目录

线性方程组

1.概念

包含未知数$x_1, x_2, \dots, x_n$的一个**线性方程**是形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

的方程，其中b与系数$a_1, a_2, \dots, a_n$是实数或复数，通常是已知数。

而**线性方程组**是由一个或多个包含相同变量$x_1, x_2, \dots, x_n$的线性方程组成的。例如

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \\ \quad x_1 - \ 4x_3 = -7 \end{cases}$$

线性方程组的一组解是一组数$(s_1, \dots, s_n)$，用这组数分别代替$x_1, x_2, \dots, x_n$时所有方程的两边相等。例如(5,6.5,3)代入方程组变成等式$8 = 8$和$7 = -7$.

方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的**解集**。若是两个线性方程组有相同的解集，则它们等价。

求包含两个未知数的两个方程组成的方程组的解，等价于求两条直线的交点，例如

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

这两个方程的图形都是直线，两条直线可能交于一点、不相交(平行)、重合，分别对应于一个解、无解、无穷多解的情况。

2.矩阵

2.1 矩阵引入

一个线性方程组包含的主要信息可以用**矩阵**表示，给出方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

把每一个变量的系数写在对齐的一列中，矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

称之为该方程组的**系数矩阵**，而

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

称之为**增广矩阵**。

2.2 线性方程组的求解

基本的思路是把方程组用一个更容易解的等价方程组代替。

粗略地说，我们用第一个方程组中第一个方程中含x_1的项消去其他方程中的含x_1的项，然后用第二个方程中含x_2的项消去其他方程中含x_2的项，以此类推，最后得到一个很简单的等价方程组(阶梯状的方程组)。

例如

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

可以将第一个方程*4 加上第 3 个方程，从而得到新的方程 3.如下所示

$$\begin{array}{r} 4\cdot[\text{方程 }1]:\quad 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ +[\text{方程 }3]: -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \\ \hline [\text{新方程 }3]: -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array}$$

就可以得到一个新的方程组和矩阵。以此类推最终得到阶梯状的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

就这样，我们可以很容易地知道原方程组的解为(29,16,3)。

下面我们引入行初等变换：

1. (倍加变换) 把某一行换成它本身与另一行的倍数的和。
2. (对数变换) 把两行对换。
3. (倍乘变换) 把某一行的所有元素乘以同一个非零数。

若其中一个矩阵经过若干行初等变换变换为另一个矩阵，我们称这两个矩阵为行等价的。

2.3 主元

对于一个阶梯型矩阵，我们定义**主元元素**与**主元列**。下面是几个概念：

先导元素：(非零行中)该行最左边的非零元素。

主元位置：阶梯型矩阵中先导元素的位置

主元列：含有先导元素的列

我们举个例子，如下所示

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以知道，主元列是第 1、2、4 列，主元为 1、2、-5.

通过先前的知识可以知道，矩阵可以对应于一个线性方程组，例如：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{cases}x_1 - 5x_3 = 1\\ x_2 + x_3 = 4\\ 0 = 0\end{cases}$$

对应于主元列的变量x_1和x_2称为**基本变量**，其他变量(x_3)称为**自由变量**。

3.向量方程

3.1 向量

仅含一列的矩阵称为**列向量**，或简称**向量**。

若n是正整数，$\mathbb{R}^n$表示所有n个实数数列(或有序n元组)的集合，通常写成$n \times 1$列矩阵的形式，如

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}$$

所有元素都是零的向量称为零向量，用$\vec{0}$表示。

下面举个例子：

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$$

这里w_1和w_2是任意实数。所有的两个元素的向量的集记为$\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}$表示向量中的元素是实数，而指数 2 表示每个向量包含两个元素。

