

## § 14.6 相对性动量与能量

# 一. 动量与质量

经典力学：质量为 $m$ 的物体的加速度与外力关系为

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

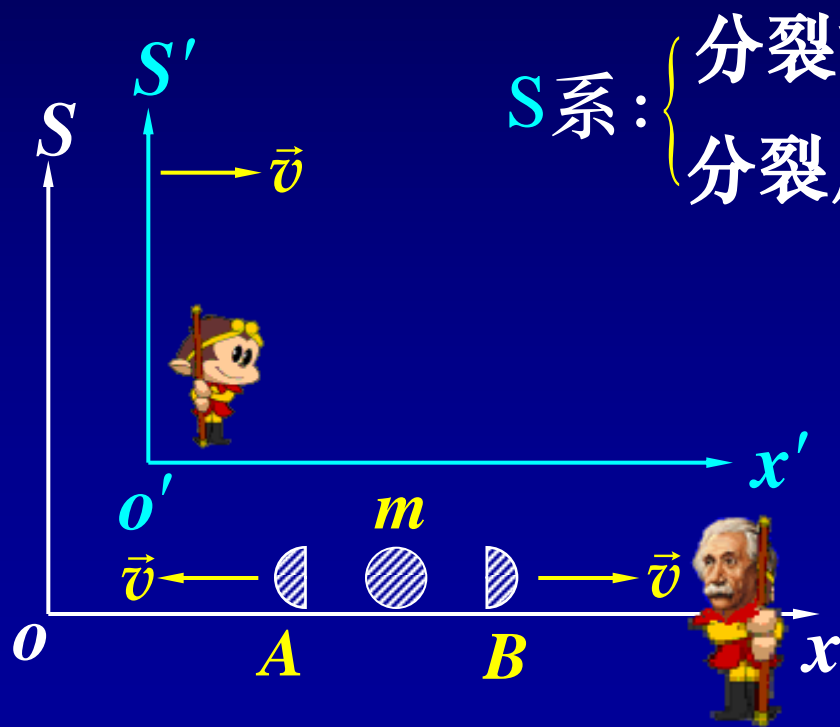
$$\begin{cases} \vec{p} = m\vec{v} \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt \end{cases}$$

即：物体的质量 $m$ 是常数，无论  $\vec{F}$  多大，只要作用时间足够长，其  $\vec{v} \rightarrow \infty$ ，可以超过光速。与实验事实不相符。

# 相对论质量

相对论：能否也认为物体的质量是个常数？

惯性系等价原理要求：动量守恒律在任何惯性参照系必须成立。



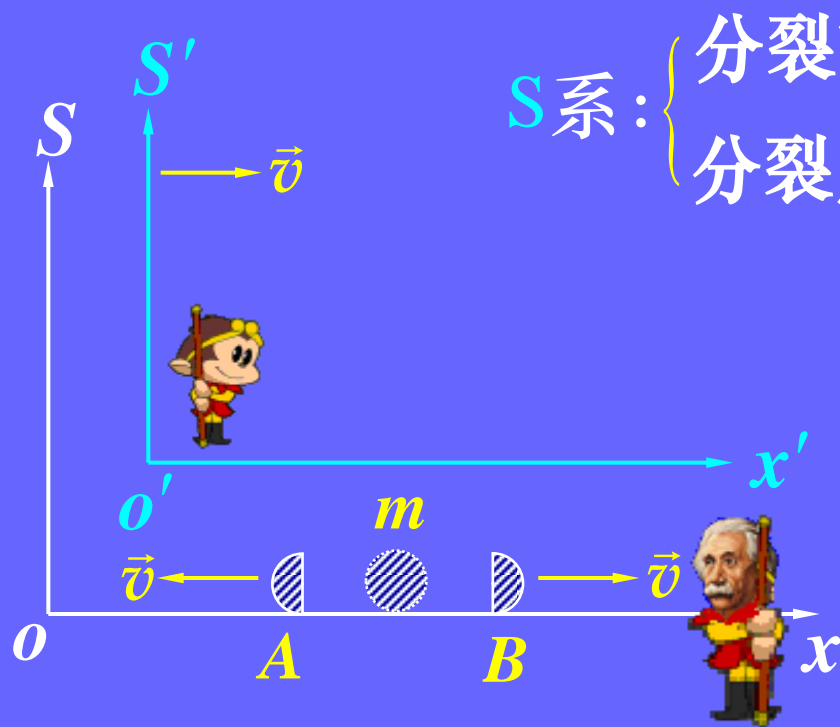
$$S \text{ 系: } \begin{cases} \text{分裂前: } p_1 = 0 \\ \text{分裂后: } p_2 = mv/2 + (-mv/2) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{p_1 = p_2}$$

所以S系观测者认为动量是守恒量，动量守恒定律成立！

$$S' \text{系:} \begin{cases} \text{分裂前: } p'_1 = -mv \\ \text{分裂后: } p'_2 = mv'_A / 2 + 0 = \frac{m}{2} \frac{-v - v}{1 - v(-v)/c^2} = -\frac{mv}{1 + v^2/c^2} \end{cases}$$

$p'_1 \neq p'_2$   $\longrightarrow$   $S'$ 系动量却不守恒!



$$S \text{系:} \begin{cases} \text{分裂前: } p_1 = 0 \\ \text{分裂后: } p_2 = mv / 2 + (-mv / 2) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{p_1 = p_2}$$

所以 $S$ 系观测者认为动量是守恒量，动量守恒定律成立!

