Ejercicios Teorico - Practicos
Transformadas de Fourier.

Yesid Ara Patiño.
CC: 1004516623.

1.2 • Serie de Fourier. - Formas y Significado.

Formas Comunes.

Supongamos $x(t)$ periodica de Periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n (n\omega_0 t)]$$

Forma exponencial compleja.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Amplitud de fase.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

donde $A_n = |2C_n|$ y $\phi_n = \arg(C_n)$

- La serie representa cualquier señal periodica. como suma de armonicos discretos.
- Es un espectro discreto: solo hay energia en frecuencias $n\omega_0$ (lineas)

• Transformada de Fourier. (FT) - tiempo continuo, espectro continuo

Para una señal $x(t)$ (no necesariamente periodica):

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Si $x(t)$ no es periodica, $X(\omega)$ es una funcion continua de ω.
- Si $x(t)$ es periodica, su FT se convierte en una serie de deltas (espectro discreto)

Relacion Practica: En una señal periodica tiene FT formada por comb (dal-tran) de deltas. una señal tiene (no periodica) FT continua.

- DTFT – Tiempo discreto, frecuencia continua periodica

Para secuencia $x[n]$ definida para $n \in \mathbb{Z}$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

- $\omega \in \mathbb{R}$ (Frecuencia continua)
- Periodicidad: $X(e^{j\omega})$ es 2π – periodica en ω.
- Si $x[n]$ es periodico en n entonces la DTFT es una serie de deltas periodicas (discreto en frecuencia).
- Si $x[n]$ es periodico pero infinito en duracion su DTFT es continua (pero periodica)

- DFT – Tiempo Discreto y finito, frecuencia Discreta

Para una secuencia $x[n]$ de longitud N

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- $X[k]$ son muestras discretas del DTFT en $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$
- DTF asume Periodicidad circular de la secuencia en tiempo (extiende $x[n]$ periodicamente con periodo N. Eso causa que la convolucion lineal se convierte en convolucion circular si trabajas directamente con DFT sin zero.
- la DFT es lo que calculamos en la practica en computadores

- FFT – algoritmo eficiente para la DFT.
  - La DFT directa requiere N^2 complejos multiplicaciones si se calcula de forma ingenua
  - Cooley – Tukey divide la DFT de tamaño N en dos DFTs de tamaño $N/2$ asumiendo N potencia de 2: Separar muestras pares e impares. y se repite recursivamente.

Variantes y Prácticas.

- Radix - 2 exige N potencia de 2
- Implementaciones modernas (FFTW, MKL, etc) optimizan para CPU vectorizado y caché.
- Consideraciones numéricas precisión flotante errores de redondeo, estabilidad en transformadas inversas, manejo de señales reales (optimización pseudo simetría) uso de bit - reversed o algoritmos iterativos.

1.3 Función de Densidad espectral.

- a.) $x(t) = e^{-a|t|}$, $a>0$ Dividimos la integral en $t \geq 0$ y $t<0$:

$$X(\omega) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt.$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega}, \quad \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)} dt = \frac{1}{a-j\omega}.$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad a>0$$

- b.) $x(t) = \cos(\omega_c t)$.

$$\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}(e^{-j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}).$$

Como $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$.

$$X(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)].$$

- c) $x(t) = \sin(\omega_s t)$.

$$\sin(\omega_s t) = \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_s t}}{2j}$$

$$X(\omega) = j\pi[\delta(\omega + \omega_s) - \delta(\omega - \omega_s)].$$

e.) $x(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-\omega^2}{4a}}, \quad R(a) > 0.$$

1.4 Aplique propiedades de la Transformada para resolver.

• a) $F\{e^{-j\omega_1 t} \cos(\omega_c t)\}$

Primero $\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}(e^{-j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$.

$$e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}(e^{j(\omega_c - \omega_1)} + e^{-j(\omega_c + \omega_1)t}).$$

$$F\{e^{-j\omega_1 t} \cos(\omega_c t\} = \pi[\delta(\omega - (\omega_c - \omega_1)) + \delta(\omega + (\omega_c + \omega_1))].$$

