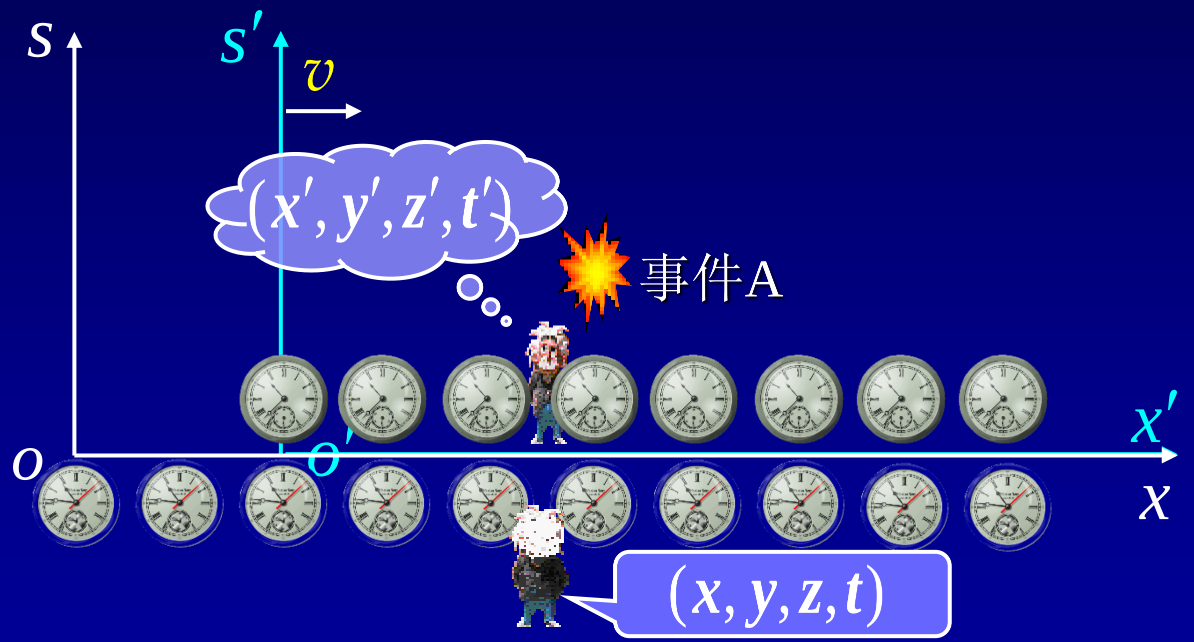
§ 14.3 狭义相对论的基本原理 洛沦兹变换

一、相对论的时空变换----洛沦兹变换

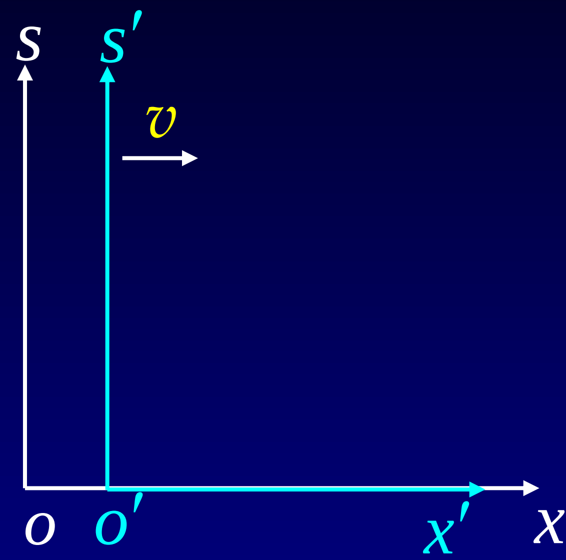
由于参照系间的相对运动速度较快，任何事件被我们看到所需要的时间不能忽略，为了客观地描述事件发生的状态，我们应用观测术语，而不用看或观察。



