目录

向量空间

在 A.线性方程组 那一章节中，我们曾在 3.向量方程 这一节中介绍了一些有关向量的内容并引入了一些概念，但大都停留在$\mathbb{R}^n$的一些简单且明显的性质上。在本章节中，我们希望能深入地去理解向量空间，并给出严格的数学定义。

1.向量空间与子空间

向量空间，是由一些被称为向量的对象构成的非空集合V，在这个集合上定义两个运算，成为加法和标量乘法（标量取实数），服从以下公理，这些公理必须对V中所有向量$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$及所有标量c,d均成立。

1. $\vec{u},\vec{v}$之和表示为$\vec{u}+\vec{v}$，仍在V中.
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
3. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
4. V中存在一个零向量$\mathbf{0}$，使得$\vec{u}+\mathbf{0}=\vec{u}$.
5. 对V中每个向量$\vec{u}$，存在V中向量$-\vec{u}$，使得$\vec{u}-\vec{u}=\mathbf{0}$.
6. $\vec{u}$与标量c的标量乘法记为$c\vec{u}$，仍在V中.
7. $c(\vec{u}+\vec{v})=c\vec{u}+c\vec{v}$.
8. $(c+d)\vec{u}=c\vec{u}+d\vec{u}$.
9. $c(d\vec{u})=(cd)\vec{u}$.
10. $1\vec{u}=\vec{u}$.

子空间，是由一个大的向量空间中适当的向量的子集所构成。在此情形下，向量空间的十个公理只需验证三个，其余的自然成立。

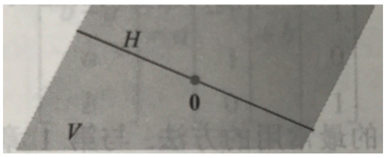
因此我们可以说，向量空间V的一个子空间是V的一个满足以下三个性质的子集H：

1. V中的零向量在H中.
2. H对向量加法封闭，即对H中任意向量$\vec{u},\vec{v}$，和$\vec{u}+\vec{v}$仍在H中.
3. H对标量乘法封闭，即对H中任意向量$\vec{u}$和任意标量c，向量$c\vec{u}$仍在H中.

这样每个子空间都是一个向量空间，每个向量空间都是一个子空间(针对本身或更大的空间而言)。

特别地，向量空间V中仅由零向量组成的集合是V中一个子空间，成为零子空间，写成$\{\mathbf{0}\}$.

对两个向量空间，若其中一个在另一个内部，此时子空间这个词被使用，如下图所示。H为V的一个子空间。



1.1 由集合生成的子空间

我们曾介绍过$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}\}$表示称为由$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}$所生成(或张成)的$\mathbb{R}^n$的子集。现在我们尝试去证明它。

问 给定向量空间V中向量$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$，令$H=\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$，证明$H$是$V$的一个子空间。

解 由于$\mathbf{0}=0\overrightarrow{v_1}+0\overrightarrow{v_2}$，所以零向量在$H$中，为证$H$对加法封闭，任取$H$中两个向量，即

$$\vec{u}=s_1\overrightarrow{v_1}+s_2\overrightarrow{v_2}\ ,\vec{w}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}$$

对向量空间V，由公理 2、3、8 可知

$$\vec{u}+\ \vec{w}=(s_1\overrightarrow{v_1}+s_2\overrightarrow{v_2})+(t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2})=(s_1+t_2)\overrightarrow{v_1}+(t_1+t_2)\overrightarrow{v_2}$$

所以$\vec{u},\vec{w}$在H中，进一步，若c是任意标量，由公理 7、9 知

$$c\vec{u}=c(s_1\overrightarrow{v_1}+s_2\overrightarrow{v_2})=(cs_1)\overrightarrow{v_1}+(cs_2)\overrightarrow{v_2}$$

这证明$c\vec{u}$在H中，从而H对标量乘法封闭，从而H是V的一个子空间。

定理 由此我们可以推广出：若$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}$在向量空间$V$中，则$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}\}$是$V$的一个子空间。也可称$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}\}$是由$\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}\}$生成(或张成)的子空间。

为了能更好地去理解向量空间，非常建议从几何的角度上去理解。我们曾经在线性组合那一章节中提过，$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$是一个过原点的平面，$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1}\}$是一个过原点的直线，如下图 1.1 所示。

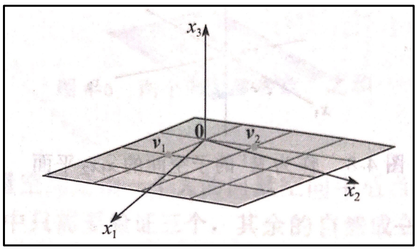


图 1.1

我们再给一个简单的例子来说明该定理的作用.

