

南京邮电大学 2016 / 2017 学年第一学期

《数字信号处理 B》期末复习提纲 (A)

本复习提纲共 35 页; 考试时间 110 分钟;

____ 班级 ____ 学号 ____ 姓名 ____

一、离散时间信号与系统、信号的采样和重建。

(1) 考点

1. 线性卷积

例: 计算下列卷积

$$(1) x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n+2) - \delta(n-4), \quad x_2(n) = 2\delta(n-1) + \delta(n-3)$$

方法一 列表运算过程

$$\begin{array}{ccccccc}
 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & 2 & 0 & 1 \\
 \hline
 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
 \hline
 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1
 \end{array}$$

$$\therefore y(n) = \{4, 0, 4, 0, 1, 0, -2, 0, 1\} \quad -1 \leq n \leq 7$$

或者 求和展开运算

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) = x_1(0) x_2(n) + x_1(-2) x_2(n+2) + x_1(4) x_2(n-2) \\
 &= 4\delta(n-1) + \delta(n-3) + 4\delta(n+1) - 2\delta(n-5) - \delta(n-7)
 \end{aligned}$$

或者 画图求解 (略)

$$(2) x_1(n) = 0.5^n u(n), \quad x_2(n) = R_5(n)$$

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x_1(n) * x_2(n) = 0.5^n u(n) + 0.5^{n-1} u(n-1) + 0.5^{n-2} u(n-2) + 0.5^{n-3} u(n-3) + 0.5^{n-4} u(n-4) \\
 &= \begin{cases} 2 - 0.5^n & 0 \leq n \leq 4 \\ 0.5^{n-4} (2 - 0.5^{n-4}) & n \geq 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(3) x_1(n) = 2^n R_4(n), \quad x_2(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$$

$$y(n) = 2^n R_4(n) * [\delta(n) - \delta(n-2)]$$

$$= [\delta(n) - \delta(n-2)] + 2[\delta(n-1) - \delta(n-3)] + 4[\delta(n-2) - \delta(n-4)] + 8[\delta(n-3) - \delta(n-5)]$$

$$= \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 6\delta(n-3) - 4\delta(n-4) - 8\delta(n-5)$$

2. 判断序列的因果性和稳定性

稳定系统：对于每一个有界输入产生一个有界输出的系统为稳定系统。当且仅

当 $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$ (充要条件) 时，该线性时不变系统是稳定的。

因果系统：系统的输出 $y(n)$ 只取决于当前以及过去的输入，即 $x(n)$, $x(n-1)$,

$x(n-2)$ ；因果系统的充要条件： $h(n) \equiv 0$ $n < 0$ 。

例：确定下列系统的因果性与稳定性

$$(4) h(n) = 0.5^n u(n)$$

解： $\because \sum_{n=0}^{\infty} |2^{-n}| = 1 + \frac{1}{2} + \dots = 2$ ，且 $n < 0$ ， $u(n) = 0$ ，所以为因果稳定。

$$(5) h(n) = \frac{1}{n!} u(n)$$

解： $\because \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} \right| = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2 + 1 = 3$ ，且 $n < 0$ ，

$u(n) = 0$ ，所以为因果稳定。

$$(6) h(n) = 2^n R_N(n)$$

解： $\because \sum_{n=0}^{\infty} |2^n| = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{N-1} - 2^N - 1 < \infty$ ，且 $n < 0$ ， $R_N(n) = 0$ ，所以为

因果稳定。

$$(7) h(n) = 2^n u(n)$$

解： $\because \sum_{n=0}^{\infty} |2^n| = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{N-1} - 2^N - 1 < \infty$ ，且 $n < 0$ ， $u(n) = 0$ ，所以为因

果稳定。

$$(8) h(n) = 5^n u(-n)$$

解: $\because \sum_{n=0}^{\infty} |5^{-n}| = 1 + \frac{1}{5} + \dots = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, 且 $n < 0$, $u(-n) \neq 0$, 所以为非因果稳定。

3. 判断序列是否为周期序列

对于任意整数 n , 若 $x(n) = x(n + rN)$, r, N 为整数, 则序列 $x(n)$ 是周期序列, 周期为 N 。

注意: 模拟周期信号的采样, 不一定是周期序列。

例 1: 试画出正弦序列 $\sin\left(\frac{16}{5}\pi n\right)$ 的波形, 它是不是一个周期序列? 若是, 其周期长度是多少?

解: 对于正弦序列 $x(n) = \sin(n\omega_0)$, 判断周期性: $\sin(n\omega_0) = \sin[\omega_0(n + N)]$,

只有当 $\omega_0 = 2\pi m$ 时, 或者 $N = \frac{2\pi}{\omega_0} m$ 为整数时, $\sin(n\omega_0)$ 才是周期序列。

题中 $\omega_0 = \frac{16\pi}{5}$, $N = \frac{2\pi}{\omega_0} m = \frac{5m}{8}$, 取 $m = 8$, 得 $N = 5$ 。

(2) 其他问题

1. 常见序列的 Z 变换: $\delta(n) \leftrightarrow 1$, $\delta(n-1) \leftrightarrow z^{-1}$, $u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$,

$$R_N(n) \leftrightarrow \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad |z| > 0.$$

2. 奈奎斯特采样定理: 要使实信号采样后能够不失真还原, 采样频率必须大于信号最高频率的两倍, 即 $\Omega_s \geq 2\Omega_{\max}$; 要不出出现频谱混叠现象即失真。

$$\begin{cases} f_s \geq 2f_{\max} \\ f_{\max} \leq \frac{1}{2}f_s \end{cases}$$

3. 描述线性时不变离散系统的方法: 差分方程、单位抽样响应、系统函数。

④ Z 变换与 DTFT 的关系: 当 $z = e^{j\omega}$ 时, Z 变换与 DTFT 相等, 即采样序列单

位圆上的Z变换就等于该采样序列的DTFT。序列的傅氏变换实质上就是单位圆上的Z变换，傅氏变换不存在不等于Z变换不存在。

5. DFT与DTFT的关系: DFT是对DTFT的采样结果, 其采样间隔为 $\omega_N = \frac{2\pi}{N}$,
即
$$\begin{cases} X(k) = X(e^{j\omega_N k}) \\ \omega_N = \frac{2\pi}{N} \end{cases} \quad \cdot \quad z = e^{sT} \rightarrow z = e^{j\omega} \rightarrow \text{DTFT} \rightarrow \text{DFT}.$$

6. 理想采样信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓, 重复周期为 Ω_s (采样频率), 频域的抽样对应着时域的周期延拓。

7. Z平面上的幅角 ω 称为数字角频率, 数字角频率 ω 是模拟角频率 Ω 对抽样频率 f_s 的归一化值, $\omega = \Omega / f_s$ 。

8. 系统函数判断系统的因果性、稳定性: 对于因果稳定系统, 系统函数的全部极点必须在单位圆内。

因果系统: 单位脉冲响应 $h(n)$ 是因果序列的系统, 其系统函数 $H(z)$ 的收敛域包括 ∞ 点, 即 $R_{\infty} \leq |z| \leq \infty$ 。

稳定系统: 单位脉冲响应 $h(n)$ 满足绝对可和的系统即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$, 稳定系统的 $H(z)$ 必在单位圆上收敛, 即 $r < |z|$, $0 < r < 1$ 。

9. 常见序列:

(1) 单位脉冲序列: $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

(2) 单位阶跃序列: $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ 或 $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

(3) 矩形序列: $R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n < 0, n \geq N \end{cases}$

二、离散傅里叶变换及其快速算法。

(1) 考点

1. 离散傅里叶变换 (DFT)

(1) 离散傅里叶级数: 一个周期为 N 的周期序列, 即 $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$, k 为

任意整数, N 为周期; 连续周期信号变换 $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_s)e^{jk\Omega_s t}$,

$\Omega_s = 2\pi/T_s$ 。将周期序列展成离散傅里叶级数时, 只需取 $k=0$ 到 $N-1$ 这 N 个

独立的谐波分量 ($\tilde{X}(k)$ 周期为 N), 所以一个周期序列的离散傅里叶级数只需

包含这 N 个复指数 $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j(2\pi/N)kn}$, 利用正弦序列的周期性可求解

系数 $\tilde{X}(k)$, 即 $\tilde{X}(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j(2\pi/N)(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j(2\pi/N)kn} = \tilde{X}(k)$,

即时域上周期序列的离散傅里叶级数在频域上仍是一个周期序列。

$\tilde{X}(k) \leftrightarrow \tilde{x}(n)$ 是一个周期序列的离散傅里叶级数 (DFS) 变换对, 这种对称关

系可表为:
$$\begin{cases} \tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j(2\pi/N)kn} \\ \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j(2\pi/N)kn} \end{cases}; \text{ 考虑}$$

$X(e^{j\omega}) = DTFT[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\omega n}$, 并记 $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ (旋转因子), 则 DFS

变换对可写为:
$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{kn} = DFS[\tilde{x}(n)] \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-kn} = IDFS[\tilde{X}(k)] \end{cases}$$

*例 1: 设 $x(n) = R_3(n)$, $x_1(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+8r)$, 求 $\tilde{X}_1(k)$, 并作图表示 $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{X}_1(k)$ 。

解: $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^2 \tilde{x}(n)e^{-j(2\pi/8)nk} = \sum_{n=0}^2 \tilde{x}(n)e^{-j(\pi/4)nk} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k}$ 。

$\tilde{X}(0) = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\tilde{X}(1) = 1 + e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{2}} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 - j) = 1.7071 - 1.7071j$$

$$\tilde{X}(2) = 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi} = 1 - j + (-1) = -j$$

$$\tilde{X}(3) = 1 + e^{-j\frac{3\pi}{4}} + e^{-j\frac{3\pi}{2}} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + j) = 0.2929 + 0.2929j$$

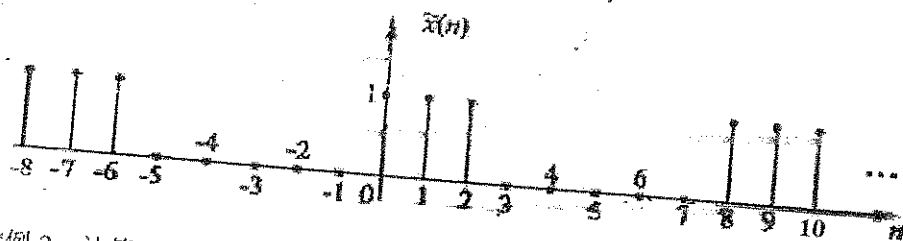
$$\tilde{X}(4) = 1 + e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$\tilde{X}(5) = 1 + e^{-j\frac{5\pi}{4}} + e^{-j\frac{5\pi}{2}} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 - j) = 0.2929 - 0.2929j$$

$$\tilde{X}(6) = 1 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi} = 1 + j - 1 = j$$

$$\tilde{X}(7) = 1 + e^{-j\frac{7\pi}{4}} + e^{-j\frac{7\pi}{2}} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + j) = 1.7071 + 1.7071j$$

$\tilde{X}(n)$ 如图所示:



*例 2: 计算下列有限长序列 $x(n)$ 的 DFT, 假设长度为 N 。

(1) $x(n) = \delta(n)$

解: $x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \therefore X(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(2) $x(n) = \delta(n - n_0), 0 < n_0 < N$

解: $x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n=n_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \therefore X(k) = \begin{cases} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$(3) x(n) = a^n, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\text{解: } \therefore X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$(4) x(n) = nR_N(n)$$

$$\text{解: 令 } x_1(n) = R_N(n) \leftrightarrow X_1(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$x(n) = n \cdot x_1(n) \leftrightarrow X(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \right)$$

$$X(z) = -z \frac{Nz^{-N-1}(1-z^{-1}) - z^{-2}(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Nz^{-N}(1-z^{-1}) - z^{-1}(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})^2}$$

$$X(k) = X(z)_{z=W_N^k} = \frac{NW_N^{kN}(1-W_N^k) - W_N^k(1-W_N^{kN})}{(1-W_N^k)^2} = \frac{N}{1-W_N^k} = \frac{N}{W_N^k - 1} \quad (k \neq 0)$$

$$\therefore W_N^{kN} = 1, W_N^{kN} - 1 = 0, X(k)_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} n = 1+2+3+4+\dots+(N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$$

2. 循环卷积

(1) 循环卷积过程

1. 由有限长序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 构造周期序列:

$$2. \text{计算周期卷积 } \tilde{f}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m);$$

3. 卷积结果取主值 $f(n) = \tilde{f}(n)R_N(n)$ 。

$$\text{例 1: 设 } x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad y(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad \tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+8r),$$

$$\tilde{y}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y(n+8r), \text{ 求 } \tilde{x}(n)、\tilde{y}(n) \text{ 的周期卷积序列 } \tilde{f}(n), \text{ 以及 } \tilde{F}(k)。$$

$$\text{解: } x(n) = [1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0], \quad y(n) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \quad f(n) = x(n) * y(n) = y(n) * x(n),$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
 \hline
 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

计算出对任意 n , $\tilde{f}(n)=4$.

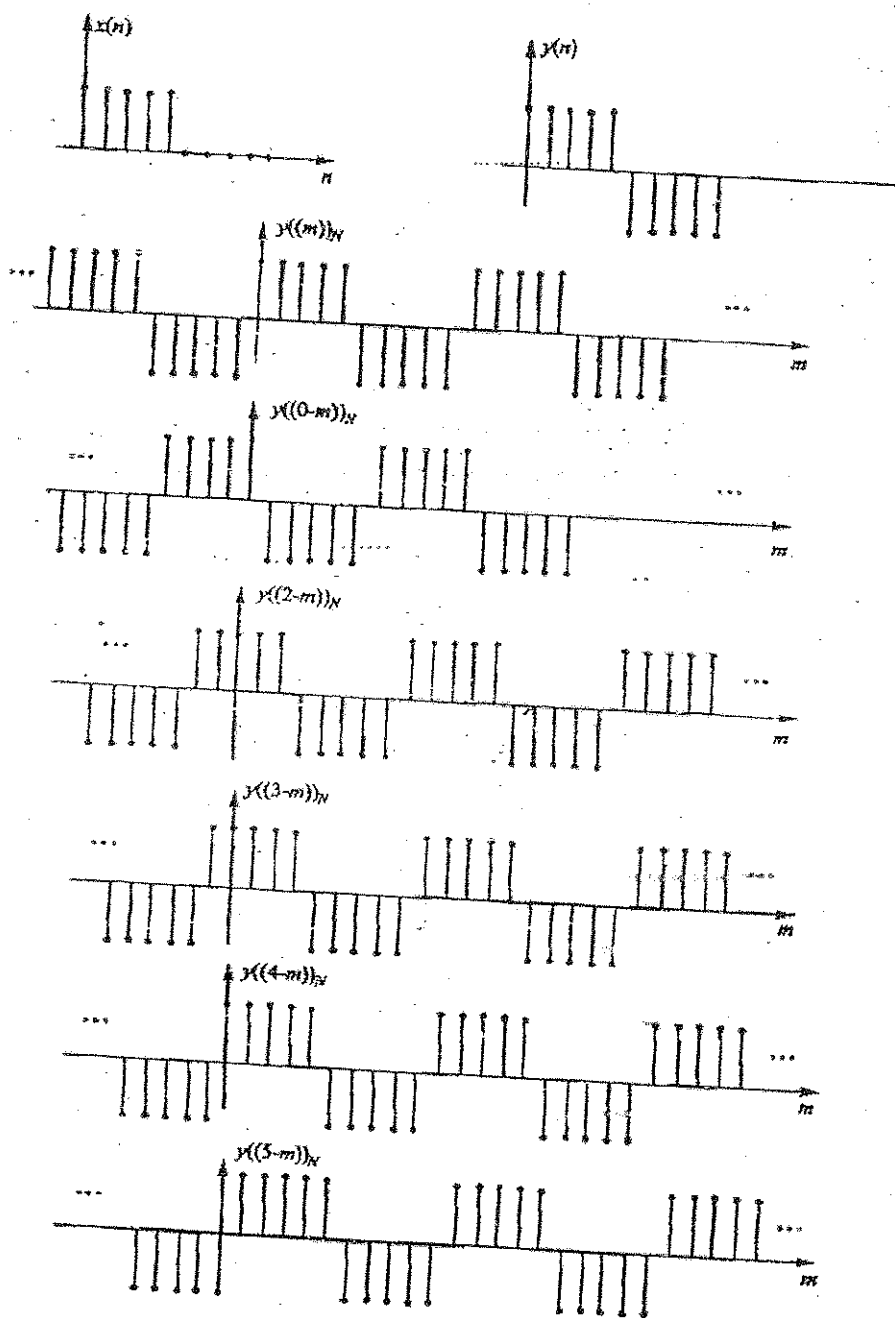
$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^7 \tilde{f}(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \sum_{n=0}^7 \tilde{f}(n) e^{-j\frac{\pi}{4}nk} \\
 &= 4 \left(1 + e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}nk} + e^{-j\frac{3\pi}{4}k} + e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{5\pi}{4}k} + e^{-j\frac{3\pi}{2}k} + e^{-j\frac{7\pi}{4}k} \right)
 \end{aligned}$$