相对论认为：物体的质量与物体的速度有关，即

$$m = f(v_m) = ?$$

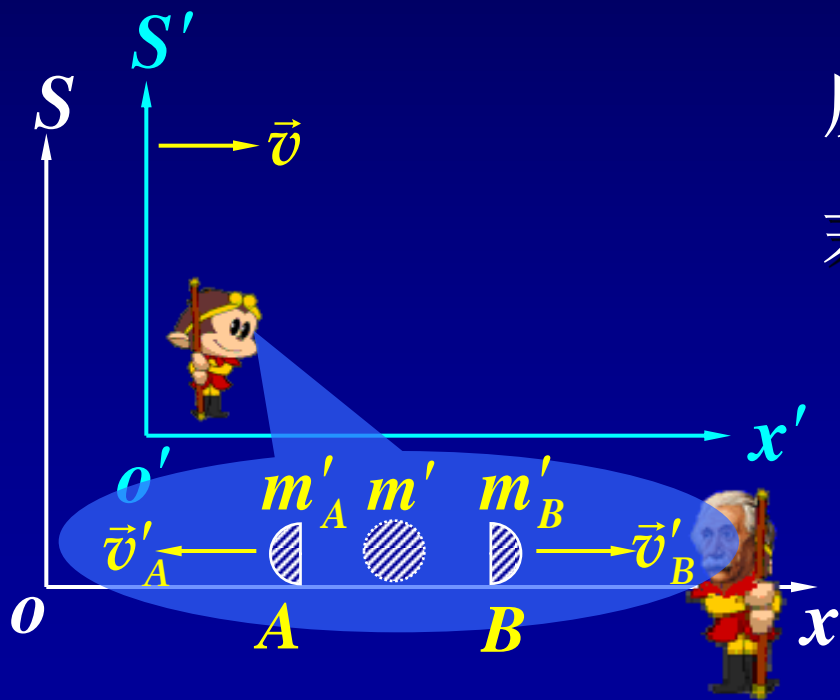
$$S' \text{系: } \begin{cases} \text{分裂前: } p'_1 = -m'v \\ \text{分裂后: } p'_2 = -m'_A v'_A + m'_B v'_B = -m'_A v'_A \end{cases}$$

$$\text{质量守恒: } m' = m'_A + m'_B$$

$$\text{若动量守恒, 则: } p'_1 = p'_2$$

$$-(m'_A + m'_B)v = -m'_A v'_A$$

$$m'_A = \frac{m'_B v}{v'_A - v}$$

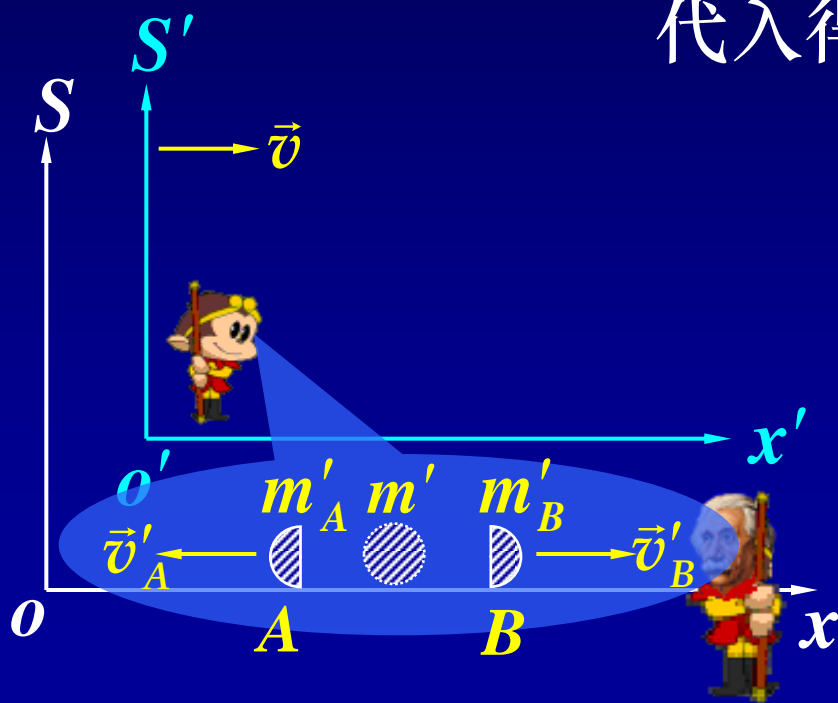


由洛伦兹速度变换得:

$$v'_A = \left| \frac{-v - v}{1 - (-v)v/c^2} \right| = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} \rightarrow v = \frac{c^2}{v'_A} \left[ 1 - \sqrt{1 - (v'_A/c)^2} \right]$$

代入得:

$$m'_A = \frac{m'_B}{\sqrt{1 - (v'_A/c)^2}}$$

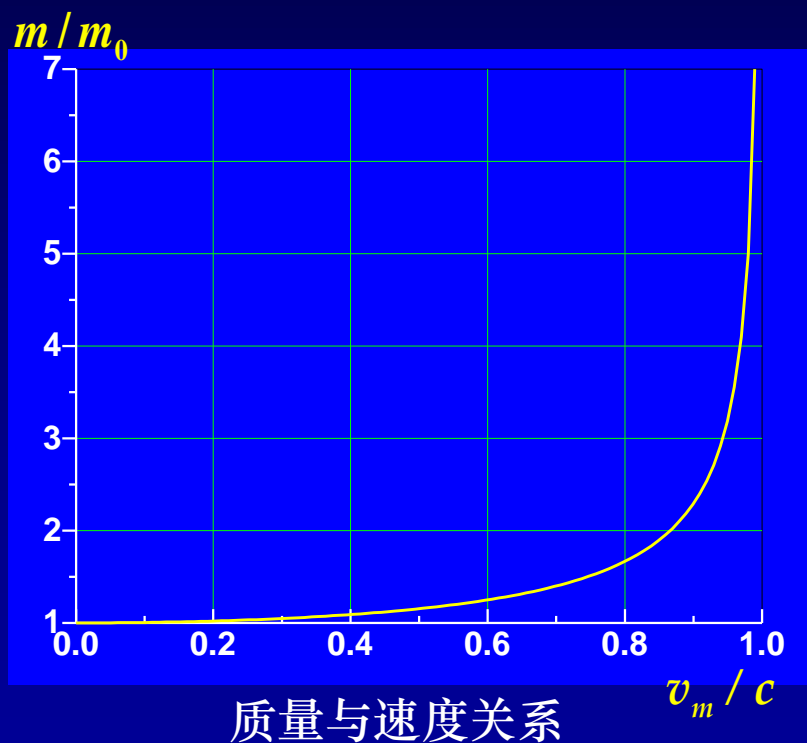


$$m'_A = \frac{m'_B v}{v'_A - v}$$

$$m'_A = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v'_A / c)^2}}$$

一般地写成：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_m / c)^2}}$$

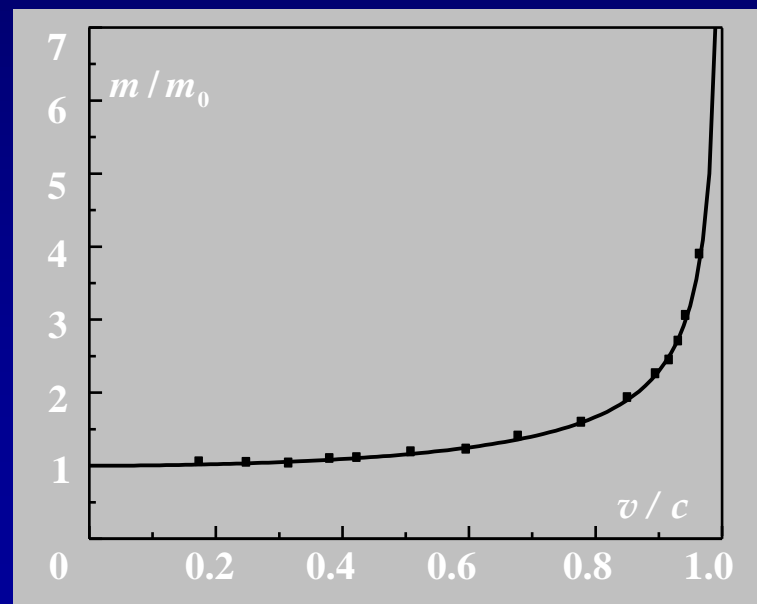


$v_m \ll c$  时,  $m \approx m_0$

## 实验验证

- ☺ 1901年，实验物理学家考夫曼从镭辐射测  $\beta$  射线在电场和磁场中的偏转，发现电子质量随速度变化。
- ☺ 1908年，德国物理学家布雪勒用改进了的方法测量电子的质量，证实了爱因斯坦理论。

$v / c$	$e / m$ 实验值( $C \cdot kg^{-1}$ )
0.3173	$1.661 \times 10^{11}$
0.3787	$1.630 \times 10^{11}$
0.4281	$1.590 \times 10^{11}$
0.5154	$1.511 \times 10^{11}$
0.6870	$1.283 \times 10^{11}$





☺ 实验测得当质子在加速器中被加速接近光速时，实验测得其质量皆大于静止质量。

$$v = 2.7 \times 10^8 \text{ m/s} \quad m = 2.3m_0$$

$$v = 2.9 \times 10^8 \text{ m/s} \quad m = 3.9m_0$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_m / c)^2}}$$

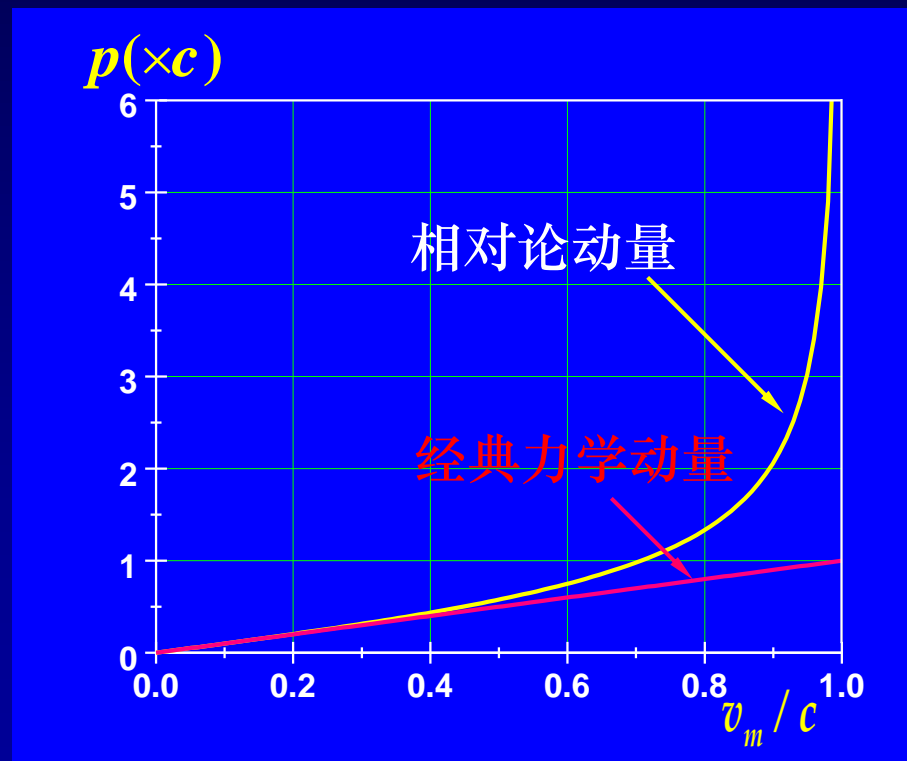
显然，当  $v_m \rightarrow c$  时， $m \rightarrow \infty$ ，说明随着  $v_m$  增加，质点的惯性也增加，作用在物体上的外力永远不能将质点加速至超过光速的速度。

相对论动量:  $\vec{p} = m\vec{v}_m = \frac{m_o \vec{v}_m}{\sqrt{1 - v_m^2 / c^2}}$

$m_o$ : 物体静止质量 (静质量), 为一常数。

$m$ : 物体运动时的质量 (动质量), 与物体的运动速度  $v_m$  有关。

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v_m^2 / c^2}}$$



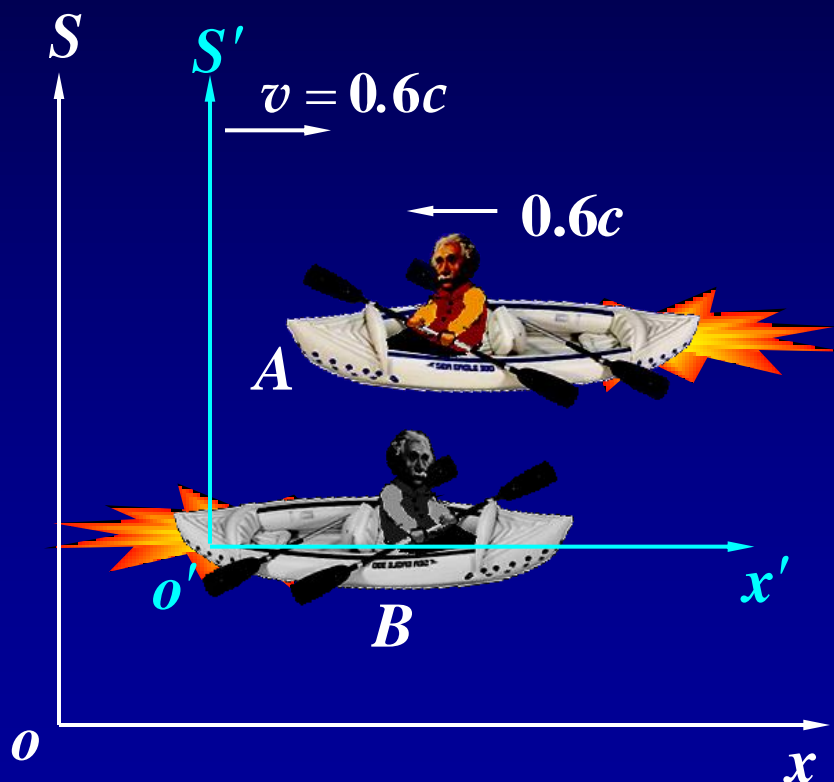
**例** 地面参照系测得两沿相反方向飞行的宇宙飞船速度为  $0.6c$ ，它们的静止质量皆为  $m_0$ ，则飞船上的宇航员测得对方飞船的质量为多少？

