14元

南京邮电大学 2016 / 2017 学年第一学期

《信息论基础》期末试卷（A）

院(系)＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、填空题（25 分，每空 2 分，最后一个 3 分）

1、1948 年，香农发表了题为＿通讯的数学理论＿的论文，奠定了信息论研究的基础。

2、信源编码的最终目的是＿提高信息传输的有效性＿，而信道编码的最终目的是＿提高信息传输的可靠性＿

3、信道输入输出的平均互信息是输入概率分布的＿凹＿函数，是信道转移概率分布的＿凸＿函数。

4、对长度为 N 的信源符号序列进行等长编码，信源符号个数为 q，码符号个数为 r，则码长应满足＿$L \geq N\frac{\log_2 q}{\log_2 r}$＿。

5、信道矩阵 $\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ 代表的信道的信道容量等于＿0.1887 bit/符号＿，达到信道容量的条件是＿信源等概率分布＿

6、设某二进制码{00011, 10110, 01101, 11000, 10010, 10001}，则码的距离是＿2＿，若通过二元对称信道接收码字为 01100，应译码为＿01101＿。

7. 对二元信源分布 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 1-\omega \end{bmatrix}$，对应的失真矩阵 $D=\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$，则 D_{min} 等于＿0＿，D_{max} 等于＿$\begin{cases} \omega\alpha & 0<\omega\leq\frac{1}{2} \\ (1-\omega)\alpha & \frac{1}{2}<\omega\leq 1 \end{cases}$＿。

得分

二、计算、证明题（55 分，第 1,2,3 题 15 分，第 4 题 10 分）

1、有一阶平稳马氏信源 X，符号集是{0, 1, 2}，其中符号转移概率

4

④

为 P(1/0)=P(0/1)=P(0/2)=P(2/0)=P(1/2)=P(2/1)=0.25, 而 P(0/0)=P(1/1)=P(2/2)=0.5, (1) 求这个一阶马尔科夫信源的信息熵; (2) 对此马氏信源的二次扩展信源进行二元 huffman 编码，并求编码后的平均码长和编码效率。

(1) $P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$

$\vec{W}=(W_1, W_2, W_3)$

$\vec{W}P=\vec{W}$

$H(X|S_1)=H(0.5,0.25,0.25)=\frac{3}{2}$

$\vec{W}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$\begin{cases} 0.5W_1+0.25W_2+0.25W_3=W_1 \\ 0.25W_1+0.5W_2+0.25W_3=W_2 \\ 0.25W_1+0.25W_2+0.5W_3=W_3 \\ W_1+W_2+W_3=1 \end{cases}$

$H(X|S_2)=H(X|S_3)=\frac{3}{2}$

$H_\infty=\sum_i W_i H(X|S_i)=\frac{3}{2}$ bit/符号

(2)

x_1x_1	1/6	110
x_1x_2	1/12	1001
x_1x_3	1/12	011
x_2x_1	1/12	010
x_2x_2	1/6	111
x_2x_3	1/12	000
x_3x_1	1/12	001
x_3x_2	1/12	1000
x_3x_3	1/6	101

$\bar{K}=\sum_i P(a_i)K_i=\frac{19}{6}\approx 3.16$

$\frac{\bar{K}}{2}=1.58$

$\eta=\frac{H_\infty}{\bar{K}/2}=94.9\%$

2. 设一离散信道的信道矩阵为$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$，求：(1) 最佳概率分布和信道容量；(2) 当 $P(x_1)=0.7$，$P(x_2)=0.3$ 时，求 I(X;Y) 和 H(X/Y)；(3) 当输入为等概率分布时，试写出译码准则，使平均译码错误率最小，并求该值。

① 易知该信道为准对称DMC信道 $\therefore$ 分为 $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

信道容量 $C=\log 2^2-H(0.7,0.1,0.2)-0.9\log 0.9-0.1\log 0.2$

$=0.2422$ bit/s

当且仅当等概率分布时，为最佳概率分布

即 $P(x_1)=\frac{1}{2}$ $P(x_2)=\frac{1}{2}$

此时 $\begin{bmatrix} 0.35 & 0.05 & 0.1 \\ 0.1 & 0.05 & 0.35 \end{bmatrix}$

$0.1+0.05+0.1=0.25$

②. $P(x_1)=0.7$ $P(x_2)=0.3$ $P(y_j|x_i)=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$

联合概率矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.49 & 0.07 & 0.14 \\ 0.06 & 0.03 & 0.21 \end{bmatrix}$

$\therefore P(y_1)=0.55$ $P(y_2)=0.1$ $P(y_3)=0.35$

$P(x_1|y_1)=\frac{P(x_1)P(y_1|x_1)}{P(y_1)}=\frac{49}{55}$

同理可得 $P(x_1|y_2)=0.7$ $P(x_1|y_3)=0.4$

$P(x_2|y_1)=\frac{6}{55}$ $P(x_2|y_2)=0.3$ $P(x_2|y_3)=0.6$

$H(X|Y)=-\sum_i\sum_j P(x_iy_j)\log P(x_i|y_j)=0.7204$ bit/符号

$=-0.7\log_2 0.7-0.3\log_2 0.3=0.8813$ bit/符号

$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=0.1609$ bit/符号

因 $P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.1 & 0.7\end{bmatrix}$

∵ 输入等概率分布

∴ $p(x_1)=0.5$　$P(x_2)=0.5$

译码准则 $\begin{cases}F(b_1)=a_1=0.7\\ F(b_2)=a_1=0.1\\ F(b_3)=a_2=0.7\end{cases}$

误码率 $P_E=\sum_{ij}p(a_ib_j)-\sum_j(a^*b_j)$

$=\sum_{j,N\neq a^*}p(a_ib_j)$

$=0.5\times(0.2+0.2+0.1)$

$=0.25$

3. 某系统 (8，4) 码，其后 4 位校验位 $v_i, i=0,1,2,3$ 与信息位 $u_i, i=0,1,2,3$ 的关系式：$v_0=u_1+u_2+u_3$，$v_1=u_1+u_2+u_0$，$v_2=u_1+u_0+u_3$，$v_3=u_0+u_2+u_3$