令H是所有形如$(a-3b,b-a,a,b)$的向量的集合，这里a,b是任意数，即

$$H=\{(a-3b,b-a,a,b);a,b\in\mathbb{R}\}$$

证明H是$\mathbb{R}^4$的一个子空间。

解 将H中向量写成列向量，则H中任意向量具有如下形式：

$$\begin{bmatrix}a-3b\\b-a\\a\\b\end{bmatrix}=a\underset{\substack{\uparrow\\ v_1}}{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}}+b\underset{\substack{\uparrow\\ v_2}}{\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\1\end{bmatrix}}$$

说明$H=\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$，其中$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$标示如上，从而由定理知$H$是$\mathbb{R}^4$的一个子空间。

利用该定理，我们能将H中无穷多个向量的运算化简成集中的有限多个向量的运算。

1.2 零空间、列空间、行空间

零空间 满足$A\vec{x}=\mathbf{0}$的所有$\vec{x}$的集合为矩阵A的零空间。$\mathrm{Nul}\,A=\{\vec{x}:\vec{x}\in\mathbb{R}^n,A\vec{x}=\mathbf{0}\}$.

列空间 $m\times n$矩阵A的列的所有线性组合组成的集合。若$A=[a_1,\dots,a_n]$，则$\mathrm{Col}\,A=\mathrm{Span}\{a_1,\dots,a_n\}$。也可表示为$\mathrm{Col}\,A=\{\vec{b}:\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\vec{b}=A\vec{x}\}$.

行空间 $m\times n$矩阵A的每一行具有n个元素，即可以视为$\mathbb{R}^n$中的一个向量。其行向量的所有线性组合的集合称为A的行空间，记为$\mathrm{Row}\,A$。我们也可以用$\mathrm{Col}\,A^T=\mathrm{Row}\,A$。

对于一个$m\times n$的矩阵A，A的列空间是$\mathbb{R}^m$的一个子空间，A的零空间是$\mathbb{R}^n$的一个子空间。

要判断一个向量$\vec{u}$是否在$\mathrm{Nul}\,A$中，只需计算$A\vec{u}$，判断结果是否为$\mathbf{0}$.

要判断一个向量$\vec{u}$是否在$\mathrm{Col}\,A$中，只需判断$A\vec{x}=\vec{u}$是否有解即可。

2.基

2.1 概念

基 令H是向量空间V的一个子空间，V中向量的指标集$\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_p\}$称为$H$的一个基，如果:

- $\mathcal{B}$是一线性无关集(根据可逆矩阵定理，可通过计算矩阵$[b_1,\dots,b_p]$的行列式来判断)
- 由$\mathcal{B}$生成的子空间与H相同，即$H=\mathrm{Span}\{b_1,\dots,b_p\}$

通过该定义可以知道，一个基是一个不包含不必要向量的“高效率”的生成集。一个基可以通过去掉生成集中不必要的向量生成出来。

例 若A是一个可逆的$n\times n$矩阵，则由可逆矩阵定理可知，A的列组成$\mathbb{R}^n$的一个基。

例 令$e_1,\dots,e_n$是$n\times n$单位矩阵I_n的列，集合$\{e_1,\dots,e_n\}$称为$\mathbb{R}^n$的**标准基**。

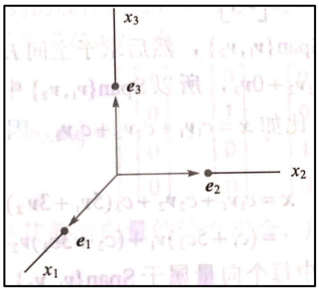


图 2.1 $\mathbb{R}^3$的**标准基**

唯一表示定理 令$\mathcal{B}=\{\overrightarrow{b_1},\dots,\overrightarrow{b_n}\}$称为$V$的一个基，则对$V$每个向量$\vec{x}$，存在唯一的一组数$c_1,\dots,c_n$，使得

$$\vec{x}=c_1\overrightarrow{b_1}+\cdots+c_n\overrightarrow{b_n}$$

生成集定理 令$S=\{\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p}\}$是$V$中的向量集，$H=\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p}\}$.

a. 若S中某一向量（比如说$\overrightarrow{v_k}$）是S中其余向量的线性组合，则S中去掉$\overrightarrow{v_k}$后形成的集合仍然可以生成H.
b. 若$H\neq\{\mathbf{0}\}$，则S的某一子集是H的一个基.

