

根据我们之前的所学知识很容易解出来。求得

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

可以发现，矩阵 A 似乎没什么变化，只是行的位置改变了而已。我们把这样的矩阵称之为置换矩阵。

置换矩阵 一种系数只由 0 和 1 组成的方阵。矩阵的每一行/列的第 i 个元素为 1，表示原矩阵的该行/列为第 i 行/列。具体置换的行 or 列取决于是左乘还是右乘。

- 当矩阵 A 左乘一个置换矩阵，交换的是矩阵的行。即 $P \cdot A$
- 当矩阵 A 右乘一个置换矩阵，交换的是矩阵的列。即 $A \cdot P$

让我们回到 LUP 分解。借助这个置换矩阵，我们可以将矩阵 A 的行进行置换，每步重新选取较大的主元进行行替换。

原来的 $A = LU$ 我们改写为 $PA = LU$ ，其中 P 是一个置换矩阵。该式子意为先对 A 进行行置换，再对行置换后的 A 进行 LU 分解。

当我们要求解 $A\vec{x} = \vec{b}$ ，可做如下变换：

$$A\vec{x} = \vec{b}_1 \rightarrow PA\vec{x} = P\vec{b}_1 \rightarrow LU\vec{x} = P\vec{b}_1$$

于是问题可以化为

$$\begin{cases} L\vec{y} = P\vec{b} & (1) \\ U\vec{x} = \vec{y} & (2) \end{cases}$$

求解得到的 \vec{x} 就是 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解，证明如下：

$$A\vec{x} = P^{-1}LU\vec{x} = P^{-1}L\vec{y} = P^{-1}P\vec{b} = \vec{b}$$

其实 LU 分解是 LUP 分解的一种，当 $P = I$ 时， LUP 分解就成为 LU 分解。可以理解成是 A 矩阵不进行置换的情况下 LUP 分解就成为了 LU 分解。

3.4 应用

利用好矩阵的因式分解，不只是在求解方程组，在求逆矩阵、最小二乘逼近方面也能大大提高效率。

在求逆矩阵时，我们可以有两种思路：

- $A^{-1} = (LU)^{-1}P = U^{-1}L^{-1}P$
- 通过 LUP 分解解方程 $AX = I$ ， X 即为 A^{-1}

通过 LUP 分解来求逆矩阵的过程中，分解的过程需要 $O(n^3)$ ，求解三角矩阵的过程需要 $O(n^2)$ ，避免了主元素为 0 的情况。可提高求解一系列具有相同系数矩阵中的线性方程的效率，[3.矩阵因式分解-LU分解](#)。

LUP 分解在 Python 中可以使用 scipy 库的 lu 方法直接进行求解，使用示例如下：

```

1. import numpy as np
2. from scipy.linalg import lu
3.
4. if __name__ == "__main__":
5.     a = np.asarray([[2, 4, -1],
6.                      [0, 0, 3],
7.                      [0, -5, -4]])
8.     p, l, u = lu(a)

```

4.行列式

首行列式是只对方阵才有定义的，即**只有方阵才能计算行列式**，可逆矩阵也类似。

当行列式不为 0 时，矩阵才可逆；当系数矩阵行列式不为 0 时，系数矩阵才线性无关，方程组才有唯一解。后面会给出证明。

接下来我们会先介绍行列式是如何计算的。

4.1 行列式的计算

我们先给出 2×2 矩阵和 3×3 矩阵的行列式。

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

余子式 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元素的 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} ，同时 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式。

要注意的是，余子式与代数余子式都是行列式，行列式的阶越低越容易计算，它存在的意义就是为了更好的计算行列式。

下面给出行列式的计算公式。

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} \\ = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

这是按照第一行来计算行列式，更一般地，我们可以按照第 i 行或者第 j 列来计算。通过观察我们也可以知道，**三角形矩阵的行列式等于对角线上元素的乘积**。

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

让我们举个例子来加深理解。

计算 $\det A$ ，这里

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

解 按 A 的第一列来进行计算，有

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 + 0$$

再对第一列进行展开，有

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

具体按照哪一列来展开要看情况。

4.2 行列式的性质

我们给出几个行列式的性质。

A 是一个方阵。

- a. 若 A 的某一行的倍数加到另一行得矩阵 B ，则 $\det B = \det A$
- b. 若 A 的两行互换得矩阵 B ，则 $\det B = -\det A$
- c. 若 A 的某行乘以 k 倍得到矩阵 B ，则 $\det B = k \cdot \det A$
- d. $\det A = \det A^T$ ，这证明了行列式的列变换和行变换具有相同效果
- e. 若 A 与 B 均为 $n \times n$ 矩阵，则 $\det AB = \det A \cdot \det B$

