§10.3　波的能量　能流

一、波的动能与势能

x 处质元：原长 dx ，质量 $dm=\rho\, Sdx$。

胡克定律： $\dfrac{dF}{S}=-Y\dfrac{dy}{dx}$

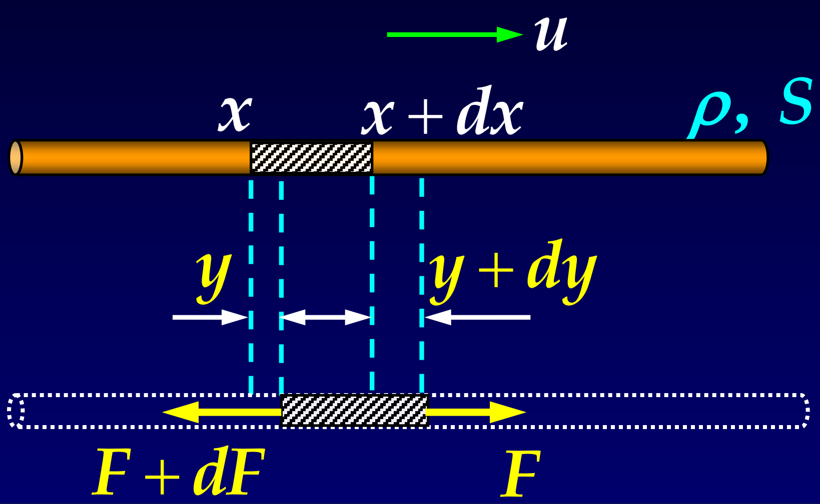


Fig. 声纵波在弹性棒中传播

$$dF=-(\frac{YS}{dx})dy=-kdy$$

其中： $k=\dfrac{YS}{dx}$

质元 dx 的弹性势能：

$$dE_p=\frac{1}{2}k(dy)^2=\frac{1}{2}\frac{YS}{dx}(dy)^2=\frac{1}{2}Y\cdot\underbrace{Sdx}_{dV}\cdot\underbrace{(\frac{dy}{dx})^2}_{(\frac{\partial y}{\partial x})^2}$$

简谐声纵波：$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_o]$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega}{u} A\sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_o]$$

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \longrightarrow Y = \rho u^2$$

$$dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\cdots]$$

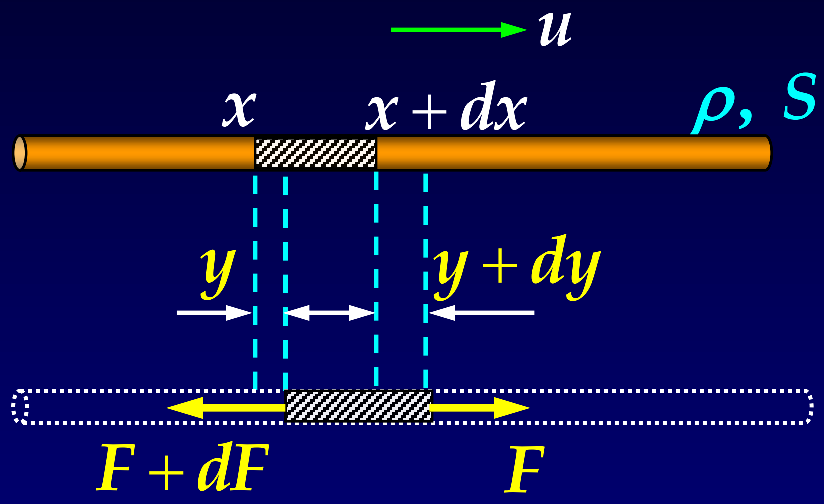


Fig. 声纵波在弹性棒中传播

质元 dx 的动能：

$$dE_k = \frac{1}{2}(\rho S dx)(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\cdots]$$

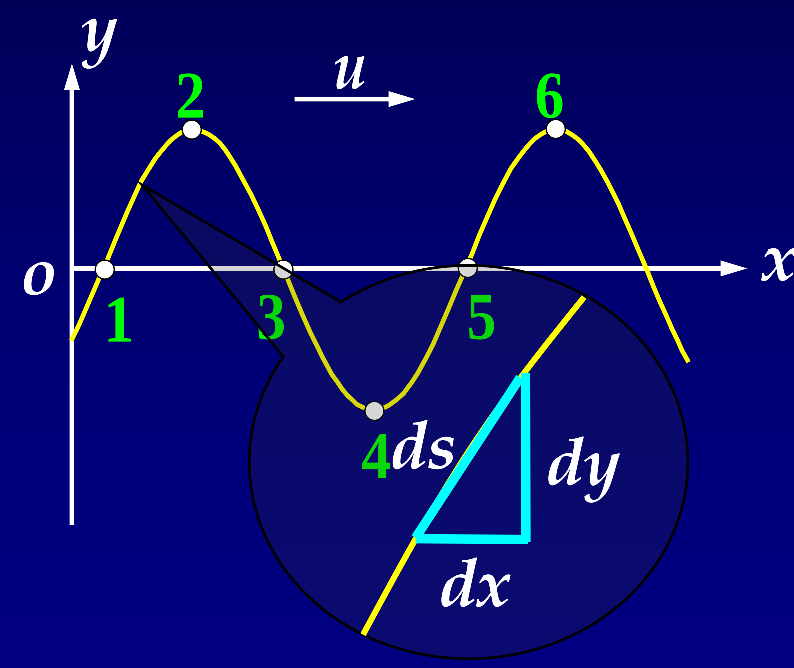
结论：任意时刻媒质中某质元的 动能 = 势能！

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$ds = (dx)^2 + (dy)^2 = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