由复数的性质得 $\tilde{F}(k) = \begin{cases} 32 & k=8r, r \text{ 为整数} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

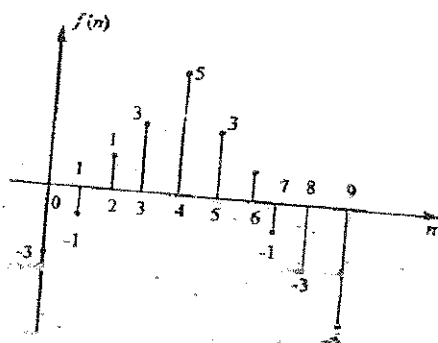
例 2: 有限长 $N=10$ 的两序列, $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$, $y(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ -1 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$,

作图表示 $x(n)$, $y(n)$ 及 $f(n) = x(n) \odot y(n)$ 。

解:



$$f(n) = \begin{cases} -3 & n=0,8 \\ -1 & n=1,7 \\ 1 & n=2,6 \\ 3 & n=3,5 \\ 5 & n=4 \\ -5 & n=9 \end{cases}, f(n) \text{ 如图所示:}$$



(3) 快速傅里叶变换 (FFT)

1. 快速傅里叶变换: 快速傅里叶变换 (FFT) 是计算离散傅里叶变换 (DFT) 的快速算法, 定义为: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, k=0,1,\dots,N-1$ 。

2. (填空题) 所有算法均应用了 DFT 运算的两个基本特点: 即利用系数 W_N^{kn} 的

对称特性 ($W_N^{k(N-n)} = (W_N^{kn})^*$) 和周期特性 ($W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$)。

3. FFT 算法分类: 按时间抽取 (DIT) 和按频率抽取 (DIF)。

0 1 2 3 4 5 6 7

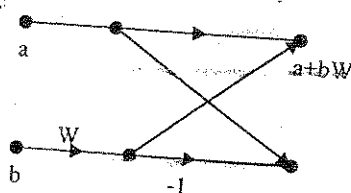
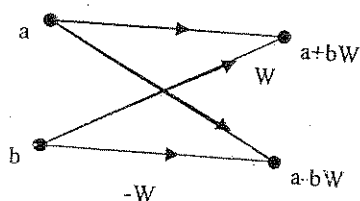
↓

4. 奇偶分组: 0 2 4 6 1 3 5 7。

↓

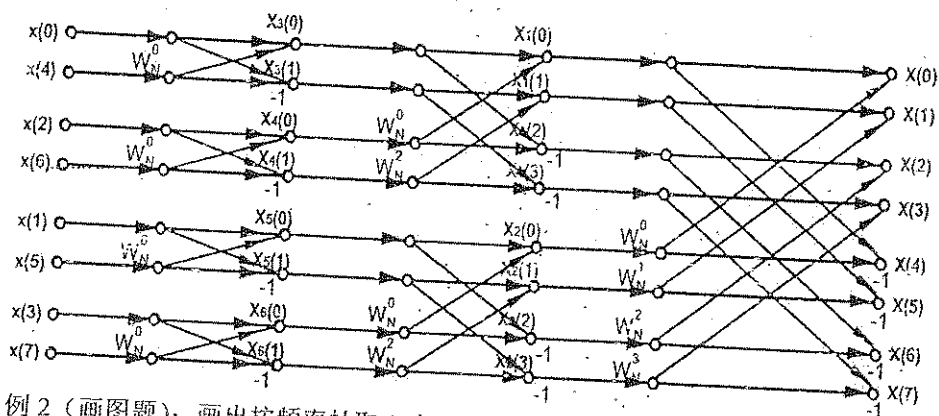
0 4 2 6 1 5 3 7

5. 蝶形信号流图:



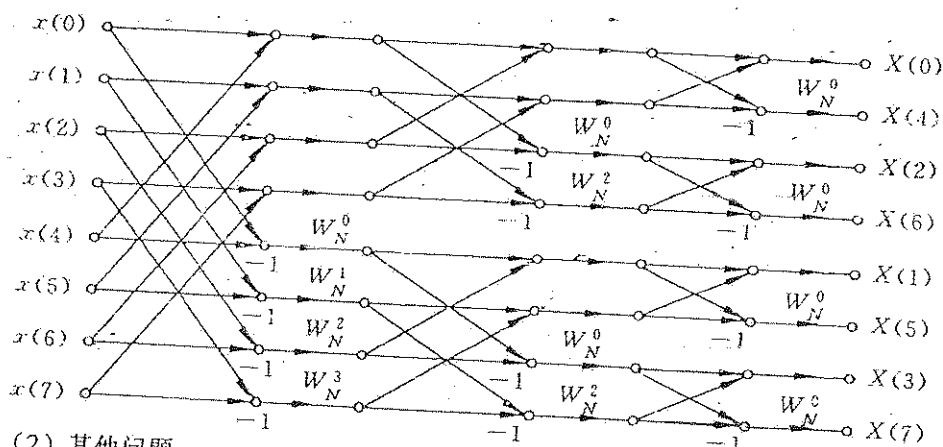
例 1 (画图题): 画出按时间抽取 8 点 FFT。

解:



例 2 (画图题): 画出按频率抽取 8 点 FFT。

解:



(2) 其他问题

1. 周期卷积性质: 同周期序列的时域卷积等于频域的乘积, 同周期序列的时域

乘积等于频域的卷积, 即 $\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \xrightarrow{DFS} \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$,

$$\tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n) \xrightarrow{DFS} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l).$$

2. 周期卷积与线性卷积的区别: (1) 线性卷积在无穷区间求和, 周期卷积在一个主值周期内求和; (2) 两个不同长度的序列可以进行线性卷积, 只有同周期的两个序列才能进行周期卷积, 且周期不变。

3. $X(k)$ 是序列在 Z 变换单位圆上等距离的采样值。

4. $x(n)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 的关系: $\tilde{x}(n)$ 是 $x(n)$ 的周期延拓, $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的“主值序列”。

5. DFT 点数要求: (1) 必须满足频域的采样点 $N \geq M$, M 为有限长序列长度 (频率采样点不少于序列长度); (2) DFT 点数越多, 样值点越密, 离散谱越能体现真值形状。

6. 三种卷积比较: (1) 周期卷积是周期序列、圆周卷积是有限长序列、线性卷积是有限或无限长序列; (2) 周期卷积是同周期序列、圆周卷积是有限长序列、线性卷积是 $(N+M-1)$ 长序列。结论: 用大于等于 $(M+N-1)$ 点的圆周卷积可以代替线性卷积。

7. 圆周卷积等于线性卷积而不产生混淆的必要条件是: $L \geq M+N-1$ 。

8. 减小栅栏效应的方法: 尾部补零。

9. DFT 的分辨率: DFT 的频率分辨率为 f_s/N 。

三、无限长单位脉冲响应 (IIR) 滤波器的设计方法

(1) 考点

1. 脉冲响应不变法下数字滤波器的设计流程 (原理):

$$H(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{\text{抽样}} h_a(nT) = h(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z)$$

(1) 求 $H(s)$ 的拉式反变换, 由 $H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s-s_i}$ 得

$$h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t} u(t)。$$

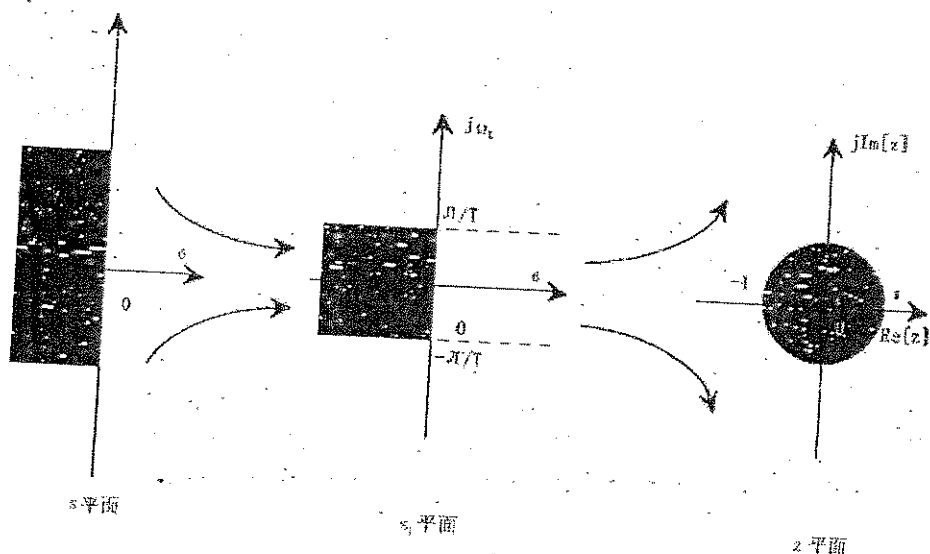
(2) 对 $h_a(t)$ 抽样, 得 $H(z)$ 的冲击响应 $h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^N A_i (e^{s_i T})^n u(n)。$

(3) 求 $h(n)$ 的 Z 变换, $H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$ (数字滤波器的系统函数)。

2. 数字滤波器的频响是模拟滤波器频响的周期延拓, 即:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\omega + j\frac{2\pi m}{T}\right)。$$

3. 双线性变换法 (BLT) 设计思路: (1) 将整个 s 平面压缩到 s_1 平面的一条横带里; (2) 通过标准变换关系将此横带变换到整个 Z 平面上去。



4. 双线性变换公式: $s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$, 其中 $z = \frac{1+(T/2)s}{1-(T/2)s}$

4. 巴特沃思滤波器的系统函数: $H_o(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s-s_{p3})(s-s_{p4})(s-s_{p5})}$, 当 $\Omega_c = 1$ 时,

归一化的三界巴特沃斯滤波器: $H^1_o(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$, 如果要还原,

$$H_o(s) = \frac{1}{(s/\Omega_c)^3 + 2(s/\Omega_c)^2 + 2(s/\Omega_c) + 1}.$$

例 1: 已知模拟系统函数 $H_o(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$, 试用脉冲响应不变法将以上模拟系统函数转换位数字系统函数 $H(z)$, 采样周期 $T = 0.5$ 。

解: $H_o(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 3} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-3} \right)$; $h_o(s) = \frac{3}{2} (e^{-t} - e^{-3t}) \mu(t)$, 代入

$$T = 0.5, \text{ 得 } h(n) = \frac{3}{2} T (e^{-nT} - e^{-3nT}) \mu(n) \Big|_{T=0.5} = \frac{3}{4} \left(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{3n}{2}} \right) \mu(n)$$

$$\begin{aligned} \therefore H(z) &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{2}} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{3}{2}} z^{-1}} \right) = \frac{3}{4} \left[\frac{\left(1 - e^{-\frac{3}{2}} z^{-1} \right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}} z^{-1} \right)}{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}} z^{-1} \right) \left(1 - e^{-\frac{3}{2}} z^{-1} \right)} \right] \\ &= \frac{3}{4} \frac{\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \right) z^{-1}}{1 - \left(e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{3}{2}} \right) z^{-1} + e^{-2} z^{-2}} = \frac{0.2876 z^{-1}}{1 - 0.8297 z^{-1} + 0.1353 z^{-2}} \end{aligned}$$

例 2: 设一模拟滤波器 $H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, 采样周期 $T=2$, 试用双线性变换法将它转变为数字系统函数。

$$\begin{aligned} \text{解: } T=2, \quad s &= \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}; \quad H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{(1+z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 + (1+z^{-1})(1-z^{-1}) + (1+z^{-1})^2} \\ &= \frac{(1+2z^{-1}+z^2)}{1-2z^{-1}+z^2+1-z^2+1+2z^{-1}+z^2} = \frac{1+2z^{-1}+z^2}{3+z} = \frac{0.3333 + 0.6667z^{-1} + 0.3333z^2}{1+0.3333z} \end{aligned}$$

例 3: 设采样频率 $f_s = 6.28318 \text{ kHz}$, 用脉冲响应不变法设计一个三阶巴特沃思数字低通滤波器, 边界频率 $f_c = 1 \text{ kHz}$ 。

解: $\because \omega_c = 2\pi f_c T = 2\pi f_c / f_s = 2\pi \times 10^3 / 6.28313 \times 10^3 = 1$ (注: $6.28318 = 2\pi$), 脉冲响应不变法的 $\Omega_c = \omega_c = 1$, 三阶巴特沃思模拟低通滤波器的原型为:

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{\Omega_c^3}{s^3 + 2s^2\Omega_c + 2s\Omega_c^2 + \Omega_c^3} \Big|_{\Omega_c=1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s}{s^2 + s + 1} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{\sqrt{3}+j}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{s}{s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}-j}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{s}{s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}\left[1-e^{\frac{1}{2}(1-j\sqrt{3})}z^{-1}\right]} \cdot \frac{e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}\left[1-e^{\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3})}z^{-1}\right]} \\
&= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{6}}\left[1-e^{\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3})}z^{-1}\right] + e^{-j\frac{\pi}{6}}\left[1-e^{\frac{1}{2}(1-j\sqrt{3})}z^{-1}\right]}{\left[1-e^{\frac{1}{2}(1-j\sqrt{3})}z^{-1}\right]\left[1-e^{\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3})}z^{-1}\right]} \\
&= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{-j\frac{\pi}{6}}\right) - e^{\frac{1}{2}}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right]z^{-1}}{\left[1-e^{\frac{1}{2}(1-j\sqrt{3})}z^{-1}\right]\left[1-e^{\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3})}z^{-1}\right]} \\
&= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\cos\frac{\pi}{6} - 2e^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^{-1}}{1-2e^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^{-1} + e^{-1}z^{-2}} \\
&= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times e^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]z^{-1}}{1-2 \times e^{\frac{1}{2}} \times \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^{-1} + e^{-1}z^{-2}} \\
&= \frac{1}{1-0.3679z^{-1}} + \frac{-1+0.6597z^{-1}}{1-0.7858z^{-1}+0.3679z^{-2}}
\end{aligned}$$

注: $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi}\right) = \cos(49.62^\circ) \approx 0.6479$.

例 4. 用双线性变换法设计一个三阶巴特沃思滤波器, 采样频率 $f_s = 1.2\text{kHz}$ 。边界频率为 $f_c = 400\text{Hz}$ 。

解: $\because \omega_c = 2\pi f_c T = 2\pi f_c / f_s = 2\pi \times \frac{400}{1200} = \frac{2}{3}\pi$, 双线性变换法时,

$\Omega_c = \tan \frac{\omega_c}{2} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 三阶巴特沃思低通滤波器原型为:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{s^3 + 2s^2\Omega_c + 2s\Omega_c^2 + \Omega_c^3} \Big|_{\Omega_c=\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{s^3 + 2\sqrt{3}s^2 + 6s + 3\sqrt{3}}, \text{ 为方便设 } T=2.$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3 + 2\sqrt{3}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 6\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}(1+z^{-1})^3}{(1-z^{-1})^3 + 2\sqrt{3}(1-z^{-1})^2(1+z^{-1}) + 6(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2 + 3\sqrt{3}(1+z^{-1})^3}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}{(1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}) + 2\sqrt{3}(1-z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}) + 6(1+z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}) + 3\sqrt{3}(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}$$

合并同类项:

$$\begin{aligned} z^0 & 1+2\sqrt{3}+6+3\sqrt{3} = 7+5\sqrt{3} \\ z^{-1} & -3-2\sqrt{3}+6+9\sqrt{3} = 3+7\sqrt{3} \\ z^{-2} & 3-2\sqrt{3}-6+9\sqrt{3} = -3+7\sqrt{3} \\ z^{-3} & -1+2\sqrt{3}-6+3\sqrt{3} = -7+5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore H(z) = \frac{3\sqrt{3}(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}{(7+5\sqrt{3}) + (3+7\sqrt{3})z^{-1} + (-3+7\sqrt{3})z^{-2} + (-7+5\sqrt{3})z^{-3}}$$

$$= \frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{\left(\frac{7}{3\sqrt{3}}+\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{7}{3}\right)z^{-1} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{7}{3}\right)z^{-2} + \left(-\frac{7}{3\sqrt{3}}+\frac{5}{3}\right)z^{-3}}$$

(2) 其他问题

1. 冲击响应不变法的映射规则是 $z = e^{sT}$, $\omega = \Omega T$.