求：该码的生成矩阵和校验矩阵，信息元 (0, 1, 1, 0) 对应的码字是什么？

∵ 系统校验码位 v_i 与信息位 u_i 的关系满足

$\begin{cases}v_0=u_1+u_2+u_3\\ v_1=u_1+u_2+u_0\\ v_2=u_1+u_0+u_3\\ v_3=u_0+u_2+u_3\end{cases}$

∴ 生成矩阵 $G=$ [illegible]

校验矩阵 $H=$ [illegible]

信息元为 (0, 1, 1, 0)

∵ $C=m\cdot G=(0110)$ [illegible]

$=(01100011)$

∴ 信息元 (0, 1, 1, 0) 对应的码元为：(01100011)

4. 证明：H(X) 是输入概率分布 P(x) 的凹函数。

得 分

三、论述题（20分）

1(8 分). 循环冗余码可以作为数据完整性校验的工具嘛？

~~循环冗余码不可以作为数据完整性校验的工具~~

~~试图[illegible]发生时 可以为信息~~

2(12 分). 简要叙述信息论三大定理的内容。

(1) 无失真信源编码定理

码字平均长度不小于符号序列熵时可以做到几乎无失真的编码

(2) 信道编码定理

输入信源熵不超过信道容量C时可以做到无失真编码

(3) 限失真信源编码定理

信息率 $R > R(D)$ 则可以保证失真度不会超过 D

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《信息论基础》试卷（期末）附答案

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								
评卷人								

一、填空题（共 25 分，每空 1 分）

1、连续信源的绝对熵为______________________________。

2、离散无记忆信源在进行无失真变长信源编码时，编码效率最大可以达到____________________。

3、无记忆信源是指____。

4、离散无记忆信源在进行无失真变长信源编码时，码字长度是变化的。根据信源符号的统计特性，对概率大的符号用______码，对概率小的符号用_____码，这样平均码长就可以降低，从而提高__________________。

5、为了提高系统的有效性可以采用________________，为了提高系统的可靠性可以采用__________________。

6、八进制信源的最小熵为________________，最大熵为________________。

7、若连续信源输出信号的平均功率为 1 瓦特，则输出信号幅度的概率密度函数为______________________________时，信源具有最大熵，其值

为____。

8、即时码是指____。

9、无失真信源编码定理指出平均码长的理论极限值为______________，此时编码效率

为____________，编码后的信息传输率为 ____________________________。

10、一个事件发生概率为 0.125，则自信息量为________________________。

11、信源的剩余度主要来自两个方面，一是_________________________________，

二是____。

12、m 阶马尔可夫信源的记忆长度为_____________，信源可以有_______________个

不同的状态。

13、同时扔一对均匀的骰子，当得知“两骰子面朝上点数之和为 2”所获得的信息量为

_______比特，当得知“面朝上点数之和为 8” 所获得的信息量为________ 比特。

14、在下面空格中选择填入数学符号“=，≥，≤，>”或“<”

$$H(XY)\_\_\_\_\_\_H(Y)+H(X|Y)\_\_\_\_\_\_H(Y)+H(X)。$$

二、（5 分）已知信源的概率密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

计算信源的相对熵。

三、(10 分)一个平均功率受限的连续信道，信道带宽为 1MHz，信道噪声为高斯白噪声。

(1) 已知信道上的信号与噪声的平均功率比值为 20，计算该信道的信道容量。

(2) 如果信道上的信号与噪声的平均功率比值降为 10，要达到相同的信道容量，信道带宽应为多少?

(3) 如果信道带宽降为 0.5MHz，要达到相同的信道容量，信道上的信号与噪声的平均功率比值应为多少?

四、（16分）一个离散无记忆信源

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

1） 求 $H(X)$ 和冗余度；

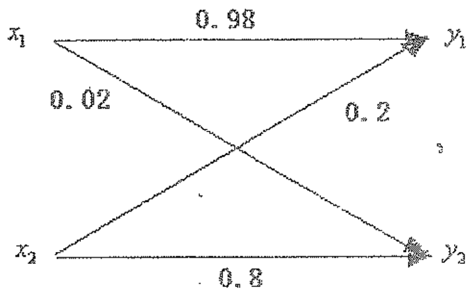
2） 编成Fano码，计算编码效率；

3） 编成Huffman码，计算编码效率

五、（16分）设一个离散无记忆信源的概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

它们通过干扰信道，信道输出端的接收符号集为 $Y = [b_1, b_2]$，已知信道传输概率如下图所示。



试计算：

（1）信源 X 中事件 x_1 和 x_2 分别含有的自信息量；（2分）

（2）收到信息 $y_j(j=1,2)$ 后，获得的关于 x_1 的信息量；（2分）

（3）信源 X 的信息熵；（2分）

（4）条件熵 $H(Y|x_1)$，$H(Y|x_2)$；（2分）

（5）共熵 $H(XY)$、信道疑义度 $H(X|Y)$ 和噪声熵 $H(Y|X)$；（6分）

（6）收到消息 Y 后获得的关于信源 X 的平均信息量。（2分）

9

六、（1 2 分）设某信道的传递矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

（1）若输入符号 $P(x_1)=P(x_2)=1/4$，$P(x_3)=1/2$，求 $H(X|Y)$ 和 $I(X;Y)$。

（2）计算该信道的信道容量，并说明达到信道容量的最佳输入概率分布。

七、（16 分）有一个二元二阶马尔可夫信源，其信源符号集为{0，1}，初始概率大小为 $P(0)=\frac{1}{3}$，$P(1)=\frac{2}{3}$。条件概率定为

$$P(0|00)=P(1|11)=0.8$$

$$P(1|00)=P(0|11)=0.2$$

$$P(0|01)=P(0|10)=P(1|01)=P(1|10)=0.5$$

（1） 画出该信源的状态转移图。

（2） 计算达到稳定后状态的极限概率。

（3） 该马尔可夫信源的极限熵 H_∞。

（4） 计算达到稳定后符号 0 和 1 的概率分布。

《信息论基础》试卷答案

一、填空题（共 25 分，每空 1 分）

1、连续信源的绝对熵为 无穷大。（或 $-\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\lg p(x)dx-\lim\limits_{\Delta\to\infty}\lg\Delta$）

