第3章 测量误差及数据处理

3.2 测量误差的分类和测量结果的表征

3.2.1 测量误差的分类

- 根据测量误差的性质，测量误差可分为随机误差、系统误差、粗大误差三类。

- 1.随机误差
  - 定义：在同一测量条件下（指在测量环境、测量人员、测量技术和测量仪器都相同的条件下），多次重复测量同一量值时（等精度测量），每次测量误差的绝对值和符号都以不可预知的方式变化的误差，称为随机误差或偶然误差，简称随差。
  - 随机误差主要由对测量值影响微小但却互不相关的大量因素共同造成。这些因素主要是噪声干扰、电磁场微变、零件的摩擦和配合间隙、热起伏、空气扰动、大地微震、测量人员感官的无规律变化等。

3.2.1 测量误差的分类（续）

- 例：对一不变的电压在相同情况下，多次测量得到1.235V，1.237V，1.234V，1.236V，1.235V，1.237V。
- 单次测量的随差没有规律，
  但多次测量的总体却服从统计规律。
- 可通过数理统计的方法来处理，即求算术平均值

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

◆随机误差定量定义：测量结果x_i与在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值之差

$$\delta_i = x_i - \bar{x} \qquad (n\to\infty)$$

3.2.1 测量误差的分类（续）

- 2.系统误差
  - 定义：在同一测量条件下，多次测量重复同一量时，测量误差的绝对值和符号都保持不变，或在测量条件改变时按一定规律变化的误差，称为系统误差。
    例如仪器的刻度误差和零位误差，或值随温度变化的误差。
  - 产生的主要原因是仪器的制造、安装或使用方法不正确，环境因素（温度、湿度、电源等）影响，测量原理中使用近似计算公式，测量人员不良的读数习惯等。
  - 系统误差表明了一个测量结果偏离真值或实际值的程度。系差越小，测量就越准确。
  - 系统误差的定量定义是：在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测量的真值之差。即

$$\varepsilon = \bar{x} - A_0$$

3.2.1 测量误差的分类（续）

- 3.粗大误差：　粗大误差是一种显然与实际值不符的误差。产生粗差的原因有：
  - ①测量操作疏忽和失误　如测错、读错、记错以及实验条件未达到预定的要求而匆忙实验等。
  - ②测量方法不当或错误　如用普通万用表电压档直接测高内阻电源的开路电压。
  - ③测量环境条件的突然变化　如电源电压突然增高或降低，雷电干扰、机械冲击等引起测量仪器示值的剧烈变化等。
- 含有粗差的测量值称为坏值或异常值，在数据处理时，应剔除掉。

3.2.1 测量误差的分类（续）

- 4.系差和随差的表达式
  在剔除粗大误差后，只剩下系统误差和随机误差

$$\varepsilon+\delta_i=\bar{x}-A+x_i-\bar{x}=x_i-A=\Delta x_i$$

各次测得值的绝对误差等于系统误差和随机误差的代数和。

  - 在任何一次测量中，系统误差和随机误差一般都是同时存在的。
  - 系差和随差之间在一定条件下是可以相互转化（尺子）

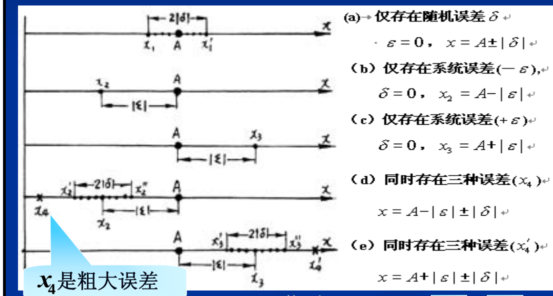
3.2.2 测量结果的表征

- 准确度表示系统误差的大小。系统误差越小，则准确度越高，即测量值与实际值符合的程度越高。
- 精密度表示随机误差的影响。精密度越高，表示随机误差越小。随机因素使测量值呈现分散而不确定，但总是分布在平均值附近。
- 精确度用来反映系统误差和随机误差的综合影响。精确度越高，表示正确度和精密度都高，意味着系统误差和随机误差都小。

射击误差示意图

3.2.2 测量结果的表征（续）

- 测量值 $x = A \pm |\varepsilon| \pm |\delta|$



3.3 测量误差的估计和处理

- 3.3.1 随机误差的统计特性及减少方法
  - 在测量中，随机误差是不可避免的。
  - 随机误差是由大量微小的没有确定规律的因素引起的，比如外界条件（温度、湿度、气压、电源电压等）的微小波动，电磁场的干扰，大地轻微振动等。
  - 多次测量，测量值和随机误差服从概率统计规律。
  - 可用数理统计的方法，处理测量数据，从而减少随机误差对测量结果的影响。

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法（续）

1. 随机误差的分布规律

（1）随机变量的数字特征

① 数学期望：反映其平均特性。其定义如下：

- X为离散型随机变量：概率p_i

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

- X为连续型随机变量：概率密度函数p(x)

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法（续）

② 方差和标准偏差

方差是用来描述随机变量与其数学期望的分散程度。设随机变量X的数学期望为E(X)，则X的方差定义为：

$$D(X)= E(X - E(X))^2 \text{ 或 } D(X)= E(X^2) - [E(X)]^2$$

标准偏差定义为：

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

- 标准偏差同样描述随机变量与其数学期望的分散程度，并且与随机变量具有相同量纲。

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法（续）

(2) 测量误差的正态分布

为什么测量数据和随机误差大多接近正态分布？

- 测量中的随机误差通常是多种相互独立的因素造成的许多微小误差的总和。
- 中心极限定理：假设被研究的随机变量可以表示为大量独立的随机变量的和，其中每一个随机变量对于总和只起微小作用，则可认为这个随机变量服从正态分布。

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

正态分布的概率密度函数和统计特性

- 随机误差的概率密度函数为：$$p(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2})$$
- 测量数据X的概率密度函数为：$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$
- 随机误差的数学期望和方差为：

$$E(\delta)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta p(\delta)d\delta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\exp(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2})d\delta=0$$

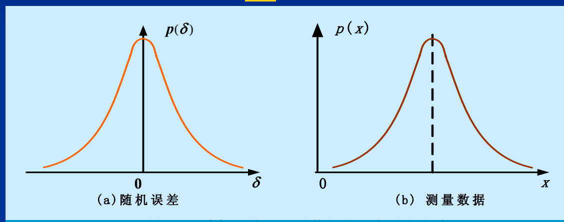
$$D(\delta)=E(\delta-0)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\delta^2 p(\delta)d\delta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\delta^2\exp(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2})d\delta=\sigma^2$$

- 同样测量数据的数学期望E(X) = μ，方差D(X) = σ^2

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

正态分布时概率密度曲线

随机误差和测量数据的分布形状相同，因为它们的标准偏差相同，只是横坐标相差 μ

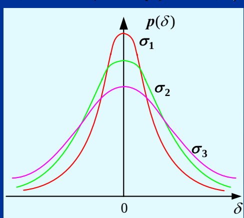


随机误差具有：①对称性 ② 单峰性 ③ 有界性 ④抵偿性

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

标准偏差意义

- 标准偏差是代表测量数据和测量误差分布离散程度的特征数。
- 标准偏差越小，则曲线形状越尖锐，说明数据越集中；标准偏差越大，则曲线形状越平坦，说明数据越分散。



3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

(3) 测量误差的非正态分布

常见的非正态分布有均匀分布、三角分布、反正弦分布等。

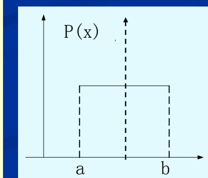
- 均匀分布：仪器中的刻度盘回差、最小分辨力引起的误差等；"四舍五入"的截尾误差；当只能估计误差在某一范围内，而不知其分布时，一般可假定均匀分布。