2.2 Nul A、Col A和Row A的基

2.2.1 Nul A的基

Nul A是方程$A\vec{x}=\mathbf{0}$中所有$\vec{x}$的集合。我们给出如下例子来说明如何求Nul A的基。

问 求矩阵A的零空间的生成集，其中

$$A=\begin{bmatrix}-3&6&-1&1&-7\\1&-2&2&3&-1\\6&-4&5&8&-4\end{bmatrix}$$

解 第一步是通过行化简求$A\vec{x}=\mathbf{0}$的关于自由变量的通解，如下

$$\begin{bmatrix}1&-2&0&-1&3&0\\0&0&1&2&-2&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可得通解为$x_1=2x_2+x_4-3x_5, x_3=-2x_4+2x_5$，$x_2,x_4,x_5$是自由变量。接着，将通解给出的向量分解为向量的线性组合，即

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_2+x_4-3x_5\\x_2\\-2x_4+2x_5\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{bmatrix}=x_2\vec{u}+x_4\vec{v}+x_5\vec{w}$$

可得$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$为Nul A的一个生成集，即为基。

2.2.2 Col A的基

定理 一个矩阵A被行化简为B时，虽然两个矩阵的列通常不同，但是，方程$A\vec{x}=\mathbf{0}$与$B\vec{x}=\mathbf{0}$有完全相同的解集，即**A的列与B的列具有完全相同的线性相关关系**。

$\mathrm{Col}\,A$为矩阵A的列向量所有线性组合组成的集合。我们同样给一个例子来说明如何求$\mathrm{Col}\,A$的基。

问 求矩阵A的列空间的基，其中

$$A=[\overrightarrow{a_1}\quad \overrightarrow{a_2}\quad \overrightarrow{a_3}\quad \overrightarrow{a_4}\quad \overrightarrow{a_5}]=\begin{bmatrix}1&4&0&2&-1\\3&12&1&5&5\\2&8&1&3&2\\5&20&2&8&8\end{bmatrix}$$

解 对矩阵进行行化简，其每个列的线性相关关系保持不变。我们先对其行化简为阶梯型矩阵，如下

$$A\Rightarrow B=[\overrightarrow{b_1}\quad \overrightarrow{b_2}\quad \overrightarrow{b_3}\quad \overrightarrow{b_4}\quad \overrightarrow{b_5}]=\begin{bmatrix}1&4&0&2&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

B的每个非主元列是主元列的线性组合，即$\overrightarrow{b_2}=4\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_4}=2\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_3}$，因此我们可以去掉$\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_4}$，$\{\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_3},\overrightarrow{b_5}\}$可生成$\mathrm{Col}\,B$。

我们之前说过，A的列与B的列具有完全相同的线性相关关系，因此A中的$\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_5}\}$可生成$\mathrm{Col}\,A$，为矩阵$A$的列空间的基。

从这道题拓展，我们可知： 矩阵A的主元列构成$\mathrm{Col}\,A$的一个基。

2.2.3 **Row A的基**

定理 若两个矩阵A和B等价，则它们的行空间相同。若B是阶梯型矩阵，则B的非零行构成A的行空间的一个基同时也是B的行空间的一个基。

问 求矩阵A的行空间、列空间的基，其中

$$A=\begin{bmatrix}-2&-5&8&0&17\\1&3&-5&1&5\\3&11&-19&7&1\\1&7&-13&5&-3\end{bmatrix}$$

解 为了求该矩阵的行空间、列空间的基，行化简A为阶梯型：

$$A\sim B=\begin{bmatrix}1&3&-5&1&5\\0&1&-2&2&-7\\0&0&0&-4&20\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

根据定理，B的前 3 行构成A的行空间的一个基（也就是B的行空间的基），从而

$$\mathrm{Row}\,A\text{的基: }\{(1,3,-5,1,5),(0,1,-2,2,-7),(0,0,0,-4,20)\}$$

对于列空间，观察B，主元列在第 1、2、4 列，所以A的第 1、2、4 列构成$\mathrm{Col}\,A$的一个基

$$\mathrm{Col}\,A\text{的基: }\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\3\\11\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\7\\5\end{bmatrix}\right\}$$