向量之间是可以做加减的，就是对应元素做加减得到新的向量；也支持和实数做标量乘法，就是实数与每个元素做乘法得到新的向量。

有时为了方便，我们会将列向量写成括号的形式，例如

$$\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix} \to (3,-1)$$

可以理解为是一个集合点对，$\mathbb{R}^2$看作是平面上所有点的集合，而向量的几何表示是一条由原点(0,0)指向点(3,-1)的有向线段，如图。

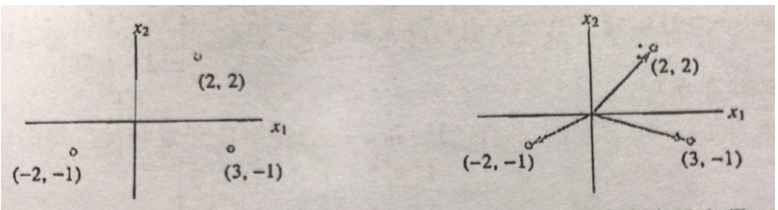


图 1-7 用点表示的向量　　图 1-8 用箭头表示向量

其他维度的也同理。

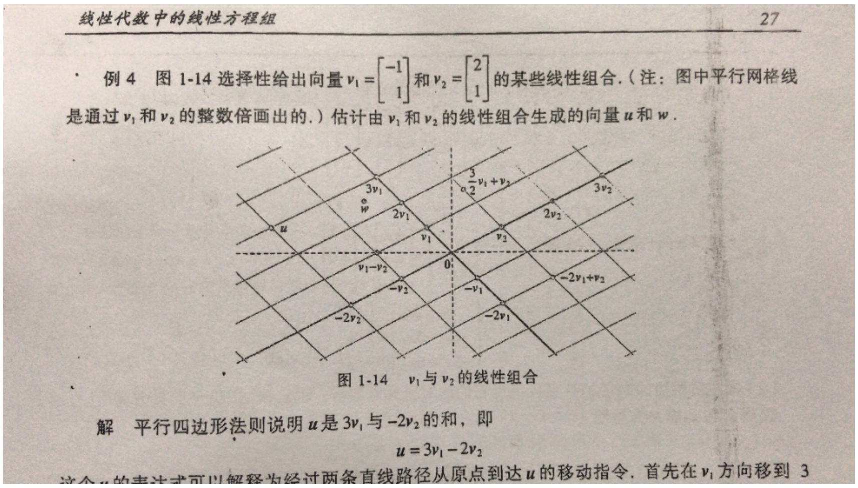
3.2 线性组合

给定$\mathbb{R}^n$中向量$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}$和标量$c_1,c_2,\dots,c_p$，向量

$$\vec{y}=c_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_p\overrightarrow{v_p}$$

称为向量$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}$以$c_1,c_2,\dots,c_p$为**权**的**线性组合**。

线性组合可以在几何上去理解，线性组合后的向量与其他向量一样，均是空间中的一个点。它的形成方式如下所示


线性代数中的线性方程组 27

例 4 图 1-14 选择性给出向量 $v_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 和 $v_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 的某些线性组合.（注：图中平行网格线是通过 v_1 和 v_2 的整数倍画出的.）估计由 v_1 和 v_2 的线性组合生成的向量 u 和 w.

图 1-14 v_1 与 v_2 的线性组合

解 平行四边形法则说明 u 是 $3v_1$ 与 $-2v_2$ 的和，即

$$u=3v_1-2v_2$$

经过两条直线路径从原点到达 u 的移动指令. 首先在 v_1 方向移到 3

也就是例如

$$\vec{\mathrm{u}}=3\overrightarrow{v_1}-2\overrightarrow{v_2}$$

可以当成是从原点开始沿着$\overrightarrow{v_1}$的方向走了三个单位，再沿着$\overrightarrow{v_2}$方向走了-2 个单位。

线性代数的一个主要思想是研究可以表示为某一固定向量集合$\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}\}$的线性组合的所有向量。若$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}$是$\mathbb{R}^n$中的向量，则$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}$的所有线性组合所称的集合用记号$\mathbf{Span}\{\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}},\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}},\dots,\overrightarrow{\boldsymbol{v_p}}\}$表示称为由$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}$所生成(或张成)的$\mathbb{R}^n$的子集，也就是说，$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}\}$是所有形如

$$c_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_p\overrightarrow{v_p}$$

的向量的集合，其中$c_1,\dots,c_p$为标量。

要判断向量$\vec{\mathrm{b}}$是否属于$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}\}$，就是判断向量方程

$$x_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+x_p\overrightarrow{v_p}=\vec{b}$$