概率密度：$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & x<a,x>b\end{cases}$$

均值：$\mu=\frac{a+b}{2}$ 当 $a=-b$ 时，$\mu=0$

标准偏差：$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

当 $a=-b$ 时，$\sigma=\frac{b}{\sqrt{3}}$



3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

2. 有限次测量的数学期望和标准偏差的估计值

求被测量的数字特征，理论上需无穷多次测量，但在实际测量中只能进行有限次测量，怎么办？

(1) 有限次测量的数学期望的估计值——算术平均值

可用事件发生的频度代替事件发生的概率，当 $\infty=n$

则 $$E(X)=\sum_{i=1}^{m}x_i p_i=\sum_{i=1}^{m}x_i\frac{n_i}{n}$$

令n个可相同的测试数据 x_i $(i=1,2\ldots,n)$

次数都计为1，当 $\infty=n$ 时，则 $\infty=n$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

被测量X的数学期望，就是各次测量值的算术平均值

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

- 测量次数n为有限次时，规定使用算术平均值为数学期望的估计值，并作为最后的测量结果。即：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

- 算术平均值是数学期望的无偏估计值、一致估计值和最大似然估计值。
- 其本身也是随机变量

以有限次测量值的算术平均值作为测量结果，是否可以减少随机误差？

3. 3. 1随机误差的统计特性及减少方法(续)

（2）算术平均值的标准偏差

$$\sigma^2(\bar{x})=\sigma^2(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)=\frac{1}{n^2}\sigma^2(\sum_{i=1}^{n}x_i)=\frac{1}{n^2}[\sigma^2(x_1)+\sigma^2(x_2)+\cdots+\sigma^2(x_n)]$$

$$=\frac{1}{n^2}n\sigma^2(X)=\frac{1}{n}\sigma^2(X)$$

故：

$$\sigma(\bar{x})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

算术平均值的标准偏差比总体或单次测量值的标准偏差小 $\sqrt{n}$ 倍。原因是随机误差的抵偿性。

用算术平均值作为测量结果，减少了随机误差。

3. 3. 1随机误差的统计特性及减少方法(续)

（2）有限次测量数据的标准偏差的估计值

$D(x)=E[(x-E(x))^2]$

$\sigma=\sqrt{D(X)}$

算术平均值： $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

残差： $v_i=x_i-\bar{x}$

实验标准偏差（标准偏差的估计值），贝塞尔公式：

$$s(x)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$s^2(x)$是 $\sigma^2(x)$的无偏估计

算术平均值标准偏差的估计值：

$$s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

3. 3. 1随机误差的统计特性及减少方法(续)

有限次等精度测量计算的步骤：

1. 求算术平均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
2. 求残差 $v_i=x_i-\bar{x}$
3. 求实验标准偏差 $s(x)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$
4. 求算术平均值标准偏差的估计值 $s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}}$

3. 3. 1随机误差的统计特性及减少方法(续)

【例3.1】　用温度计重复测量某个不变的温度，得11个测量值的序列（见下表）。求测量值的平均值及其标准偏差。

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i(℃)	528	531	529	527	531	533	529	530	532	530	531
v_i	-2.1	+0.9	-1.1	-3.1	+0.9	+2.9	-1.1	-0.1	+0.9	-0.1	+0.9

解：①平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{11}(528+531+529+527+531+533+529+530+532+530+531)=530.1(^oC)$$

②用公式 $v_i=x_i-\bar{x}$ 计算各测量值残差列于上表中

③实验偏差 $s(x)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2}=1.767\ (^oC)$

④$\bar{x}$实验偏差 $s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}}=\frac{1.767}{\sqrt{11}}=0.53\ (^oC)$

3. 3. 1随机误差的统计特性及减少方法(续

3. 测量结果的置信问题

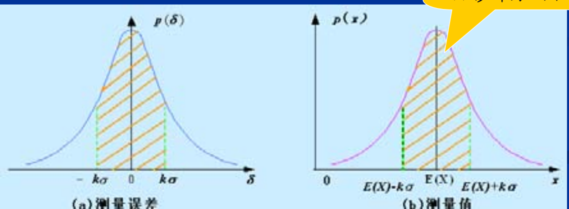
（1）置信概率与置信区间：

置信区间 $|x|<E(x)\pm k\sigma$ 内包含真值的概率称为置信概率。

置信限： $\Delta=\pm k\sigma$

k——置信系数（或置信因子）

置信概率是图中阴影部分面积



3. 3. 1随机误差的统计特性及减少方法(续)

（2）正态分布的置信概率

- 当分布和k值确定之后，则置信概率可定

$$P[|x-E(x)|<k\sigma]=P[|\delta|<k\sigma]=\int_{-k\sigma}^{k\sigma}p(\delta)d\delta$$

- 正态分布，当k=3时

$$P(|\delta|<3\sigma)=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}p(\delta)d\delta=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2})d\delta=0.997$$

置信因子k	置信概率Pc
1	0.683
2	0.955
3	0.997

区间越宽，置信概率越大

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

（3） t分布的置信限

- (测量次数比较少的情况)
- t分布与测量次数有关。当n>20以后，t分布趋于正态分布。正态分布是t分布的极限分布。
- 当n很小时，t分布的中心值比较小，分散度较大，即对于相同的概率，t分布比正态分布有更大的置信区间。
- 当n<20时，给定置信概率和测量次数n，查表得置信因子kt。

  自由度：$v=n-1$

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

表3－4 t分布的k_t值表（摘录）

$\nu=n-1$	P		$\nu=n-1$	P	
	0.99	0.95		0.99	0.95
2	9.92	4.30	12	3.05	2.18
3	5.84	3.18	14	2.98	2.14
4	4.60	2.78	16	2.92	2.12
5	4.03	2.57	18	2.88	2.10
6	3.71	2.45	20	2.85	2.09
7	3.50	2.36	30	2.75	2.04
8	3.36	2.31	40	2.70	2.02
9	3.25	2.26	60	2.66	2.00
10	3.17	2.23	∞	2.58	1.96

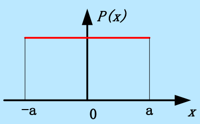
3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

（4）非正态分布的置信因子

- 由于常见的非正态分布都是有限的，设其置信限为误差极限 $\pm a$，即误差的置信区间为 $|\delta| < k\sigma$ 置信概率为100％。

例：均匀分布 $\sigma=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

有 $a=k\sigma=k\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 故：$k=\sqrt{3}$



分布	三角	均匀	反正弦
（P=1） k	$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$

3.3.1随机误差的统计特性及减少方法(续)

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i(℃)	528	531	529	527	531	533	529	530	532	530	531
v_i	-2.1	+0.9	-1.1	-3.1	+0.9	+2.9	-1.1	-0.1	+0.9	-0.1	+0.9

【例3.2】 求 例3.1中温度的测量结果，要求置信概率取0.95。

解：第①~④步 同 例3.1，已求得 $\bar{x}=530.1$ 和 $s(\bar{x})=0.53$

⑤因为是小子样，测量次数为11，应采用t分布

P=0.95，$\nu=11-1=10$，查 3－4 表得 $k_t=2.23$，则

$k_t s(\bar{x})=2.23\times0.53=1.1819$

故测量结果为：$A=\bar{x}\pm ks(\bar{x})$ =530.1±1.2 ℃（置信概率P=0.95）

3.3.2 系统误差的判断及消除方法

1. 系统误差的特征：

前面描述的是不含有系统误差的情况。

在同一条件下，多次测量同一量值时，误差的绝对值和符号保持不变，或者在条件改变时，误差按一定的规律变化。

多次测量求平均不能减少系差。 不具有抵偿性

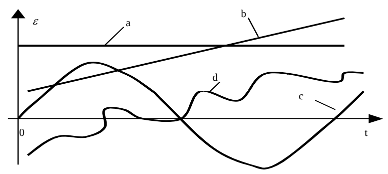


图 3－7 多种系统误差的特征

其中：a----不变系差 b-----线性变化系差

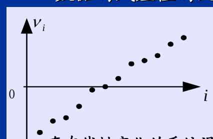
c-----周期性系差 d-----复杂规律变化系差

3.3.2 系统误差的判断及消除方法(续)