通过这道题我们也能分清楚，阶梯型矩阵B的主元列、主元行对于求原矩阵$\mathrm{Row}\,A$、$\mathrm{Col}\,A$的区别。

3.坐标系

$[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ 假设$\mathcal{B}=\{\overrightarrow{b_1},\dots,\overrightarrow{b_n}\}$是$V$的一个基，$\vec{x}$在$V$中，$\vec{x}$相对于基$\mathcal{B}$的坐标（或$\vec{x}$的$\mathcal{B}$-坐标）

是使得$\vec{x} = c_1\overrightarrow{b_1} + \cdots + c_n\overrightarrow{b_n}$的权$c_1, \dots, c_n$，而$\mathbb{R}^n$中的向量

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

是$\vec{x}$的$\mathcal{B}$-坐标向量，映射$\vec{x} \mapsto [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$称为坐标映射。

关于$[\vec{x}]_{\mathcal{B}}, \mathcal{B}, \vec{x}$三者的关系，令$P_{\mathcal{B}} = [\overrightarrow{b_1} \ \dots \ \overrightarrow{b_n}]$，我们可以写为

$$\vec{x} = P_{\mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}, {P_{\mathcal{B}}}^{-1}\vec{x} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

我们曾在 A.线性方程组 的 3.2 线性组合 那一节中介绍过线性组合在几何上的理解，即线性组合的每个向量的权相当于是在该向量的方向上“走”的步数。我们举个例子来说明

问 令$\overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\}$，求出$\vec{x}$相对于$\mathcal{B}$的坐标向量$[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$。

答 $\vec{x}$的$\mathcal{B}$-坐标c_1, c_2满足

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解方程组可以用增广矩阵上做变换或逆矩阵解出，解得$c_1 = 3, c_2 = 2$，从而$\vec{x} = 3\overrightarrow{b_1} + 2\overrightarrow{b_2}$，所以有

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

如下图所示，将$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$所有的线性组合画出来就是一个新的坐标系，而$\vec{x}$的$\mathcal{B}$-坐标就是指在$\overrightarrow{b_1}$的方向上走 3 步，再在$\overrightarrow{b_2}$的方向上走 2 步。

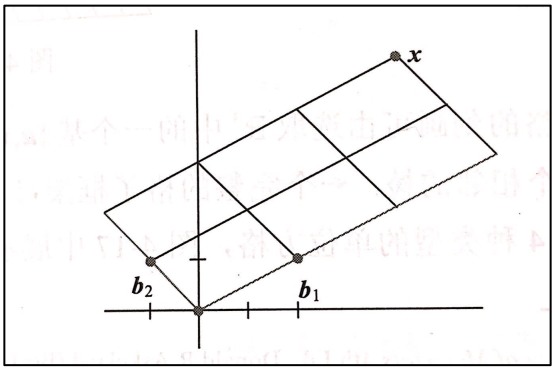


图 3.1 $\vec{x}$的$\mathcal{B}$-坐标向量为(3,2)

3.1 基的变换

在某些应用中，一个问题开始是用一个基$\mathcal{B}$描述，但问题的解可通过将$\mathcal{B}$变为一个新的基$\mathcal{C}$得到帮助（常见于特征向量）。每个向量被确定为一个新的$\mathcal{C}$-坐标向量.

我们通过一个例子来说明如何联系两个坐标向量。

问 对一个向量空间V。考虑两个基$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\}$和$\mathcal{C} = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}\}$，满足

$$\overrightarrow{b_1} = 4\overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{c_2} \quad \overrightarrow{b_2} = -6\overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{c_2}$$

假设$\vec{x} = 3\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}$，求$[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$.

解 坐标映射是一个线性变换

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = [3\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}} = 3[\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}} + [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}} = \left[[\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}} \quad [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}}\right]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[[\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}} \quad [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}}\right][\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

我们根据题意以及坐标向量的定义，可知

$$[\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将其带入有

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

这道题中，$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, [\vec{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$，如下图所示

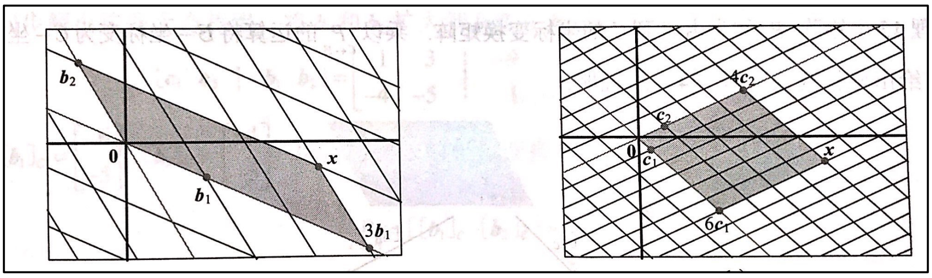


图 3.1.1 同样向量空间的两个坐标系

从这个例子中可以看出，如何将一个坐标向量在不同的坐标系中转换。我们需要找到一个转换矩阵。

定理 设$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_n}\}$和$\mathcal{C} = \{\overrightarrow{c_1}, \cdots, \overrightarrow{c_n}\}$是向量空间$V$的基，则存在一个$n \times n$矩阵$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$使得