是否有解，或等价地，判断增广矩阵$[\overrightarrow{v_1}\ \dots\ \overrightarrow{v_p}\ \ \vec{b}]$的线性方程组是否有解。注意，一定包含零向量。

下面是$\mathrm{Span}\{\vec{u}\}$与$\mathrm{Span}\{\vec{u},\vec{v}\}$的几何解释。

设$\vec{u}$是$\mathbb{R}^3$中的向量，那么$\mathrm{Span}\{\vec{u}\}$就是$\vec{u}$的所有数量倍数的集合，也就是通过$\vec{u}$和$\vec{0}$的直线上所有点的集合。

若$\vec{u}$和$\vec{v}$是$\mathbb{R}^3$的非零向量，$\vec{v}$不是$\vec{u}$的倍数，则Span$\{\vec{u},\vec{v}\}$是$\mathbb{R}^3$中通过$\vec{u}$、$\vec{v}$和$\vec{0}$的平面，可以结合我们之前的线性组合的几何理解上去理解。

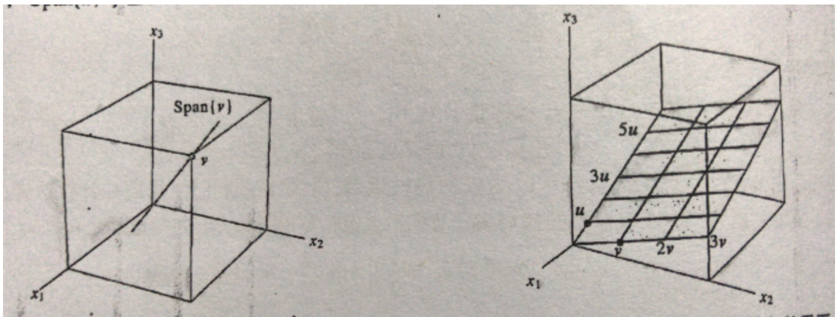


图 1-16 Span{v}是通过原点的直线　　图 1-17 Span{u,v}是通过原点的平面

4.矩阵方程 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$

线性代数的一个基本思想是把向量的线性组合看作矩阵与向量的积。

若A是$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$矩阵，它的各列为$a_1,\ldots,a_n$。若$\vec{x}$是$\mathbb{R}^n$中向量，则A与$\vec{x}$的积，记为$\mathrm{A}\vec{x}$，就是A的各列**以$\vec{x}$中对应元素为权的线性组合**，即

$$\mathrm{A}\vec{x}=[\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{a_2}\ \ldots\ \overrightarrow{a_n}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\overrightarrow{a_1}+x_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+x_n\overrightarrow{a_n}$$

注意维度要求，A的列数必须要等于$\vec{x}$中的元素个数。例如

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\\7\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

通过这个例子，相信能更好的理解矩阵相乘(即为什么要第一个矩阵的列数要等于第二个矩阵的行数)，还可以结合神经网络的前向传播来理解。

定理 设A是$\mathrm{n}\times\mathrm{m}$矩阵，则下列命题是逻辑上等价的，也就是说，对某个A，它们都成立或者都不成立。

a. 对$\mathbb{R}^m$中的每个$\vec{\mathrm{b}}$，方程$\mathrm{A}\vec{x}=\vec{b}$有解
b. $\mathbb{R}^m$中的每个$\vec{b}$都是A的列的一个线性组合
c. A的各列生成$\mathbb{R}^m$
d. A在每一列都有一个主元位置

其实要理解不难，a 和 d 是等价的，每一列均有一个主元，即阶梯型的矩阵每一列均不会出现 0=b的情况，就可以从最后一行开始逐步往上求解，所以 a 也是成立的。

对于 b，因为A是一个可以到达最后一行的阶梯型的矩阵，所以自然是可以表示出任何m行向量。

4.1 齐次线性方程与线性相/无关

若它可以写成$\mathrm{A}\vec{x}=\vec{0}$的形式，则称该线性方程组为**齐次线性方程组**。这样的方程组至少

有一个解，即$\vec{x}=\vec{0}$，这个解称为它的**平凡解**。我们往往更关注的是它的非平凡解。

我们将矩阵方程转换为向量方程，例如考虑方程

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

此方程当然有平凡解，即$x_1=x_2=x_3=0$，不过我们更关心的是平凡解是否是唯一解。

我们定义，$\mathbb{R}^n$中的一组向量$\{v_1,\dots,v_p\}$称为**线性无关**的，若向量方程

$$x_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+x_p\overrightarrow{v_p}=\vec{0}$$