2. 脉冲响应不变法的优缺点: 优点: (1) 稳定性得到保持; (2) 频率的线性关系 $\omega = \Omega T$; (3) 时域模仿特性好; 缺点: 频谱周期延拓效应, 原因是原因是 s 平面与 z 平面的非一一对应。

3. 双线性变换法模拟频率与数字频率之间的关系: $\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

4. 三种滤波器的比较:

(1) 对同一种 A, N (滤波器的阶数) 越大, 过渡带越陡; N 一定, 椭圆滤波器最陡, 切比雪夫滤波器次之, 巴特沃思滤波器最后; (2) 这三种滤波器对自身系数灵敏度而言, E 型 (椭圆滤波器) 最灵敏, C 型 (切比雪夫滤波器) 次之, B 型 (巴特沃思滤波器) 最后; (3) 对工作量而言, E 型设计量最大, C 型次之, B 型最小。

四、有限长单位脉冲响应滤波器的设计方法

1. 考点

(1) 矩形窗的设计:

1. 设计流程: $H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IDFTT}} h_d(n) \xrightarrow{\text{移序加窗截短}} h(n) \xrightarrow{\text{DFTT}} H(e^{j\omega})$.

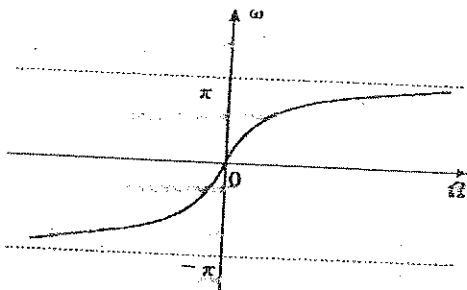
2. 窗函数的选择:

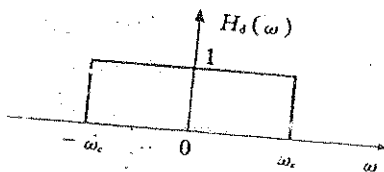
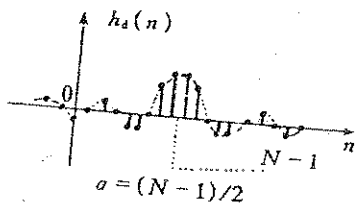
(1) 对于给定的理想低通滤波器 $H_d(e^{j\omega})$, 计算 $h_d(n)$ 。

设低通滤波器的延时为 α , 则 $H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$, 即

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, \text{ 此时截取一}$$

段 $n=0 \sim N-1$ 的 $h_d(n)$ 作为 $h(n)$, 则为保证所得到的是线性相位 FIR 滤波器, 延时 α 应为 $h(n)$ 长度 N 的一半, 即 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 。





(2) 计算 $h(n)$

这种直接截取好比使用一个矩形窗 $w_R(n)$ 去和 $h_d(n)$ 相乘，即

$$h(n) = h_d(n)w_R(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \text{ 其中 } w_R(n) = R_N(n).$$

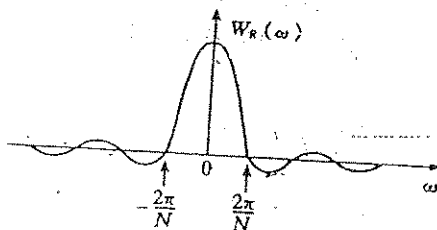
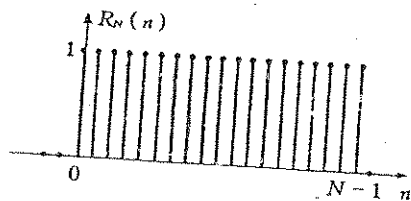
(3) 计算 $H(e^{j\omega})$

$$\text{窗口函数的频谱: } W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

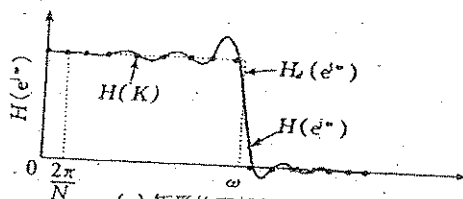
$$= e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}, \text{ 用幅度函数和相位函数来表示, 则有}$$

$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega)e^{-j\omega\alpha}$, 其线性相位部分 $e^{-j\omega\alpha}$ 则是表示延时一半长度

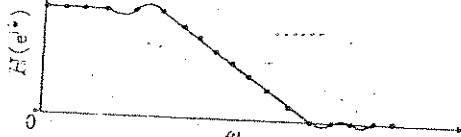
$$\alpha = \frac{N-1}{2}, \text{ 对频响起作用的是它的幅度函数 } W_R(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}.$$



3. 矩形窗总结: $\omega(n) = R_N(n)$
 $W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\omega(N-1)/2}$
 $W_R(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$



(a) 矩形的理想频率特性



(b) 梯形的理想频率特性

(2) 频率采样设计法:

1. 思路: 使所设计的 FIR 数字滤波器的频率特性在某些离散频率点上的值准确地等于所需滤波器在这些频率点处的值, 在其它频率处的特性则有较好的逼近。

2. 步骤

确定 $H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{频率采样}} H_d\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right) = H(k) \xrightarrow[N \text{ 点}]{\text{IDFT}} h(n) \rightarrow H(e^{j\omega})$
不同于 $h_d(n)$

3. 内插公式: $H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$

4. 设计方法:

(1) 确定 H_k 、 θ_k :

$H_d(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = H(k) = H_k e^{j\theta_k}, \quad k=0,1,\dots,N-1;$

(2) 计算 $h(n)$:

$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N}, \quad n=0,1,\dots,N-1;$

(3) 计算 $H(z)$: $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1-z^{-N}}{1-e^{j2\pi nk/N} z^{-1}}, \quad \text{令 } W = e^{-j2\pi/N}$

$$\text{得 } H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-H^{-k}z^{-1}}.$$

(4) 约束条件: $H(k)$ 必须满足对 π 或奇或偶对称, 即 $\begin{cases} H_k = H_{N-k} \\ H_k = -H_{N-k} \end{cases}$; 对于一、

二类 FIR 滤波器, $\theta(k) = -\frac{N-1}{2}\omega \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = -\pi k \left(1 - \frac{1}{N}\right), k=0,1,2,\dots,N-1$; 对

于三、四类 FIR 滤波器, $\theta(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{\pi}{2} - \pi k \left(1 - \frac{1}{N}\right),$
 $k=0,1,2,\dots,N-1$.

3. 滤波器的频响:

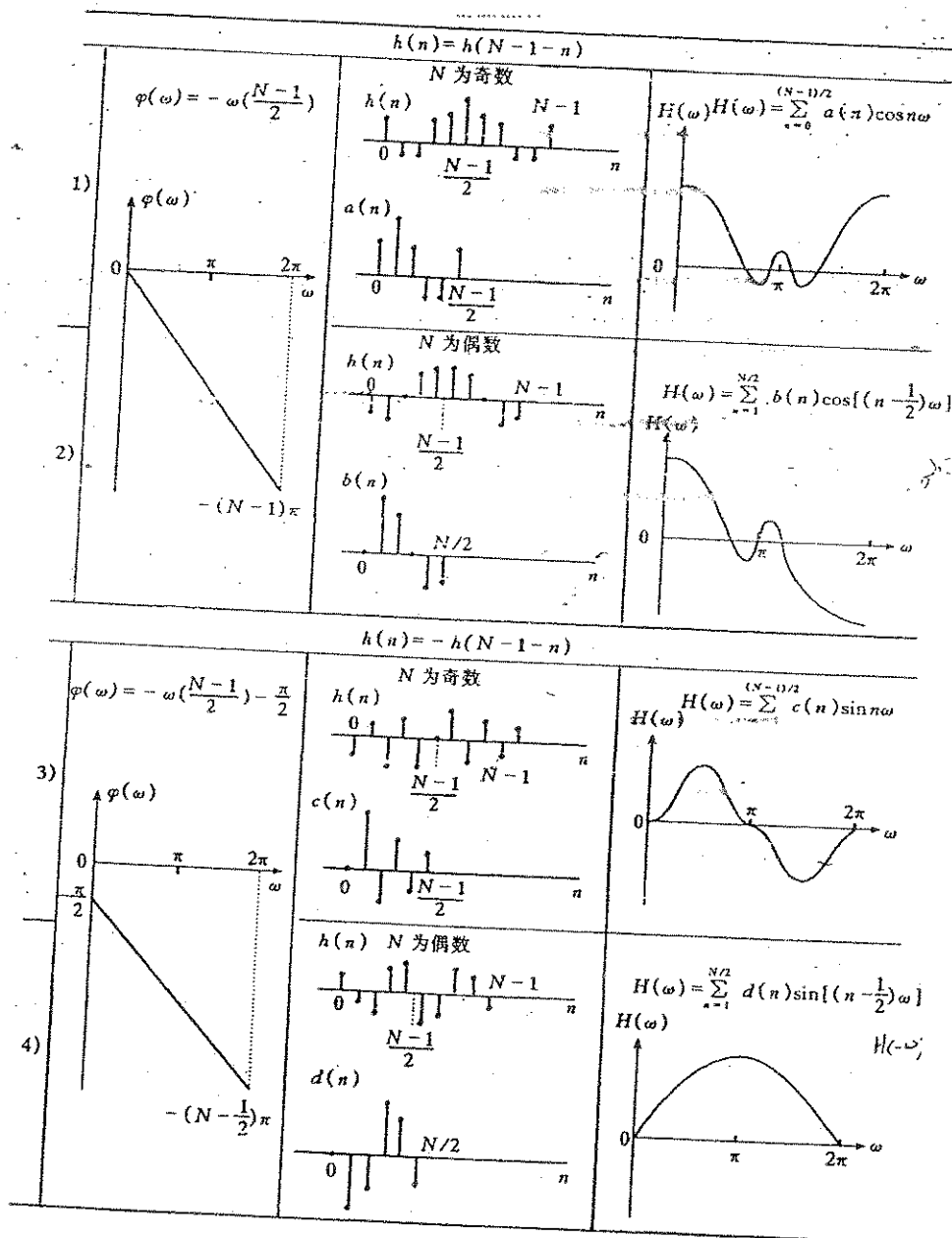
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{-j(\omega-2\pi k/N)}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \cdot e^{-j\omega N/2}}{\sin\left(\frac{\omega-2\pi k/N}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega-2\pi k/N)/2}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega-2\pi k/N)} \cdot e^{-j\left[\frac{\omega(N-1)}{2} + \frac{\pi k}{N}\right]} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) p_k(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

(3) 四种线性相位 FIR 滤波器

四种滤波器特点:

- (1) 第一类: $H(n)$ 偶对称, N 为奇数; $\cos n\omega$ 、 $H(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 偶对称, $\omega=0$ 、 $\omega=\pi$ 皆不过零点; 适用于任意一种滤波器 (高通、低通、带通、带阻)。
- (2) 第二类: $H(n)$ 偶对称, N 为偶数; 恒有时延, 相位曲线过原点, $H(\omega)$ 对 $\omega=0$ 偶对称, 对 $\omega=\pi$ 奇对称, $\omega=\pi \equiv 0$; 只能用低通、带通滤波器。
- (3) 第三类: $H(n)$ 奇对称, N 为奇数; 恒群时延, 有 $\frac{\pi}{2}$ 附加相移, 相位曲线是截距为 $\frac{\pi}{2}$, 斜率为 $-\frac{N-1}{2}$ 的直线, $H(\omega)$ 对 $\omega=0$ 、 $\omega=\pi$ 奇对称; $\omega=0 \equiv 0$ 、 $\omega=\pi \equiv 0$, 只能用带通滤波器。

(4) 第四类: $h(n)$ 奇对称, N 为偶数; 恒群时延, 有 $\frac{\pi}{2}$ 附加相移, $H(\omega)$ 对 $\omega=0$ 成奇对称, 对 $\omega=\pi$ 成偶对称; $\omega=0 \equiv 0$, $\omega=2\pi \equiv 0$, 只能用高通、带通滤波器。



例 1: 用矩形窗设计一线性相位高通滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j(\omega-\pi)\alpha} & \pi - \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & 0 \leq \omega \leq \pi - \omega_c \end{cases}$$

(1) 写出 $h(n)$ 的表达式, 确定 α 与 N 的关系。

(2) 问有几种类型, 分别属于哪一种线性相位滤波器?

解: (1)

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \frac{j}{2\pi} \int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} e^{-j(\omega-\pi)\alpha} e^{jn\omega} d\omega = \frac{e^{jn\pi}}{2\pi} \int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} e^{-j(\omega-\pi)\alpha} d\omega \\ &= \frac{e^{jn\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(n-\alpha)} \left[e^{-j(\omega-\pi)\alpha} \right]_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} = \frac{e^{jn\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(n-\alpha)} \left[e^{j(n-\alpha)(\pi+\omega_c)} - e^{j(n-\alpha)(\pi-\omega_c)} \right] \\ &= \frac{e^{jn\pi}}{2\pi} \cdot \frac{e^{j(n-\alpha)\pi}}{j(n-\alpha)} \left[e^{j(n-\alpha)\omega_c} - e^{-j(n-\alpha)\omega_c} \right] = \frac{e^{jn\pi}}{\pi(n-\alpha)} \sin[(n-\alpha)\omega_c] = (-1)^n \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[(n-\alpha)\omega_c] \end{aligned}$$

为保证线性 $\alpha = \frac{N-1}{2}$, $h(n) = h_d(n)R_N(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(2) 情况 I: N 为奇数, $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 为整数, $h_d(n)$ 对 α 偶对称, 为第一种线性相位滤波器。

情况 II: N 为偶数, $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 不为整数, $h_d(n)$ 对 α 奇对称, 为第四种线性相位滤波器。

例 2: 用频率采样设计法设计一线性相位低通滤波器, $N=15$, 幅度采样值为

$$H_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0.5 & k=1, 14 \\ 0 & 2 \leq k \leq 13 \end{cases}$$

, 求采样值的相位 $\theta(k)$, 并写出 $h(n)$ 及 $H(e^{j\omega})$ 的表达式。

解: H_k 为偶对称, 即 $H_k = H_{N-k}$, 且 $N=15$ 为为第一种线性相位滤波器, 有

$$h(n) = h(N-1-n), \quad \theta(k) = -\frac{N-1}{2} \omega \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = -\pi k \left(1 - \frac{1}{N} \right) = -\frac{14}{15} \pi k,$$

$$H(k) = H_k e^{j\theta(k)} = H_k e^{-j\frac{14}{15}\pi k},$$

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N} = \frac{1}{15} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-j\frac{14\pi}{15}} e^{j\frac{2\pi}{15}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{14\pi}{15}} e^{j\frac{28\pi}{15}n} \right) \\
 &= \frac{1}{15} \left(1 + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{15}(n-7)} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{15}(n-7)} \right) = \frac{1}{15} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{15}(n-7) \right] = \frac{1}{15} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{15}n - \frac{14\pi}{15} \right) \right]
 \end{aligned}$$

其中 $0 \leq n \leq 14$.