质元 dx 的形变量： $dl = ds - dx$

$$dl = dx(\sqrt{1 + (dy/dx)^2} - 1)$$



E_k、E_p 皆最大：1，3，5

E_k、E_p 皆最小：2，4，6

二、波的能量密度

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

能量密度：$w = \dfrac{dE}{dV} = \dfrac{dE_k + dE_p}{dV}$

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0] = w(t)$$

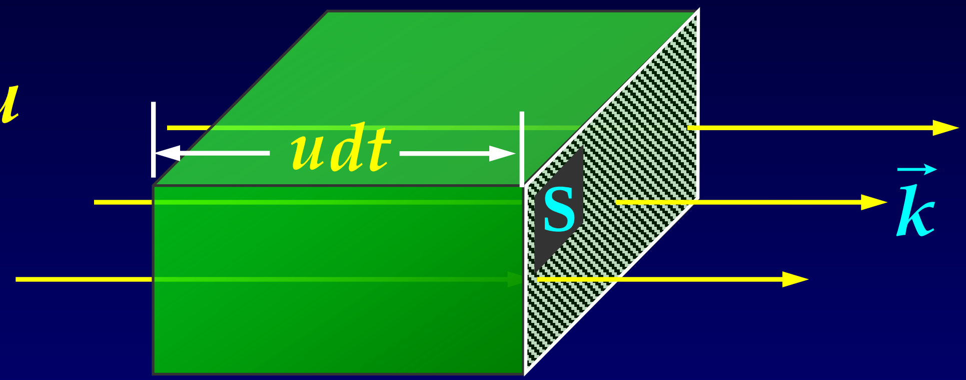
一个周期内能量密度平均值：

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \propto A^2$$

三、波的能流及能流密度

1、能流 P：单位时间内垂直通过某截面 S 的能量。

$$P=\frac{w\cdot Sudt}{dt}=w\cdot S\cdot u$$



平均能流：

$$\overline{P}=\overline{w}\cdot S\cdot u=\frac{1}{2}\rho u\cdot\omega^2A^2\cdot S$$

2、能流密度 I：

$$I=\overline{P}/S=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho u\cdot\omega^2A^2\propto A^2$$ 亦称 波的强度。

例 不考虑波的吸收，证明球面波的振幅 $A \propto \dfrac{1}{r}$， r 为离开波源的距离 。

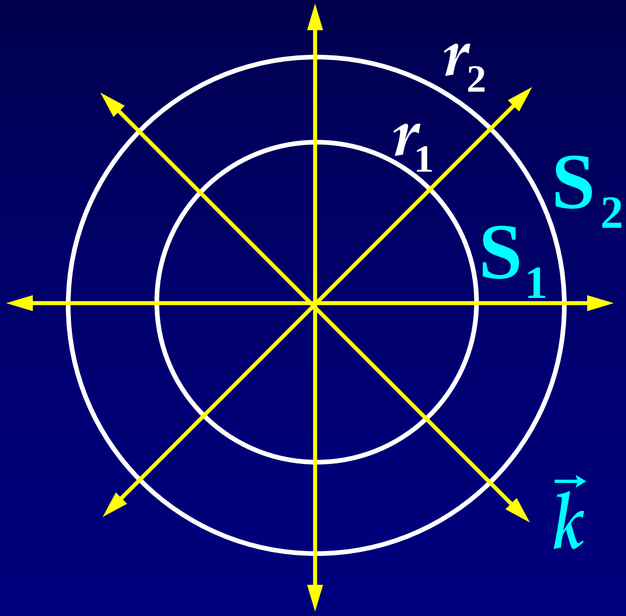
解 通过两个面的平均能流相等： $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$

$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\rho u} \cdot \cancel{\omega^2} A_1^2 \cdot \cancel{4\pi} r_1^2 = \cancel{\frac{1}{2}\rho u} \cdot \cancel{\omega^2} A_2^2 \cdot \cancel{4\pi} r_2^2$$

$$A_1 r_1 = A_2 r_2 = Ar \overset{令}{=\!=} A_0$$

$$A = \frac{A_0}{r} \propto \frac{1}{r}$$



(the end)

四、电磁波的能流密度

$$I = wu = w\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H \qquad w = \frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon}E\cdot\sqrt{\mu}H + \sqrt{\mu}H\cdot\sqrt{\varepsilon}E) = \sqrt{\mu\varepsilon}EH$$

$$I = \cancel{\sqrt{\mu\varepsilon}}EH\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{\mu\varepsilon}}} = EH$$

常写成： $\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$ （称为 波印亨矢量）

平均波印亨矢量： $\overline{S} = \frac{1}{2}E_0H_0$

归纳:

1. 简谐波的动能与势能:

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_o]$$

2. 波的能量密度、能流及能流密度:

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_o]$$

$$P = w \cdot S \cdot u$$

$$I = wu = \frac{1}{2}\rho u \cdot \omega^2 A^2$$

3. 波印亭矢量: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

(The end)