2、离散无记忆信源在进行无失真变长信源编码时，编码效率最大可以达到 1 。

3、无记忆信源是指 信源先后发生的符号彼此统计独立 。

4、离散无记忆信源在进行无失真变长编码时，码字长度是变化的。根据信源符号的统计特性，对概率大的符号用 短 码，对概率小的符号用 长 码，这样平均码长就可以降低，从而提高 有效性(传输速率或编码效率) 。

5、为了提高系统的有效性可以采用 信源编码 ，为了提高系统的可靠

性可以采用___信道编码___________。

6、八进制信源的最小熵为___0___，最大熵为___3bit/符号___________。

7、若连续信源输出信号的平均功率为1瓦特，则输出信号幅度的概率密度函数为_高斯分布（或 $x \sim N(0,1)$ 或 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$）时，信源具有最大熵，其值为 0.6155hart（或 1.625bit 或 $\frac{1}{2}\lg 2\pi e$）。

8、即时码是指___任一码字都不是其它码字的前缀___。

9、无失真信源编码定理指出平均码长的理论极限值为___信源熵（或 $H_r(S)$ 或 $\frac{H(s)}{\lg r}$），此时编码效率为___1___，编码后的信息传输率为___$\lg r$ bit/码元___。

10、一个事件发生的概率为0.125，则自信息量为___3bit/符号___。

11、信源的剩余度主要来自两个方面，一是___信源符号间的相关性___________，二是___信源符号概率分布的不均匀性___。

12、m 阶马尔可夫信源的记忆长度为___m+1___，信源可以有___q^m___________个不同的状态。

13、同时扔出一对均匀的骰子，当得知“两骰子面朝上点数之和为2”所获得的信息量为___lg36=5.17_______比特，当得知“面朝上点数之和为8”所获得的信息

量为 <u>lg36/5=2.85</u> 比特。

14. 在下面空格中选择填入的数学符号“=，≥，≤，>”或“<”

$H(XY)$ <u>=</u> $H(Y)+H(X|Y)$ <u>≤</u> $H(Y)+H(X)$

二、(5 分)已知信源的概率密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & 其他\end{cases}$，计算信源的相对熵。

$$H_c(x)=\int_a^b p(x)\lg\frac{1}{p(x)}dx$$ ------3 分

$$=\lg(b-a)$$ bit/自由度-------2 分

三、(10 分)一个平均功率受限的连续信道，信道带宽为 1MHz，信道噪声为高斯白噪声。

(1)已知信道上的信号与噪声的平均功率比值为 20，计算该信道的信道容量。

(2)如果信道上的信号与噪声的平均功率比值降为 10，要达到相同的信道容量，信道带宽应为多少？

(3)如果信道带宽降为 0.5MHz，要达到相同的信道容量，信道上的信号与噪声的平均功率比值应为多少？

1) $c=10\lg(1+S_{NR})$ ------3 分

$=4.39\times10^{6}$ b/s---1 分

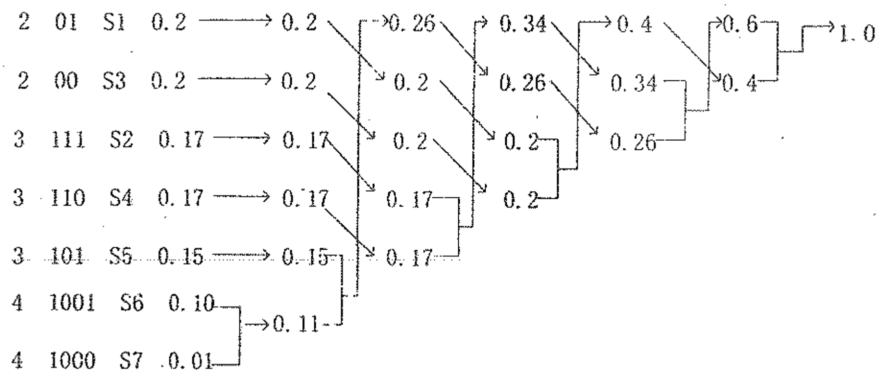
2) $10=\dfrac{c}{\lg(1+S_{NR})}=1.27\times10^{6}$ Hz---3 分

3) $S_{NR}=2^{c/w}-1$=440----3 分

四、(16 分)已知信源共 7 个符号消息，其概率空间为

$$\begin{bmatrix}S\\P(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7\\0.2 & 0.17 & 0.2 & 0.17 & 0.15 & 0.10 & 0.01\end{bmatrix}$$

试用霍夫曼编码法编成二进制变长码。并计算信源熵、平均码长、编码后的信息传输率、编码信息率和编码效率。要求写出详细的编码过程和计算过程。



--------6 分

$\tau=\sum_{i=1}^{7}L_iP_i=2.71$ 位---2 分

$H(s)=\sum_{i=1}^{7}P_i\log_2 P_i=2.61$ bit/符号--------2 分

$R^{'}=\tau\log_2 r=2.71$ bit/码字--------2 分

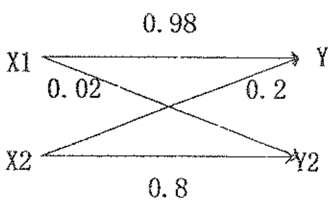
$\eta=\dfrac{H(s)}{\tau\log_2 r}=0.963$ ----------2 分