仅有平凡解，向量组(集) $\{v_1,\dots,v_p\}$称为**线性相关**的，若存在不全为零的权$c_1,\dots,c_p$，使

$$c_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_p\overrightarrow{v_p}=\vec{0}$$

矩阵代数与行列式

1. 概念与矩阵运算

若A是$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$矩阵，即有$m$行$n$列的矩阵，$A$的第$i$行第$j$列的元素用$a_{ij}$表示，称为$A$的$(i,j)$元素，如下图所示

设A,B,C是相同维数的矩阵，r与s为数，则有

a. $A+B=B+A$
b. $(A+B)+C=A+(B+C)$
c. $(A+0)=A$
d. $r(A+B)=rA+rB$
e. $(r+s)A=\mathrm{r}A+\mathrm{s}A$
f. $r(sA)=(rs)A$
g. $AB\neq BA$

若乘积AB有定义，AB的第i行第j列的元素是A的第i行与B的第j列对应元素乘积之和。若$(AB)_{ij}$表示AB的(i,j)元素，A为$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$矩阵，则

$$(AB)_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

矩阵乘法的理解可以参照前面有关矩阵方程的介绍。

矩阵的乘幂表示为A^k，其中A是$\mathrm{n}\times\mathrm{n}$矩阵，$A^k$表示$k$个$A$的乘积。$A^0$为单位矩阵。

$$A^k=A\cdots A$$

矩阵的转置表示为A^T，其中A是一个$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$矩阵，则$A$的转置是一个$\mathrm{n}\times\mathrm{m}$矩阵，它的列是由$A$对应行构成的。

设A与B表示矩阵，其维数使下列和与积有定义，则

a. $(A^T)^T=A$

b. $(A+B)^T = A^T + B^T$
c. 对任意实数r，$(rA)^T = rA^T$
d. $(AB)^T = B^T A^T$

2.矩阵的逆

一个$\mathrm{n}\times\mathrm{n}$矩阵$A$是可逆的，若存在一个$\mathrm{n}\times\mathrm{n}$矩阵$C$使

$$AC = I \text{ 且 } CA = I$$

这时称C是A的**逆阵**，A可逆，且它的逆矩阵唯一。我们将C记为A^{-1}，于是

$$AA^{-1} = I \text{ 且 } A^{-1}A = I$$

不可逆矩阵也称为**奇异矩阵**，可逆矩阵也称为**非奇异矩阵**。

我们从这个定义可可以知道，可逆矩阵一定是方阵。后面还会引入左逆和右逆。下面是有关可逆矩阵的一些性质。

2.1 伴随矩阵求A^{-1}

将A和I排在一起构成增广矩阵$[A\ I]$，则对此矩阵进行行变换时，A和I受到同一变换。要么有一系列行变换把A变成I，同时I变成A^{-1}；要么A是不可逆的。例如

如求 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$。

$$B = [A|I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

故A可逆并且，由右一半可得逆矩阵$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

伴随矩阵求A^{-1}时间复杂度为$O(n^4)$，开销大，更高效的算法可以参考3.4 应用，应用矩阵的因式分解来求。

2.2 逆矩阵的应用-方程求解

可逆矩阵的一个重要性质就是用于求解方程组。

若A可逆，则对每一个$\mathbb{R}^n$中的$\vec{b}$，方程$A\vec{x} = \vec{b}$有唯一解$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$。