• b.) $F\{u(t) \cos^2(\omega_c t)\}$

Identidades trigonometricas.

$$\cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t).$$

Entonces.

$$u(t)\cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}u(t)\cos(2\omega_c t)$$

Denotemos $U(\omega) = F(u(t))$ en teoria de distribuciones.

$$F(u(t)) = \pi\delta(\omega) + pv\left(\frac{1}{j\omega}\right), \quad pv = \text{valor principal}.$$

Desplazamiento en frecuencia

Denotamos.

$$F\{u(t)\cos(2\omega_c t)\} = \frac{1}{2}(U(\omega - 2\omega_c) + U(\omega + 2\omega_c)).$$

Juntando todo

$$F\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}U(\omega) + \frac{1}{4}(U(\omega - 2\omega_c) + U(\omega + 2\omega_c))$$

· d.) $\mathcal{F}\{3t^3\}$.

Usamos la propiedad con derivadas de delta

$$\mathcal{F}\{t^n\} = 2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega).$$

donde $\delta^{(u)}$ es la u-esima derivada de la delta de Dirac.

Por tanto, para $3t^3$.

$$\mathcal{F}\{3t^3\} = 3 \cdot 2\pi i^3 \delta^{(3)}(\omega) = -6\pi i \, \delta^{(3)}(\omega).$$

1.5

- Modulacion AM (Clasica envolvente): señal transmitida $y(t) = A_c[1 + m\,x(t)]\cos(2\pi f_c t)$ donde $x(t)$ es el mensaje normalizado
- Deteccion coherente: (Sincrona): el receptor multiplica la señal recibida por una replica local de la portadora $\cos(2\pi f_c t)$ con la misma fase. esa multiplicacion produce un termino baseband y otro en $2f_c$

1.6 Espectro de la señal modulada

- $A_c\cos(\omega_c t)$ tiene transformada

$$\mathcal{F}\{A_c\cos(\omega_c t)\} = A_c\pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)].$$

- $m(t)\cos(\omega_c t) \to$ usamos propiedad de modulacion (Desplazamiento en frecuencia).

$$\mathcal{F}\{m(t)\cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_c)$$

Sumando:

$$Y(\omega) = A_c\pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{1}{2}M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_c).$$

- las lineas de la portadora en $\pm\omega_c$
- las replicas del espectro del mensaje centradas en $\pm\omega_c$.

Si $M(\omega)$ está limitado a $|\omega| \le \Omega_m$ entonces las bandas laterales ocupan $\omega_c \pm [-\Omega_m, \Omega_m]$

1,7 Distorsion Armonica total

Mide que tan distorsionada esta una señal respecto a su componente fundamental

Sea una señal periodica $x(t)$ con serie de fourier:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \phi_2) + A_3 \cos(3\omega_0 t + \phi_3) \ldots$$

El THD se define como

$$THD = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \ldots}}{A_1}$$

y expresado en Porcentaje:

$$THD(\%) = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{A_1}$$

Donde: A_1 = Amplitud de Armonico fundamental
A_n = Amplitud de Armonicos superiores.

El THD mide cuanto contribuyen los componentes no fundamentales a la forma de la señal

Interpretacion fisica:

- $THD = 0\%$ → Señal Sinusoidal.
- THD alto ($>10\%$) → Fuerte distorsion, onda no sinusoidal.
- En sistemas electricos o de audio, se recomienda $THD < 5\%$.

+ Ejemplo Teorico:

Una onda cuadrada de amplitud 1 (Valor maximo) tiene serie de fourier.

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$

Por tanto: $A_1 = \frac{4}{\pi}$, $A_3 = \frac{4}{3\pi}$, $A_5 = \frac{4}{5\pi}$, ...