$R=\dfrac{H(s)}{\tau}=0.963$ bit/码元--------2 分

五、(16 分)设一个离散无记忆信源的概率空间为

$$\begin{bmatrix}X\\P(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

它们通过干扰信道，信道输出端的接收符号集为 $Y=[b_1,b_2]$，已知信源传输概率如下图所示。



试计算：

(1)信源 X 中事件 x_1 和 x_2 分别含有的自信息量；（2分）

(2)收到 $y_j(j=1,2)$ 后，获得的关于 x_1 的信息量；（2分）

(3)信源 X 的信息熵；（2分）

(4)条件熵 $H(Y|x_1)$，$H(Y|x_2)$；（2分）

(5)共商 $H(XY)$、信道疑义度 $H(X|Y)$ 和噪声熵 $H(Y|X)$；（6分）

(6)收到消息 Y 后获得的关于信源 X 的平均信息量。（2分）

P(x, y)	Y_1	Y_2
X_1	0.44	0.01
X_2	0.1	0.4

(1) $I(x_1)=-\log 0.5=1bit$-------1分

$I(x_2)=-\log 0.5=1bit$-------1分

(2) $I(x_1;y_1)=\lg 0.831/0.5$（或 $=\lg 0.98/0.59$）$=0.733$--------1分

$I(x_1;y_2)=\lg 0.024/0.5$（或 $=\lg 0.02/0.41$）$=-4.38$--------1分

(3) $H(x)=H(0.5,0.5)=1bit$/符号-------2分

(4) $H(y|x_1)=H(0.98,0.02)=0.142bit$/符号------1分

$H(y|x_2)=H(0.8,0.2)=0.722bit$/符号------1分

(5) $H(y)=H(0.59,0.41)=0.977$

$H(xy)=H(0.49,0.01,0.1,0.4)=1.432bit$/二符号-------2分

$H(x|y)=H(xy)-H(y)=0.455bit$/符号-------2分

$H(y|x)=H(xy)-H(x)=1.432-1=0.432bit$/符号-------2分

(6) $I(x;y)=H(x)+H(y)-H(xy)=0.545bit$/符号-------2分

六、(12分)设某信道的传递矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(1)若输入符号 $P(x_1)=P(x_2)=1/4$，$P(x_3)=1/2$，求 $H(X|Y)$ 和 $I(X;Y)$。

(2)计算该信道的信道容量，并说明达到信道容量的最佳输入概率分布。

(1)------写出公式 2 分

$$H(X|Y)=-\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log p\left(x_i|y_j\right)$$，$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$

$p\left(y_1\right)=\sum_x p\left(x\right)p\left(y_1|x\right)=1/3$，同理：$p(y_2)=7/24$，$p(y_3)=3/8$

---------计算过程 4 分

$$p\left(x_1|y_1\right)=\frac{p\left(x_1\right)p\left(y_1|x_1\right)}{p\left(y_1\right)}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{1}=\frac{3}{8}$$

同理：$p(x_1|y_2)=2/7$，$p(x_1|y_3)=1/9$

$p(x_2|y_1)=1/8$，$p(x_2|y_2)=3/7$，$p(x_2|y_3)=2/3$

$p(x_3|y_1)=1/2$，$p(x_3|y_2)=2/7$，$p(x_3|y_3)=2/3$

$H(X)=-2\times(1/4)\log(1/4)-(1/2)\log(1/2)=1.5$ bit/symbol

--------最终答案 2 分

$$H(X|Y)=-\sum_X\sum_Y p(x)p\left(y|x\right)\log p\left(x|y\right)\approx 1.383\text{bit/symbol}$$

$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)\approx 0.117$ bit/symbol

(2)对称离散信道

C=logS-H(p 的行矢量)------判断 公式 3 分

=log3-H(1/2, 1/3, 1/6)≈0.126bit/symbol---答案 1 分

输入等概时，达到信道容量。------说明 2 分

七、(16 分)有一个二元二阶马尔可夫信源，其信源符号集为{0, 1}，初始概率大小为 P(0)=1/3，P(1)=2/3。条件概率定为

$$P(0|00)=P(1|11)=0.8$$
$$P(1|00)=P(0|11)=0.2$$
$$P(0|01)=P(0|10)=P(1|01)=P(1|10)=0.5$$

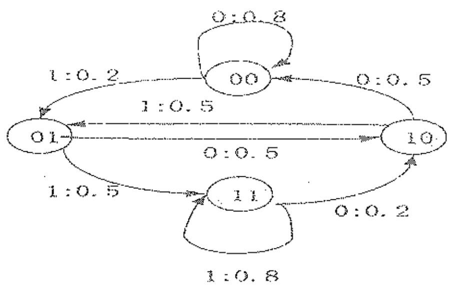
(1)画出该信源的状态转移图。

(2)计算达到稳定状态的极限概率。

(3)该马尔可夫信源的极限熵 H_∞。

(4)计算达到稳定后符号 0 和 1 的概率分布。

解：(1)



----------4 分

(2) $\vec{p}\left(E_i/E_i\right)=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$

$P(E_1)=0.8P(E_1)+0.5P(E_3)$

$P(E_2)=0.2P(E_1)+0.5P(E_3)$

$P(E_3)=0.5P(E_2)+0.2P(E_4)$

$P(E_4)=0.5P(E_2)+0.8P(E_4)$

$P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)=1$

解得：$P(E_1)=P(E_4)=5/14$ $P(E_2)=P(E_3)=2/14$----------4 分

(3) $H_\infty=H_2=-\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}p\left(E_i\right)p\left(E_j/E_i\right)\log p\left(E_j/E_i\right)$=0.801bit/符号-----公式 2 分，答案 2 分

(4) $p\left(Q_k\right)=\sum_{i=1}^{q}p\left(E_i\right)p\left(Q_k/E_i\right)$-----2 分 p(1)=p(2)=1/2--------2 分

19

《信息论基础》试卷（期末）附答案

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得　分										
评卷人										

一、填空题（共 15 分，每空 1 分）

1、当________________________________时，信源与信道达到匹配。

2、若高斯白噪声的平均功率为 6 W，则噪声熵为________________________。如果一个平均功率为 9 W 的连续信源的熵等于该噪声熵，则该连续信源的熵功率为________________________。

3、信源符号的相关程度越大，信源的符号熵越________________，信源的剩余度越________________。

4、离散无记忆信源在进行无失真变长信源编码时，码字长度是变化的。根据信源符号的统计特性，对概率______________的符号用短码，对概率______________的符号用长码，从而减少平均码长，提高编码效率。

8、香农第一编码定理指出平均码长的理论极限值为______________________，此时编码效率为__________________。

4、在下面空格中选择填入数学符号“=，≥，≤，>”或“<”