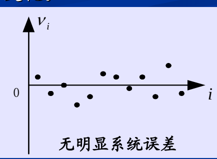
2. 系统误差的发现方法

- （1）不变的系统误差：
  - 校准、修正和实验比对。
- （2）变化的系统误差
  - ① 残差观察法，适用于系统误差比随机误差大的情况

    将所测数据及其残差按先后次序列表或作图，观察各数据的残差值的大小和符号的变化。



存在线性变化的系统误差



无明显系统误差

3.3.2 系统误差的判断及消除方法（续）

②马利科夫判据：

若有累进性系统误差，*D* 值应明显异于零。

当*n*为偶数时，

$$D = \sum_{i=1}^{n/2} \upsilon_i - \sum_{i=n/2+1}^{n} \upsilon_i$$

当*n*为奇数时，

$$D = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} \upsilon_i - \sum_{i=(n+1)/2}^{n} \upsilon_i$$

- ③阿贝－赫梅特判据：检验周期性系差的存在。

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} \upsilon_i \upsilon_{i+1}\right| > \sqrt{n-1} \cdot s^2$$

3.3.2 系统误差的判断及消除方法（续）3. 系统误差的削弱或消除方法

（1）从产生系统误差根源上采取措施减小系统误差

- ① 要从测量原理和测量方法尽力做到正确、严格。
- ② 测量仪器定期检定和校准，正确使用仪器。
- ③ 注意周围环境对测量的影响，特别是温度对电子测量的影响较大。
- ④ 尽量减少或消除测量人员主观原因造成的系统误差。应提高测量人员业务技术水平和工作责任心，改进设备。

（2）用修正方法减少系统误差

修正值＝－误差=－（测量值－真值）

实际值＝测量值＋修正值

3.3.2 系统误差的判断及消除方法（续）

（3）采用一些专门的测量方法

- ① 替代法：消除固定不变的系差
- ② 交换法：减小单一方向的系差
- ③ 对称测量法：减少线形系统误差
- ④ 减小周期性系统误差的半周期法

微差法等

3.3.3 粗大误差及其判断准则

- 大误差出现的概率很小，列出可疑数据，分析是否是粗大误差，若是，则应将对应的测量值剔除。
- **1. 粗大误差产生原因以及防止与消除的方法**
  - 粗大误差的产生原因
    - ① 测量人员的主观原因：操作失误或错误记录；
    - ② 客观外界条件的原因：测量条件意外改变、受较大的电磁干扰，或测量仪器偶然失效等。
  - 防止和消除粗大误差的方法

    鉴别剔除、责任心态度、测量条件稳定

3.3.3 粗大误差及其判断准则（续）

2. 粗大误差的判别准则

统计学的方法的基本思想是：给定一置信概率，确定相应的置信区间，凡超过置信区间的误差就认为是粗大误差，并予以剔除。

莱特检验法 $|\nu_i| > 3s$ 随机误差符合正态分布　N<10时，易误判，不能使用

格拉布斯检验法 $|\nu_{\max}| > G \cdot s$

式中，G值按重复测量次数n及置信概率Pc确定

p_c \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
95%	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23
99%	1.16	1.49	1.75	1.94	2.1	2.22	2.32	2.41	2.48

p_c \ n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
95%	2.29	2.33	2.37	2.41	2.44	2.47	2.5	2.53	2.56
99%	2.55	2.61	2.66	2.7	2.74	2.78	2.82	2.85	2.88

3.3.3 粗大误差及其判断准则（续）

应注意的问题

- ① 所有的检验法都是人为主观拟定的，至今无统一的规定。当偏离正态分布和测量次数少时检验不一定可靠。
- ② 若有多个可疑数据同时超过检验所定置信区间，应逐个剔除，重新计算，再行判别。若有两个相同数据超出范围时，应逐个剔除。
- ③在一组测量数据中，可疑数据应很少。反之，说明系统工作不正常。

3.3.3 粗大误差及其判断准则（续）

【例3.3】 对某电炉的温度进行多次重复测量，所得结果列于表3－7，试检查测量数据中有无粗大误差。

解：① 计算得 $\bar{x} = 20.404$ s=0.033

计算残差填入表3—7， $v_8 = -0.104$大， 是x_8疑数据。

②用莱特检验法

3・s=3×0.033=0.099

故可判断 x_8 是粗大误差，应予剔除。

再对剔除后的数据计算得： s' = 0.016 $\bar{x}' = 20.411$

3·s' = 0.048

各测量值的残差v' 填入表3—7，残差均小于3 s'

故14个数据都为正常数据。

3.3.4 测量结果的处理步骤

等精度测量

- ①系统误差（不变系差）修正，将数据依次列成表格；
- ②求出算术平均值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- ③列出残差 $v_i = x_i - \bar{x}$ ，并验证 $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$
- ④按贝塞尔公式计算标准偏差的估计值 $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$
- ⑤按莱特准则 ，或格拉布斯准则 检查和剔除粗大误差；
- ⑥判断有无系统误差。如有系统误差，应查明原因，修正或消除系统误差后重新测量；
- ⑦计算算术平均值的标准偏差 ； $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
- ⑧写出最后结果的表达式，即 $A=\bar{x}\pm k\cdot s_{\bar{x}}$ （单位）。

3.3.4 测量结果的处理步骤（续）

- 【例3. 4】 对某电压进行了16次等精度测量，测量数据中已记入修正值，列于表中。要求给出包括误差在内的测量结果表达式。

序号	测量值	残差	残差	序号	测量值	残差	残差
1	205.3	0	0.09	9	205.71	0.41	0.5
2	204.94	-0.4	-0.27	10	204.7	-0.6	-0.51
3	205.63	0.33	0.42	11	204.86	-0.44	-0.35
4	205.24	-0.1	0.03	12	205.35	0.05	0.14
5	206.65	1.35		13	205.21	-0.09	0
6	204.97	-0.3	-0.24	14	205.19	-0.11	-0.02
7	205.36	0.06	0.15	15	205.21	-0.09	0
8	205.16	-0.1	-0.05	16	205.32	0.02	0.11

3.3.4 测量结果的处理步骤（续）

解：(1) 求出算术平均值 $\bar{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 205.30$ 。

(2) 计算 $v_i = x_i - \bar{x}$ 列于表中，并验证 $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ 。

