Parcial 1 – Señales y Sistemas.

La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in R, C$ y $x_2(t) \in R, C$ se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt.$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como

$$x_1(t) = Ae^{-jn\omega_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{jm\omega_0 t}$$

Con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in R^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Determine la distancia entre las dos señales. Compruebe sus resultados con Python.

$$x_1(t) = Ae^{-jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad A, B \in \mathbb{R}^+$$

$$x_2(t) = Be^{jm\omega_0 t} \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T} \int |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt.$$

$$|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^* = |x_1|^2 + |x_2|^2 - x_1 x_2^* - x_1^* x_2.$$

$$x_1 x_2^* = ABe^{-j(n+m)\omega_0 t}$$

$$x_1^* x_2 = ABe^{j(n+m)\omega_0 t}$$

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - ABe^{j(n+m)\omega_0 t} - ABe^{j(n+m)\omega_0 t}$$

$$= A^2 + B^2 - AB(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\theta)$$

$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t).$$

$$d^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T_0} (A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t)) \, dt.$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (A^2) \, dt = A^2 \quad , \quad \frac{1}{T_1} \int_0^{T_0} B^2 \, dt = B^2$$

• $n+m \neq 0$.

$$-\frac{2AB}{T_0}\int_0^{T} \cos((n+m)\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{-2AB}{T_0}\left[\frac{\operatorname{Sen}((n+m)\omega_0 t)}{(n+m)\,\omega_0 t)}\right]_0^{T_0} = \frac{\operatorname{Sen}((n+m)\omega_0 T_0) - 0}{((n+m)\,\omega_0 t)}$$

Como $\omega_0 T_0 = 2\pi$, $\operatorname{Sen}((n+m)\omega_0 T_0) = 0$.

$$d^2 = A^2 + B^2 \rightarrow d = \sqrt{A^2+B^2}$$

$n+m = 0 \rightarrow m = -n$. el modulo de $e^{-jn\omega_0 t} = 1$

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t)$$

$\cos(0) = 1$.

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - 2AB = (A-B)^2$$

$$d^2 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} (A-B)^2\,dt = (A-B)^2$$

$$d^2 = (A-B)^2 \longrightarrow d = \sqrt{(A-B)^2} = d = |A-B|$$

$\Rightarrow$ $m \neq -n$ $\quad d = \sqrt{A^2+B^2}$

$m = -n$. $\quad d = |A-B|$

2) Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de 5kHz y 4 bits. de capacidad de representación, aplicado a la señal continua.

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Realizar la simulación del proceso de discretización incluyendo al menos tres periodos de $x(t)$. en caso de no ser apropiada diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

$f_s = 5KHz$ 4 bits

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

$$T_s = \frac{1}{5KHz} = \frac{1}{5} = 0{,}2\,ms$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{2}$$

$$\omega_1 = 1000 \rightarrow f_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500\,Hz \rightarrow T_1 = \frac{1}{500Hz} = 0{,}002\,ms.$$

$$\omega_2 = 3000\pi \rightarrow f_2 = \frac{3000\pi}{2\pi} = 1500\,Hz \rightarrow T_2 = \frac{1}{1500} = 0{,}00066\overline{7}\,s$$

$$\omega_3 = 11000\pi \rightarrow f_3 = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\,Hz \rightarrow T_3 = \frac{1}{5500Hz} = 0{,}0001818$$

Verifico si las frecuencias cumplen con la f dada.

$$f_s \geq 2\max(f_1, f_2, f_3).$$

$$f_s \geq 2\cdot 5500\,Hz.$$

$$f_s \geq 11000\,Hz \quad \text{frecuencia dada.}$$

Nyquist: $F_s/2 = \frac{5000}{2} = 2500$ como $f_{max} = 5500 > 2500$ hay aliasing

$$f_b = \min_{k \in \mathbb{N}} |F - k f_s|.$$

$f_s = 5500$, $f_s = 5000$ $f_{alias} = |5500 - 1{,}5000| = 500Hz.$

Periodos de Suma.

$$f_b = (500, 1500, 5500) = 500\,Hz.$$

$$T_0 = 1/f_b = 1/500 = 0{,}0025.$$

$3T_0 = 0{,}0065 \rightarrow$ al menos tres periodos

Forma discreta $x[n] = x(nT_s)$.

$A\cos(2\pi f + \phi)$ en $t = nT_s$.

$A\cos(2\pi f \frac{n}{f_s} + \phi) = A\cos(\Omega n + \phi)$.

$\Omega = \frac{2\pi}{N} = 2\pi f \Rightarrow f \frac{1}{N} = \frac{F}{f_s}$.

$x[n] = 3\cos\frac{(1000\pi t)}{f_s} + 5\sin\frac{(3000\pi t)}{f_s} + 10\cos\frac{(11000\pi t)}{f_s}$

$F_1 = \frac{500}{5000} = \frac{1}{10}$; $F_2 = \frac{1500}{5000} = \frac{3}{10}$; $F_3 = \frac{5500}{5000} = \frac{11}{10}$

$x[n] = 3\cos(\Omega) + 5\sin(\Omega) + 10\cos(\Omega)$

$x[n] = 3\cos(2\pi n f_1) + 5\sin(2\pi n f_2) + 10\cos(2\pi n f_3)$

$x[n] = 3\cos\left(\frac{2}{10}\pi n\right) + 5\sin\left(\frac{3}{5}\pi n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi}{5}\pi n\right)$

$x[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{3}{5}\pi n\right) + 10\cos\left(\frac{1}{5}\pi n\right)$

$13\cos\frac{\pi n}{5} + 5\sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right)$

Cuantización.