21

（1） $H_2(X)=\dfrac{H(X_1X_2)}{2}$ ________ $H_3(X)=\dfrac{H(X_1X_2X_3)}{3}$

（2） $H(XY)$________$H(Y)+H(X|Y)$________$H(Y)+H(X)$。

9、有一信源 X，其概率分布为$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$，若对该信源进行１００次扩展，

则每扩展符号的平均信息量是________________。

11、当________________时，信源熵为最大值。8进制信源的最大熵为________________。

二、判断题（正确打√，错误打×）（共5分，每小题1分）

1）噪声功率相同的加性噪声信道中以高斯噪声信道的容量为最大。（　）

2）即时码可以在一个码字后面添上一些码元构成另一个码字。（　）

3）连续信源的熵可正、可负、可为零，（　）

4）平均互信息始终是非负的。（　）

5）信道容量C只与信道的统计特性有关，而与输入信源的概率分布无关。（　）

三、（10 分）计算机终端发出 A、B、C、D、E 五种符号，出现概率分别为 1/16，1/16，1/8，1/4，1/2。通过一条带宽为 18kHz 的信道传输数据，假设信道输出信噪比为 2047，试计算：

1） 香农信道容量；

2） 无误码传输的最高符号速率。

四、（10 分）有一信源发出恒定宽度，但不同幅度的脉冲，幅度值 x 处在 a_1 和 a_2 之间。此信源连至信道，信道接收端接收脉冲的幅度 y 处在 b_1 和 b_2 之间。已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数

$$p(xy)=\frac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$$

试计算 $h(X),h(Y),h(XY)$ 和 $I(X;Y)$

五、（10分）设某信道的传递矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.8\end{bmatrix}$$

计算该信道的信道容量，并说明达到信道容量的最佳输入概率分布。

六、（10分）设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布如下所示：

Y / X	$b_1=0$	$b_2=1$
$a_1=0$	1/3	1/3
$a_2=1$	0	1/3

已知随机变量 $Z=XY$，计算 H（X），H（Z），H（XY），H（X/Z），I（X；Y）

七、（20分）一个离散无记忆信源

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

1） 求 $H(X)$ 和冗余度；（4分）

2） 编成 Fano 码，计算编码效率；（8分）

3） 编成 Huffman 码，计算编码效率。（8分）

25

八、（10 分）设一个离散无记忆信源的概率空间为$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$，它们通过干扰信道，信道矩阵为$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$。信道输出符号集为$Y = [y_1, y_2]$，试计算：

（1）信源 X 的信息熵；（2 分）

（2）收到信息 y_2 后，获得的关于 x_1 的信息量；（2 分）

（3）共熵 $H(XY)$；（2 分）

（4）信道疑义度 $H(X|Y)$；（2 分）

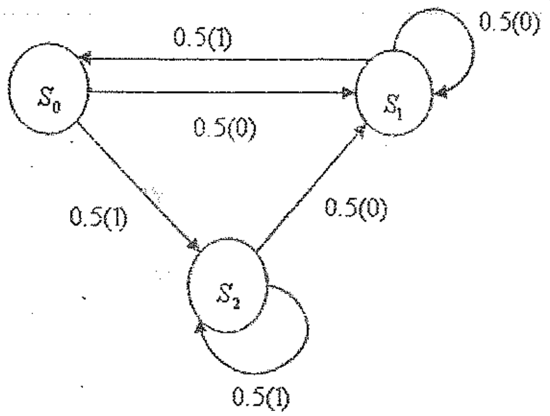
（5）收到消息 Y 后获得的关于信源 X 的平均信息量。（2 分）

27

九、（10 分）有一个二元马尔可夫信源，其状态转移概率如图所示，括号中的数表示转移时发出的符号。试计算

（1） 达到稳定后状态的极限概率。

（2） 该马尔可夫信源的极限熵 H_{∞}。



《信息论基础》试卷答案

《信息论基础》试卷答案

一、填空题（共 15 分，每空 1 分）

1，当（R=C 或信道剩余度为 0）时，信源与信道达到匹配。

2，若高斯白噪声的平均功率为 6W，则噪声熵为（1/2log12πe=3。337bit/自由度）

如果一个平均功率为 9W 的连续信源的熵等于该噪声熵，则该连续信源的熵功率为（6W）

3，信源符号的相关程度越大，信源的符号熵越（小），信源的剩余度越（大）

4，离散无记忆信源在进行无失真变长信源编码时，码字长度是变化的。根据信源符号的统计特性，对概率（大）的符号用短码，对概率（小）的符号用长码，从而减少平均码长，提高编码效率。

8，香农第一编码定理指出平均码长的理论极限值为（信源熵 H(S)/logr 或 $H_r(S)$），

此时编码效率为（1）

9，在下面空格中选择填入数学符号“=，<，>，≤，≥”。

9.1 $H_2(X)=H(X_1X_2)/2$ ≥ $H_3(x)=H(X_1X_2X_3)/3$

9.2 H（XY）= H(Y)+H(X/Y) ≤ H(Y)+H(X)

10，有一信源 X，其概率分布为$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$，若对该信源进行 100 次扩展，其每扩展符号的平均信息量是（175bit/扩展符号）

11 当（概率为独立等概）时，信源熵为最大值，8 进制信源的最大熵为（3bit/符号）

二、判断题（本大题共 5 小题，每小题 1 分，共 5 分）

1）噪声功率相同的加性噪声信道中以高斯噪声信道的容量为最大（×）

2）即时码可以在一个码字后面添上一些码元构成另一个码字（×）

3）连续信源的熵可正可负可零（∨）

4）平均互信息始终是非负的（∨）

5）信道容量 C 只与信道的统计特性有关，而与输入信源概率分布无关（∨）

三、（10 分）计算机终端发出 A.B.C.D.E 五种符号，出现概率分别为 1/16，1/16，1/8，1/4，1/2. 通过一条带宽为 18KHz 的信道传输数据，假设信道输出信噪比为 2047，试计算：