**解：** 建立参照系如图所示

S系中： $v_A = -0.6c$

$S'$ 中A的速度为：

$$\begin{aligned}
 v'_A &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \\
 &= \frac{-0.6c - 0.6c}{1 - (-0.6c) \times 0.6c / c^2} \\
 &= -\frac{15}{17}c
 \end{aligned}$$

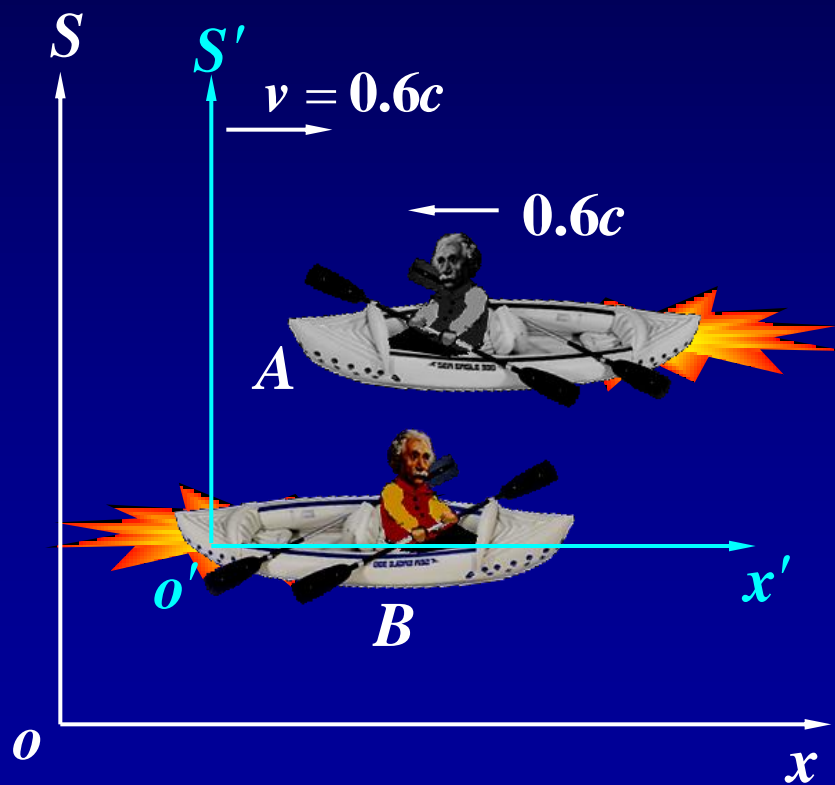


则在  $S'$  中测得飞船A的质量为：

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v_m^2 / c^2}}$$

代入上式得：

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_o}{\sqrt{1 - (15/17)^2}} \\ &= \frac{17}{8} m_o \end{aligned}$$



## 二.狭义相对论力学的基本方程

作用在质点上的作用力等于质点动量的变化率，即

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_o \vec{v}_m}{\sqrt{1 - v_m^2 / c^2}}$$

对于质点系，系统的总动量：
$$\vec{P} = \sum_i \frac{m_{oi} \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}}$$

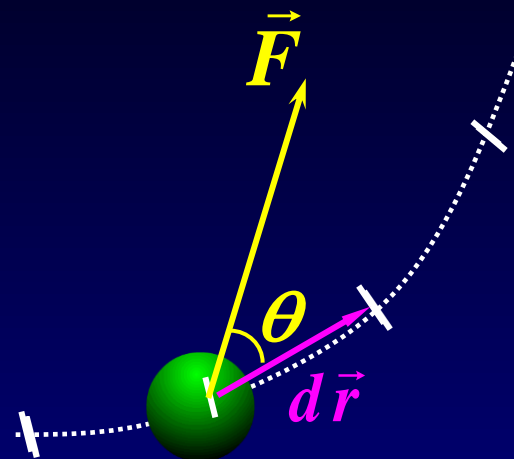
若质点系所受到的合外力为零，则  $P = \text{常数}$ ，系统的  
总动量守恒。

### 三. 质量与能量的关系

外力对物体所作的功为：

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

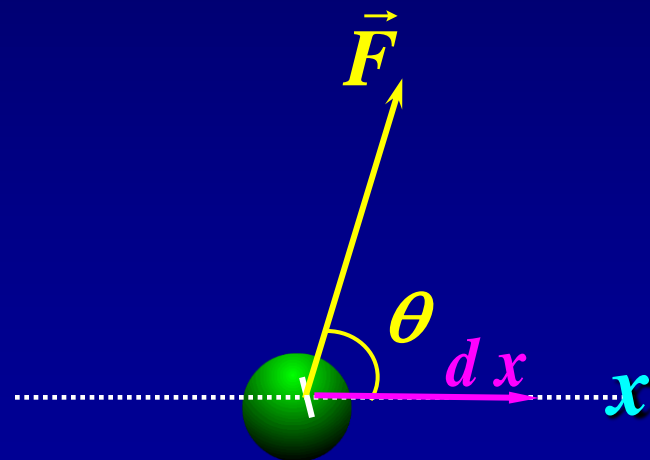
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



设：质点沿  $x$  轴运动，外力所作功等于质点动能的增加

$$E_k = \int F_x dx = \int \frac{dp}{dt} dx = \int v dp$$

$$E_k = \int_0^v v d(mv) = \int_0^v (mv dv + v^2 dm)$$



$$m = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \longrightarrow m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

上式两边微分： ~~$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2m^2 v dv = 0$~~

$$mvdv + v^2 dm = c^2 dm$$

$$E_k = \int_{m_0}^m c^2 dm \longrightarrow E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