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \left(\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2} e^{j\theta_1}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}} e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2} e^{-j\theta_1}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}} e^{-j\omega}} \right) \\
 &= \frac{1 - e^{-j15\omega}}{N} \left[\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2} (e^{j\theta_1} + e^{-j\theta_1}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} \left(e^{j\theta_1} \frac{2\pi}{N} + e^{-j\left(\theta_1 - \frac{2\pi}{N}\right)} \right)}{\left(1 - e^{j\frac{2\pi}{N}} e^{-j\omega} \right) \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}} e^{-j\omega} \right)} \right] \\
 &= \frac{1 - e^{-j15\omega}}{N} \left[\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{\cos \theta_1 - e^{-j\omega} \cos \left(\theta_1 - \frac{2\pi}{N} \right)}{1 - 2 \cos \frac{2\pi}{N} e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}} \right] \\
 &= \frac{1 - e^{-j15\omega}}{N} \left[\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{\cos \theta_1 - e^{-j\omega} \cos \left(\theta_1 - \frac{2\pi}{N} \right)}{1 - 2 \cos \frac{2\pi}{N} e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}} \right] \\
 &= \frac{1 - e^{-j15\omega}}{N} \left[\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{-0.9781 + 0.9781 e^{-j\omega}}{1 - 1.8271 e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}} \right]
 \end{aligned}$$

(2) 其他问题

1. FIR 滤波器的零点分布特性: 线性相位滤波器的零点必须是互为倒数的共轭对, 即 z 、 $\frac{1}{z}$ 、 z^* 、 $\frac{1}{z^*}$ 。

2. 矩形窗过渡带为 $\frac{4\pi}{N}$; 最小阻带衰减只由窗形状决定, 不受 N 影响; 过渡带

的宽度随窗宽度的增加而减小。

3) 矩形窗卷积过程可得以下结论:

- (1) 加窗使过渡带变宽, 带宽取决于窗谱的主瓣宽度, N 越大, 过渡带越窄;
- (2) 过渡带两边产生肩峰和阻尼余振, 波动幅度取决于窗谱主瓣和旁瓣面积之比。
- (3) N 增加, 过渡带宽减小, 肩峰值不变。原因: 吉布斯 (Gibbs) 效应。

4. 吉布斯 (Gibbs) 效应: 主瓣附近 $W_N(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \approx N \frac{\sin(\omega N/2)}{N\omega/2} = N \frac{\sin x}{x}$,

其中 $x = \frac{N\omega}{2}$, 所以 N 的改变不能改变主瓣与旁瓣的比例关系, 只能改变 $W_N(\omega)$ 的绝对值大小和起伏的密度, 当 N 增加时, 幅值变大, 频率轴变密, 这只会减少过渡带宽, 而不会改变肩峰的相对值 ($\frac{\text{旁瓣面积}}{\text{主瓣面积}}$), 而最大肩峰永远为 8.95%。

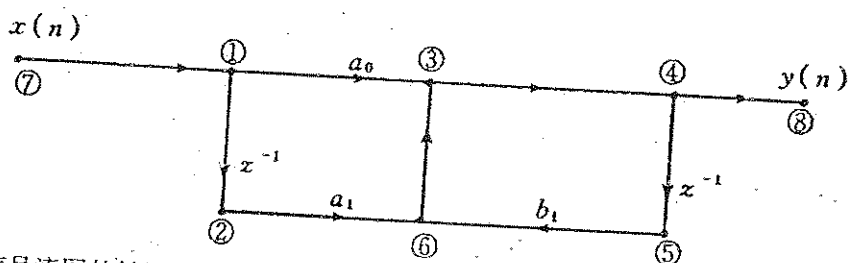
5. FIR 和 IIR 滤波器的比较:

参数 \ 滤波器类型	IIR DF	FIR DF
相位	非线性	可做到严格线性
稳定性	不一定稳定	一定稳定
快速卷积	不能用 FFT 作快速卷积	可用
递归结构	一定是递归结构	主要是非递归结构
对频率分量选择性	好	差
相同性能下阶次阶次	相同性能下阶次较低	相同性能下阶次高
噪声	有噪声反馈噪声大	小
运算误差	大, 会出现极限环振荡	小, 不会出现极限环振荡
封闭形式公式	$H(z)$ 有封闭形式公式, 一次完成	无封闭形式的公式, 须反复调试
计算手段要求	低	需用计算机计算
用途	主要用于设计分段常数的滤波器	可设计各种网络, 适用范围广

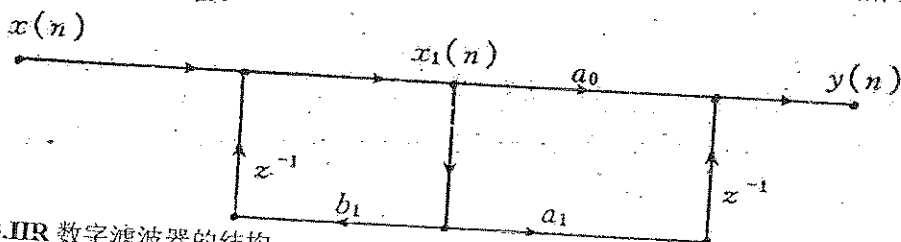
五、数字信号处理系统的实现

(1) 考点:

1. 数字网络的信号流图表示: 如 $y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + b_1 y(n-1)$:



2. 信号流图的转置定理：对于单个输入、单个输出的系统，通过反转网络中的全部支路的方向，并且将其输入和输出互换，得出的流图具有与原始流图相同的系统函数，如图：



3. IIR 数字滤波器的结构：

(1) 直接型

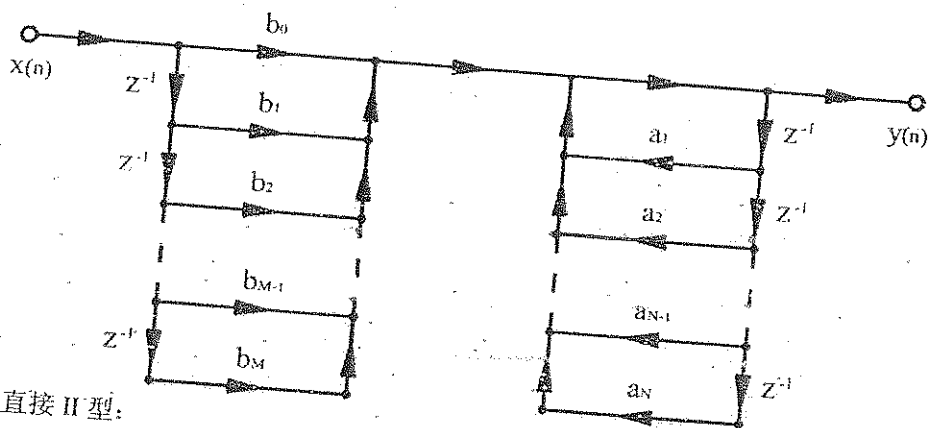
1. IIR 数字滤波器的系统函数：
$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

2. 差分方程：
$$y(n) = \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M a_r x(n-r)$$

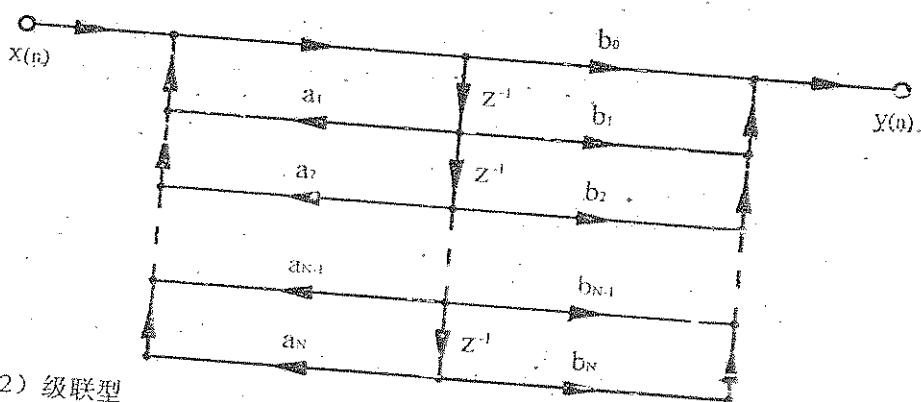
3. $H(z)$ 可视为 $\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}$ 和 $\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$ 两个子系统串联。

4. 特点：结构最简单，但零极点不易控制。

5. 直接 I 型：



6.直接 II 型:

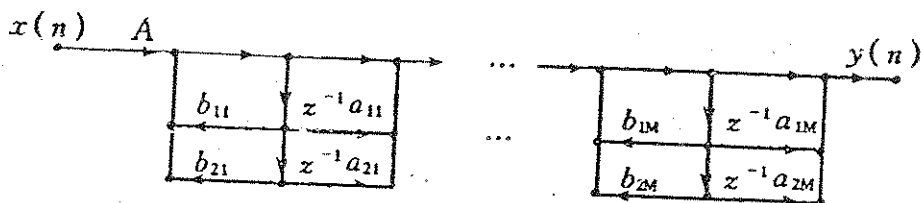


(2) 级联型

一个 N 阶的系统函数用它的零、极点表示:

$$H(z) = A \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 - g_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{M_2} (1 + \alpha_{1i} z^{-1} + \alpha_{2i} z^{-2})}{\prod_{i=1}^{N_1} (1 - p_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - b_{1i} z^{-1} - b_{2i} z^{-2})}, \text{ 定义二阶基本节:}$$

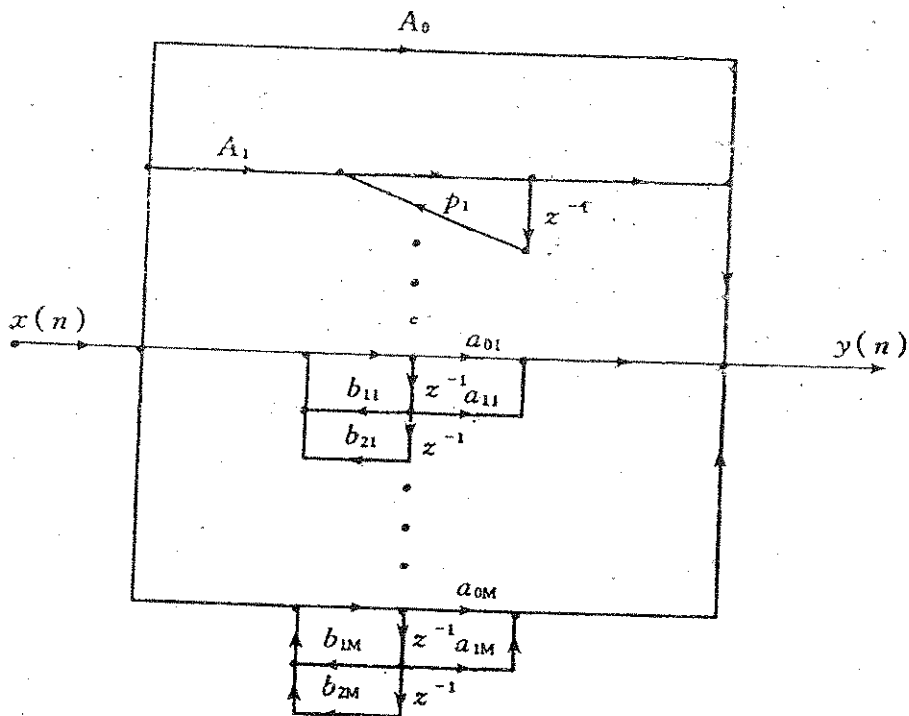
$$H_i(z) = \frac{1 + \alpha_{1i} z^{-1} + \alpha_{2i} z^{-2}}{1 - b_{1i} z^{-1} - b_{2i} z^{-2}}, \text{ 滤波器就可用若干二阶网络级联起来构成.}$$



级联型结构

(3) 并联型: 传递函数展开成部分分式之和, 可视为多个一阶和二阶滤波器的并联。

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = A_0 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{(1 - d_i z^{-1})} = A_0 + \sum_{i=1}^L \frac{A_i}{(1 - p_i z^{-1})} + \sum_{i=1}^M \frac{a_{0i} + a_{1i} z^{-1}}{1 - b_{1i} z^{-1} - b_{2i} z^{-2}}$$

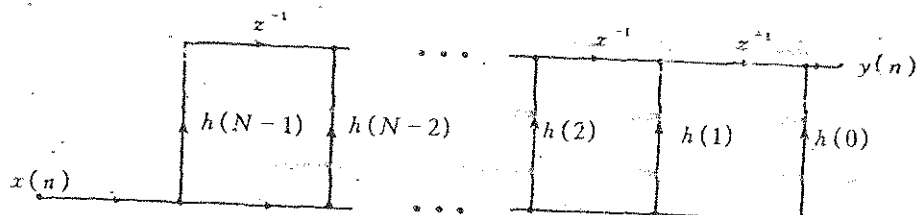


5. FIR 数字滤波器的结构:

(1) 直接型 (横截型、卷积型)

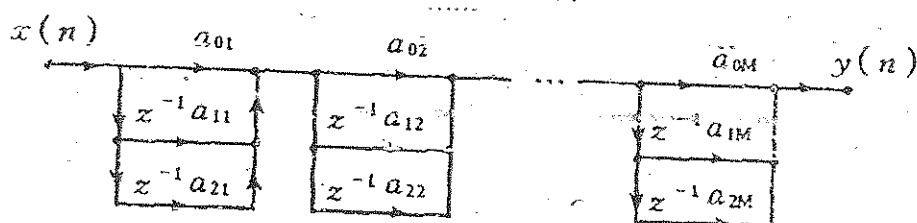
FIR 滤波器的特点是其 $h(n)$ 为有限长序列, 传递函数 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$, 差分

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i).$$



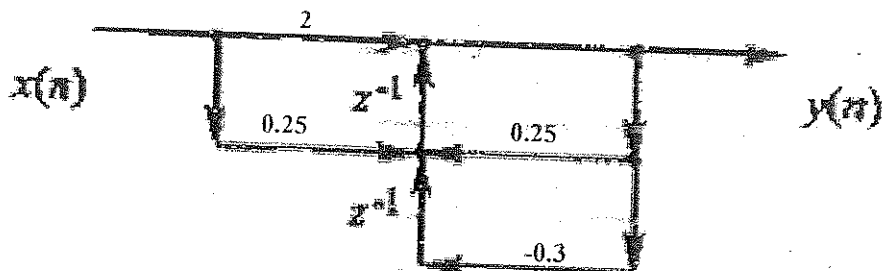
(2) 级联型

传递函数分解为二阶实系数因子的形式 $H(z) = \prod_{i=1}^M (a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2})$:



级联型结构

*例 1: 写出题图 6.1 结构的系统函数及差分方程。



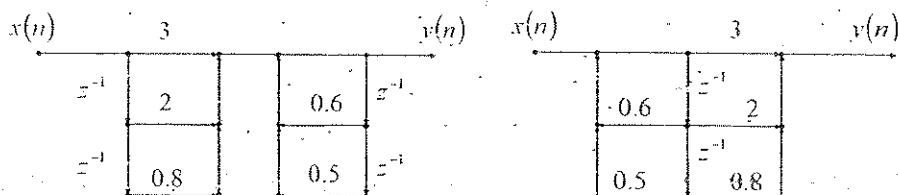
解: 差分方程: $y(n) = 2x(n) + 0.25x(n-1) + 0.25y(n-1) - 0.3y(n-2)$

系统函数: $Y(z) - 0.25z^{-1}Y(z) - (-0.3)z^{-2}Y(z) = 2X(z) + 0.25z^{-1}X(z)$

$$\therefore H(z) = \frac{2 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

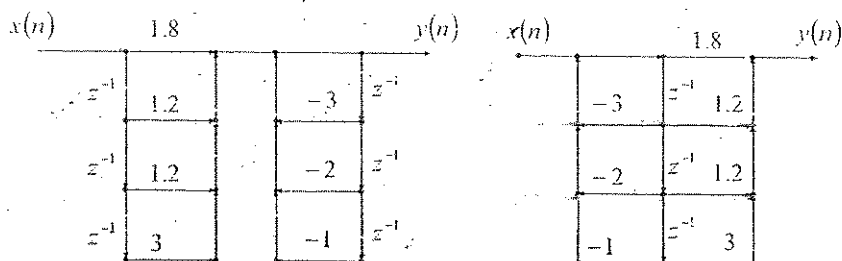
例 2: 用直接 I 型和直接 II 型结构实现以下系统函数:

$$(1) H(z) = \frac{3 + 2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 - 0.6z^{-1} - 0.5z^{-2}}$$



$$(2) H(z) = 0.6 \frac{3z^3 + 2z^2 + 2z + 5}{z^3 + 3z^2 + 2z + 1}$$

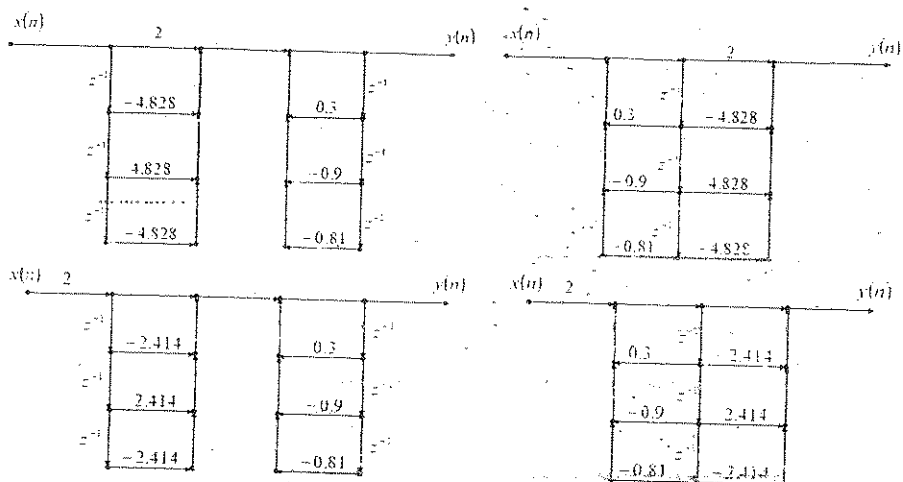
$$\text{解: } H(z) = \frac{1.8z^3 + 1.2z^2 + 1.2z + 3}{z^3 + 3z^2 + 2z + 1} = \frac{1.8 + 1.2z^{-1} + 1.2z^{-2} + 3z^{-3}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}$$



例 3: 用级联型结构实现下列系统函数: $H(z) = \frac{2(z-1)(z^2-1.414z+1)}{(z-0.3)(z^2+0.9z+0.81)}$, 试

问一共能构成几种级联网络?