1）香农信道容量；

2）无误码传输的最高符号速率。

（1） $C_t = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)=18\log_2 2048=198kbit/s$

(2) $(R_B)\max=\dfrac{C_i}{H(x)}$,

$$H(x)=H\left(\frac{1}{16},\frac{1}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}$$

$$(R_B)\max=\frac{198k}{15/8}=1.056\times10^5\,Baud$$

四、（10 分）有一信源发出恒定宽度，但不同幅度的脉冲，幅度值 x 处在 a1, a2 之间。此信源连至信道，信道接收端接收脉冲的幅度 y 处在 b1，b2 之间。已知随机变量 x 和 y 的联合概率密度函数 $p(x,y)=1/(a2-a1)(b2-b1)$

试计算 h（x），h（y）h（xy）和 I(x;y)

由 $p(x,y)$ 得 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a_2-a_1} & a_1\le x\le a_2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b_2-b_1},b_2\le x\le b_2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

可见，$p(xy)=p(x)p(y)$，x 和 y 相互独立，且均服从均匀分布，

$h(x)=\log(a_2-a_1)bit/$自由度

$h(y)=\log(b_2-b_1)bit/$自由度

$h(xy)=h(x)+h(y)=\log(a_2-a_1)(b_2-b_1)$

$I(x,y)=0$

五、（10 分）设某信道的传递矩阵为

$$p=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.8\end{bmatrix}$$

计算该信道的信道容量，并说明达到信道容量的最佳输入概率分布，该信道为准对称信道，

（1）两个对称信道矩阵为

$$\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}$$

N1=0. 8+0. 1=0. 9, N2=0. 1；

M1=0. 9, M2=0. 2

$\therefore C=\log2-H(0.8,0.1,0.1)-0.9\log0.9-0.1\log0.2=0.447bit/$符号

最佳输入概率分布为输入等概率，即 $p(x1)=p(x2)=1/2$

六、(10 分) 设随机变量 x 和 y 的联合概率分布如下所示：

x \ y	b1=0	b2=1
a1=0	1/3	1/3
a2=1	0	1/3

已知随机变量 z=xy, 计算 H(X)，H(Z)，H(XY)，H(X/Z)，I (x; y)

1) H(x)=H(1/3, 1/3)=0.9183bit/符号

2)

z	0	1
pz	2/3	1/3

H(z)=H(2/3, 1/3)=0.9183bit/符号

3) H(xy)=H(1/3, 1/3, 0, 1/3)=1.58496 bit/每对符号

4)

xz	P(xz)
00	2/3
01	0
10	0
11	1/3

H(xz)=H(2/3, 1/3)bit/每对符号

H(x|z)=H(xz)-H(z)=0

5)

I(x, y)=H(x)+H(y)-H(xy)

=0.25164bit/符号

七 (20) 一个离散无记忆信源

$$\begin{bmatrix} x \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

1) 求 H(x) 和冗余度；(4 分)

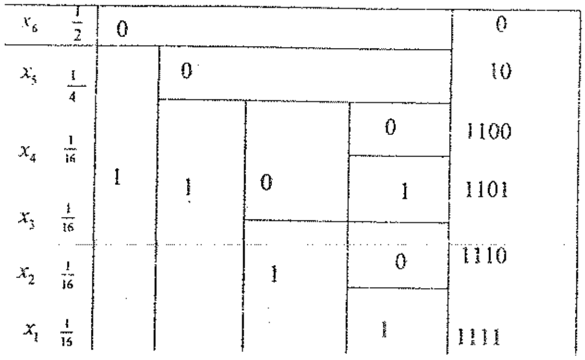
2) 编成 Fano 码，计算编码效率；(8 分)

3) 编成 Huffman 码，计算编码效率。(8 分)

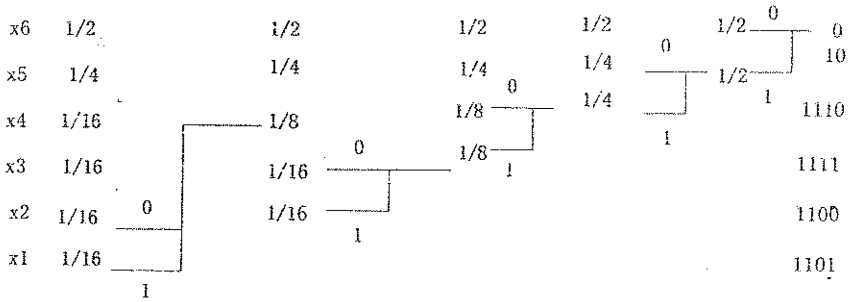
1) H(x)=H(1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/4, 1/2)=2bit

$$v = 1 - \frac{H(x)}{\log 6} = 22.6\ \%$$

2)



3)



$$\overline{L} = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{4} + 4\times 4\times\frac{1}{2} = 2$$

$$\eta = \frac{H(x)}{\overline{L}} = 100\ \%$$

八 （10 分） 设一个离散无记忆信源的概率空间为$\begin{bmatrix} x \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 & x2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$，它们通过干扰信道，信道矩阵为$P=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$。信道输出符号集$Y=[y1 \quad y2]$，试计算：

（1）信源 X 的信息熵；（2 分）

（2）收到信息 y2 后，获得关于 x1 的信息量；（2 分）

（3） 共熵 H(XY)；（2 分）

（4）信道疑义度 H(X|Y)；(2 分)

（5） 收到消息 Y 后获得的关于信源 X 的平均信息量。（2 分）

P(xy)	y1	y2
x1	0.9×0.2	0.1×0.2

x2	0.3×0.8	0.7×0.8

(1) H(x)=H(0.2,0.8)=0.722bit/符号

(2) I(x1;y2)=I(x1)-I(x1|y2)=log1/0.2-log0.58/0.02=-2.536bit/符号

(3) H(xy)=H(0.18,0.02,0.24,0.56)=1.52076bit/每对符号

(4) H(x|y)=H(xy)-H(y)=1.52076-H(y)

H(y)=H(0.42,0.58)=0.98145

H(x|y)=0.53936bit/符号

(5) I(X:Y)=H(x)+H(y)-H(xy)