（事件与步钟）

设原点o、o'重合的物理事件的时空坐标为：

$$\begin{cases} x = x' = 0 \\ y = y' = 0 \\ z = z' = 0 \\ t = t' = 0 \end{cases}$$



① 相对性原理要求某事件在两坐标系的时空坐标间的变换应是线性的。设该事件的时空坐标为：

$$\begin{cases} S系:(x,y,z,t) \\ S'系:(x',y',z',t') \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= ax' + bt' \\ x' &= ax - bt \end{aligned}}$$

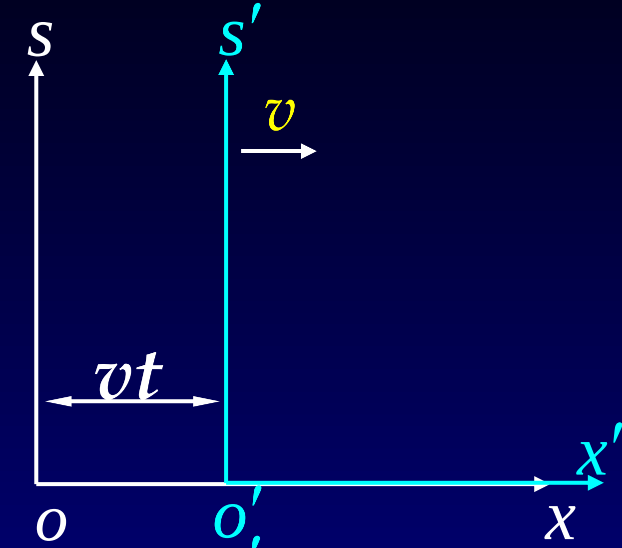
(a、b为常数)

② 观测 S'的原点 o'的运动：

$$\begin{cases} S'\text{中：} x' = 0 \\ S\text{中：} x = vt \end{cases}$$

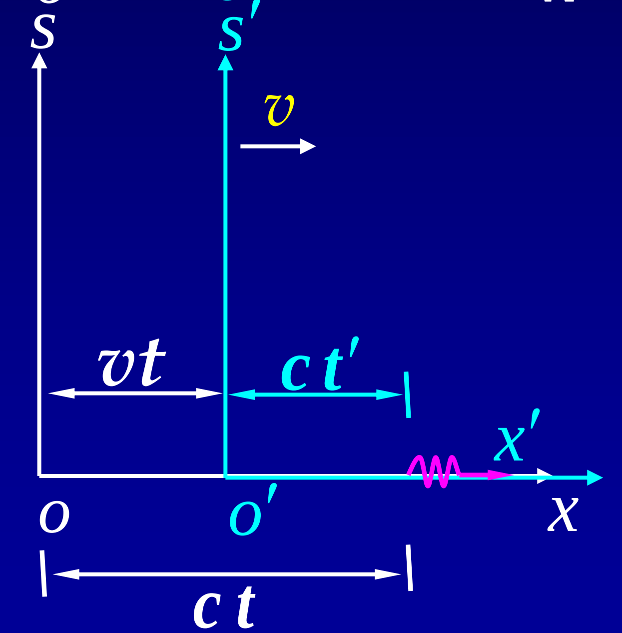
$$0 = avt - bt \longrightarrow \boxed{b = av}$$

则 $$\begin{cases} x = a(x' + vt') \\ x' = a(x - vt) \end{cases}$$



③ 光速不变原理：

$$\begin{cases} S'\text{中观测：} x' = ct' \\ S\text{中观测：} x = ct \end{cases}$$



$$\begin{cases} ct = a(ct' + vt') = a(c+v)t' \\ ct' = a(ct - vt) = a(c-v)t \end{cases} \longrightarrow c^2 = a^2(c^2 - v^2)$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

在 S 系中观测 S'中固定点 (x')时，由于 $t'\uparrow \Rightarrow x\uparrow$，而$\underline{x = ax' + bt' = a(x' + vt')}$，应取 $a > 0$，即

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow b = av = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