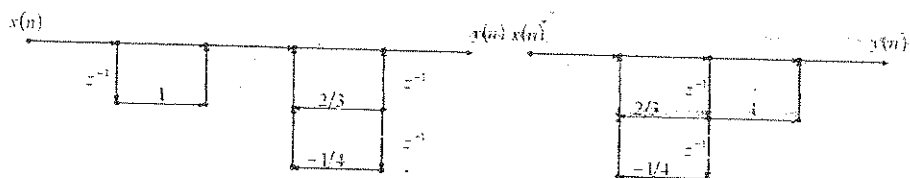
$$\begin{aligned} \text{解: } H(z) &= \frac{2(z-1)(z^2-1.414z+1)}{(z-0.3)(z^2+0.9z+0.81)} = \frac{2(z^3-2.414z^2+2.414z-1)}{z^3-0.3z^2+0.9z+0.81} \\ &= \frac{2(1-2.414z^{-1}+2.414z^{-2}-z^{-3})}{1-0.3z^{-1}+0.9z^{-2}+0.81z^{-3}} = \frac{2-4.828z^{-1}+4.828z^{-2}-2z^{-3}}{1-0.3z^{-1}+0.9z^{-2}+0.81z^{-3}} \end{aligned}$$



例 4: 设滤波器的差分方程为 $y(n) = x(n) + x(n-1) + \frac{2}{3}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2)$, 试用直接 I 型、直接 II 型以及全部一阶节的级联型、并联型结构实现它。

解: 对 $y(n) - \frac{2}{3}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$ 进行 Z 变换得

$$Y(z) - \frac{2}{3}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{4}Y(z)z^{-2} = X(z) + X(z)z^{-1}; \quad H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$



(2) 其他:

1. 量化与量化误差: 在数字系统中共有三种因量化而引起的误差因素:

(1) 输入信号的 A/D 变换量化效应

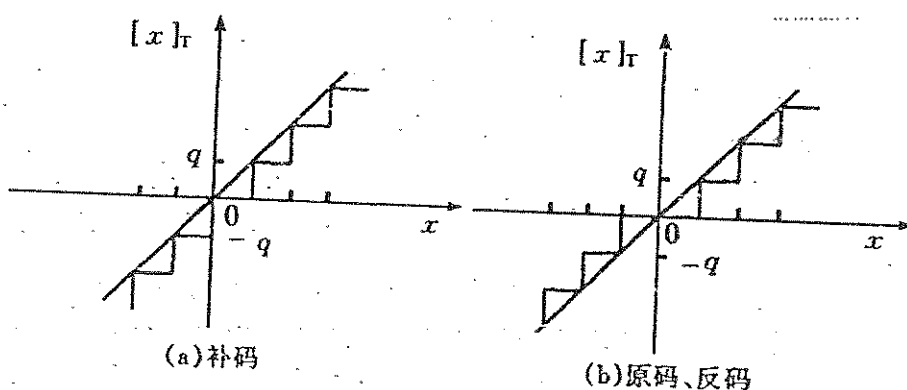
(2) 系数的量化效应

(3) 数字运算过程中的有限字长效应

2. 量化处理方式: 截尾: 保留 b 位, 抛弃余下的尾数; 舍入: 按最接近的值取 b 位码。

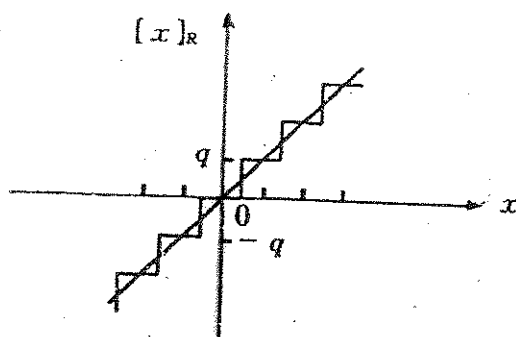
3. 截尾处理: 补码的截尾误差均是负值, $-q \leq E_T \leq 0$ ($q = 2^{-b}$); 原码、反码

的截尾误差取决于数的正负，正数时为负 ($-q \leq E_T \leq 0$)，负数时为正 ($0 \leq E_T \leq q$)。



定点制截尾处理的量化特性

4. 舍入处理：原码，反码，补码的舍入误差均是： $-\frac{q}{2} \leq E_T \leq \frac{q}{2}$ ；舍入处理的误差比截尾处理的误差小，所以对信号进行量化时多用舍入处理。



定点制舍入处理的量化特性

绝密★绝密

南京邮电大学 2011 /2012 学年第 一 学期

《数字信号处理 B》期末复习提纲 (B)

本复习提纲共 35 页; 考试时间 110 分钟;

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

试题类型:

填空题 20 分; 判断题 10 分; 简答题 10 分; 画图题 15 分, 计算题 35 分。

一、填空题 (每空 1 分, 共 20 分)

二、判断题 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 卷积计算

2. 线性时不变系统是稳定的充要条件; 因果系统的充要条件。

3. 模拟周期信号的采样, 不一定是周期序列。

4. 奈奎斯特采样定理: 要使实信号采样后能够不失真还原, 采样频率必须满足的条件: 要出现频谱混叠现象即失真的条件。

若信号最高频率是 120Hz , 采样频率为 150Hz , 则频谱从 _____ 处开始混叠。

5. 描述线性时不变离散系统的方法。

6. 理想采样信号的频谱与连续信号频谱的关系, 频域的抽样与时域的周期延拓的关系。

7. 数字角频率与模拟角频率关系。

8. 系统函数判断系统的因果性、稳定性。

9. 已知 8 点长实数序列 $x(n)$ 序列和为 5, 其 DFT 的后四个值为 $\{0, 1-j, 2, 3+j\}$,

10. 试写出其他几个 DFT 值: $X(0)=$ _____; $X(1)=$ _____; $X(2)=$ _____;

$X(3)=$ _____;

11. 已知 7 点长实数序列 $x(n)$ 序列和为 5, 其 DFT 的后四个值为 $\{1-j, 2, 3+j\}$,

试写出其他几个 DFT 值: $X(0)=$ _____; $X(1)=$ _____; $X(2)=$ _____;

$X(3)=$ _____;

12. DFT 点数要求, 圆周卷积可以代替线性卷积的条件, 圆周卷积等于线性卷

13. 积而不产生混淆的必要条件, 减小栅栏效应的方法, DFT 的分辨率。

14. DFT 的复乘 N^2 次, FFT 复乘 $\frac{N}{2} \log_2 N$ 。

15. 双线性变换法模拟频率与数字频率之间的关系。

16. 四种滤波器特点。

17. FIR 滤波器的零点分布特性。

18. 矩形窗卷积过程可得出的结论, 吉布斯 (Gibbs) 效应, FIR 和 IIR 滤波器的比较。

19. 在数字系统中共有三种因量化而引起的误差因素, 两种量化处理方式

20. 零输入极限环振荡原因: 舍入引入的非线性作用。

三、简答及画图题 (共 25 分)

1. 简述基本滤波器的优缺点 (如: 写出脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器的

基本思想, 优、缺点)。

2. 舍入处理和截尾处理的差别。

3. 简述 DFT、DTFT、Z 变换、拉普拉斯变换之间的基本关系。

4. 画出按时间抽取 8 点 FFT。

5. 画出按频率抽取 8 点 FFT。

6. 用直接 I 型和直接 II 型结构实现以下系统函数:

$$(1) H(z) = \frac{3 + 2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 - 0.6z^{-1} - 0.5z^{-2}}$$

$$(2) H(z) = 0.6 \frac{3z^3 + 2z^2 + 2z + 5}{z^3 + 3z^2 + 2z + 1}$$

7. 设滤波器的差分方程为 $y(n) = x(n) + x(n-1) + \frac{2}{3}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2)$, 试用直接

I 型、直接 II 型以及全部一阶节的级联型、并联型结构实现它。

8. 画出下列数字系统的整准型结构:

$$y(n) = 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3) + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3)$$

四、计算题 (共 35 分)

$$\text{设 } x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad y(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad \tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+8r),$$

$\tilde{y}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+8r)$, 求 $\tilde{x}(n)$ 、 $\tilde{y}(n)$ 的周期卷积序列 $\tilde{f}(n)$, 以及 $\tilde{F}(k)$ 。

1. 已知模拟系统函数 $H_a(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$, 试用脉冲响应不变法将以上模拟系统

函数转换位数字系统函数 $H(z)$, 采样周期 $T = 0.5$ 。

2. 设一模拟滤波器 $H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, 采样周期 $T = 2$, 试用双线性变换法将它转变为数字系统函数。

*3. 设采样频率 $f_s = 6.28318 \text{ kHz}$, 用脉冲响应不变法设计一个三阶巴特沃思数字低通滤波器, 边界频率 $f_c = 1 \text{ kHz}$ 。

4. 用双线性变换法设计一个三阶巴特沃思滤波器, 采样频率 $f_s = 1.2 \text{ kHz}$ 。边界频率为 $f_c = 400 \text{ Hz}$ 。

5. 用矩形窗设计一线性相位高通滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-jN(\omega-\pi)/2} \alpha & \pi - \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & 0 \leq \omega \leq \pi - \omega_c \end{cases}$$

(1) 写出 $h(n)$ 的表达式, 确定 α 与 N 的关系。

(2) 问有几种类型, 分别属于哪一种线性相位滤波器?

*6. 用频率采样设计法设计一线性相位低通滤波器, $N = 15$, 幅度采样值为

$$H_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0.5 & k = 1, 14 \\ 0 & 2 \leq k \leq 13 \end{cases}, \text{ 求采样值的相位 } \theta(k), \text{ 并写出 } h(n) \text{ 及 } H(e^{j\omega}) \text{ 的表达式。}$$

7. 设 $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, $y(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, $\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+8r)$,

$\tilde{y}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y(n+8r)$, 求 $\tilde{x}(n)$ 、 $\tilde{y}(n)$ 的周期卷积序列 $\tilde{f}(n)$, 以及 $\tilde{F}(k)$ 。

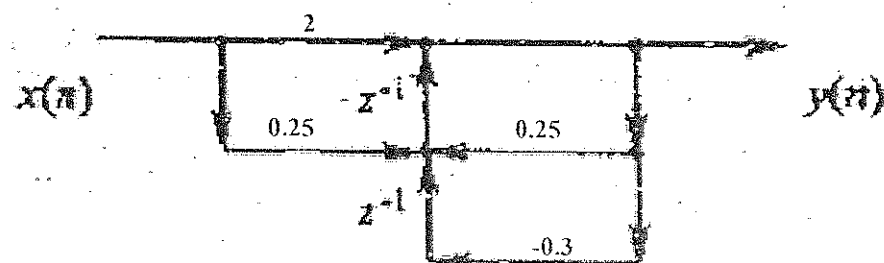
*8. 有限长 $N=10$ 的两序列, $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$, $y(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ -1 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$, 作

图表示 $x(n)$ 、 $y(n)$ 及 $f(n) = x(n) \odot y(n)$ 。

9. 用级联型结构实现下列系统函数: $H(z) = \frac{2(z-1)(z^2-1.414z+1)}{(z-0.3)(z^3+0.9z+0.81)}$, 试问--

共能构成几种级联网络?

10. 写出题图 6.1 结构的系统函数及差分方程。



11: 设 $x(n) = R_3(n)$, $x_1(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+8r)$, 求 $\tilde{x}_1(k)$, 并作图表示 $\tilde{x}_1(n)$ 、 $\tilde{x}_1(k)$ 。

第一次习题

1、简答题

(1) 由“模拟信号的数字化处理”方框图回答以下问题:

a、A/D 变换有哪几个过程? 其中哪个过程为线性, 那个过程为非线性?

b、模拟信号、离散时间信号、数字信号各自的特点和关系。

(2) 离散时间信号作为理想化、线性化的数字信号的条件是什么?

(3) 对数字信号和系统进行分析的总思路是什么?

2、有一理想采样系统, 采样频率 $\Omega_s = 6\pi$, 采样后经理想低通滤波器 $H_s(j\Omega)$ 还原, 已知

$$H_s(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & |\Omega| < 3\pi \\ 0, & |\Omega| \geq 3\pi \end{cases}$$

现有两个输入 $x_{a1} = \cos 2\pi t$ 和 $x_{a2} = \cos 5\pi t$, 输出信号 $y_{a1}(t)$ 、 $y_{a2}(t)$ 分别为多少? 有无失真?