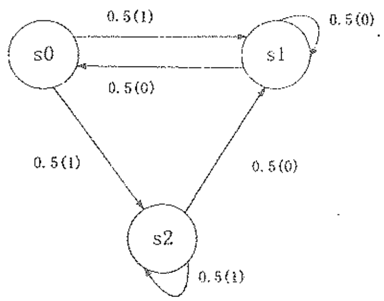
=H(x)-H(x|y)

=0.722-0.5393=0.1827bit/符号

九（10分）有一个二元马尔科夫信源，其状态转移概率如图所示，括号中的数表示转移时发出的符号。试计算

（1）达到稳定后状态的极限概率

（2）该马尔科夫信源的极限熵 H_∞。



$$(1)\quad p=\begin{array}{c|ccc} & s0 & s1 & s2 \\ \hline s0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ s1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ s2 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}$$

P(s0)=0.5P(s1)

0.5(p(s0)+p(s1)+p(s2))=p(s1)

0.5(p(s0)+p(s2))=p(s2)

P(s0)+p(s1)+p(s2)=1

得 p(s0)=0.25;

P(s1)=0.5;

P(s2)=0.25;

(2)

H_∞=1/4H(0.5,0.5)+1/2H(0.5,0.5)+1/4H(0.5,0.5)

1/4+1/2+1/4=1bit/符号

《信息论基础》试卷（期末）

一、填空题（本大题共10小空，每小空1分，共20分）

1.按信源发出符号所对应的随机变量之间的无统计依赖关系，可将离散信源分为有记忆信源和无记忆信源两大类。

2.一个八进制信源的最大熵为3bit/符号

3.有一信源 X，其概率分布为 $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$；其信源剩余度为 94.64%；若对该信源进行十次扩展，则每十个符号的平均信息量是 15bit。

4.若一连续消息通过放大器，该放大器输出的最大瞬间电压为 b，最小瞬时电压为 a。若消息从放大器中输出，则该信源的绝对熵是∞；其能在每个自由度熵的最大熵是 log（b-a）bit/自由度；若放大器的最高频率为 F，则单位时间内输出的最大信息量是 2Flog（b-a）bit/s.

5. 若某一 信源 X，其平均功率受限为 16w，其概率密度函数是高斯分布时，差熵的最大值为 $\frac{1}{2}\log 32\pi e$；与其熵相等的非高斯分布信源的功率为 $\geq 16w$

6、信源编码的主要目的是提高有效性，信道编码的主要目的是提高可靠性。

7、无失真信源编码的平均码长最小理论极限制为信源熵（或 H(S)/logr= $H_r(S)$）。

8、当 R=C 或（信道剩余度为 0）时，信源与信道达到匹配。

9、根据是否允许失真，信源编码可分为无失真信源编码和限失真信源编码。

10、在下面空格中选择填入数学符号“=,≥,≤,〉”或“〈”

（1）当 X 和 Y 相互独立时，H（XY）=H(X)+H(X/Y)。

（2）假设信道输入用 X 表示，信道输出用 Y 表示。在无噪有损信道中，H(X/Y)≥ 0, H(Y/X)=0, I(X;Y)<H(X)。

二、掷两粒骰子，各面出现的概率都是 1/6，计算信息量：

1. 当点数和为 3 时，该消息包含的信息量是多少?

2. 当点数和为 7 是，该消息包含的信息量是多少?

3. 两个点数中没有一个是 1 的自信息是多少?

解：1. P（“点数和为 3”）=P（1,2）+ P（1,2）=1/36+1/36=1/18

则该消息包含的信息量是：I=-logP（“点数和为 3”）=log18=4.17bit

2. P（“点数和为 7”）=P（1,6）+ P（6,1）+ P（5,2）+ P（2,5）+ P（3,4）+ P（4,3）=1/36 ×6=1/6

则该消息包含的信息量是：I=-logP（“点数和为 7”）=log6=2.585bit

3. P（“两个点数没有一个是 1”）=1-P（“两个点数中至少有一个是 1”）

=1-P(1, iorl, jori, 1)=1-(1/36+5/36+5/36)=25/36

则该消息包含的信息量是：I=-logP（“两个点数中没有一个是 1”）=log25/36=0.53bit

三、设 X、Y 是两个相互统计独立的二元随机变量，其取-1 或 1 的概率相等。定义另一个二元随机变量 Z，取 Z=YX（一般乘积）。试计算：

1. H（Y）、H（Z）;

2. H（XY）、H（YZ）;

3. I（X;Y）、I（Y;Z）;

解：1. $H(Y)=-\sum_{i=1}^{2}P(y_i)\log P(y_i)=-\left[\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right]$=1bit/符号

∵ Z=YX 而且 X 和 Y 相互独立

$$\therefore\ P(Z_1=1)=P(Y=1)\cdot P(X=1)+P(Y=-1)\cdot P(X=-1)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}$$

$$P(Z_2=-1)=P(Y=1)\cdot P(X=-1)+P(Y=-1)\cdot P(X=1)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}$$

故 $H(Z)=-\sum_{i=1}^{2}P(z_i)\log P(z_i)$=1bit/符号

2. 从上式可以看出:Y 与 X 的联合概率分布为:

P(Y,Z)	Y=1	Y=-1
Z=1	0.25	0.25
Z=-1	0.25	0.25

H(YZ)=H(X)+H(Y)=1+1=2bit/符号

3. ∵X 与 Y 相互独立，故 H(X|Y)=H(X)=1bit/符号

∴I（X;Y）=H(X)-H(X|Y)=1-1=0bit/符号

I(Y;Z)=H(Y)-H(Y|Z)=H(Y)-[H(YZ)-H(Z)]=0 bit/符号

四、如图所示为一个三状态马尔科夫信源的转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

1. 绘制状态转移图；
2. 求该马尔科夫信源的稳态分布；
3. 求极限熵；

解：1.状态转移图如右图

2.由公式 $p(E_j)=\sum_{i=1}^{3}P(E_i)\ P(E_j|E_i)$ ，可得其三个状态的稳态概率为：

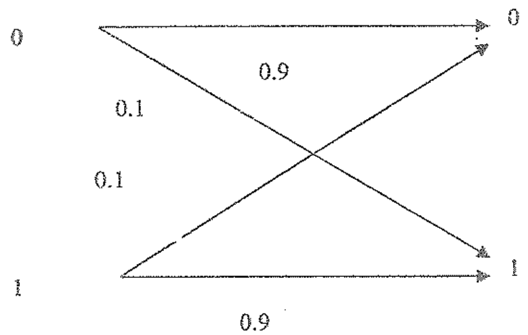
$$\begin{cases} P(E_1)=\frac{1}{2}P(E_1)+\frac{1}{2}P(E_2)+\frac{1}{4}P(E_3) \\ P(E_2)=\frac{1}{2}P(E_2)+\frac{1}{2}P(E_3) \\ P(E_3)=\frac{1}{2}P(E_1)+\frac{1}{4}P(E_3) \\ P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(E_1)=\frac{3}{7} \\ P(E_2)=\frac{2}{7} \\ P(E_3)=\frac{2}{7} \end{cases}$$

3. 其极限熵:

$$H_\infty = -\sum_{i=1}^{3} P(E_i)\ H(X|E_i) = \frac{3}{7}\times H(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) + \frac{2}{7}\times H(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) + \frac{2}{7}\times H(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$$

$$= \frac{3}{7}\times 1 + \frac{2}{7}\times 1 + \frac{2}{7}\times 1.5 = \frac{8}{7}\text{bit/符号}$$

五、在干扰离散对称信道上传输符号 1 和 0，已知 P（0）=1/4, P(1)=3/4, 试求：



1. 该信道的转移概率矩阵 P
2. 信道疑义度 H（X|Y）
3. 该信道的信道容量以及其输入概率分布

解：1. 该转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

2. 根据 P（XY）=P（Y|X）·P（X），可得联合概率

P（XY）	Y	Y
X=0	9/40	1/40
X=1	3/40	27/40
P(Y=i)	12/40	28/40

由 P（X|Y）=P(X|Y)/P(Y)可得

P(X|Y)	Y=0	Y=1
X=0	3/4	1/28
X=1	1/4	27/28

H(X|Y)=$-\sum_{i,j} P(x_i y_j)\log P(x_i|y_j)$ =0.09+0.12+0.15+0.035=0.4bit/符号

3. 该信道是对称信道，其容量为：

C=logs-H=log2-H（0.9,0.1）=1-0.469=0.531bit/符号

这时，输入符号服从等概率分布，即 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

六、某信道的转移矩阵 $P=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

试求：该信道的信道容量及其最佳输入概率分布。

解：该信道是准对称信道，分解为两个互不相交的子信道矩阵

$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ 这里 $\begin{matrix} N_1=0.9 & N_2=0.1 \\ M_1=0.9 & M_2=0.1 \end{matrix}$

∴C=logr-H(P 的行矢量)

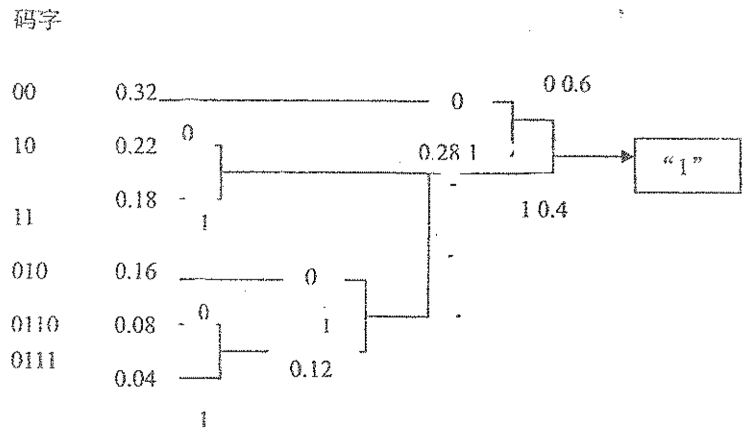
$$-\sum_{k=1}^{2} N_K \log M_K = 1-H(0.6,\ 0.3,\ 0.1)-0.9\times\log 0.9\text{-}0.1\times\log 0.1$$

=0.174bit/符号

这时，输入端符号服从等概率分布，即$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

七、信源符号 X 有六种字母，概率为 0.32, 0.22, 0.18, 0.16, 0.08, 0.04。用赫夫曼编码法编成二进制变长码，写出编码过程并计算其平均码长、编码后的信息传输率和编码效率。

解：



该信源在编码之前的信源熵为：

$$H(S)=-\sum_{i=1}^{6}P(x_i)\ \log P(x_i)=0.526+0.481+0.445+0.423+0.292+0.186$$

$=2.353$bit/符号

编码后的平均码长：

$$\overline{L}=(0.32+0.22+0.18)\times2+0.16\times3+(0.08+0.04)\times4=2.4 \text{ 码元/信源符号}$$

编码后的信息传输率为：

$$R=\frac{H(S)}{\overline{L}}=\frac{2.353}{2.4}=0.98\text{bit/码元}$$

编码效率为：$\eta = \frac{R}{R_{\max}} = \frac{H(S)}{\bar{L}\log r} = 0.98$

八、设在平均功率受限的高斯可加波形信道中，信道带宽为 3KHz，又设信噪比为 10

1. 试计算该信道传达的最大信息率（单位时间）;

2. 若功率信噪比降为 5dB，要达到相同的最大信息传输率，信道带宽是多少？

解：1. $\because SNR = 10\mathrm{dB}$ $\therefore SNR = 10$

故：该信道传送的最大信息速率为：

$$C_t = W\log(1+\mathrm{SNR}) = 3\times10^3\times\log(11)$$
$$= 1.04\times10^4 \mathrm{bit/s}$$

2. 若 SNR=5dB，则 SNR=$\sqrt{10}$=3.162，在相同C_t情况下

$1.04\times10^4 = W\log(1+\mathrm{SNR}) = W\log 4.162$

$\Rightarrow W = 5.04\times10^3\,\mathrm{Hz}$