(3) 计算标准偏差： $s = \sqrt{\frac{1}{16-1}\sum_{i=1}^{16} v_i^2} = 0.4434$

(4) 按莱特准则判断有无 $|v_i| > 3s = 1.330$，查表中第5个数据 $v_5 = 1.35 > 3s$，

应 $x_5 = 20665$ 视为粗大误差，加以剔除。现剩下15个数据。

(5) 重新计算剩余15个数据的平均值：$\bar{x}' = 205.21$

及重新计算 $v_i' = x_i - \bar{x}'$ 列于表中，并验证 $\sum_{i=1}^{n} v_i' = 0$ 。

3.3.4 测量结果的处理步骤（续）

(6) 重新计算批准偏差 $s' = \sqrt{\frac{1}{15-1}\sum_{i=1}^{15} v_i'^2} = 0.27$

(7) 按莱特准则再判断有无 $|v_i| > 3s = 0.81$，各 $|v'_i|$ 均小于3s，则认为剩余15个数据中不再含有粗大误差。

(8) 对 v_i' 作图，判断有无变值系统误差，见图3—9。从图中可见无明显累进性或周期性系统误差。

(9) 计算算术平均值的标准偏差：$s_{\bar{x}} = s'/\sqrt{15} = 0.27/\sqrt{15} \approx 0.07$

(10) 写出测量结果表达式：$x = \bar{x}' \pm 3s_{\bar{x}} = 205.2 \pm 0.2$ （V）

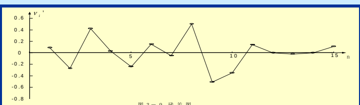


图3－9 残差图

3.3.4 测量结果的处理步骤（续）

等精度测量与不等精度测量

- 等精度测量：即在相同地点、相同的测量方法和相同测量设备、相同测量人员、相同环境条件（温度、湿度、干扰等），并在短时间内进行的重复测量。
- 不等精度测量：在测量条件不相同时进行的测量，测量结果的精密度将不相同。
- 不等精度测量处理方法： $W_i = \frac{\lambda}{\sigma_i^2}$

权值与标准偏差的平方成反比 。权值σ越小，可靠性越大

测量结果为加权平均值 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} W_i}$

等精度测量，w相同，所以 $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$

3.3.5 误差的合成分析

◆ 问题：用间接法测量电阻消耗的功率时，需测量电阻R、端电压V和电流I三个量中的两个量，如何根据电阻、电压或电流的误差来推算功率的误差呢？

设最终测量结果为y，各分项测量值为$x_1, x_2, \cdots x_n$，它们满足函数关系 $y=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$，并设各$x_i$间彼此独立，$x_i$的绝对误差为$\Delta x_i$，$y$的绝对误差为$\Delta y$，则 $y+\Delta y=f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \cdots, x_n+\Delta x_n)$

将上式按泰勒级数展开，并略去高阶项

$$y+\Delta y=y+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

因此 $$\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

3.3.5 误差的合成分析（续）

◆ 在实际应用中，由于分项误差符号不定而可同时取正负，有时就采用保守的办法来估算误差，即将式中各分项取绝对值后再相加

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right|$$

◆ 加权平均值的标准偏差可由加权平均值公式及误差合成公式推出：

$$\sigma^2(\bar{x})=\frac{1}{\sum_1^m \frac{1}{\sigma_i^2}}=\frac{\lambda}{\sum_1^m W_i}$$

测量结果的处理步骤

【例3—5】用两种方法测量某电压，第一种方法测量6次，其算术平均值V_1=10.3V，标准偏差$\sigma(V_1)=0.2$ V；第二种方法测量 8 次，其算术平均值V_2=10.1V，标准偏差$\sigma(V_2)=0.1$ V。求电压的估计值和标准偏差。

解：取$\lambda=1$，则两种测量值的权为

$$W_1=\frac{\lambda}{\sigma^2(V_1)}=\frac{1}{0.2^2}=\frac{1}{0.04} \qquad W_2=\frac{\lambda}{\sigma^2(V_2)}=\frac{1}{0.1^2}=\frac{1}{0.01}$$

则电压的估计值为：$$V=\frac{W_1V_1+W_2V_2}{W_1+W_2}=\frac{\frac{1}{0.04}\times 10.3+\frac{1}{0.01}\times 10.01}{\frac{1}{0.04}+\frac{1}{0.01}}=10.14\ (\mathrm{V})$$

电压估计值的标准偏差为：$$\sigma(V)=\sqrt{\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{2}W_i}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{0.04}+\frac{1}{0.01}}}=\sqrt{0.008}=0.089\ (\mathrm{V})$$

故：测量结果为 10.14±3×0.089=10.14±0.27(V)

2.4 测量不确定度

本节的重点和难点：

◆ 不确定度概念的理解
◆ 标准不确定度分量的评定方法
◆ 合成标准不确定度的计算方法
◆ 扩展不确定度的确定方法

2.4 测量不确定度

◆ 不确定度的发展历程：

1993年，国际不确定度工作组出版了《测量不确定度表示指南》（Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement，简称GUM）。

1999年我国质量技术监督局批准发布了《测量不确定度评定与表示》计量技术规范,这规范原则上等同采用了GUM的基本内容。

2.4 测量不确定度

◆ 2.4.1 不确定度的概念

➢ 不确定度是说明测量结果可能的分散程度的参数。可用标准偏差表示，也可用标准偏差的倍数或置信区间的半宽度表示。

➢ 测量结果：被测量的估计值与不确定度组成

$$Y=y\pm U$$

◆ 1.术语

（1）标准不确定度u:

用概率分布的标准偏差表示的不确定度 u

两类评定方法:

① A类标准不确定度u_A：用统计方法得到的不确定度

② B类标准不确定度u_B：用非统计方法得到的不确定度

2.4.1 不确定度的概念（续）

（2）合成标准不确定度u_C

*由各不确定度分量合成的标准不确定度。

*因为测量结果是受若干因素联合影响。

（3）扩展不确定度U

*合成标准不确定度的倍数表示的测量不确定度，即用包含因子k乘以合成标准不确定度得到一个区间半宽度。

*包含因子的取值决定了扩展不确定度的置信水平。

*通常测量结果的不确定度都用扩展不确定度表示

2.4.1 不确定度的概念（续）

2.不确定度的分类

- 测量不确定度
  - 不确定度
    - 标准不确定度
      - A 类标准不确定度 u_A
      - B 类标准不确定度 u_B
      - 合成标准不确定度 u_C
    - 扩展不确定度
      - $U(k=2)$
      - $U(k=3)$
      - U_{95}
      - U_{99}
  - 相对不确定度

2.4.1 不确定度的概念（续）

3. 不确定度的来源

①被测量定义的不完善，实现被测量定义的方法不理想，被测量样本不能代表所定义的被测量。

②测量装置或仪器的分辨力、抗干扰能力、控制部分稳定性等影响。

③测量环境的不完善对测量过程的影响以及测量人员技术水平等影响。

④计量标准和标准物质的值本身的不确定度，在数据简化算法中使用的常数及其他参数值的不确定度，以及在测量过程中引入的近似值的影响。

⑤在相同条件下，由随机因素所引起的被测量本身的不稳定性。

2.4.2 误差与不确定度的关系

1. 二者的联系

◆ 测量结果的精度评定参数；

◆ 所有的不确定度分量都由随机误差或系统误差引起；误差是不确定度的基础。

2. 二者的区别

从概念上

误差定义明确，但真值一般难以定值，定性的概念；不确定度可以定量评定。

在分类上：性质—评定方法

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

◆ **1.** 标准不确定度的A类评定方法

在同一条件下对被测量X进行n 次测量，测量值为 x_i (i=1, 2, …, n)，

(A) 计算样本算术平均值，作为被测量X的估计值，并把它作为测量结果。

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

(B)计算实验偏差

式中自由度$\nu=n-1$.

$$S(X)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

自由度意义：自由度数值越大，说明测量不确定度越可信。

(C) A类不确定度

$$u_A=S(\bar{x})=\frac{S(X)}{\sqrt{n}}$$

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

2. 标准不确定度的B类评定方法

◆ B类方法评定的主要信息来源是以前测量的数据、生产厂的技术证明书、仪器的检定证书或校准证书等。

◆ 确定测量值的误差区间（α,−α），并假设被测量的值的概率分布，由要求的置信水平估计包含因子k，则B类标准不确定度u_B为

$$u_B=\frac{\alpha}{k}$$

➢ 其中 α ——区间的半宽度；

➢ k——置信因子，通常在2～3之间。

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

◆ 表3－9　正态分布时概率与置信因子的关系

概率P%	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
置信因子	0.676	1	1.645	1.960	2	2.576	3