我们举一个例子来说明可逆矩阵的作用。比如我们要解如下方程

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 = 7 \end{cases}$$

解 该方程组就是$A\vec{x} = \vec{b}$，可以看成

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

所以有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2.3 可逆矩阵的性质、判断是否可逆

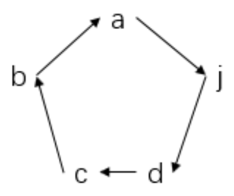
下面是有关可逆矩阵的两个基本定理：

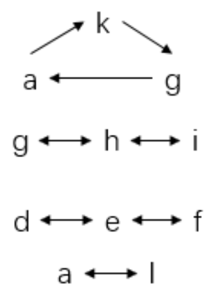
a. $(A^{-1})^{-1} = A$
b. 若A, B可逆，则有$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

接着是可逆矩阵定理。设A为$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$矩阵，则下列命题是等价的，即对某一特定的$A$，它们同时为真或同时为假。

a. A是可逆矩阵
b. A等价于$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$单位矩阵
c. A有n个主元位置
d. 方程$A\vec{x} = \vec{0}$仅有平凡解
e. A的各列线性无关
f. 线性变换$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$是一对一的
g. 对$\mathbb{R}^n$中任意$\vec{b}$，方程$A\vec{x} = \vec{b}$至少有一个解
h. A的各列生成$\mathbb{R}^n$
i. 线性变换$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$把$\mathbb{R}^n$映上$\mathbb{R}^n$上
j. 存在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$矩阵$C$使$CA = I$
k. 存在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$矩阵$D$使$DA = I$
l. A^T是可逆矩阵

它们的推导关系如下所示





c → b 是因为在矩阵有n个主元就说明它的简化阶梯形是I。

关于 d，可有 j 推出，即 $CA\vec{x} = \vec{0}$ 推得 $\vec{x} = \vec{0}$.

关于 e，其实就是 d，可参照 4.1 节。

利用这些定理，我们可以用于判断一个矩阵是否可逆。例如我们有一个矩阵A，如下所示。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & -2\\ -5 & -1 & 9\end{bmatrix}$$

解

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

所以A有 3 个主元位置，根据可逆矩阵定理 c，A是可逆的。

3.矩阵因式分解-$\boldsymbol{LU}$分解

矩阵的因式分解是把A表示为两个或更多矩阵的乘积，矩阵乘法是数据的综合（把两个或更多线性变换的作用结合成一个矩阵），矩阵的因式分解是数据的分解，把数据组成两个或者更多，这种结构可能更有用，或者更便于计算。

LU分解，是在工业与商业问题中常见的，解一系列具有相同系数矩阵中的线性方程

$$A\vec{x}=\overrightarrow{b_1},A\vec{x}=\overrightarrow{b_2},A\vec{x}=\overrightarrow{b_3},\dots,A\vec{x}=\overrightarrow{b_p}$$

我们解决这个问题是可以通过计算A^{-1}来求解方程，但是若A不可逆呢？

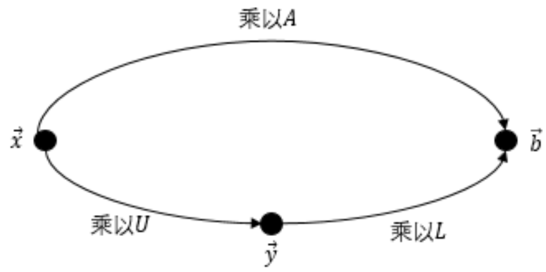
首先，我们假设A是$m\times n$矩阵可以行化简为阶梯形而不必行对换，则A可以写成形式$A=LU$，L是$m\times n$下三角矩阵，主对角线元素全是 1，U是A的一个等价的$m\times n$阶梯形矩阵，例如下图所示，这样一个分解称为LU分解，矩阵L是可逆的，称为单位下三角矩阵。

$$A=\underset{L}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ * & 1 & 0 & 0\\ * & * & 1 & 0\\ * & * & * & 1\end{bmatrix}}\underset{U}{\begin{bmatrix}* & * & * & * & *\\ 0 & * & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & * & *\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