参考答案:

分析: 该题要运用采样定理来解题。要理解采样信号的频谱是原来信号频谱以 Ω_s 为周期的周期延拓。要会画信号频谱及延拓以后的信号频谱, 这样, 信号经过滤波器后可以直观地看到哪些频率的信号可以输出。

或者直接按照奈奎斯特采样定理, 要想时域采样后不失真地还原原来的信号, 则采样频率一定要大于等于 2 倍信号的最高频率, 即 $f_s \geq 2f_{\max}$, 或 $\Omega_s \geq 2\Omega_{\max}$ 。

按照奈奎斯特采样定理。

因为 $x_{a1} = \cos 2\pi t$, 信号最高频率 $\Omega_1 = 2\pi$, 采样频率 $\Omega_s = 6\pi$, 满足 $\Omega_s \geq 2\Omega_1$,

所以 $y_{1a}(t) = \cos 2\pi t$, 没有混叠失真。

因为 $x_{a2} = \cos 5\pi t$, 信号最高频率 $\Omega_2 = 5\pi$, 采样频率 $\Omega_s = 6\pi$, 此时不满足 $\Omega_s \geq 2\Omega_2$, 所以 $y_{a2}(t)$ 一定会产生混叠失真, 输出 $y_{2a}(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_2)t = \cos \pi t$ 。

3、推导样值形式傅里叶变换式, 并证明它也能反映“周期延拓”性。

参考答案:

$$\begin{aligned} X_A(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) e^{-j\Omega nT} dt \end{aligned}$$

由于 $x_a(nT)$ 和 $e^{-j\Omega nT}$ 与积分变量 t 无关, 可以提取到积分号之外, 且 $\delta(t - nT)$ 的积分

为 1, 从而可得:

$$X_A(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-jn\Omega T}$$

周期延拓性:

$$X_A[j(\Omega_s + \Omega_1)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-jn(\Omega_s + \Omega_1)T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-jn\Omega_s T} e^{-jn\Omega_1 T}$$

$$e^{-jn\Omega_s T} = e^{-jn\Omega_s / f_s} = e^{-jn \cdot 2\pi} = 1$$

$$X_A[j(\Omega_s + \Omega_1)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{jn\Omega_1 T}$$

4. P.30 1-3

参考答案:

分析: 要满足 $x(n+N) = x(n)$, 则要求 $N = \frac{2\pi}{\omega} \cdot k$ 式中 k 与 N 均取整数, 且 k 的取值要保证 N 是最小的正整数, 满足这些条件, 正弦序列才是以 N 为周期的周期序列, 即:

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{P}{Q} = \frac{N}{k}, \quad P, Q \text{ 为互素的整数时。显然当 } k=Q \text{ 时 (含 } k=Q=1), N=P。$$

(1) 因为 $\omega = \frac{3\pi}{7}, \frac{2\pi}{\omega} = \frac{14}{3}, k=3$, 所以该序列为周期序列, 周期为 $N=14$ 。

(2) 因为 $\omega = \frac{2\pi}{7}, \frac{2\pi}{\omega} = 7, k=1$, 所以该序列为周期序列, 周期为 $N=7$ 。

(3) 因为 $\omega = \frac{1}{8}, \frac{2\pi}{\omega} = 16\pi$ 是无理数, 所以该序列不是周期序列。

5. 填空题

(1) 有一连续信号 $x_a(t) = \cos(40\pi t)$, 用采样间隔 $T = 0.02s$ 对 $x_a(t)$ 进行采样, 则

采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的表达式为 $\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(0.8\pi n) \delta(t - 0.02n)$; 采

样后所得时域离散信号 $x(n)$ 的周期为 $N=5$ 。

(2) 若一个理想采样及恢复系统, 采样频率为 $\Omega_s = 6\pi$, 采样后经一个带宽为 3π , 增益为 $1/3$ 的理想低通还原。现有输入 $x_a(t) = \cos \pi t + \cos 2\pi t + \cos 5\pi t$, 输出信号 $y(n)$ 为 $y(t) = \cos 2\pi t + 2 \cos \pi t$ 。

第二次习题

1、简答题

(1) 请写出线性系统的定义及判定公式。

答：线性系统是指系统对信号的处理是符合叠加原理的。

判定条件：若系统输入序列分别为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 时，输出序列分别为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ ，

即： $y_1(n) = T[x_1(n)]$ ，那么当系统输入为 $ax_1(n) + bx_2(n)$ 时，有：
 $y_2(n) = T[x_2(n)]$

$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$ 成立，则该系统为线性系统。

(2) 请写出时不变系统的定义及判定公式。

答：时不变系统是指系统对信号的处理（运算）不随时间的改变而改变。

判定条件：若系统输入序列为 $x(n)$ 时，输出序列为 $y(n)$ ，即： $y(n) = T[x(n)]$ ，那么

当系统输入为 $x(n - n_0)$ 时，有：

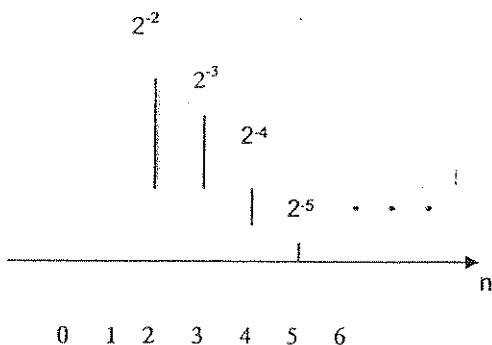
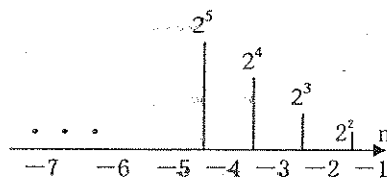
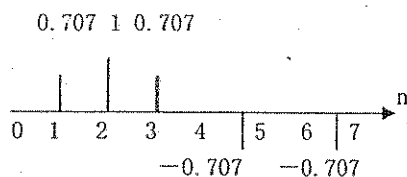
$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$ 成立，则该系统为时不变系统。

2、请图示下述序列

(1) $\sin(\omega_0 n)R_8(n) + \delta(n - 6)$ ，其中 $\omega_0 = 2\pi/8$

(2) $2^{-n}u(-n - 2)$

(3) $2^{-n}u(n - 2)$



3、P.30 1-4 (2) (10)

39

参考答案:

$$(2) y(n) = 3x(n) + 5$$

设

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = 3x_1(n) + 5$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = 3x_2(n) + 5$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = 3ax_1(n) + 3bx_2(n) + 5$$

而

$$ay_1(n) + by_2(n) = 3ax_1(n) + 5a + 3bx_2(n) + 5b$$

可见 $T[ax_1(n) + bx_2(n)] \neq ay_1(n) + by_2(n)$ ，故此系统不是线性系统。又 $y(n-k) = 3x(n-k) + 5 = T[x(n-k)]$ ，所以系统是时不变系统。

$$(10) y(n) = x(2n)$$

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(2n)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(2n)$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ax_1(2n) + bx_2(2n)$$

而

$$ay_1(n) + by_2(n) = ax_1(2n) + bx_2(2n)$$

可见 $T[ay_1(n) + by_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$ ，故此系统是线性系统。又

$$y(n-k) = x[2(n-k)] = x(2n-2k), \quad T[x(n-k)] = x(2n-k) \neq x(2n-2k),$$

不满足 $y(n-k) = T[x(n-k)]$ ，所以系统不是时不变系统。

4、已知线性移不变系统的输入为 $x(n)$ ，系统的单位抽样响应为 $h(n)$ ，试求系统的输出 $y(n)$ 。

$$(1) x(n) = \delta(n), \quad h(n) = R_5(n)$$

$$(2) x(n) = R_3(n), \quad h(n) = R_4(n)$$

$$(3) x(n) = \delta(n-2), \quad h(n) = 0.5^n R_3(n)$$

$$(4) x(n) = 2^n u(-n-1), \quad h(n) = 0.5^n u(n)$$

分析

① 如果是因果序列， $y(n)$ 可表示成 $y(n) = \{y(0), y(1), y(2), \dots\}$ 。例如，小题 (2) 的

结果可表示为 $y(n) = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$ 。

② $\delta(n) * x(n) = x(n), \delta(n-m) * x(n) = x(n-m)$ 。

③ 卷积和求解时，对 n 要分段处理。

参考答案：

(1) $y(n) = x(n) * h(n) = R_5(n)$

(2) $y(n) = x(n) * h(n) = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$

(3) $y(n) = \delta(n-2) * 0.5^n R_3(n) = 0.5^{n-2} R_3(n-2)$

(4) $x(n) = 2^n u(-n-1), h(n) = 0.5^n u(n)$

得：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} 0.5^{n-m} 2^m = \frac{1}{3} \cdot 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=n}^{\infty} 0.5^{n-m} 2^m = \frac{4}{3} \cdot 2^n, \quad n \leq -1$$

第三次习题

1、填空题

(1) 某线性时不变离散系统的单位脉冲响应为 $h(n) = 0.3^n u(n)$ ，则该系统的因果性及稳定性分别为 因果、非稳定。

(2) 已知某离散系统的输入输出关系是 $y(n) = x(n-1) + 2x(n-2)$ ，试判断系统的线性、时不变和因果特性分别为 线性，时不变，因果。

(3) 已知系统的输入输出关系为 $y(n) = 3x(n) + 8$ ，则系统的线性性和时不变性分别为 非线性 及 时不变。

2、以下序列是系统的单位抽样响应 $h(n)$ ，试说明该系统是否因果的、稳定的。

(1) $\frac{1}{n^2} u(n)$

(2) $\frac{1}{n!} u(n)$

分析

① $0! = 1$ 。

41

② 已知 LSI 系统的单位抽样响应, 可用 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = M < \infty$ 来判断稳定性, 用

$h(n) = 0, n < 0$ 来判断因果性。

参考答案:

(1) 当 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$, 所以系统是因果的。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{0^2} + \frac{1}{1^2} + \dots \Rightarrow \infty$$

所以系统不稳定。

(2) 当 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$, 所以系统是因果的。

因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \dots \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 3 \end{aligned}$$

所以系统是稳定的。

3. P311-11

参考答案:

$$\begin{cases} x(n) + \frac{1}{2}w(n-1) = w(n) & (1) \\ w(n) + w(n-1) = y(n) & (2) \end{cases} \Rightarrow w(n) = \frac{1}{3}y(n) + \frac{2}{3}x(n)$$

将 $w(n)$ 代入 (1) 或 (2) 得:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + 0.5y(n-1)$$

$$n=0, y(0) = u(0) + u(-1) + 0.5 \times 0 = 1,$$

$$n=1, y(1) = u(1) + u(0) + 0.5 \times 1 = 2 + 0.5,$$

$$n=2, y(2) = u(2) + u(1) + 0.5 \times (2 + 0.5) = 2(1 + 0.5) + 0.5^2,$$

$$n=3, y(3) = u(3) + u(2) + 0.5 \times [2(1 + 0.5) + 0.5^2]$$

$$= 2(1 + 0.5 + 0.5^2) + 0.5^3$$

:

$$y(n) = 2(1 + 0.5 + \dots + 0.5^{n-1}) + 0.5^n$$

$$= 2 \frac{1 - 0.5^n}{1 - 0.5} + 0.5^n$$

$$= 4 - 3(0.5)^n, n \geq 0$$

第四次习题

1、简答题

(1) 请给出 Z 变换收敛域的定义和充要条件。

答：使 $X(z)$ 一致收敛的 z 的取值范围称为 Z 变换的收敛域 (ROC)，由 $X(z)$ 的定义式和收敛域的概念不难给出级数收敛的充分必要条件是满足绝对可和条件，即：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

$$\downarrow z = re^{j\omega}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| r^{-n} < \infty$$

由此可知：一般来说，Z 变换在 Z 平面上的一个环形区域中收敛，即：

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

(2) 请列表表示 $x(n)$ 的不同形式与 $X(z)$ 的 ROC 的对应关系。

答：

$x(n)$ 的形式	$X(z)$ 的 ROC
有限长序列 $n(n_1 \sim n_2)$	$0 < z < \infty$ $\underline{0?} \quad \underline{? \infty}$
右边序列 $n(n_1 \sim +\infty)$	$R_{x-} < z < \infty$ $\underline{\quad \quad \quad ? \infty}$
左边序列 $n(-\infty \sim n_2)$	$0 < z < R_{x+}$ $\underline{0?}$
双边序列 $n(-\infty, +\infty)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$

(3) 请给出确定 $X(z)$ 的确切收敛域 (ROC) 的方法。

43

答:

a. 利用 $X(z)$ 的收敛域的充要条件来确定, 即满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

的 z 的范围。

此方法由于是依据了收敛的 $X(z)$ 的概念, 所以是理论上一定成立的方法。

b. 利用 $X(z)$ 的解析式是一个等比级数的有限求和公式来确定, 即若

$$X(z) = \frac{a_0}{1-q}$$

则 $|q| < 1$ 右边序列 $|q| > 1$ 左边序列

此方法由于是依据了等比级数有限求和公式成立的概念, 所以是有条件成立的方法。

c. 利用 $X(z)$ 收敛域定义的一个推论来确定, 即收敛域内无 $X(z)$ 的极点, 则推论: $X(z)$ 的极点只可能在 ROC 外, 但一定有极点在 ROC 上。

此方法由于依据了收敛域定义的推论的概念, 所以是无条件成立的方法。又由于 $X(z)$ 的极点的判断较容易, 所以此方法较实用。

(4) 请给出 Z 反变换的计算方法。

答: 求 Z 反变换的方法通常有以下几种:

- a. 围线积分法 (留数法);
- b. 部分分式展开法 (部分分式法);
- c. 长除法 (幂级数展开法);
- d. 利用基本 Z 变换公式和基本 Z 变换性质。

2、利用 Z 变换性质求下列序列 $x(n)$ 的 Z 变换:

$$(1) (-1)^n n u(n) \quad (2) (n-1)^2 u(n-1) \quad (3) 0.5^n u(n-1) \quad (4) n^2 x(n)$$

参考答案:

$$(4) \text{ 设 } Z[x(n)] = X(z)$$

$$\therefore Z[n \cdot x(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z) = -z X'(z)$$

$$\begin{aligned} \therefore Z[n \cdot n x(n)] &= -z \frac{d}{dz} [-z X'(z)] \\ &= z^2 X''(z) + z X'(z) \end{aligned}$$

3、假如 $x(n)$ 的 Z 变换表示式是下式, 问 $X(z)$ 可能有多少不同的收敛域, 它们分别对应什么序列?

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

分析

(1) 有限长序列的收敛域为 $0 < |z| < \infty$, $n_1 \leq n \leq n_2$

特殊状况有: $0 < |z| \leq \infty$, $n_1 \geq 0$

$$0 \leq |z| < \infty, n_2 \leq 0$$

(2) 右边序列的收敛域为 $R_{x-} < |z| < \infty$, $n \geq n_1$

如果序列是右边序列的一个特例, 其收敛域为 $R_{x-} < |z| \leq \infty$, $n \geq n_1 \geq 0$

(3) 左边序列的收敛域为 $0 < |z| < R_{x+}$, $n \leq n_2$

特殊情况有: $|z| < R_{x+}$, $n \leq n_2 \leq 0$

(4) 双边序列的收敛域为 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

有三种收敛域: 圆内、圆外、环状 ($z=0, z=\infty$ 需单独讨论)。

参考答案:

对 $X(z)$ 的分子和分母进行因式分解, 得

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

从上式得出, $X(z)$ 的零点为 $1/2$, 极点为 $j/2, -j/2, -3/4$ 。

所以 $X(z)$ 的收敛域为: (1) $1/2 < |z| < 3/4$, 为双边序列 (2) $|z| < 1/2$, 为左边序列 (3) $|z| > 3/4$, 为右边序列。

第五次习题

45

1、简答题

(1) 请写出数字信号处理中常用 Z 变换的三条性质。

答: a. 线性性质: 如果: $Z[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$Z[y(n)] = Y(z), \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则对任意常数 a、b, Z 变换都能满足以下等式:

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \quad \max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$$

b. 移位性质: 如果: $Z[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则序列 $x(n - n_0)$ 的 Z 变换为: $Z[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

c. 序列卷积: 如果: $Z[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$Z[y(n)] = Y(z), \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

且: $w(n) = x(n) * y(n)$

则: $Z[w(n)] = X(z) \cdot Y(z)$, $\max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$

(2) 请写出 S 平面和 Z 平面的对应关系。

答: S 平面的虚轴对应于 Z 平面的单位圆上;

S 平面的左半平面对应于 Z 平面的单位圆内的区域;

S 平面的右半平面对应于 Z 平面的单位圆外的区域。

(3) 简述系统函数的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的作用。

答: 系统函数的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是一个非常重要的物理量, 它通常为复数, 且为 ω 的函数:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

其中 $|H(e^{j\omega})|$ 称为系统函数的幅频特性; 而 $\varphi(\omega)$ 称为系统函数的相频特性, 它们分别表示了系统的幅度和相位特性。由于 $|H(e^{j\omega})|$ 决定着输出幅度的大小, 所以系统的滤波特性可以由幅频特性直接给出; 而 $\varphi(\omega)$ 决定着输出相位的大小, 所以系统的延时特性可以由相频特性直接给出。

(4) 从差分方程出发, 给出时域分析法和 Z 域分析法的内容。

答:
$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h(n)}{y(n) = x(n) * h(n)} \\ h(n) = 0, n < 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{H(z)}{Y(z) = X(z) \cdot H(z)} \\ H(z) \text{ 的 ROC: } R_{x-} < |z| \leq \infty \\ H(z) \text{ 的 ROC: 含单位圆} \end{array} \right\}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

2、已知： $H(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}}$ ，求出对应 $H(z)$ 的各种可能的单位脉冲响应 $h(n)$ 的表达式。

参考答案：

由 $H(z)$ 的表达式可求得极点为 $z_1 = \frac{1}{2}$ ， $z_2 = 2$ ，则收敛域有3种可能：

$$|z| < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2, \quad |z| > 2$$

(1) 当收敛域为 $|z| < \frac{1}{2}$ 时， $H(z)$ 式中第1、2项都为左边序列，则对应的序列为：

$$h(n) = -\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^{n+1}\right]u(-n-1)$$