表3－10　几种非正态分布的置信因子k

分布	三角	梯形	均匀	反正弦
k (p=1)	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}/\sqrt{1+\beta^2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

【例 3.6】校准证书说明的标称值为 10Ω 的标准电阻 R_s 的电阻值，在 23℃时为（10.000742±0.000129），并说明其不确定度区间具有 99%的置信水平。求解电阻的相对标准不确定度。

解：由校准证书的信息已知 α＝129 μΩ，P＝0.99，假设为正态分布，查表 3－5 得 k=2.58。

电阻的标准不确定度为：$u_B(R_s)=129\mu\Omega/2.58=50\mu\Omega$

相对标准不确定度为：$\mu_B(R_S)/R_S=50\times10^{-6}/10=5\times10^{-6}$

2.4.3 不确定度的评定方法

3.合成标准不确定度的计算方法

u_c 的确定步骤

第一步　明确影响测量结果的多个不确定度分量；

第二步　确定各分量与测量结果的传递关系和它们之间的相关系数；

第三步　给出各分量标准不确定度；

第四步　按考虑相关系数的方和根法合成。

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

3.合成标准不确定度的计算方法

◆（1）　协方差和相关系数的概念

- 两个随机变量X和Y，其中一个量的变化导致另一个量的变化，那么这两个量是相关的。
- 独立肯定不相关，但不相关不一定独立。

◆ ①协方差的概念

- 协方差 $Cov(X,Y)=E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$
- 协方差的估计值

$$S_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

◆ ②相关系数Q 概念：表示两随机变量相关程度

- $-1\leqslant Q\leqslant 1$。 $Q(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

正相关	负相关	完全正相关	完全负相关	不相关
0<Q<1	－1<Q<0	Q=1	Q=－1	Q=0

- 相关系数的估计值　$r(x,y)$

$$r(x,y)=\frac{S_{xy}}{S(x)\cdot S(y)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)S(x)S(y)}$$

（2）输入量相关时不确定度的合成

标准不确定度传播公式

$$u_c(y)=\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}r(x_i,x_j)u(x_i)u(x_j)\right\}^{1/2}$$

- $u_c(y)$—输出量估计值y的标准不确定度
- $u(x_i)$，$u(x_j)$—输入量估计值x_i和x_j的标准不确定度
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$—函数$Y=f$（X1，X2，……，XN）在（X1，X2，……，XN）处的偏导数，

称为灵敏系数，在误差合成公式中称为传播系数；

- $r(x_i,x_j)$—x_i和x_j的相关系数估计值

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

（3）输入量不相关且彼此独立时不确定度的合成

- ①可写出函数关系式 $Y=f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_N)$；

$$u_c(y)=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)\right]^{1/2}$$

式中 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 称为灵敏系数

- ②不能写出函数关系式

$$u_c=\sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}$$

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

- （4）不确定度传播律公式的几种简化方法
  - ① 所有的输入量都相关，且相关系数 $r(x_i, x_j)=1$ 时，则 $U_C(y)$ 为

$$u_C(y)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)$$

② 当被测量的函数形式为 $Y=A_1X_1+A_2X_2+\ldots+A_NX_N$，且 X_1，X_2，…，X_N不相关时，合成标准不确定度 $U_C(y)$ 为

$$u_C(y)=\left[\sum_{i=1}^{N}A_i^2u_i^2(y)\right]^{1/2}$$

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

- ③ 当被测量的函数形式为 $Y=X_1^{p_1}\cdot X_2^{p_2}\cdots\cdot X_N^{p_N}$

且 X_1，X_2，…，X_N不相关时，相对合成标准不确定度 $U_C(y)/Y$ 为

$$\frac{u_C(y)}{Y}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}[P_iu(x_i)/x_i]^2}$$

例：电功率 P=IV 则

$$u_P=\sqrt{(\frac{\partial P}{\partial I})^2u_I^2+(\frac{\partial P}{\partial V})^2u_V^2}=\sqrt{V^2u_I^2+I^2u_V^2}$$

$$\frac{u_P}{P}=\sqrt{(\frac{u_I}{I})^2+(\frac{u_V}{V})^2}$$

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

【例3.7】一台数字电压表出厂时的技术规范说明：“在仪器校准后的两年内，1V的不确定度是读数的 14×10^{-6}倍加量程的 2×10^{-6}倍”。在校准一年后，在1V量程上测量电压，得到一组独立重复测量的算术平均值为 V=0.928571V，并已知其A类标准不确定度为 $u_A(\bar{V})=14\mu V$，假设概率分布为均匀分布，计算电压表在1V量程上测量电压的合成标准不确定度。

解：已知A类标准不确定度为 $u_A(\bar{V})=14\mu V$。

计算B类不确定度：区间半宽 $a=14\times10^{-6}\times0.928571V+2\times10^{-6}\times1V=15\mu V$

假设概率分布为均匀分布，得 $k=\sqrt{3}$，那么，$u_B(\bar{V})=15\mu V/\sqrt{3}=8.7\mu V$

于是合成标准不确定度为

$$u_C(\bar{V})=\sqrt{u_A^2(\bar{V})+u_B^2(\bar{V})}=[(14\mu V)^2+(8.7\mu V)^2]^{1/2}=16\mu V$$

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

- （5）不确定度分量的忽略
  - 一切不确定度分量均贡献于合成不确定度，即只会使合成不确定度增加。忽略任何一个分量，都会导致合成不确定度变小。
  - 但由于采用的是方差相加得到合成方差，当某些分量小到一定程度后，对合成不确定度实际上起不到什么作用，为简化分析与计算，则可以忽略不计。
  - 例如，忽略某些分量后，对合成不确定度的影响不足十分之一，就可根据情况忽略这些分量。

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

4.扩展不确定度的确定方法

- 扩展不确定度U由合成标准不确定度 u_C 与包含因子 k 的乘积得到

$$U=k\cdot u_C$$

- 测量结果表示为Y = $y\pm U$，即 $Y=y\pm ku_C$

y是被测量Y的最佳估计值，k 由置信概率（常取0.95或0.99）和概率分布（正态、均匀、t分布等）确定。

算术平均值

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

◆ 包含因子k的选取方法有：

➢ (A)无法得到合成标准不确定度的自由度，且测量值接近正态分布时，则一般取 k 的典型值为2或3。

➢ (B)根据测量值的分布规律和所要求的置信水平，选取 k 值。例如，假设为均匀分布时，置信水平P＝0．95，查表得 k＝1．65。

表3—11 均匀分布时置信概率与置信因子k的关系

P%	k
57.74	1
95	1.65
99	1.71
100	1.73

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

(C)合成标准不确定度的自由度较小时，根据要求的置信概率 P_c 和计算得到的自由度 v_{eff}，查t分布的t值，得 k。自由度的计算步骤如下：

a)求A类不确定度分量的自由度

$$v_i = n - 1$$

b)求B类不确定度分量的自由度

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2}$$

c)求合成不确定的自由度

$$v_{eff} = \frac{u_C^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i^4 u^4(x_i)}{v_i}}$$

2.4.3 不确定度的评定方法（续）

例：设 $y=f(x_1,x_2,x_3)=bx_1x_2x_3$，式中 x_1, x_2, x_3，分别为 n_1=10 次，n_2=5 次，n_3=15 次重复独立测量的算术平均值。其相对标准不确定度分别为 $u(x_1)/x_1=0.25\%$，$u(x_2)/x_2=0.57\%$ $u(x_3)/x_3=0.82\%$