求解$A\vec{x}=\vec{b}$可写成$L(U\vec{x})=\vec{b}$，因此可以由解下列方程来求解$\vec{x}$：

$$\begin{cases}L\vec{y}=\vec{b} & (1)\\ U\vec{x}=\vec{y} & (2)\end{cases}$$

先解(1)再解(2)即可得到$\vec{x}$，每个方程都很容易解，因为L和U都是三角矩阵。



映射$\vec{x}\mapsto A\vec{x}$的分解

下面我们举一个例子来应用LU分解。

已知

$$A=\begin{bmatrix}3&-7&-2&2\\-3&5&1&0\\6&-4&0&-5\\-9&5&-5&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&-5&1&0\\-3&8&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-7&-2&2\\0&-2&-1&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}=LU$$

应用A的LU分解来解$A\vec{x}=\vec{b}$，其中$\vec{b}=\begin{bmatrix}-9\\5\\7\\11\end{bmatrix}$.

解

$$[L\ \vec{b}]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-9\\-1&1&0&0&5\\2&-5&1&0&7\\-3&8&3&1&11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&-9\\0&1&0&0&-4\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}=[I\ \vec{y}]$$

$$[U\ \vec{y}]=\begin{bmatrix}3&-7&-2&2&-9\\0&-2&-1&2&-4\\0&0&-1&1&5\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&4\\0&0&1&0&-6\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}=[I\ \vec{x}]$$

$$\text{所以}\vec{x}=\begin{bmatrix}3\\4\\-6\\-1\end{bmatrix}.$$

3.1 LU分解算法

算法并不复杂，总的来说就是

1. 矩阵A经过一系列行变换变成阶梯形矩阵，即为U
2. 变换过程在每个主元列, 把主元以下的元素除以主元即为L在该列主元以下的元素。

以一个例子来讲解。求下列矩阵的LU分解

$$A=\begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\-4&-5&3&-8&1\\2&-5&-4&1&8\\-6&0&7&-3&1\end{bmatrix}$$

解

$$A=\begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\-4&-5&3&-8&1\\2&-5&-4&1&8\\-6&0&7&-3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\0&3&1&2&-3\\0&-9&-3&-4&10\\0&12&4&12&-5\end{bmatrix}=A_1$$

$$\sim A_2=\begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\0&3&1&2&-3\\0&0&0&2&1\\0&0&0&4&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\0&3&1&2&-3\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}=U$$

接着是在变换过程中求出L矩阵。上式中标出的元素确定了A化为U的行变换，在每个主元列，把标出的元素除以主元后将结果放入L。(提问，如果处理主元为 0 的情况？)

$$\begin{bmatrix}2\\-4\\2\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-9\\12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}[5]$$

$$\div 2 \quad \div 3 \quad \div 2 \div 5$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0 & 0\\1 & -3 & 1 & 0\\3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix} = L$$

容易证明，所求出的L和U满足$LU = A$.

3.2 算法性能分析

下列运算次数的计算适用于$n \times n$稠密矩阵A（大部分元素非零），n相当大，例如$n \geq 30$。

1. 计算A的LU分解大约需要$2n^3/3$浮算，而求A^{-1}大约需要$2n^3$浮算。
2. 解$L\vec{y} = \vec{b}$和$U\vec{x} = \vec{y}$大约需要$2n^3$浮算，因为任意$n \times n$三角方程组可以用大约n^3浮算接触。
3. 把$\vec{b}$乘以A^{-1}也需要$2n^3$浮算，但结果可能不如L和U得出的精确(由于计算A^{-1}及$A^{-1}\vec{b}$的舍入误差)
4. 若A是稀疏矩阵（大部分元素为 0），则L和U可能也是稀疏的，然而A^{-1}很可能是稠密的，显然用LU分解来解$A\vec{x} = \vec{b}$很可能比用A^{-1}快很多。

3.3 LUP分解 and 置换矩阵

考虑下面一个矩阵的LU分解。

$$A = \begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\0 & 0 & 3\\0 & -5 & -4\end{bmatrix}$$

根据之前所述算法，先将矩阵A化为阶梯形矩阵，并在变换的过程中求出L。但是很明显，在这种情况下，会出现除数为 0 的情况，这当然是灾难性的。

除了除数为 0 外，还有除数很小的情况，这会产生数值不稳定，因此我们希望尽可能选一个较大的主元。所以有的时候我们必须在矩阵的非对角线元素中选主元。

我们先引入一个置换矩阵的概念，考虑下面两个矩阵的相乘。

$$已知\ P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}，A = \begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\0 & 0 & 3\\0 & -5 & -4\end{bmatrix}，计算 P \cdot A$$