则:
$$\begin{cases} x = ax' + bt' = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} & (1) \\ x' = ax - bt = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{(1)代入(2)}]{\text{(2)代入(1)}} t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

两惯性参照系之间变换 (洛沦兹变化Lorentz transformation)

正变换 $S \rightarrow S'$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ y' = y ; \quad z' = z \\ t' = \dfrac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases}$$

逆变换 $S' \rightarrow S$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ y = y' ; \quad z = z' \\ t = \dfrac{t' + vx' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases}$$

H.A.Lorentz (1853~1928)

洛沦兹荷兰理论物理学家。经典电子论创始人。从事电动力学、热力学、统计力学和光学、辐射理论、金属理论及原子物理方面的研究。

定义: $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \geq 1$ (γ被称为膨胀因子)

洛伦兹变换和逆变换为

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y; \quad z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x/c) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y'; \quad z = z' \\ t = \gamma(t' + \beta x'/c) \end{cases}$$

质点在低速运动时，$v << c$，$\beta = v/c \to 0$，$\gamma \to 1$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y; z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

洛伦兹变换过渡到经典的伽利略变换。

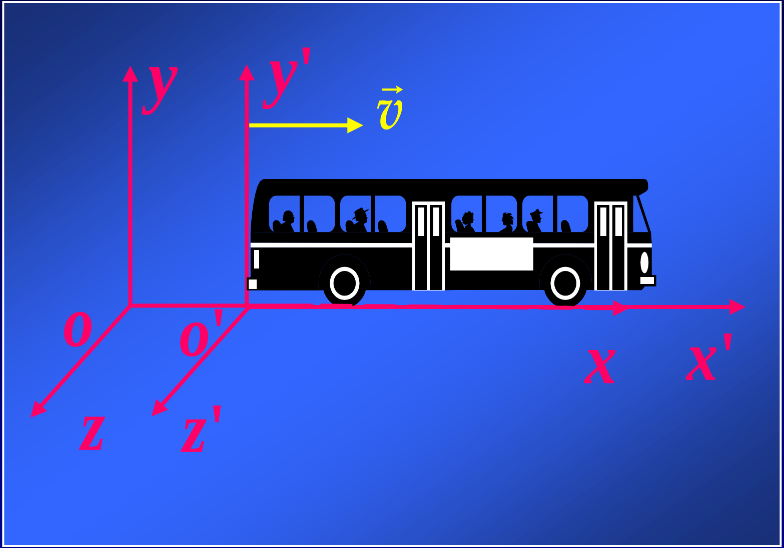
说明

1. 洛仑兹变换式即为同一事件在不同惯性系中时空坐标间的关系。

2. 洛仑兹变换式约定:

(1). o与o'重合时，$t = t' = 0$

(2). $\vec{v}$ 为常矢量



3. 洛仑兹变换的应用:

(1). 分清各个物理事件;

(2). 建立参照系，列出不同的惯性系中的时空坐标;