求：测量结果 y 在 95%置信水平时的相对扩展不确定度。

解：
$$\left[\frac{u_C(y)}{y}\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2=0.25\%^2+0.57\%^2+0.82\%^2=(1.03\%)^2$$

$$u_C(y)/y=1.03\%$$

$$v_{eff}=\frac{[u_C(y)]^4}{\sum_{i=1}^{3}\frac{[c_iu(x_i)]^4}{v_i}}=\frac{[u_C(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{3}\frac{[u(x_i)/x_i]^4}{v_i}}=\frac{1.03^4}{\frac{0.25^4}{10-1}+\frac{0.57^4}{5-1}+\frac{0.82^4}{15-1}}=19.0$$

根据 P=95%，v_{eff}=19，查 t 分布的 t 值表 3—5 得 $k_p=t_{0.95}(19)=2.09$

故：$U_{95}/y=k_pu_C(y)/y=2.09\times1.03\%=2.2\%$

2.4.4 测量不确定度的评定步骤

◆ 对测量设备进行校准或检定后，要出具校准或检定证书；对某个被测量进行测量后也要报告测量结果，并说明测量不确定度。

➢ ①明确被测量的定义和数学模型及测量条件，明确测量原理、方法，以及测量标准、测量设备等；

➢ ②分析不确定度来源；

➢ ③分别采用A类和B类评定方法，评定各不确定度分量。A类评定时要剔除异常数据；

➢ ④计算合成标准不确定度；

➢ ⑤计算扩展不确定度；

➢ ⑥报告测量结果。

$$Y=\overline{y}\pm ku_c$$

2.4.4 测量不确定度的评定步骤（续）

【例3．9】 用电压表直接测量一个标称值为200Ω的电阻两端的电压，以便确定该电阻承受的功率。测量所用的电压的技术指标由使用说明书得知，其最大允许误差为±1%，经计量鉴定合格，证书指出它的自由度为10。(当证书上没有有关自由度的信息时，就认为自由度是无穷大。)标称值为200Ω的电阻经校准，校准证书给出其校准值为199．99Ω，校准值的扩展不确定度为0．02Ω（包含因子k为2）。用电压表对该电阻在同一条件下重复测量5次，测量值分别为：2．2V、2．3V、2．4V、2．2V、2．5V。测量时温度变化对测量结果的影响可忽略不计。求功率的测量结果及其扩展不确定度。

电压的B类不确定度

电阻的B类不确定度

电压的A类不确定度

$$P=\frac{V^2}{R}$$

2.4.4测量不确定度的评定步骤（例3．9续）

解：（1）数学模型 $P=\frac{V^2}{R}$

（2）计算测量结果的最佳估计值

① $\overline{V}=\left(\sum_{i=1}^{n}V_i\right)/n=\frac{2.2+2.3+2.4+2.2+2.5}{5}V=2.32V$

② $P=\frac{(\overline{V})^2}{R}=\frac{(2.32)^2}{199.99}W=0.027W$

3）测量不确定度的分析

本例的测量不确定度主要来源为①电压表不准确；②电阻不准确；③由于各种随机因素影响所致电压测量的重复性。

2.4.4测量不确定度的评定步骤（例3.9续）

（4）标准不确定度分量的评定

①电压测量引入的标准不确定度

(a) 电压表不准引入的标准不确定度分量u_{1}（V）按B类评定。

a_1=2.32V×1%=0.023V

$$u_1(V)=\frac{a_1}{k_1}=\frac{0.023}{\sqrt{3}}=0.013V$$

(b) 电压测量重复性引入的标准不确定度分量u_{2}（V）。按A类评定。

$$\overline{V}=\frac{\sum_{i=1}^{n}V_i}{n}=2.32\ V$$

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}{5-1}}=\sqrt{\frac{0.12^2+0.02^2+0.08^2+0.12^2+0.18^2}{4}}V=0.13V$$

$$u_2(V)=S(\bar{x})=\frac{S}{\sqrt{n}}=\frac{0.13}{\sqrt{5}}V=0.058V$$

2.4.4测量不确定度的评定步骤（例3.9续）

- (c) 由此可得: $u(V)=\sqrt{u_1(V)^2+u_2(V)^2}=\sqrt{0.013^2+0.058^2}V=0.059V$
- 电压的自由度如下:

$$v_{eff(V)}=\frac{u_C^4(V)}{\frac{u_1^4(V)}{v_1}+\frac{u_2^4(V)}{v_2}}=\frac{0.0594^4}{\frac{0.013^4}{10}+\frac{0.058^4}{4}}=4.3$$

②电阻不准引入的标准不确定度分量u（R）

- 由电阻的校准证书得知，其校准值的扩展不确定度U＝0.02Ω，且k=2，则u（R）可由B类评定得到

$$u(R)=\frac{a_2}{k_2}=\frac{U}{k}=\frac{0.02\Omega}{2}=0.01\Omega$$

2.4.4测量不确定度的评定步骤（例3.9续）

- （5）计算合成标准不确定度u_C(P)
  - $P=\frac{V^2}{R}$，其中输入量V（电压）和R（电阻）不相关

$$u_C(P)=\sqrt{c_1^2u^2(V)+c_2^2u^2(R)}$$

  - ①计算灵敏系数c_1和c_2，得

$$c_1=\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{2V}{R}=\frac{2\times 2.32}{199.99}=0.023\ V/\Omega$$

$$c_2=\left|\frac{\partial P}{\partial R}\right|=\frac{V^2}{R^2}=\frac{(2.32)^2}{(199.99)^2}=0.00013V^2/\Omega^2$$

  - ②计算$U_C(P)$，得

$$u_C(P)=\sqrt{(0.023)^2(0.059)^2+(0.00013)^2(0.01)^2}=0.0014W$$

2.4.4测量不确定度的评定步骤（例3.9续）

- （6）确定扩展不确定度U
- 计算合成标准不确定度的有效自由度v_{eff}:
- 电压的自由度＝4.3，电阻的自由度可设为∞，则

$$v_{eff}=\frac{u_C^4(P)}{\frac{c_1^4u^4(V)}{v(V)}+\frac{c_2^4u^4(R)}{v(R)}}=\frac{0.0014^4}{\frac{0.023^4\times 0.059^4}{4.3}}=5.2\approx 5$$

- ③根据P＝0.95，v_{eff}＝5，查t分布，得 $k_{0.95}=t_{0.95}(5)=2.57$
- ④扩展不确定度$U_{0.95}$为

$$U_{0.95}=k_{0.95}u_c(P)=2.57\times 0.0014=0.003\ 6\ \ W\approx 0.004W$$

（7）报告最终测量结果

功率P＝（0.027±0.004）W　　　（置信水平P＝0.95）

包含因子k为2.57，有效自由度为5。

2.4.5合成不确定分配及最佳测量方案的选择

- 1.合成不确定度的分配——测量方案的选择、仪器的设计
- 在进行测量工作前，根据测量准确度的要求来选择测量方案，确定每项不确定度的允许范围
- （1）按等作用原则分配不确定度：各个不确定度分量对合成不确定度的影响相等。

假设确定度互不相关，各个不确定度分量相等， $u_1=u_2=\cdots=u_n$

有： $u_C=\sqrt{nu_i^2}=\sqrt{n}\cdot c_iS_i$

则： $u_i=u_C/\sqrt{n}$

- （2）必须根据具体情况进行调整。对难以实现的不确定项进行补偿。

因为有的测量过程难以满足要求

不确定度相同时，各分量灵敏系数，导致标准差不同。

3.4.5合成不确定分配及最佳测量方案的选择（续）

- 2.最佳测量方案的选择

选择目的：使测量结果的不确定度为最小。

- （1）选择最有利的函数公式
  - 应先取包含测量值数目最少的函数公式来表示;
  - 则应选取不确定度较小的测量值的函数公式.