根据我们之前的所学知识很容易解出来。求得

$$A = \begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\0 & -5 & -4\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

可以发现，矩阵A似乎没什么变化，只是行的位置改变了而已。我们把这样的矩阵称之为置换矩阵。

置换矩阵 一种系数只由 0 和 1 组成的方阵。矩阵的每一行/列的第i个元素为 1，表示原矩阵的该行/列为第i行/列。具体置换的行 or 列取决于是左乘还是右乘。

- 当矩阵A左乘一个置换矩阵，交换的是矩阵的行。即$P \cdot A$
- 当矩阵A右乘一个置换矩阵，交换的是矩阵的列。即$A \cdot P$

让我们回到LUP分解。借助这个置换矩阵，我们可以将矩阵A的行进行置换，每步重新选取较大的主元进行行替换。

原来的$A = LU$我们改写为$PA = LU$，其中P是一个置换矩阵。该式子意为先对A进行行置换，再对行置换后的A进行LU分解。

当我们要求解$A\vec{x} = \vec{b}$，可做如下变换：

$$A\vec{x} = \vec{b_1} \to PA\vec{x} = P\vec{b_1} \to LU\vec{x} = P\vec{b_1}$$

于是问题可以化为

$$\begin{cases} L\vec{y} = P\vec{b} & (1) \\ U\vec{x} = \vec{y} & (2) \end{cases}$$

求解得到的$\vec{x}$就是$A\vec{x} = \vec{b}$的解，证明如下:

$$A\vec{x} = P^{-1}LU\vec{x} = P^{-1}L\vec{y} = P^{-1}Pb = b$$

其实LU分解是LUP分解的一种，当$P = I$时，LUP分解就成为LU分解。可以理解成是A矩阵不进行置换的情况下LUP分解就成为了LU分解。

3.4 应用

利用好矩阵的因式分解，不只是在求解方程组，在求逆矩阵、最小二乘逼近方面也能大大提高效率。

在求逆矩阵时，我们可以有两种思路：

- $A^{-1} = (LU)^{-1}P = U^{-1}L^{-1}P$
- 通过LUP分解解方程$AX = I$，X即为A^{-1}

通过LUP分解来求逆矩阵的过程中，分解的过程需要$O(n^3)$，求解三角矩阵的过程需要$O(n^2)$，避免了主元素为 0 的情况。可提高求解一系列具有相同系数矩阵中的线性方程的效率，3.矩阵因式分解-***LU***分解。

LUP分解在 Python 中可以使用 scipy 库的 lu 方法直接进行求解，使用示例如下:

```
import numpy as np
from scipy.linalg import lu

if __name__ == "__main__":
    a = np.asarray([[2, 4, -1],
```

```
                         [0, 0, 3],
                         [0, -5, -4]])
    p, l, u = lu(a)
```

4.行列式

首先行列式是只对方阵才有定义的，即**只有方阵才能计算行列式**，可逆矩阵也类似。

当行列式不为 0 时，矩阵才可逆；当系数矩阵行列式不为 0 时，系数矩阵才线性无关，方程组才有解。

接下来我们会先介绍行列式是如何计算的。

4.1 行列式的计算

我们先给出2×2矩阵和3×3矩阵的行列式。

$$detA=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$detA=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

余子式 在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行第j列划去后，余下的$n-1$阶行列式叫做(i,j)元素的a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，同时$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的代数余子式。

要注意的是，余子式与代数余子式都是行列式，行列式的阶越低越容易计算，它存在的意义就是为了更好的计算行列式。

下面给出行列式的计算公式。

$$detA=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

这是按照第一行来计算行列式，更一般地，我们可以按照第i行或者第j列来计算。通过观察我们也可以知道，**三角形矩阵的行列式等于对角线上元素的乘积**。

$$detA=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

让我们举个例子来加深理解。

计算$detA$，这里

$$A=\begin{bmatrix}3&-7&8&9&-6\\0&2&-5&7&3\\0&0&1&5&0\\0&0&2&4&-1\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}$$