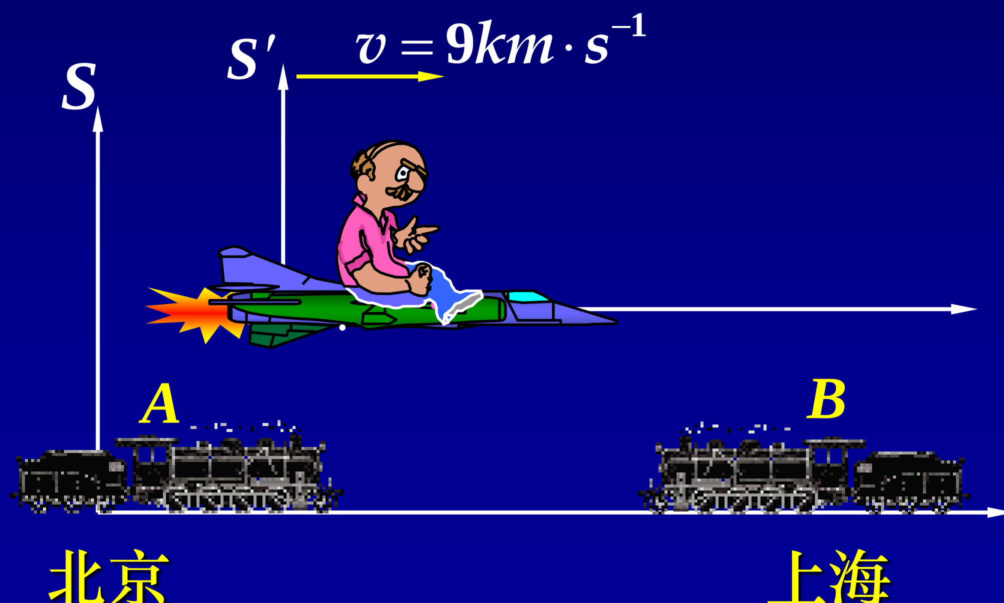
(3). 代入洛沦兹变换式。

例 已知北京和上海直线相距1000km，在某一时刻从两地**同时**各开出一列火车，现有一艘飞船沿从北京到上海方向在高空掠过，飞行速度为9km/s，求宇航员测得两列火车开出时的时空坐标。

解： 建立参照系如图所示。设北京、上海发车分别为事件A和事件B。

$$S系:\begin{cases} A(x_1,\ t_1) \\ B(x_2,\ t_2) \end{cases}$$

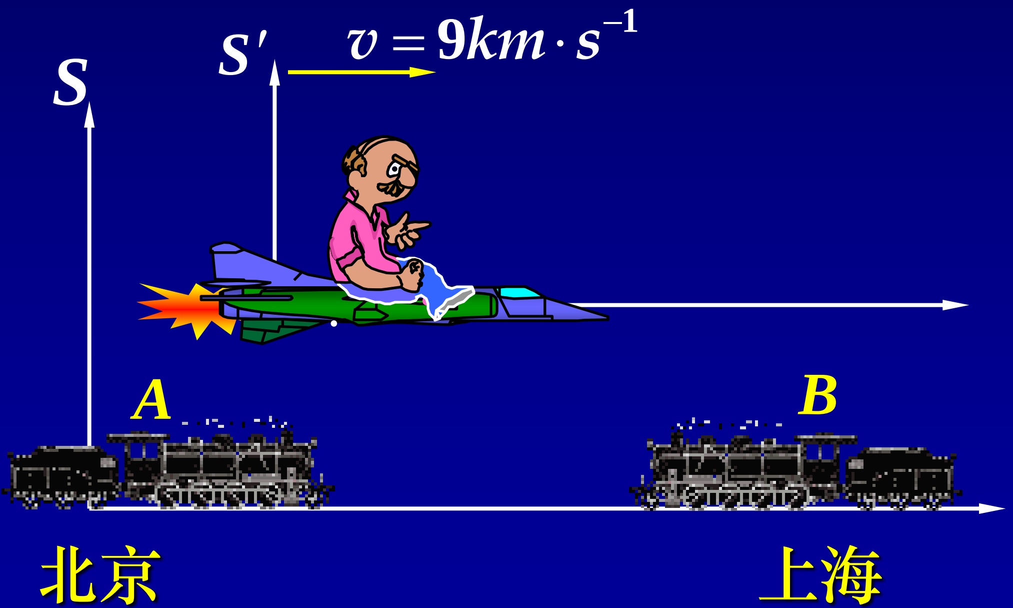
$$S'系:\begin{cases} A(x_1',\ t_1') \\ B(x_2',\ t_2') \end{cases}$$



若设：$t_1 = 0, x_1 = 0$，则 x_2=1000km，$t_2 = 0$。

飞船中的观察者观测到两列火车开车时的时空坐标为：

北京发车：
$$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - vt_1) = 0 \\ t_1' = \gamma(t_1 - \beta x_1 / c) = 0 \end{cases}$$