如测量内尺寸的误差比测量外尺寸的误差大，应选择含有外尺寸的函数公式。

- （2）使各个测量值对函数的传递系数为零或最小

由函数公式可知，若使不确定度传递系数c_i＝0或为最小．则合成不确定度可相应减小。

例：为精确测定某尺寸y，对直接量x_1，x_2，x_3进行测量，数据如下（单位为mm）

x_1的测量值为10.110，10.080，10.090，10.170，10.100，10.090，10.110

x_3的测量值为1.980，1.975，1.989，2.011，2.025，2.020

x_2的测量值为

序号	1	2	3	4	5
x_i	5.80	5.40	5.30	5.90	6.20
s_i	0.25	0.50	0.75	0.10	1

现有三种方案可以选择：

① $y=x_1-x_2$　　② $y=2x_2-3.750x_3$

③ $y=x_1/x_3-x_1x_3^2/17.586+x_2/4$

且x1，x2，x3不相关，问哪一种方案最优？

3.5 测量数据处理

- 3.5.1 有效数字的处理
- 1. 数字修约规则
- 由于测量数据和测量结果均是近似数，其位数各不相同。为了使测量结果的表示准确唯一，计算简便，在数据处理时，需对测量数据和所用常数进行修约处理。
- 数据修约规则：
- （1） 小于5舍去——末位不变。
- （2） 大于5进1——在末位增1。
- （3） 等于5时，取偶数——当末位是偶数，末位不变；末位是奇数，在末位增1（将末位凑为偶数）。

3.5.1有效数字的处理（续）

- 例：将下列数据舍入到小数第二位。
  - 12.4344→12.43　　63.73501→63.74
  - 0.69499→0.69　　25.3250→25.32
  - 17.6955→17.70　　123.1150→123.12
- 需要注意的是，舍入应一次到位，不能逐位舍入。

  上例中0.69499，正确结果为0.69 ，错误做法是：

  0.69499→0.6950→0.695→0.70。
- 在“等于5”的舍入处理上，采用取偶数规则，是为了在比较多的数据舍入处理中，使产生正负误差的概率近似相等。（舍去零不产生舍入误差）

3.5.1有效数字的处理（续）

- 2. 有效数字
- 若截取得到的近似数其截取或舍入误差的绝对值不超过近似数末位的半个单位，则该近似数从左边第一个非零数字到最末一位数为止的全部数字，称之为有效数字。
- 保证舍入误差不超过末位的半个单位

例如：

3.142 四位有效数字，极限误差≤0.0005

8.700 四位有效数字，极限误差≤0.0005

8.7×10^3　二位有效数字，极限误差≤0.05×10^3

0.0807　三位有效数字，极限误差≤0.00005

3.5.1有效数字的处理（续）

中间的0和末尾的0都是有效数字，不能随意添加。开头的零不是有效数字。

测量数据的绝对值比较大（或比较小），而有效数字又比较少的测量数据，应采用科学计数法，即$a\times10^n$，a的位数由有效数字的位数所决定。

- 测量结果（或读数）的有效位数应由该测量的不确定度来确定，即测量结果的最末一位应与不确定度的位数对齐。
- 例如，某物理量的测量结果的值为63.44，且该量的测量不确定度u＝0.4，测量结果表示为63.4±0.4。

3.5.1有效数字的处理（续）

- 3. 近似运算法则

  保留的位数原则上取决于各数中准确度最差的那一项。
- （1）加法运算

  以小数点后位数最少的为准（各项无小数点则以有效位数最少者为准），其余各数可多取一位。例如：

$$\begin{array}{r} 10.2838 \\ 15.03 \\ +\ 8.69547 \\ \hline 34.00927\approx34.01 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 10.284 \\ 15.03 \\ +\ 8.695 \\ \hline 34.009\approx34.01 \end{array}$$

- （2）减法运算：当两数相差甚远时，原则同加法运算；当两数很接近时，有可能造成很大的相对误差，因此，第一要尽量避免导致相近两数相减的测量方法，第二在运算中多一些有效数字。

3.5.1有效数字的处理（续）

- （3）乘除法运算
- 以有效数字位数最少的数为准，其余参与运算的数字及结果中的有效数字位数与之相等。例如：

$$\frac{517.43\times 0.28}{4.08}=\frac{144.8804}{4.08}\approx 35.5$$

→ $$\frac{517.43\times 0.28}{4.08}=\frac{520\times 0.28}{4.1}\approx 35.51\approx 35.5\approx 36$$

- 也可以比有效数字位数最少者多保留一位有效数字。

例如上面例子中的517.43和4.08各保留至517和4.08，结果为35.5。

- （4）乘方、开方运算：
- 运算结果比原数多保留一位有效数字。例如：
- $(27.8)^2\approx 772.8$　　$(115)^2\approx 1.322\times 10^4$

3.5.2测量数据的表示方法

1. 列表法

> 根据测试的目的和内容，设计出合理的表格。列表法简单、方便，数据易于参考比较，它对数据变化的趋势不如图解法明了和直观，但列表法是图示法和经验公式法的基础。

例：

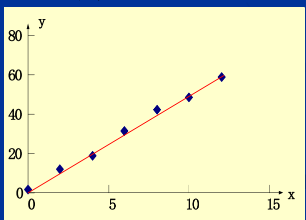
x	0	2	4	6	8	10	12
y	1.5	12.1	19.1	31.3	42.1	48.6	59.1

3.5.2测量数据的表示方法

2．图示法

> 图示法的最大优点是形象、直观，从图形中可以很直观地看出函数的变化规律，如递增或递减、最大值和最小值及是否有周期性变化规律等。

>作图时采用直角坐标或极座标。一般是先按成对数据（x，y）描点，再连成光滑曲线，并尽量使曲线于所有点接近，不强求通过各点，要使位于曲线两边的点数尽量相等



3.5.2测量数据的表示方法（续）

- 3. 经验公式法

> 经验公式法就是通过对实验数据的计算，采用数理统计的方法，确定它们之间的数量关系，即用数学表达式表示各变量之间关系。有时又把这种经验公式称为数学模型。

> 类型

y=a+bx

	一元线形回归	一元非线性回归	多元线性回归	多元非线性回归
变量个数	1	1	>1	>1
方次	1	>1	1	>1

> 有些一元非线性回归可采用变量代换，将其转化为线性回归方程来解。

3.5.3 建立经验公式的步骤

已知测量数据列（x_i, y_i i=1, 2, …, n），建立公式的步骤如下：

- （1）将输入自变量x_i作为横坐标，输出量y_i即测量值作为纵坐标，描绘在坐标纸上，并把数据点描绘成测量曲线。
- （2）分析描绘的曲线，确定公式y=f(x)的基本形式。
  - ①直线，可用一元线性回归方法确定直线方程。
  - ②某种类型曲线，则先将该曲线方程变换为直线方程，然后按一元线性回归方法处理。
  - ③如果测量曲线很难判断属于何种类型，这可以按曲线多项式回归处理。即：$y=\sum_{j=0}^{m}k_j x^j$