$b = 4$ bits $\rightarrow L = 2^b = 16$ niveles

$[x[n]] \leq |13\cos| + |5\sin| = 13 + 5 = 18$

$V_{max} = 18$.

$\Delta = \frac{2V_{max}}{L} = \frac{36}{16} = 2{,}25$.

3. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [ti, tf]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de fourier se pueden calcular según:

$$C_n = \frac{1}{(ti-tf)n^2\omega_0^2}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt; \ n \in \mathbb{Z}$$

Como se pueden calcular los coeficientes a_n, y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonometrica de fourier?

$x(t)$ para $t \in [ti, tf]$; demostrar $C_n = \frac{1}{(ti-tf)n^2\omega_0^2}\int_T x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

tenemos: $x(t) = \sum C_n e^{jn\omega_0 t}$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_n C_n \frac{d}{dt}e^{jn\omega_0 t}$$

$$x''(t) = \frac{dx'(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum C_n \frac{de^{jn\omega_0 t}}{dt} = \sum_n C_n \frac{d^2 e^{jn\omega_0 t}}{dt^2}$$

$$\frac{de^{jn\omega_0 t}}{dt} = jn\omega_0 e^{jn\omega_0 t}; \quad \frac{d^2 e^{jn\omega_0 t}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(jn\omega_0 e^{jn\omega_0 t})$$

$$= jn\omega_0 \, jn\omega_0 \, e^{jn\omega_0 t}$$

$$= -n^2\omega_0^2 e^{jn\omega_0 t}$$

$$x''(t) = \sum_n C_n \frac{d^2 e^{jn\omega_0 t}}{dt^2} = \sum_n -C_n n^2\omega_0^2 e^{jn\omega_0 t} = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$; \text{con } C_{-n} = -C_n n^2\omega_0^2$

Si $C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$ y $C_n = \frac{1}{T}\int_T x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

Reemplazamos el $C_n \to -C_n n^2\omega_0^2 = \frac{1}{T}\int_T x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

$$C_n = \frac{1}{(ti-tf)n^2\omega_0^2}\int_T x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt.$$

$$C_n = \frac{1}{(ti-tf)n^2\omega_0^2}\int x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{(ti-tf)n^2\omega_0^2}\int x''(t)$$

$$(\cos(n\omega_0 t) - j\operatorname{Sen}(n\omega_0 t)) dt$$

$$= \frac{1}{(ti-tf)n^2\omega_0^2}\int_T x''(t)\cos(n\omega_0 t)dt - j\frac{1}{(ti-tf)n^2\omega_0^2}$$

$\int x''(t) \operatorname{Sen}(n\omega_0 t)\, dt$

$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$; $b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t) \operatorname{Sen}(n\omega_0 t)\, dt$

y $a_n = 2Re\{C_n\}$

$b_n = -2Im\{C_n\}$.

$$a_n = 2Re\{C_n\} = 2 \frac{1}{(ti - tf)n^2\omega_0^2} \int_T x''(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = -2Im\{C_n\} = -2 - \frac{1}{(ti - tf)n^2\omega_0^2} \int_T x''(t) \operatorname{Sen}(n\omega_0 t)\, dt.$$

④. Encuentre el espectro de fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in [0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5]$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.

$m_1 = \frac{A}{d_2-d_1}$, $m_2 = \frac{-A}{d_1}$, $m_3 = \frac{A}{d_1}$, $m_4 = \frac{-A}{d_2-d_1}$

$J_{-d_2} = m_1 - 0 = \frac{A}{d_2-d_1}$

$J_{-d_1} = m_2 - m_1 = \frac{-A}{d_1} - \frac{A}{d_2-d_1}$

$J_0 = m_3 - m_2 = \frac{2A}{d_1}$

$J_{d_1} = m_4 - m_3 = \frac{-A}{d_2-d_1} - \frac{A}{d_1}$

$J_{d_2} = \phi - m_4 = \frac{A}{d_2-d_1}$

En un periodo

$$x''(t) = \sum_k J_{tk}\, \delta(t-t_k)$$

Coeficientes desde $x''(t)$.

$$x''(t) = \sum (jn\omega_0)^2 C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum n^2\omega_0^2 C_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por ortogonalidad

$$C_n'' = \frac{1}{T}\int_0^T x''(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt = -n^2\omega_0^2 C_n$$

$$C_n = \frac{-1}{n^2\omega_0^2 T} \sum_k J_{Tk} e^{-jn\omega_0 t_k},\ n \neq 0 \rightarrow x''(t)$$

Por simetría par.

$$C_n = \frac{-2A}{n^2\omega_0^2 T}\left[\frac{\cos(n\omega_0 d_2)}{d_2-d_1} - \left(\frac{1}{d_2-d_1} + \frac{1}{d_1}\right)\right],\ n \neq \phi$$

Para C_0 el Promedio por periodo, el area en $[\phi, d_2]$ es $\frac{1}{2}Ad_2$

Por paridad es igual.

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_\phi^T x(t)\, dt \cdot \frac{Ad_2}{T}$$