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

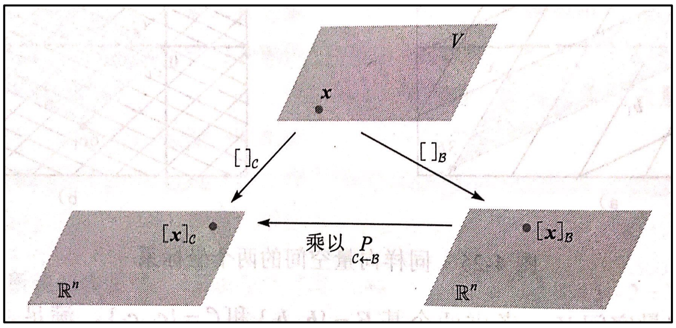
而$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$的列是基$\mathcal{B}$中向量的$\mathcal{C}$-坐标向量，即

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}} & [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\overrightarrow{b_n}]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

类似的，还可以有

$$(P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} [\vec{x}]_{\mathcal{C}} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}, (P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$$

矩阵$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$称为由$\mathcal{B}$到$\mathcal{C}$的坐标变换矩阵，乘以$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$的运算将$\mathcal{B}$-坐标变为$\mathcal{C}$-坐标。形象地，如下图所示，一个向量在不同的坐标系下为$[\vec{x}]_{\mathcal{C}}, [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$，借助一个转换矩阵，$[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$转为了$[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$.



我们再用一个例子来理解。

问 设$\overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{c_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \overrightarrow{c_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$，考虑$\mathbb{R}^2$中的基$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\}, \mathcal{C} = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}\}$，求$\mathcal{B}$到$\mathcal{C}$的坐标变换矩阵$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

解 根据公理我们知道

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}} & [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

因此解出$[\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}}, [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}}$即可。我们设$[\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$，我们有

$$[c_1 \quad c_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \overrightarrow{b_1} \qquad [c_1 \quad c_2]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = \overrightarrow{b_2}$$

分别解出即可，但是这里有个技巧，因为两个方程的系数矩阵一致，因此可以同步的解出该方程，结果为

$$[\overrightarrow{b_1}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix} \; [\overrightarrow{b_2}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$$

因此

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left[\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}\right]$$

4.维数和秩

若向量空间V有一组基含有n个向量，则V的每一组基一定恰好有n个向量。

维数 若V是一个有限集生成的，则V称为有限维的（否则为无穷维的），V的维数写成$\dim V$，是V的基的向量个数；零空间的维数定义为零。

$\mathrm{Nul}\, A$的维数是方程$A\vec{x} = \mathbf{0}$中自由变量的个数，$\mathrm{Col}\, A$的维数是A中主元列的个数。

秩 A的秩即A的列空间的维数。

秩定理 $m \times n$矩阵A的列空间和行空间维数相等，这个公共的维数（即A的秩）还等于A的主元位置的个数且满足方程

$$rank\ A + \dim \mathrm{Nul}\, A = n$$

也可理解为

{主元列个数}+{非主元列个数}={列的个数}

秩定理是处理线性方程组的信息的一个有力工具。我们会给出一个简单的例子来说明。

问 一个科学家对一个 40 个方程 42 个变量的齐次方程组已经求出了两个解，这两个解不是倍数关系，而且其他所有解均能表示为这两个解的适当倍数之和。这个科学家能确定一个相应的非齐次方程组（与此齐次方程组有相同系数）有解吗？

解 有解。令A是这个方程组的40×42系数矩阵，求出了两个解，这两个解能表示出其他所有的解，令这两个解向量为$\vec{v}, \vec{u}$，其他解为$\vec{x}$，也即

$$\vec{x} = c_1\vec{v} + c_2\vec{u}$$

因此$\mathrm{Nul}\, A = \{\vec{v}, \vec{u}\}$，$\dim \mathrm{Nul}\, A = 2$。由秩定理，$\dim \mathrm{Col}\, A = 42 - 2 = 40$。矩阵具有 40 行，因此矩阵行空间是$\mathbb{R}^{40}$的子空间，又因为$\dim \mathrm{Col}\, A = 40$，因此$\mathrm{Col}\, A$为$\mathbb{R}^{40}$，这表明每个非齐次线性方程组$A\vec{x} = \vec{b}$.