这几个性质可以帮我们有效地计算行列式。我们举一个例子来说明。

计算 $\det A$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

解 思路是先将 A 化简成阶梯形，再利用三角形矩阵的行列式等于对角线上元素的乘积来计算。

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -(1)(3)(-5) = 15 \end{aligned}$$

4.3 逆矩阵公式

下面给出一个利用行列式来计算矩阵的逆的公式。其中 $\text{adj}A$ 为矩阵 A 的伴随矩阵。

定理 设 A 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵, 则 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$.

用一个例子来说明。求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ 的逆。

解 九个代数余子式为

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = 3 \quad A_{13} = 5$$

$$A_{21} = 14 \quad A_{22} = -7 \quad A_{23} = -7$$

$$A_{31} = 4 \quad A_{32} = 1 \quad A_{33} = -3$$

$\text{adj} A$ 为代数余子式的矩阵的转置(例如 A_{21} 到(1,2)的位置), 从而有

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

我们可以直接计算 $\det A$, 但下列计算对上面的结果提供了一个检验并计算出 $\det A$ 的方法。

$$(\text{adj} A) \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = 14I$$

我们根据定理可知, $A^{-1}A = \frac{1}{\det A} \text{adj} A \cdot A = \frac{1}{\det A} 14I$, 可知 $\det A = 14$.

$$\text{所以, } A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 & 1 & 2/7 \\ 3/14 & -1/2 & 1/14 \\ 5/14 & -1/2 & -3/14 \end{bmatrix}$$

4.4 有关行列式的证明

4.4.1 行列式与可逆矩阵

当行列式不等于 0, 矩阵一定是可逆矩阵; 当矩阵是可逆矩阵, 行列式一定不等于 0。我们会从充分性与必要性去证明。

1. 必要性(当矩阵可逆, 行列式一定不等于 0):

当矩阵 A 可逆, 则有 $AA^{-1} = I$ 。两边取行列式有:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

再由行列式的性质有,

$$\det(AA^{-1}) = \det(AA) = \det(A)\det(A) = 1$$

易知, $\det(A) \neq 0$.

2. 充分性(当行列式不等于 0, 矩阵一定可逆):

根据 [4.3 逆矩阵公式](#), 我们有

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$$

易知，当 $\det A \neq 0$ ， A^{-1} 存在。

4.4.2 行列式与方程求解

我们证明：行列式不等于 0，说明系数矩阵列向量线性无关，方程有唯一解。

一种直观的感受是，行列式不等于 0，所以 A^{-1} 存在，因此方程

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

有唯一解。

我们之前介绍过求解方程组的一种做法，高斯消元求阶梯型矩阵。如果方程有唯一解，是可以求出 n 个主元的阶梯型矩阵的，但是如果系数矩阵列向量并非线性无关，是无法求出有 n 个主元的阶梯型矩阵。因此可以知道，行列式不等于 0，系数矩阵列向量线性无关，方程有唯一解。

我们换个更官方的证明。因为行列式不等于 0，矩阵满秩，可通过初等变换化为对角矩阵，因此对于求解

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

只有零向量，因此系数矩阵线性无关。

4.5 用行列式表示面积或体积

若 A 是一个 2×2 矩阵，则由 A 的列确定的平行四边形的面积为 $|\det A|$ ；若 A 是一个 3×3 矩阵，则由 A 的列确定的平行六面体的体积也为 $|\det A|$ 。可引申到 $n \times n$ 矩阵的情形。这也就是**行列式的几何意义**。

例如若 A 为 2 阶对角矩阵，定理显然成立。

$$\left| \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right| = |ad| = \text{矩阵面积}$$

所以可以得出，判断一个线性方程组是否有唯一解，即判断系数矩阵的列向量所构成的体积是否为 0，即判断列向量是否两两位于不同平面上。