(2) 当收敛域为 $\frac{1}{2} < |z| < 2$ 时， $H(z)$ 第1项为右边序列，第2项为左边序列，则对应的序列为：

$$h(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2^{n+1}u(-n-1)$$

(3) 当收敛域为 $|z| > 2$ 时， $H(z)$ 式中第1、2项都为右边序列，则对应的序列为：

$$h(n) = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^{n+1}\right]u(n)$$

3、研究一个输入为 $x(n)$ 和输出为 $y(n)$ 的时域线性离散移不变系统，已知它满足

$$y(n-1) - \frac{10}{3}y(n) + y(n+1) = x(n), \text{ 并已知系统是稳定的。试求其单位抽样响应。}$$

参考答案：

对给定的差分方程两边取Z变换，得

$$z^{-1}Y(z) - \frac{10}{3}Y(z) + zY(z) = X(z)$$

则

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1} - \frac{10}{3} + z} = \frac{z}{(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \\
 &= \frac{1}{3 - \frac{1}{3}} \left[\frac{z}{z-3} - \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \right] \\
 &= \frac{3}{8} \left[\frac{1}{1-3z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \right]
 \end{aligned}$$

可求得极点为

$$z_1 = 3, \quad z_2 = \frac{1}{3}$$

为了使系统稳定, 收敛区域必须包括单位圆, 故取 $1/3 < |z| < 3$; 当收敛域为 $1/3 < |z| < 3$ 时, $H(z)$ 第 1 项为左边序列, 第 2 项为右边序列, 则对应的序列为:

$$h(n) = -\frac{3}{8} \left[3^n u(-n-1) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \right]$$

第一、二章综合练习

一、填空题

1. 线性系统对信号的处理是符合叠加原理的。
2. 因果系统的时域充要条件是 $h(n)=0, n < 0$ 。
3. 序列 $x(n)$ 的傅立叶变换是 $x(n)$ 在 Z 平面单位圆上的 Z 变换。
4. 从模拟信号到数字信号要经过抽样、量化、编码三个过程。
5. 数字角频率 π 对应的模拟角频率为 $\pi \cdot f_s$ 。
6. 离散时间系统的时域特征可用 $h(n)$ 来描述, 也可用差分方程来描述。

$$1. \text{ 稳定系统的时域充要条件是 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

2. 因果、稳定系统的系统函数 $H(z)$ 的收敛域可表示为 $R_- < |z| \leq \infty, R_- < 1$ 。
3. Z 变换在单位圆上的值表示序列的频谱。
4. 从模拟信号到数字信号要经过抽样、量化、编码三个过程, 其中抽样过程是线性的。
5. 数字角频率 2π 对应的模拟角频率为 $2\pi \cdot f_s$ 。

6. 离散时间系统的时域特征可用差分方程来描述, 也可用 $h(n)$ 来描述。

1. 从模拟信号到数字信号要经过抽样、量化、编码三个过程。其中量化过程是非线性的。

2. 序列 $x(n)$ 的傅立叶变换在 S 平面为虚轴对应的拉氏变换, 而在 Z 平面为单位圆对应的 Z 变换。

3. 描述离散时间系统的方法, 时域有 $h(n)$ 、差分方程, 频域有 $H(z)$ 。

4. 线性时不变离散时间系统的时域分析和频域分析的方法有差分方程、单位脉冲响应和系统函数, 其中瞬态分析是差分方程和单位脉冲响应。

5. 系统函数称为全通函数的要求是幅频特性为常数 1。

6. 数字域频率 $\omega = 2\pi$ 所对应的信号的实际频率为采样频率 f_s 。

1. 序列 $x(n)$ 的傅立叶变换在 S 平面为虚轴对应的拉氏变换, 而在 Z 平面为单位圆对应的 Z 变换。

2. 描述离散时间系统的方法, 时域有 $h(n)$ 、差分方程, 频域有 $H(z)$ 。

3. 线性时不变离散时间系统的时域分析和频域分析的方法有差分方程、单位脉冲响应和系统函数, 其中稳态分析是系统函数。

4. 系统函数称为纯振幅函数的要求是相频特性为常数 0。

5. 序列 $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)$ 的周期是 12。

6. 采样信号的频谱是原模拟信号频谱的周期函数, 其周期为 Ω_s 或 f_s 。

1. 描述离散时间系统的方法, 时域有 $h(n)$ 、差分方程, 频域有 $H(z)$ 。

2. 序列 $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)$ 的周期是 24。

3. 某线性时不变离散时间系统的单位脉冲响应为 $h(n) = 0.3^n u(n)$, 则该系统的因果性为因果。

4. 已知某离散时间系统的输入输出关系是 $y(n) = x(n-1) + 2x(n-2)$, 试判断系统的线性为线性。

5. 有一连续信号 $x_a(t) = \cos(40\pi t)$, 用采样间隔 $T = 0.02s$ 对 $x_a(t)$ 进行采样, 则采样信号

49

$\hat{x}_a(t)$ 的表达式为 $\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(0.8\pi n)\delta(t-0.02n)$ 。

6. 对于稳定的因果系统，如果输入一个频率为 ω_0 的复正弦序列 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ ，则其输出 $y(n)$ 为 $e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$ ，设系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 已知。

1. 要使一个正弦序列 $x(n) = A\sin(\omega n + \varphi)$ 是周期序列，必须满足的条件是：数字频率 ω 是 2π 的函数。

2. 某线性时不变离散时间系统的单位脉冲响应为 $h(n) = 0.3^n u(n)$ ，则该系统的稳定性为稳定。

3. 已知某离散时间系统的输入输出关系是 $y(n) = x(n-1) + 2x(n-2)$ ，试判断系统的时不变性为时不变。

4. 若一个理想采样及恢复系统，采样频率为 $\Omega_s = 6\pi$ ，采样后经一个带宽为 3π ，增益为 $1/3$ 的理想低通还原。现有输入 $x_a(t) = \cos \pi t + \cos 2\pi t + \cos 5\pi t$ ，输出信号 $y(n)$ 为 $y(n) = \cos 2\pi n + 2\cos \pi n$ 。

5. 设序列 $h(n) = 2\delta(n+1) + \delta(n) - \delta(n-1)$ ，则 $H(e^{j\omega})|_{\omega=0}$ 的值为 2。

6. 已知一个线性时不变离散系统的系统函数为 $H(z) = \frac{0.5}{(1-0.3z^{-1})(1-0.1z)}$ ，若收敛域为 $10^{-4} < |z| \leq \infty$ ，系统的因果稳定性为因果非稳定性。

1. 序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续周期函数，周期为 2π 。

2. 若 $h(n)$ 为实序列，则 $|H(e^{j\omega})|$ 是偶对称的。

3. 稳定系统的收敛域必须包括单位圆。

4. 表达式 $X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 的物理意义是单位圆上的 Z 变换。

5. 已知系统的输入输出关系为 $y(n) = 3x(n) + 8$ ，则系统的线性性为非线性。

6. 已知某离散时间系统的输入输出关系是 $y(n) = x(n-1) + 2x(n-2)$ ，试判断系统的因果

特性为因果。

1. 已知系统的输入输出关系为 $y(n) = 3x(n) + 8$ ，则系统的时不变性为时不变。
2. 有一连续信号 $x_a(t) = \cos(40\pi t)$ ，用采样间隔 $T = 0.02s$ 对 $x_a(t)$ 进行采样，则采样后所得时域离散信号 $x(n)$ 的周期为 5。
3. 已知一个线性时不变离散系统的系统函数为 $H(z) = \frac{0.5}{(1-0.3z^{-1})(1-0.1z)}$ ，若收敛域为 $0.3 < |z| < 10$ ，系统的因果稳定性为非因果稳定性。
4. 若 $h(n)$ 为实序列，则 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 是奇对称的。
5. Z 变换在单位圆上的值表示序列的频谱。
6. 某线性时不变离散时间系统的单位脉冲响应为 $h(n) = 3^n u(n)$ ，则该系统的因果性及稳定性为因果非稳定。

二、判断改错题

在题后的括号内，正确的打“√”，错误的打“×”，并在题下空处进行改正。

1. 实际工作中，抽样频率总是选得大于或等于两倍模拟信号的最高频率。 (√)
2. 稳定系统一定是因果系统。 (×)
不一定
3. 差分方程的求解方法有递推法、时域经典法、卷积法和变换域法，其中递推法的求解依赖于初始条件和给定输入。 (√)
4. 因果性反映了系统的合理性。 (×)
可实现性

1. 当输入序列不同时，线性时不变系统的单位脉冲响应不会改变。 (√)
2. 只要因果序列 $x(n)$ 有收敛的 Z 变换形式，则其“序列傅氏变换”就一定存在。 (×)
不一定
3. 差分方程的求解方法有递推法、时域经典法、卷积法和变换域法，其中递推法的求解依赖

51

于初始条件和给定输入。

(√)

4. 稳定性反映了系统的可实现性。

(×)

合理性

1. 离散时间系统的滤波器特性可以由其幅频特性直接看出。

(√)

2. 右边序列一定是因果序列。

(×)

不一定

3. 稳定系统的收敛域必须包括单位圆。

(√)

4. 因果性反映了系统的合理性。

(×)

可实现性

1. 某系统满足 $T[kx(n)] = ky(n)$ ，并不可判断系统为线性系统。

(√)

2. 一个线性时不变系统，在时域可由差分方程确定。

(×)

由差分方程加初始条件

3. 因果系统的收敛域必须包括 $z = \infty$ 。

(√)

4. 稳定性反映了系统的可实现性。

(×)

合理性

1. 某系统满足 $T[x_1(n) + x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$ ，并不可判断系统为线性系统。

(√)

2. 一个线性时不变系统，在 Z 域可由系统函数确定。

(×)

由系统函数加收敛域

3. 因果稳定系统的系统函数的极点均在单位圆内。

(√)

4. 时不变性反映了系统的可叠加性。

(×)

延时不变性

1. 离散时间系统的延时器特性可以由其相频特性直接看出。

(√)

2. 有限长序列一定是因果序列。

(×)

不一定

3. 因果稳定系统的系统函数的极点均在单位圆内。 (✓)

4. 线性性反映了系统的延时不变性。 (×)

可叠加性

1. 序列 $x(n)$ 有收敛的 Z 变换形式，其“序列傅氏变换”并不一定存在。 (✓)

2. 当输入序列不变时，线性时不变系统的单位脉冲响应也不变。 (×)

线性时不变系统的单位脉冲响应与输入序列无关。

3. 右边序列的收敛域总在某个圆的圆外区。 (✓)

4. 时不变性反映了系统的可叠加性。 (×)

延时不变性

1. 实际工作中，抽样频率总是选得大于或等于两倍模拟信号的最高频率。 (✓)

2. 因果系统一定是稳定系统。 (×)

不一定

3. 左边序列的收敛域总在某个圆的圆内区。 (✓)

4. 线性性反映了系统的延时不变性。 (×)

可叠加性

三、简答题

1. 由“模拟信号的数字化处理”方框图回答以下问题：

(1) A/D 变换有哪几个过程？其中哪个过程为线性，哪个过程为非线性？

(2) 简述模拟信号、离散时间信号、数字信号各自的特点和关系。

答：(1) 抽样、量化和编码。其中抽样过程是线性的，量化和编码过程是非线性的。

(2) t 和 $x(t)$ 均连续为模拟信号； $t=nT$ 、 $x(t)$ 仍为连续为离散时间信号； t 和 $x(t)$ 均离散为数字信号。离散时间信号是模拟信号成为数字信号的桥梁。

2. 列表表示 $x(n)$ 的不同形式与 $X(z)$ 的 ROC 的对应关系。

答：

53

$x(n)$ 的形式	$X(z)$ 的 ROC
有限长序列 $n(n_1 \sim n_2)$	$0 < z < \infty$ $0? \quad ?\infty$
右边序列 $n(n_1 \sim +\infty)$	$R_{x-} < z < \infty$ $? \infty$
左边序列 $n(-\infty \sim n_2)$	$0 < z < R_{x+}$ $0?$
双边序列 $n(-\infty, +\infty)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$

1. 离散时间信号作为理想化、线性化的数字信号的条件是什么？对数字信号和系统进行分析的总思路是什么？

答：理想化、线性化的条件是（1）抽样是理想的（2）量化等级是无限长的。分析的总思路是：首先把模拟信号和系统变为离散时间信号和系统进行分析；然后再做有限字长效应的研究，把离散时间信号和系统变为数字信号和系统。

2. 简述确定 $X(z)$ 的确切收敛域（ROC）的方法。

答：（1）利用 $X(z)$ 的收敛域的充要条件来确定，即满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

的 z 的范围。

此方法由于是依据了收敛的 $X(z)$ 的概念，所以是理论上一定成立的方法。

（2）利用 $X(z)$ 的解析式是一个等比级数的有限求和公式来确定，即若

$$X(z) = \frac{a_0}{1-q}$$

则 $|q| < 1$ 右边序列 $|q| > 1$ 左边序列

此方法由于是依据了等比级数有限求和公式成立的概念，所以是有条件成立的方法。

（3）利用 $X(z)$ 收敛域定义的一个推论来确定，即收敛域内无 $X(z)$ 的极点，则推论：

$X(z)$ 的极点只可能在 ROC 外, 但一定有极点在 ROC 上。

此方法由于依据了收敛域定义的推论的概念, 所以是无条件成立的方法。又由于 $X(z)$ 的极点的判断较容易, 所以此方法较实用。

1. 简述采样定理的内容。

答: 如果要求信号经理想抽样后的频谱不发生混叠, 抽样频率 Ω_s 必须大于或等于原信号频谱中最高频率 Ω_m 的两倍。

2. 简述数字信号处理中常用 Z 变换的三条性质。

答: (1) 线性性质: 如果: $Z[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$Z[y(n)] = Y(z), \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则对任意常数 a、b, Z 变换都能满足以下等式:

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \quad \max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$$

(2) 移位性质: 如果: $Z[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则序列 $x(n - n_0)$ 的 Z 变换为: $Z[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

(3) 序列卷积: 如果: $Z[x(n)] = X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$Z[y(n)] = Y(z), \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

且: $w(n) = x(n) * y(n)$

则: $Z[w(n)] = X(z) \cdot Y(z)$, $\max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$

1. 试用单位脉冲序列表示单位阶跃序列和矩形序列。

答:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

$$R_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k)$$

2. 试写出 S 平面和 Z 平面的对应关系。

55

答: S 平面的虚轴对应于 Z 平面的单位圆上;

S 平面的左半平面对应于 Z 平面的单位圆内的区域;

S 平面的右半平面对应于 Z 平面的单位圆外的区域。

1. 简述线性系统的定义及判定条件。

答: 定义: 线性系统是指系统对信号的处理是符合叠加原理的。

判定条件: 若系统输入序列分别为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 时, 系统输出序列分别为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$, 那么当系统输入序列为 $ax_1(n) + bx_2(n)$ 时, 有:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

则该系统为线性系统。

2. 简述系统函数的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的作用。

答: 系统函数的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是一个非常重要的物理量, 它通常为复数, 且为 ω 的函数:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

其中 $|H(e^{j\omega})|$ 称为系统函数的幅频特性; 而 $\varphi(\omega)$ 称为系统函数的相频特性, 它们分别表示了系统的幅度和相位特性。由于 $|H(e^{j\omega})|$ 决定着输出幅度的大小, 所以系统的滤波特性可以由幅频特性直接给出; 而 $\varphi(\omega)$ 决定着输出相位的大小, 所以系统的延时特性可以由相频特性直接给出。

1. 简述时不变系统的定义及判定条件。

答: 定义: 时不变系统是指系统对信号的处理 (运算) 不随时间的改变而改变。

判定条件: 若系统输入序列为 $x(n)$ 时, 系统输出序列为 $y(n)$, 那么当系统输入为 $x(n - n_0)$ 时, 有:

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$$

则该系统为时不变系统。

2. 从差分方程出发, 简述时域分析法和 Z 域分析法的内容。

答:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h(n)}{y(n) = x(n) * h(n)} \\ h(n) \equiv 0, n < 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{H(z)}{Y(z) = X(z) \cdot H(z)} \\ H(z) \text{的ROC: } R_{x-} < |z| \leq \infty \\ H(z) \text{的ROC: 含单位圆} \end{array} \right\}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