与经典力学形式差别很大，但当  $v \ll c$  时：

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \{ (1 - v^2 / c^2)^{-1/2} - 1 \} \\ &= m_0 c^2 \{ (1 + v^2 / 2c^2 - \dots) - 1 \} \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned}$$

令： $E = mc^2$  为物体以速度  $v$  运动时的总能量。

$E_0 = m_0 c^2$  为物体静止时的能量，称作静能量。

质点静止时仍然具有能量  $m_0 c^2$ ，在几个粒子相互作用（相互碰撞）的过程中，能量的守恒表现为

$$E = \sum_i m_i c^2 = \text{常量}$$
$$m = \sum_i m_i = \text{常量}$$

即：在狭义相对论中，能量的守恒与质量的守恒完全一样，两者统一了。



物质的**质量**和**能量**这两个物理量间有着密切的联系。系统**质量**的变化必伴随着系统能量的变化；反之，系统能量变化也必然伴随着一定质量的变化。系统释放能量后静质量减少，称为质量**亏损**。质量和能量是物质不可分割的两个属性。

$$\begin{cases} E = mc^2 \\ \Delta E = \Delta mc^2 \end{cases} \quad (\text{爱因斯坦质能关系})$$

**例** 1kg水由0°C加热至100 °C时，所增加的质量为：

$$\Delta m = \Delta E / c^2 = 4.18 \times 10^3 \times 100 / (3 \times 10^8)^2 \approx 4.6 \times 10^{-12} (\text{kg})$$

由于增加很小，所以在日常现象中常不被注意。

## 实验验证

1932年, 英国物理学家**考克钱夫**和爱尔兰物理学家**瓦尔顿**利用他们设计的质子加速器进行**人工核蜕变**, 第一次验证了质量关系, 为此获得1951年的诺贝尔物理学奖。



( *J.D.Cockcroft*, 1892-1967 )



( *E.T.Walton*, 1903-1995 )



通过比较，核反应后系统静止质量减少了：

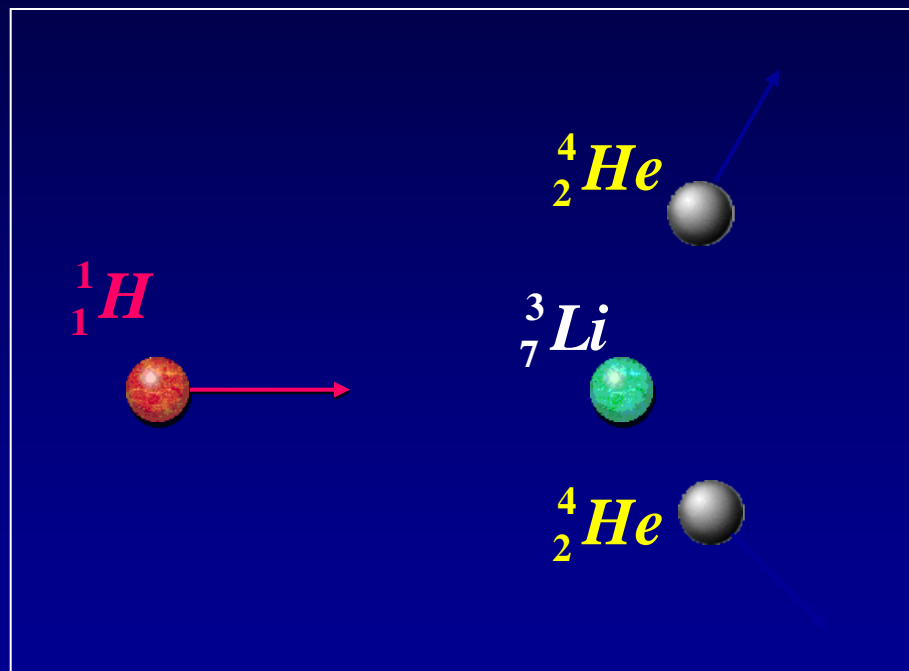
$$m_H = 1.00783u$$

$$m_{Li} = 7.01601u$$

$$m_{He} = 4.00260u$$

$$1u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \Delta m &= 2m_{He} - (m_H + m_{Li}) \\ &= -0.01864u < 0 \end{aligned}$$



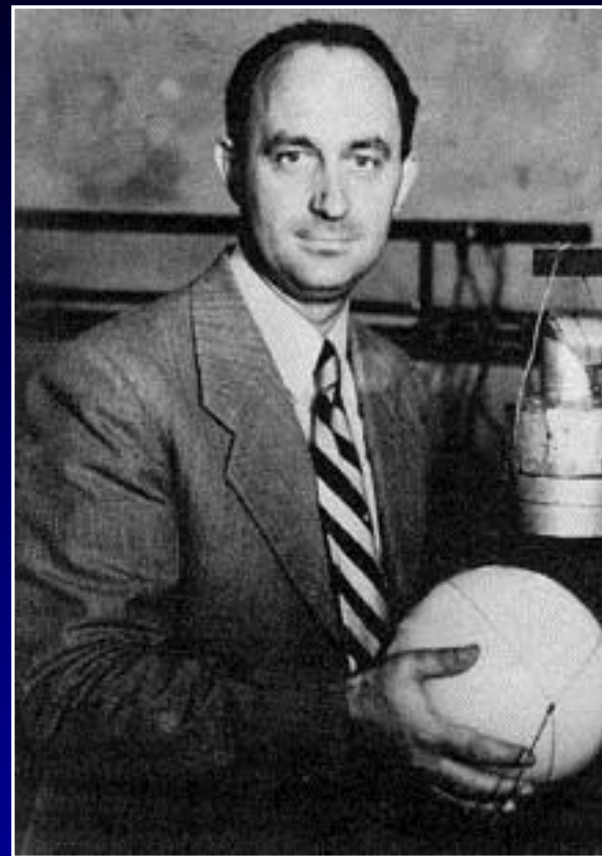
即核反应后氦原子核（ $\alpha$ 粒子）的总动能应为：

$$\begin{aligned}\Delta E = \Delta mc^2 &= 0.01864 \times 1.66 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} \\ &= 17.4 \text{ MeV}\end{aligned}$$