El THD teorico

$$THD = \frac{\sqrt{A_3^2 + A_5^2 + A_7^2 + \ldots}}{A_1} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(1/(2k-1)^2)}{1}} = 0{,}483 \approx 48{,}3\%$$

Powered by CamScanner

Ejercicios 2. Transformada de Laplace.

2.2 Demostrar si los siguientes sistemas son sistemas lineales e invariantes en el tiempo. (SLIT) (Simulacion de sistemas en Python).

1. $y[n] = \frac{x[n]}{3} + 2x[n-1] - y[n-1]$.

- Linealidad. Si: Aunque aparece $y[n-1]$ en el lado derecho. la ecuacion es lineal en x y y. el operador que asocia $x \to y$ es lineal

- Invarianza en el tiempo: Si - Coeficientes constantes. y dependencias solo con retardos fijos implican invarianza temporal

- Conclusion. lineal e invariante en el tiempo bajo la suposicion usual de condiciones iniciales cero.

2. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]^2$.

- Linealidad No: Aparece $x[k]^2$ no se cumple aditividad ni homogeneidad

- Invarianza en el tiempo: Si, si desplazamos la entrada en el tiempo de salida simplemente se desplaza

- Conclusion: No lineal, si invariante en el tiempo.

3. $y[n] = \text{median}\{x[n-1], x[n], x[n+1]\}$.

- Linealidad: No. la mediana es una operacion no lineal (no respeta superposicion).

- Invarianza en el tiempo: Si: si la ventana es centrada y fija, un desplazamiento en la entrada produce el mismo desplazamiento en salida

- Conclusion: No lineal, Si invariante en el tiempo.

4. $y(t) = Ax(t) + B$, $A, B \in \mathbb{R}$

- Linealidad: No, salvo el caso $B = 0$. El termino constante B rompe la propiedad de homogeneidad por lo que el operador afin es no lineal.

- TI: Si, Un desplazamiento temporal en la entrada produce el mismo desplazamiento en la salida

- Conclusion: No lineal (en general) Si invariante en el tiempo.

2.4 Solucion y Simulaccion en GetHub

2.5 Sea la Señal Gaussiana.

$$x(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0$$

Sistema A (no lineal) $y_A(t) = x^2(t)$.

Sistema B Impulso $h_B(t) = Be^{-bt^2}, b > 0$

Usamos.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\tau^2} e^{-q(t-\tau)^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{p+q}}\, e^{\frac{-pq}{p+q}t^2} \quad p, q > 0.$$

a.) Salida del sistema en Serie $x(t) \to h_B(t) \to y_A(t) \to y(t)$.

Primera etapa - convolucion $v(t) = (x * h_B)(t)$:

formula = $p = a, q = b$ y factor multiplicativo B.

$$v(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} e^{-b(t-\tau)^2} d\tau = B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{-\frac{ab}{a+b}t^2}$$

Segunda etapa - no lineal:

$$y(t) = (v(t))^2 = \left(B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\right)^2 e^{-2\frac{ab}{a+b}t^2}$$

Es decir:

$$y(t) = B^2 \frac{\pi}{a+b} \exp\left(-\frac{2ab}{a+b}t^2\right).$$

Powered by CamScanner

b.) Encuentre la salida del sistema en Serie $x(t) \to y_A(t) \to h_B(t) \to y(t)$

Primera etapa: - cuadrado $u(t) = (x(t))^2$.

$$u(t) = (e^{-at^2}) = e^{-2at^2}.$$

Segunda etapa - Convolucion con h_B:

Ahora convolucionamos $u(t) = e^{-2at^2}$ con $h_B(t) = Be^{-bt^2}$

$p = 2a, \quad q = b$:

$$y(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a\tau^2} e^{-b(t-\tau)^2} d\tau = B\sqrt{\frac{\pi}{2a+b}}\, e^{\frac{-2ab}{2a+b}t^2}$$

Es decir:

$$y(t) = B\sqrt{\frac{\pi}{2a+b}} \exp\left(-\frac{2ab}{2a+b}t^2\right)$$