（3）由测量数据确定拟合方程（公式）中的常量。

3.5.3 建立经验公式的步骤（续）

- （4）检验所确定的方程的准确性。

①用测量数据中的自变量代入拟合方程计算出函数值y′

②计算拟合残差　$v_i=y_i-y_i'$

③计算拟合曲线的标准偏差

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-m}}$$

式中：m为拟合曲线未知数个数，n为测量数据列长度。

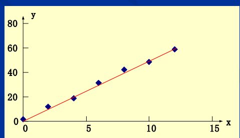
- 如果标准偏差很大，说明所确定的公式基本形式有错误，应建立另外形式公式重做。

3.5.4 一元线性回归

- 用一个直线方程y=a+bx来表达测量数据(x_i, y_i i=1, 2, …, n)之间的相互关系，即求出a和b，此过程就是一元线性回归。
- 1. 端点法
- 此方法是将测量数据中两个端点，起点和终点（即最大量程点）的测量值（x_1, y_1）和（x_n, y_n），代入y=a+bx，则a, b分别为

$$a = y_1 - bx_1$$

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$$



3.5.4一元线性回归（续）

- 2. 平均选点法
- 此方法是将全部n个测量值（x_i, y_i i=1, 2, …, n）分成数目大致相同的两组，前半部k个测量点为一组，其余的n-k个测量点为另一组，两组测量点都有自己的“点系中心”，其坐标分别为

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} \quad \bar{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{k} \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=k+1}^{n} x_i}{n-k} \quad \bar{y}_2 = \frac{\sum_{i=k+1}^{n} y_i}{n-k}$$

- 通过两个“点系中心”的直线即是拟合直线y=a+bx，其中a，b分别为：

$$b = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} \quad a = \bar{y}_1 - b\bar{x}_1 = \bar{y}_2 - b\bar{x}_2$$

3.5.4一元线性回归（续）

- 3. 最小二乘法
- 最小二乘法的基本原理是在残差平方和为最小的条件下求出最佳直线。
- 测量数据中的任何一个数据yi与拟合直线上y=a+bx对应的理想值yi‘之残差 $v_i = y_i - y_i'$ (i=1, 2, …n 为测量点数）

即 $$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 \Rightarrow \min$$

求a和b的偏导数，并令它们为零，即可解得a和b的值。

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

3.5.4一元线性回归（续）

- 【例3.10】 对量程为10Mpa的压力传感器，用活塞式压力计进行测试，输出由数字电压表读数，所得各测量点的输出值列于下表中。试用端点法、平均选点法和最小二乘法拟合线性方程，并计算各种拟合方程的拟合精度。

压力（MPa）	2	4	6	8	10
输出（mV）	10.043	20.093	30.135	40.128	50.072

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-m}}$$

3.5.4一元线性回归（续）

压力MPa	输出mV	端点法		平均选点法		最小二乘法	
		理想直线	残差	理想直线	残差	理想直线	残差
2	10.043	10.044	—0.001	10.95	—0.052	10.080	—0.0337
4	20.093	20.052	0.041	20.097	—0.004	20.090	0.003
6	30.135	30.060	0.093	30.099	0.054	30.100	0.053
8	40.128	40.068	0.060	40.101	0.027	40.110	0.018
10	50.072	50.068	—0.004	50.103	—0.031	50.120	—0.048
拟合直线方程		$y = 0.036 + 5.004x$		$y = 0.093 + 5.001x$		$y = 0.070 + 5.005x$	
拟合误差		0.068		0.049		0.048	

最小二乘法精确度最高，平均选点次之，端点法较差

3章 总 结

- 1. 随机误差
- 随机误差是由大量微小的没有确定规律的因素引起的，无法避免和控制，不能消除随机误差。但应采用数理统计的方法，减少随机误差。
- ① 算术平均值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- ② 残差 $v_i = x_i - \bar{x}$
- ③ 实验标准偏差 $s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$
- （贝塞尔公式）
- ④ 算术平均值标准偏差的估计值 $s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$
- ⑤ 根据概率分布和置信概率确定置信因子，得到测量结果的置信区间。正态分布或n>20时，k=2～3；n<20时，查t分布表得k；均匀分布时k=。$\sqrt{3}$
- ⑥测量结果为：$\bar{x} \pm ks(\bar{x})$

3章 总 结（续）

- 2. 系统误差
  - 系统误差的特点是固定不变的或按确定规律变化，主要由测量仪器、测量方法、测量环境和测量人员等因素引起。多次测量不能减少系统误差。
  - 系统误差的发现方法有：校准的方法、残差观察法、马利科夫判据和阿贝－赫梅特判据。
  - 系统误差的削弱或消除方法：（1）从产生系统误差根源上采取措施；（2）修正方法；（3）采用专门的测量方法，如①替代法、②交换法、③对称测量法、④半周期法。

3章 总 结（续）

- 3. 粗大误差
  - 粗大误差是由于测量人员的偶然出错和外界条件的改变、干扰和偶然失效等造成，应采取各种措施，防止产生粗大误差。对测量中的可疑数据可采用莱特检验法或格拉布斯检验法判断是否是粗大误差，若是，应剔除不用。
- 4. 测量结果的处理
  - 应区别对待等精度测量和不等精度测量，不等精度测量的测量结果用加权平均值表示，标准偏差越小，权值越大。
  - 对测量数据进行处理时，应首先检查和修正系统误差，判别并剔除粗大误差。

3章 总 结（续）

5. 测量不确定度概念和 A 类、B 类标准不确定度

测量不确定度表示被测量分散性的程度。用标准偏差表示的不确定度，称为标准不确定度。按不确定度的评定方法是否用统计方法，分为 A、B 两类标准不确定度。

A 类评定步骤是① $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$；

② $S(X)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$，其自由度为 $\nu=n-1$；

③ $u_A=S(\bar{x})=\frac{S(X)}{\sqrt{n}}$。

B 类评定公式为：$u_B=\frac{\alpha}{k}$

正态分布时置信因子 k 取 2 或 3，均匀分布时 k 取 $\sqrt{3}$。

3章 总 结（续）

- 6. 合成不确定度
  - 由各不确定度分量合成的标准不确定度，称为合成标准不确定度。其评定方法是：
- (1) 输入量不相关时，
  - ①可写出函数关系式 $u_c(y)=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)\right]^{1/2}$
  - ②不能写出函数关系式 $u_C=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}u_i^2}$
- (2) 输入量相关时

$$u_C(y)=\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_j}r(x_i,x_j)u(x_i)u(x_j)\right\}^{1/2}$$

3章 总 结（续）

- 7. 扩展不确定度
  - 扩展不确定度U由合成标准不确定度与包含因子的乘积得到：$U=k\cdot u_c$，的选取由置信概率（常取0.95或0.99）和概率分布（正态、均匀、t分布等）确定。
- 8. 测量不确定度的评定步骤
  - ①明确被测量的定义和数学模型及测量条件，明确测量原理、方法，以及测量标准、测量设备等；
  - ②分析不确定度来源；
  - ③分别采用A类和B类评定方法，评定各不确定度分量。
  - ④计算合成标准不确定度；
  - ⑤计算扩展不确定度；
  - ⑥报告测量结果。

3章 总 结（续）

- 9. 有效数字处理和测量数据的表示方法
  - （1）数据修约规则：“四舍五入，等于五取偶数”；
  - （2）有效数字与数据的准确度密切相关，测量结果（或读数）的有效位数应由该测量的不确定度来确定；
  - (3)把测量数据处理成一定的函数关系，通常采用方法有列表法、图示法和经验公式

3章 总 结（续）

- 10. 建立公式的步骤和一元线性回归
  - （1）建立公式的步骤是:
    - ✓ ①列表画曲线
    - ✓ ②分析曲线，确定曲线的基本形式，
    - ✓ ③由测量数据确定拟合方程中的系数
    - ✓ ④求拟合残差和拟合曲线的标准偏差，并进行验证。
  - （2）一元线性回归（直线拟合）是用一个直线方程 $y=a+bx$ 来表示测量数据之间的相互关系，即求出方个系数a和b。
  - 回归方法通常有端点法、平均选点法和最小二乘法。

第103页