解 按A的第一列来进行计算，有

$$detA=3\cdot\begin{vmatrix}2&-5&7&3\\0&1&5&0\\0&2&4&-1\\0&0&-2&0\end{vmatrix}-0+0-0+0$$

再对第一列进行展开，有

$$detA=2\cdot\begin{vmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{vmatrix}=-12$$

具体按照哪一列来展开要看情况。

4.2 行列式的性质

我们给出几个行列式的性质。

A是一个方阵。

a. 若A的某一行的倍数加到另一行得矩阵B，则 $detB$=$detA$
b. 若A的两行互换得矩阵B，则 $detB$=$-detA$
c. 若A的某行乘以k倍得到矩阵B，则 $detB$=$k\cdot detA$
d. $detA=detA^T$，这证明了行列式的列变换和行变换具有相同效果
e. 若A与B均为$n\times n$矩阵，则 $detAB=detA\cdot detB$

这几个性质可以帮我们有效地计算行列式。我们举一个例子来说明。

计算$detA$，其中$A=\begin{bmatrix}1&-4&2\\-2&8&-9\\-1&7&0\end{bmatrix}$

解 思路是先将A化简成阶梯形，再利用三角形矩阵的行列式等于对角线上元素的乘积来计算。

$$detA=\begin{vmatrix}1&-4&2\\-2&8&-9\\-1&7&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-4&2\\0&0&-5\\-1&7&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-4&2\\0&0&-5\\0&3&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-4&2\\0&3&2\\0&0&-5\end{vmatrix}$$
$$=-(1)(3)(-5)=15$$

4.3 逆矩阵公式

下面给出一个利用行列式来计算矩阵的逆的公式。

定理 设A是一个可逆的$n\times n$矩阵，则$A^{-1}=\frac{1}{detA}adjA$.

用一个例子来说明。求矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}$的逆。

解 九个代数余子式为

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-2\quad A_{12}=3\quad A_{13}=5$$

$$A_{21}=14\quad A_{22}=-7\quad A_{23}=-7$$

$$A_{31}=4\qquad A_{32}=1\qquad A_{33}=-3$$

$adjA$为代数余子式的矩阵的转置(例如A_{21}到(1,2)的位置)，从而有

$$adjA=\begin{bmatrix}-2 & 14 & 4\\ 3 & -7 & 1\\ 5 & -7 & -3\end{bmatrix}$$

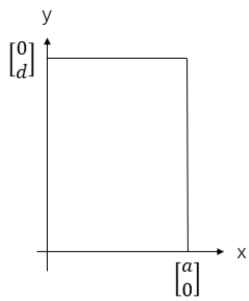
我们可以直接计算$detA$，但下列计算对上面的结果提供了一个检验并计算出$detA$的方法。

$$(adjA)\cdot A=\begin{bmatrix}-2 & 14 & 4\\ 3 & -7 & 1\\ 5 & -7 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{bmatrix}=14I$$

我们根据定理可知，$A^{-1}A=\frac{1}{detA}adjA\cdot A=\frac{1}{detA}\,14I$，可知 $detA=14$.

所以，$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-2 & 14 & 4\\ 3 & -7 & 1\\ 5 & -7 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/7 & 1 & 2/7\\ 3/14 & -1/2 & 1/14\\ 5/14 & -1/2 & -3/14\end{bmatrix}$

4.4 用行列式表示面积或体积



若A是一个2×2矩阵，则由A的列确定的平行四边形的面积为$|detA|$；若A是一个3×3矩阵，则由A的列确定的平行六面体的体积也为$n\times n$。可引申到$n\times n$矩阵的情形。这也就是**行列式的几何意义**。

例如若A为 2 阶对角矩阵，定理显然成立。

$$\left|det\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\right|=|ad|=\text{矩阵面积}$$

所以可以得出，判断一个线性方程组是否有唯一解，即判断系数矩阵的列向量所构成的体积是否为 0，即判断列向量是否两两位于不同平面上。