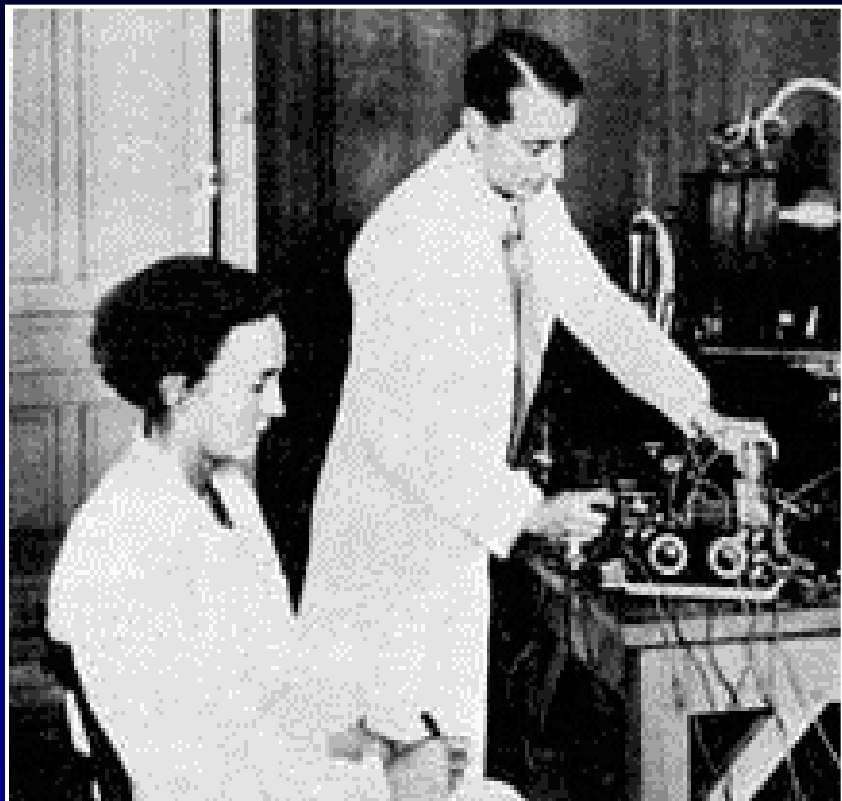
与实验测得的两氦原子核的总动能17.3MeV相符。

## 四.核能利用

1934年，意大利科学家**费米** (E.Fermi, 1901-1954) 利用穿透性很强的中子轰击原子核，实验发现许多核捕获中子后成为放射性核。为此费米荣获1938年诺贝尔物理学奖。



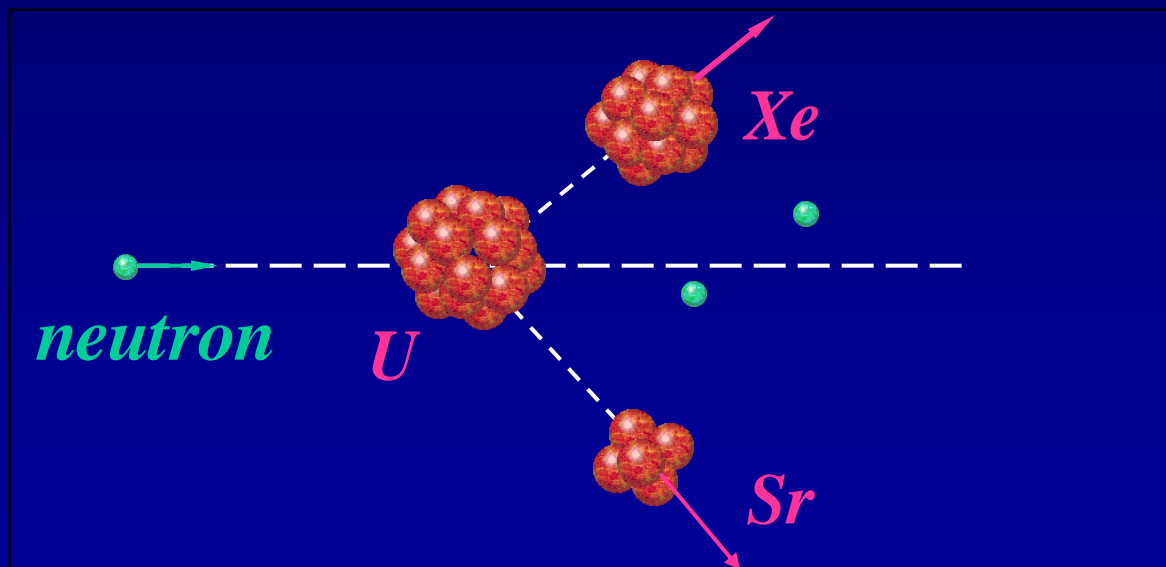
[www.nobel.se/physics](http://www.nobel.se/physics)



(Joliot-Curie, 1897-1956)

1934年约里奥·居里夫人用慢中子照射铀盐时，分离出了一种类似于“镭” ( $Z=57$ ) 的放射性核素，它有 $\beta$ 放射性，半衰期为3.5小时。但是居里夫人对中子与铀 ( $Z>92$ ) 发生反应，生成电荷数不同的镭核非常不理解其实这表明中子使铀核产生了裂变。约里奥·居里夫人离新发现仅一步之遥，错失了良机。

1939年，哈恩(*O.Hahn*, 1879-1968)和斯特拉斯曼(*F.Strassman*, 1902-1980)重复居里夫人的实验，在肯定了镭存在的的同时，还发现了 $Z=56$ 的放射性核元素钡。梅特纳(*L.Meitner*, 1878-1968)和弗里什(*O.R.Frisch*, 1904-1979)对此做出了正确的解释，这是铀在中子的轰击下分裂成两个质量较轻的原子核，同时释放出能量，此过程称作原子的核裂变。