4.1 秩和可逆矩阵定理

我们将秩和可逆矩阵定理联系起来。令A是一个$n \times n$矩阵，则下列命题中每一个均等价于A是可逆矩阵。

a. 对$\mathbb{R}^n$中的每个b，方程$A\vec{x} = \vec{b}$至少有一个解
b. A的列构成$\mathbb{R}^n$的一个基
c. $\mathrm{Col}\, A = \mathbb{R}^n$
d. $\dim \mathrm{Col}\, A = n$
e. $\mathrm{rank}\, A = n$

f. $\mathrm{Nul}\,A=\{\mathbf{0}\}$

g. $\dim \mathrm{Nul}\,A=0$

h. 方程$A\vec{x}=\mathbf{0}$只有平凡解（即矩阵A各列线性无关）

将它们之间的蕴含关系链接起来如下

(a)⟶(b)⟶(d)⟶(e)⟶(g)⟶(f)⟶(h)

命题(a)可直接推出命题(b)，因为方程$A\vec{x}=\vec{b}$始终有解，说明A的列向量可线性表示$\mathbb{R}^n$的任何向量，因此A列可构成$\mathbb{R}^n$的一个基，换句话说，$\mathrm{Col}\,A$实际上就是使方程$A\vec{x}=\vec{b}$相容的所有$\vec{b}$的集合，所有$\vec{b}$的集合也即$\mathbb{R}^n$；也推出了$\mathrm{Col}\,A$为$\mathbb{R}^n$，即(c)，(d)。剩下的都可由维数和秩的定义、秩定理推出。

4.2 数值计算

目前我们确定秩的办法是计算列空间的基，在判断列空间的基的主元列个数。这在手工算是很简单的，但是在面对现实问题并不太适合。

比如矩阵$\begin{bmatrix}5 & 7\\ 5 & x\end{bmatrix}$中的$x$如果没有被当做 7 精确地存储在计算机中，那么秩可能是 1 或 2，这依赖于计算机是否将$x-7$当做零处理。

矩阵A的有效秩通常可以由A的奇异值（svd）分解来确定，可以通过 MATLAB 来查看，如图所示

rank.m

```
function r = rank(A,tol)
%RANK   Matrix rank.
%   RANK(A) provides an estimate of the number of linearly
%   independent rows or columns of a matrix A.
%
%   RANK(A,TOL) is the number of singular values of A
%   that are larger than TOL. By default, TOL = max(size(A)) * eps(norm(A)).
%
%   Class support for input A:
%      float: double, single

%   Copyright 1984-2015 The MathWorks, Inc.

s = svd(A);
if nargin==1
   tol = max(size(A)) * eps(max(s));
end
r = sum(s > tol);

```

4.3 秩的理解

一个矩阵的秩即该矩阵的列空间的维数。计算起来并不困难，但是我们应该如何去理解。

我们常说，要解n个变量，需要n个方程，但经过线性代数学习之后，我们知道一个线性方程组是否有解，是看系数矩阵是否满秩，而这个秩就代表着方程中真正有用的部分。

我们用一个例子来说明。左边为方程组，右边为其增广矩阵。

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0\\ 2x_2-8x_3=8\\ 2x_1-2x_2-6x_3=8\end{cases}\qquad \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -8 & 8\\ 2 & -2 & -6 & 8\end{bmatrix}$$

第一条方程*2 减去第三个方程，如下

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -2x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

第二个方程+第三个方程，如下

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这么一看，不太对啊，怎么解不出来了，这是因为第三个方程在原方程组中是个“多余”的方程，它本身是能够通过另外两条方程线性组合表示出来的，因此这个方程组真正有用的就是前两条，方程的秩为 2.

秩是矩阵的列空间的维数，也就是矩阵中最大不相关的向量个数。满秩的话就是指矩阵中所有的列向量彼此都线性无关，方程中不存在“多余”的方程，那么方程经过行变换化为阶梯型矩阵自然就能解出。

借助知乎的一个回答:“你们家 r 口人,然后拍了 n（n≥r）张照片，那么秩就是 r”。