若设：$t_1 = 0, x_1 = 0$，则 x_2=1000km，$t_2 = 0$。

飞船中的观察者观测到两列火车开车时的时空坐标为：

北京发车：$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - vt_1) = 0 \\ t_1' = \gamma(t_1 - \beta x_1 / c) = 0 \end{cases}$

上海发车：$\begin{cases} x_2' = \gamma(x_2 - vt_2) \approx x_2 = 10^6 m \\ t_2' = \gamma(t_2 - \beta x_2 / c) \approx -\dfrac{9\times10^3\times10^6}{(3\times10^8)^2} = -10^{-7} s \end{cases}$

在宇航员看来，上海的火车发车要比北京早，两列火车并非同时发车。同时是相对的。

利用洛伦兹时空坐标变换，可以得到洛伦兹变换下的速度变换。

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

将洛伦兹变换微分得：

$$\begin{cases} dx' = \gamma\left(dx - v\,dt\right) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \beta\, dx/c\right) \end{cases}$$

$$u'_x=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx-vdt}{dt-\beta dx/c}=\frac{u_x-v}{1-\beta u_x/c}$$

相类似可以得到速度在洛伦兹变换下的变换及逆变换式，即洛伦兹兹速度变换式：

$$\begin{cases} u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-\beta u_x/c} \\ u_y'=\dfrac{u_y}{\gamma\left(1-\beta u_x/c\right)} \\ u_z'=\dfrac{u_z}{\gamma\left(1-\beta u_x/c\right)} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x=\dfrac{u_x'+v}{1+\beta u_x'/c} \\ u_y=\dfrac{u'_y}{\gamma\left(1+\beta u_x'/c\right)} \\ u_z=\dfrac{u_z'}{\gamma\left(1+\beta u_x'/c\right)} \end{cases}$$

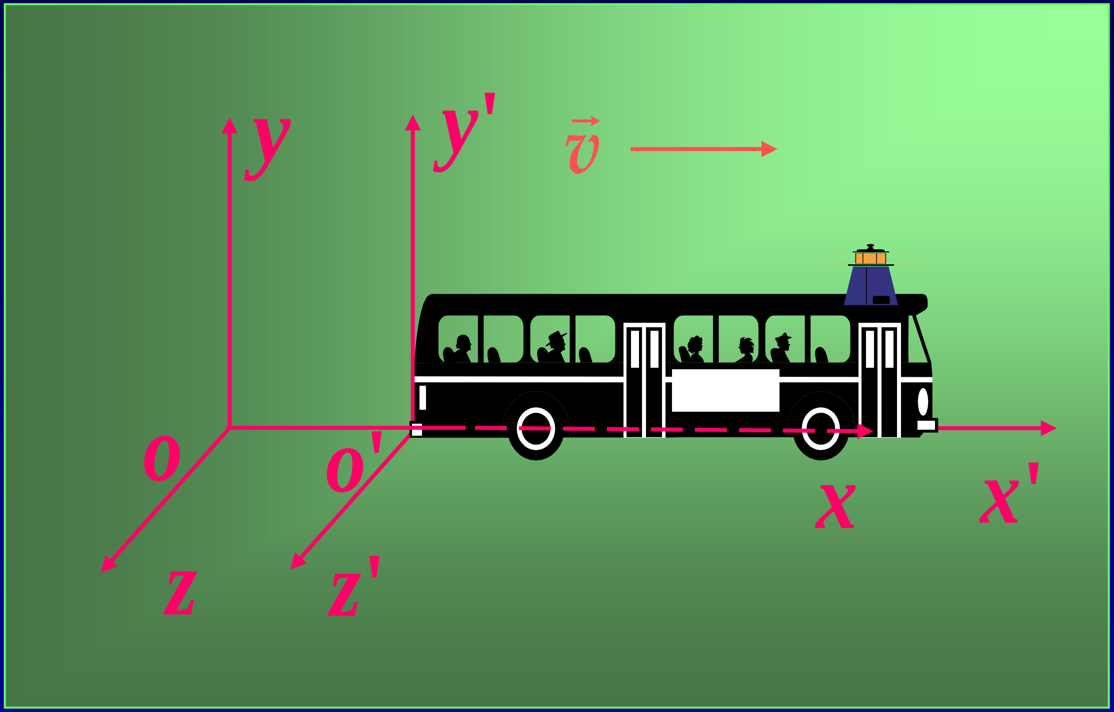
在物体的运动速度较小时，$v/c << 1$，洛伦兹速度变换过渡为伽利略变换下的速度变换。