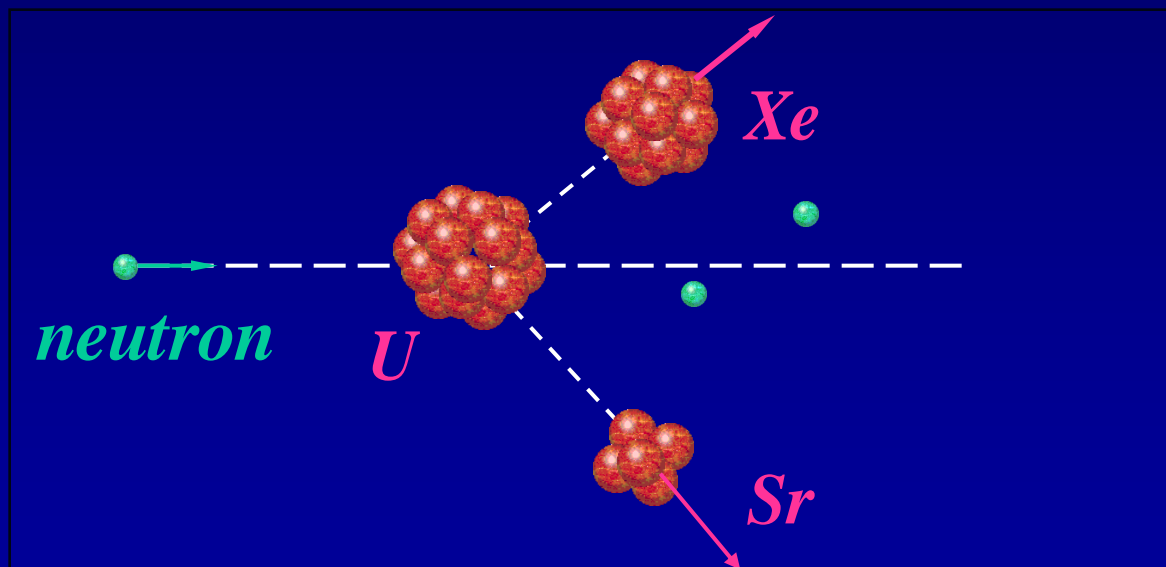




$$\Delta E = \Delta mc^2 = 0.22 \times 1.66 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} \approx 200 \text{ MeV}$$

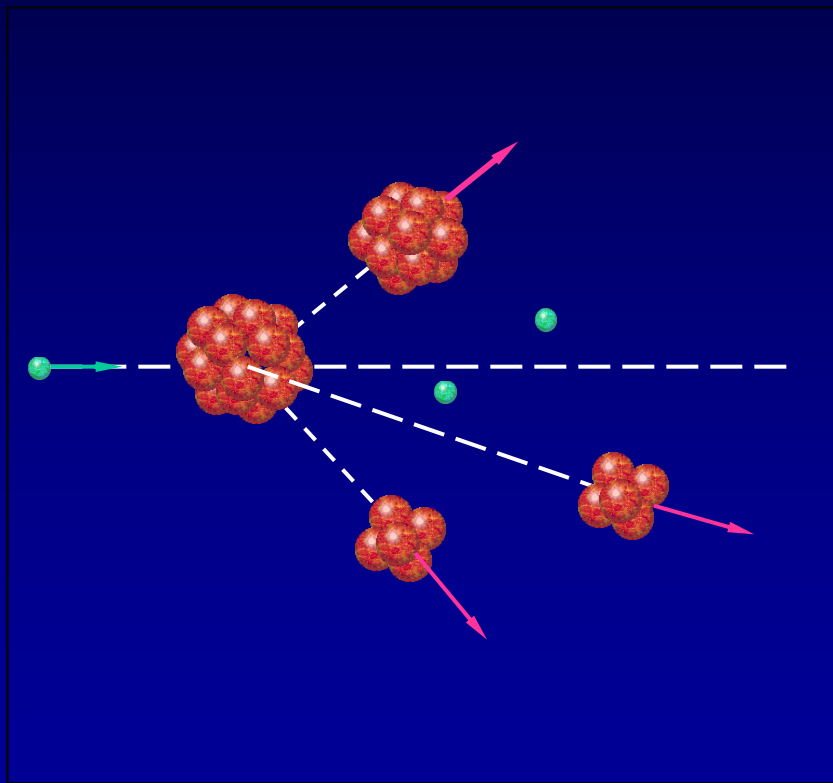
1克铀235全部裂变释放的能量:

$$\Delta E = \frac{6.022 \times 10^{23}}{235} \times 200 \text{ MeV} \approx 8.5 \times 10^{10} \text{ J}$$





我国物理学家**钱三强**、**何泽慧**夫妇通过实验进一步发现了核裂变的三裂变和四裂变现象。对核裂变的理论研究提供了重要信息。



- ▲ 粒子或原子核在核反应前后，系统**总能量不变**，即系统**总的质量保持不变**。但是反应前后的**静能量**会发生变化。
- ▲ 粒子的静止能量反应粒子结合能的大小，它与粒子的静质量成正比，粒子静止质量的亏损，反映了在粒子内部有一部分能量被释放出来。
- ▲ 两个轻原子聚合成一个较重的原子(**核聚变**)或一个重原子分裂成两个较轻的原子(**核裂变**)，在核反应前后，都有静止质量的亏损。伴随质量亏损释放的这部分能量就是**核能**。