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - \beta u_x / c} \\ u_y' = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \beta u_x / c\right)} \\ u_z' = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - \beta u_x / c\right)} \end{cases} \xrightarrow{v << c} \begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$$

验证运动参照系内观察者接收到光信号的速率不变。

$$u_x' = c$$

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \beta u_x' / c} = \frac{c + v}{1 + v / c} = c$$



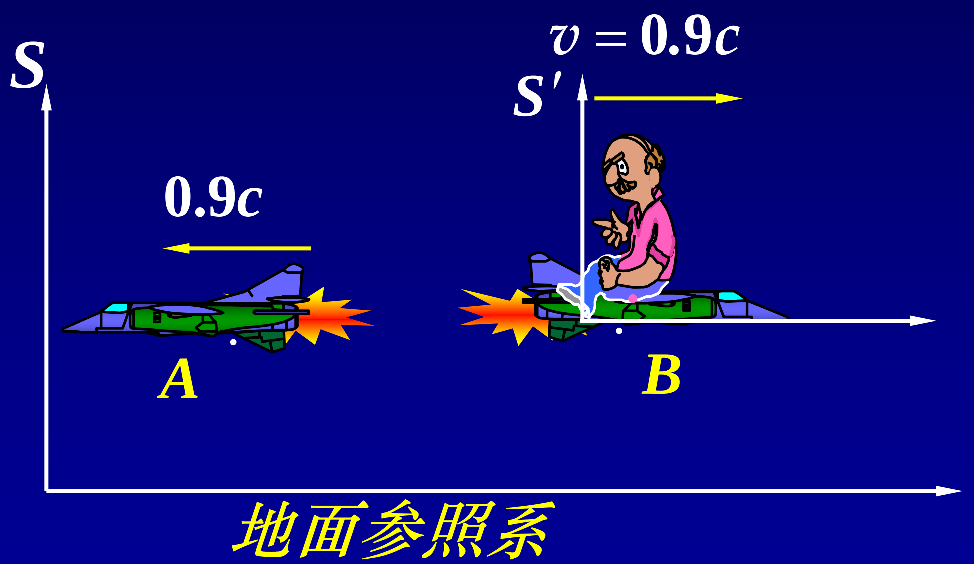
例 在地面上观测到两艘相向飞行的飞船的速度皆为0.9c，求它们之间的相对速度。

解： 由速度的变换得 $u_x = -0.9c$， $v = 0.9c$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - v u'_x / c^2}$$

$$= \frac{-0.9c - 0.9c}{1 - (-0.81)}$$

$$\approx -0.994c$$



速度不会超过光速。

归纳

1. 洛伦兹坐标变换：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y; \quad z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x / c) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y'; \quad z = z' \\ t = \gamma(t' + \beta x' / c) \end{cases}$$

2. 洛伦兹速度变换：

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - \beta u_x / c} \\ u_y' = \dfrac{u_y}{\gamma(1 - \beta u_x / c)} \\ u_z' = \dfrac{u_z}{\gamma(1 - \beta u_x / c)} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + \beta u_x' / c} \\ u_y = \dfrac{u_y'}{\gamma(1 + \beta u_x' / c)} \\ u_z = \dfrac{u_z'}{\gamma(1 + \beta u_x' / c)} \end{cases}$$