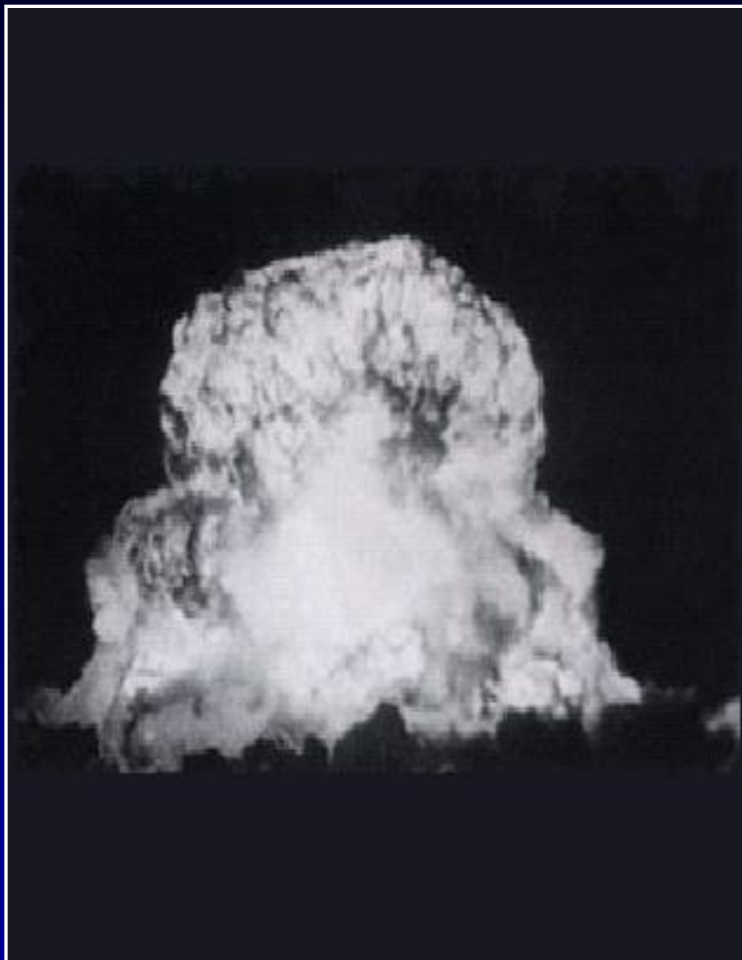
原子弹和核反应堆就是利用放射性原子的核裂变释放出的核能。



大亚湾核电站



秦山核电站

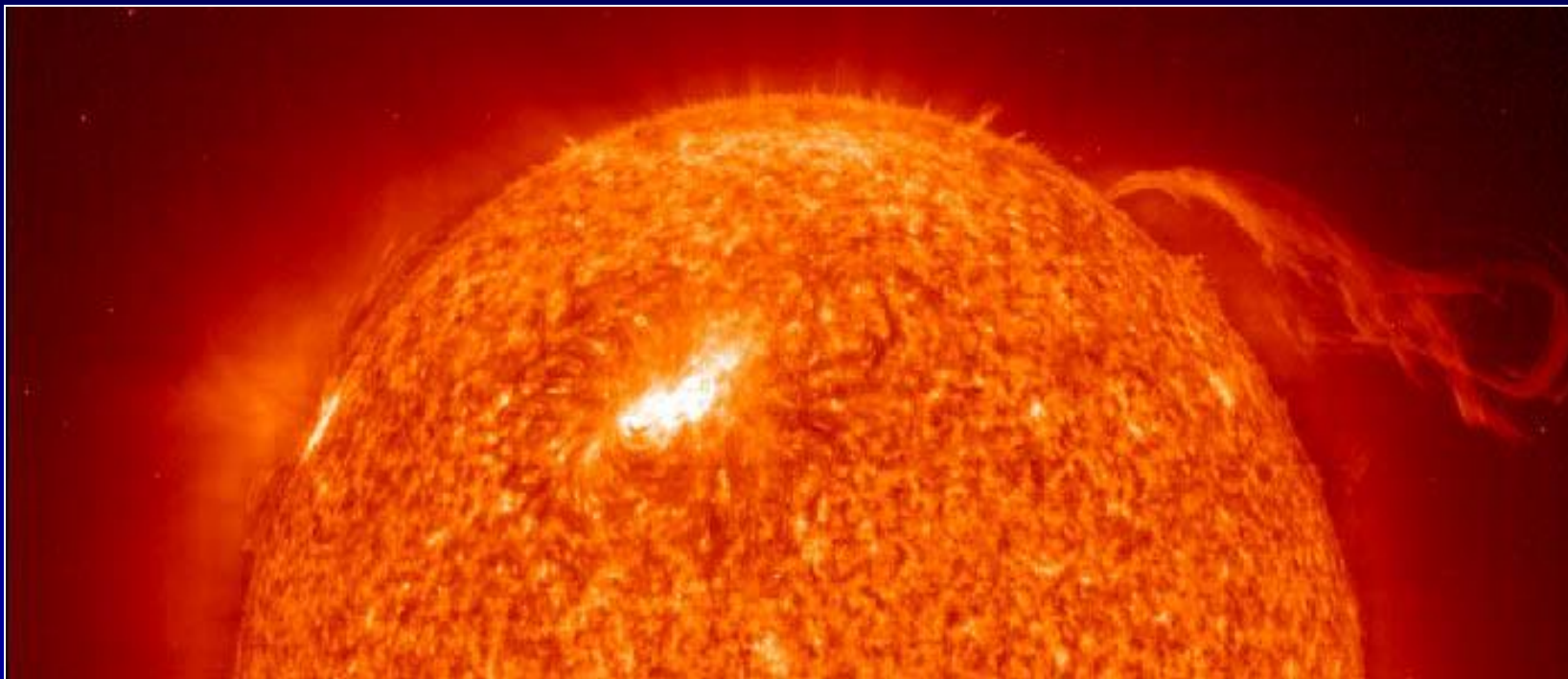


我国第一颗原子弹



我国第一颗氢弹。

氢弹、太阳等恒星上的热核反应、正在研究中的受控核聚变则是利用氘、氚、氦等氢原子的核聚变释放核能。



1kg优质煤完全燃烧释放的能量:  $\Delta E = 2.93 \times 10^7 J$

比较1克铀235完全裂变:  $\Delta E = 8.5 \times 10^{10} J$

相当于3.6吨优质煤!

比较1克氦完全聚变:  $\Delta E = 2.33 \times 10^{12} J$

相当于97.5吨优质煤!

归纳:  $E = mc^2 \quad E_0 = m_0 c^2 \quad \Delta E = \Delta mc^2$

$$E_k = E - E_0 \quad \text{或} \quad E = E_0 + E_k$$

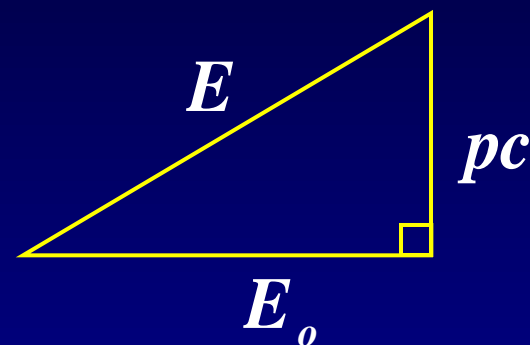


## 四. 动量与能量的关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \longrightarrow v = c \sqrt{1 - E_0^2/E^2}$$

$$p = mv = mc \sqrt{1 - (E_0/E)^2}$$

$$\longrightarrow \boxed{E^2 = E_0^2 + p^2 c^2}$$



例 光子能量为  $E = h\nu$ ，求静质量。

$$\left. \begin{aligned} p &= mc = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \\ m &= \frac{E}{c^2} = \frac{h}{\lambda c} \end{aligned} \right\} E_0^2 = E^2 - p^2 c^2 = \left( \frac{h}{\lambda c} c^2 \right)^2 - \left( \frac{h}{\lambda} c \right)^2 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_0 &= 0 \\ m_0 &= 0 \end{aligned}}$$

## 本章结束语

狭义相对论发展至今，经受了大量实验的考验。  
爱因斯坦的许多预言已经为实验所证实。

尽管狭义相对论的时空观，与我们在日常生活中积累起的时空经验不一致，甚至是相矛盾的，并且我们也无法到高速时空中去切身体会一下，但间接的实验证明狭义相对论的时空观是正确的。

狭义相对论可以包容牛顿的经典力学。