1. 简述因果系统的定义及判定条件。

答: 因果系统是指系统现时刻的输出值 $y(n)$ 仅决定于现时刻的输入值 $x(n)$ 以及以前各时刻的若干输入值 $x(n-1)$ 、 $x(n-2)$ 、……, 而与现时刻以后即“未来时刻”的输入值 $x(n+1)$ 、 $x(n+2)$ 、……等无关; 或者说, 系统是符合: “有因才有果”; “前因后果”关系的。

判定条件: $h(n) \equiv 0, n < 0$ 。

2. 简述 Z 变换收敛域的定义和充要条件。

答: 使 $X(z)$ 一致收敛的 z 的取值范围称为 Z 变换的收敛域 (ROC), 由 $X(z)$ 的定义式和收敛域的概念不难给出级数收敛的充分必要条件是满足绝对可和条件, 即:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| &< \infty \\ \downarrow z = re^{j\omega} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} &< \infty \end{aligned}$$

由此可知: 一般来说, Z 变换在 Z 平面上的一个环形区域中收敛, 即:

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

1. 简述稳定系统的定义及判定条件。

答: 稳定系统是指在系统输入序列幅度有界的情况下, 系统输出序列的幅度亦有界。

判定条件: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

57

2. 简述 Z 反变换的计算方法。

答：求 Z 反变换的方法通常有以下几种：

- a. 围线积分法（留数法）；
- b. 部分分式展开法（部分分式法）；
- c. 长除法（幂级数展开法）；
- d. 利用基本 Z 变换公式和基本 Z 变换性质。

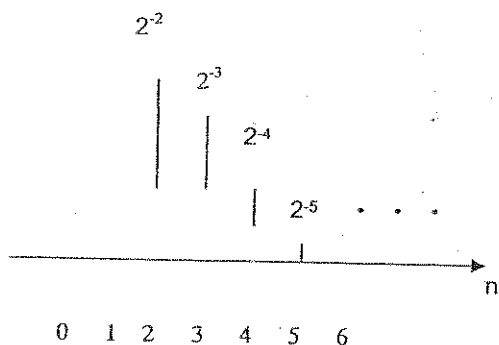
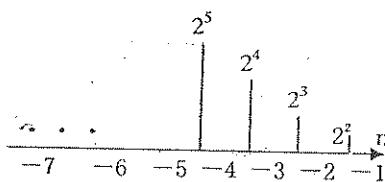
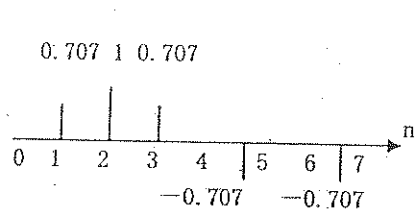
四、画图题

1. 请图示下述序列：

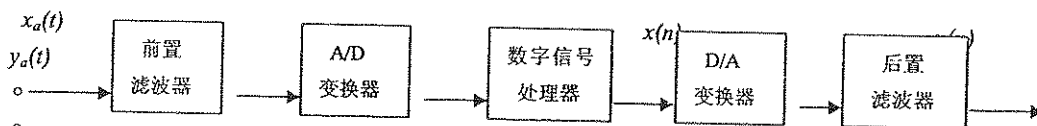
(1) $\sin(\omega_0 n)R_8(n) + \delta(n-6)$ ，其中 $\omega_0 = 2\pi/8$

(2) $2^{-n}u(-n-2)$

(3) $2^{-n}u(n-2)$



2. 请给出模拟信号数字化处理系统的基本组成方框图，并说明其中所需滤波器的作用和相应的截止频率。

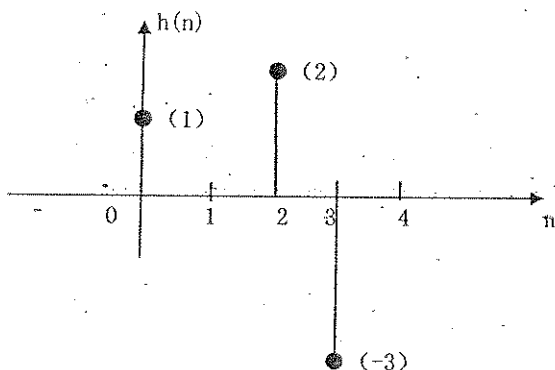


模拟信号数字化处理系统的基本组成方框图
需要前置滤波器和后置滤波器共两个，它们的截止频率均为 $f_s/2$ 。

3. 某线性移不变系统当输入 $x(n] = \delta(n-3)$ 时，输出

$y(n] = \delta(n-3) + 2\delta(n-5) - 3\delta(n-6)$ ，试画出其单位脉冲抽样响应 $h(n)$ 波形。

$y(n] = x(n] * h(n)$ 有： $\delta(n-3) + 2\delta(n-5) - 3\delta(n-6) = \delta(n-3) * h(n)$ ，
 $h(n-3) = \delta(n-3) + 2\delta(n-5) - 3\delta(n-6)$ ， $h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) - 3\delta(n-3)$ ，单位
抽样响应 $h(n)$ 的波形：



五、计算题

1. 已知： $H(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}}$ ，求出对应 $H(z)$ 的各种可能的单位脉冲响应 $h(n)$ 的

表达式。

参考答案：

由 $H(z)$ 的表达式可求得极点为 $z_1 = \frac{1}{2}$ ， $z_2 = 2$ ，则收敛域有 3 种可能：

$$|z| < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2, \quad |z| > 2$$

(1) 当收敛域为 $|z| < \frac{1}{2}$ 时， $H(z)$ 式中第 1、2 项都为左边序列，则对应的序列为：

$$h(n) = - \left[3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^{n+1} \right] u(-n-1)$$

(2) 当收敛域为 $\frac{1}{2} < |z| < 2$ 时， $H(z)$ 第 1 项为右边序列，第 2 项为左边序列，则对应的
序列为：

59

$$h(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2^{n+1} u(-n-1)$$

(3) 当收敛域为 $|z| > 2$ 时, $H(z)$ 式中第 1、2 项都为右边序列, 则对应的序列为:

$$h(n) = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^{n+1} \right] u(n)$$

2. 研究一个输入为 $x(n]$ 和输出为 $y(n]$ 的时域线性离散移不变系统, 已知它满足

$$y(n-1) - \frac{10}{3}y(n) + y(n+1) = x(n), \text{ 并已知系统是稳定的。试求其单位抽样响应。}$$

参考答案:

对给定的差分方程两边取Z变换, 得

$$z^{-1}Y(z) - \frac{10}{3}Y(z) + zY(z) = X(z)$$

则

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1} - \frac{10}{3} + z} = \frac{z}{(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8} \left[\frac{1}{1-3z^{-1}} - \frac{1^*}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \right]$$

可求得极点为: $z_1 = 3, z_2 = \frac{1}{3}$

为了使系统稳定, 收敛区域必须包括单位圆, 故取 $1/3 < |z| < 3$; 当收敛域为

$1/3 < |z| < 3$ 时, $H(z)$ 第 1 项为左边序列, 第 2 项为右边序列, 则对应的序列为:

$$h(n) = -\frac{3}{8} \left[3^n u(-n-1) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \right]$$

3. 已知: $H(z) = \frac{4}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{3}{1 - 3z^{-1}}$, 求出对应 $H(z)$ 的各种可能的单位脉冲响应 $h(n)$

的表达式。

参考答案:

由 $H(z)$ 的表达式可求得极点为 $z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = 3$, 则收敛域有 3 种可能:

$$|z| < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 3, \quad |z| > 3$$

(1) 当收敛域为 $|z| < \frac{1}{3}$ 时, $H(z)$ 式中第 1、2 项都为左边序列, 则对应的序列为:

$$h(n) = - \left[4 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3^{n+1} \right] u(-n-1)$$

(2) 当收敛域为 $\frac{1}{3} < |z| < 3$ 时, $H(z)$ 第 1 项为右边序列, 第 2 项为左边序列, 则对应的序列为:

$$h(n) = 4 \left(\frac{1}{3} \right)^n u(n) - 3^{n+1} u(-n-1)$$

(3) 当收敛域为 $|z| > 3$ 时, $H(z)$ 式中第 1、2 项都为右边序列, 则对应的序列为:

$$h(n) = \left[4 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3^{n+1} \right] u(n)$$

4. 研究一个输入为 $x(n]$ 和输出为 $y(n]$ 的时域线性离散移不变系统, 已知它满足

$$y(n-1) - \frac{5}{2}y(n) + y(n+1) = x(n), \text{ 并已知系统是稳定的。试求其单位抽样响应。}$$

参考答案:

对给定的差分方程两边取 Z 变换, 得

$$z^{-1}Y(z) - \frac{5}{2}Y(z) + zY(z) = X(z)$$

则

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1} - \frac{5}{2} + z} = \frac{z}{(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} \left[\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right] \end{aligned}$$

可求得极点为

$$z_1 = 2, \quad z_2 = \frac{1}{2}$$

为了使系统稳定, 收敛区域必须包括单位圆, 故取 $1/2 < |z| < 2$; 当收敛域为

$1/2 < |z| < 2$ 时, $H(z)$ 第 1 项为左边序列, 第 2 项为右边序列, 则对应的序列为:

$$h(n) = -\frac{2}{3} \left[2^n u(-n-1) + \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) \right]$$

61

5. 研究一个满足下列差分方程的线性移不变系统, 该系统不限定为因果、稳定系统。利用方程的零极点图, 试求系统单位抽样响应的三种可能选择方案。

$$y(n-1) - \frac{5}{2}y(n) + y(n+1) = x(n)$$

参考答案:

$$Y(z)z^{-1} - \frac{5}{2}Y(z) + Y(z)z = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1} - \frac{5}{2} + z}$$

$$= \frac{z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \right]$$

(1) 此题 $z_1 = 2, z_2 = 1/2$, 可知当收敛区域为 $|z| > 2$, 则系统是非稳定的, 但是因果的。当收敛域为 $|z| > 2$ 时, $H(z)$ 式中第 1、2 项都为右边序列, 其单位抽样响应为:

$$h(n) = \frac{2}{3}(2^n - 2^{-n})u(n)$$

(2) 当收敛区域为 $\frac{1}{2} < |z| < 2$, 则系统是稳定的但是非因果的。当收敛域为 $\frac{1}{2} < |z| < 2$ 时, $H(z)$ 第 1 项为左边序列, 第 2 项为右边序列, 其单位抽样响应为:

$$h(n) = -\frac{2}{3} \left[2^n u(-n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \right]$$

(3) 类似地, 当收敛区域为 $|z| < \frac{1}{2}$ 时, 则系统是非稳定的, 又是非因果的。当收敛

域为 $|z| < \frac{1}{2}$ 时, $H(z)$ 式中第 1、2 项都为左边序列, 其单位抽样响应为:

$$h(n) = -\frac{2}{3}(2^n - 2^{-n})u(-n-1)$$

6. 已知下列差分方程描述的是一个线性移不变因果系统:

$$y(n] = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

(1) 求此系统的系统函数, 并指出其收敛域;

(2) 求此系统的单位抽样响应。

参考答案:

(1) 对题中给出的差分方程的两边作 Z 变换, 得

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}X(z)$$

所以

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{(z - a_1)(z - a_2)}$$

可求得零点为

$$z = 0, \quad z = \infty$$

极点为

$$z = a_1 = 0.5(1 + \sqrt{5}) = 1.62, \quad z = a_2 = 0.5(1 - \sqrt{5}) = -0.62$$

又因为是因果系统, 所以 $|z| > 1.62$ 是其收敛区域。

$$(2) \text{ 因为 } H(z) = \frac{z}{(z - a_1)(z - a_2)} = \frac{1}{a_1 - a_2} \left[\frac{z}{z - a_1} - \frac{z}{z - a_2} \right]$$

$$= \frac{1}{a_1 - a_2} \left[\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} - \frac{1}{1 - a_2 z^{-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{a_1 - a_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_1^n z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_2^n z^{-n} \right]$$

所以

$$h(n) = \frac{1}{a_1 - a_2} (a_1^n - a_2^n) u(n)$$

式中

$$a_1 = 1.62, \quad a_2 = -0.62$$

由于 $H(z)$ 的收敛区域不包括单位圆, 故这是个不稳定系统。

7. 研究一个满足下列差分方程的线性移不变系统, 该系统不限定为因果、稳定系统。利用方程的零极点图, 试求系统单位抽样响应的三种可能选择方案。

$$y(n-1) - \frac{17}{4}y(n) + y(n+1) = x(n)$$

参考答案:

63

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1} - \frac{17}{4} + z}$$

$$Y(z)z^{-1} - \frac{17}{4}Y(z) + Y(z)z = X(z) = \frac{z}{(z-4)(z-\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{4}{15} \left[\frac{1}{1-4z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \right]$$

- (1) 此题 $z_1 = 4, z_2 = 1/4$, 可知当收敛区域为 $|z| > 4$, 则系统是非稳定的, 但是因果的。当收敛域为 $|z| > 4$ 时, $H(z)$ 式中第 1、2 项都为右边序列, 其单位抽样响应为:

$$h(n) = \frac{4}{15} (4^n - 4^{-n}) u(n)$$

- (2) 当收敛区域为 $\frac{1}{4} < |z| < 4$, 则系统是稳定的但是非因果的。当收敛域为 $\frac{1}{4} < |z| < 4$ 时, $H(z)$ 第 1 项为左边序列, 第 2 项为右边序列, 其单位抽样响应为:

$$h(n) = -\frac{4}{15} \left[4^n u(-n-1) + \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \right]$$

- (3) 类似地, 当收敛区域为 $|z| < \frac{1}{4}$ 时, 则系统是非稳定的, 又是非因果的。当收敛域为 $|z| < \frac{1}{4}$ 时, $H(z)$ 式中第 1、2 项都为左边序列, 其单位抽样响应为:

$$h(n) = -\frac{4}{15} (4^n - 4^{-n}) u(-n-1)$$

8. 已知下列差分方程描述的是一个线性移不变因果系统:

$$y(n] = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

- (1) 求此系统的系统函数, 并指出其收敛域;
(2) 此系统是一个不稳定系统, 请找一个满足上述差分方程的稳定 (非因果) 系统的单位抽样响应。

参考答案:

- (1) 对题中给出的差分方程的两边作 Z 变换, 得

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}X(z)$$

所以

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{(z-a_1)(z-a_2)}$$

极点为: $z = a_1 = 0.5(1 + \sqrt{5}) = 1.62$, $z = a_2 = 0.5(1 - \sqrt{5}) = -0.62$

又因为因果系统, 所以 $|z| > 1.62$ 是其收敛区域。

(2) 若要使系统稳定, 则收敛区域应包括单位圆, 因此选 $H(z)$ 的收敛区域为

$|a_2| < |z| < |a_1|$, 即 $0.62 < |z| < 1.62$, 则

$$H(z) = \frac{1}{a_1 - a_2} \left[\frac{z}{z - a_1} - \frac{z}{z - a_2} \right]$$

式中第一项对应一个非因果序列, 而第二项对应一个因果序列。所以有:

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{a_2 - a_1} [a_1^n u(-n-1) + a_2^n u(n)] \\ &= -0.447 \times [(1.62)^n u(-n-1) + (-0.62)^n u(n)] \end{aligned}$$

此系统是稳定的, 但不是因果的。

第三章综合练习

一、填空题

1. 表达式 $X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$ 的物理意义是

序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样。

2. 设实序列 $x(n)$ 的 10 点 DFT 为 $X(k)$ ($0 \leq k \leq 9$), 已知 $X(1) = 3 + j$, 则 $X(9)$ 为 $3 - j$ 。

1. 设实连续信号 $x(t)$ 中含有频率 40Hz 的余弦信号, 现用 $f_s = 120\text{Hz}$ 的采样频率对其进行采样, 并利用 $N=1024$ 点 DFT 分析信号的频谱, 计算频谱的峰值出现在第 341 条谱线附近。

2. DFT 与 DFS 有密切关系, 因为有限长序列可以看成周期序列的主值区间。

1. DFT 与 DFS 有密切关系, 因为周期序列可以看成有限长序列的周期延拓。

2. 频域 N 点采样造成时域的周期延拓, 其周期是 N 。

1. 有限长序列 $x(n)$ 的离散傅立叶变换 $X(k)$ 就是 $x(n)$ 在 z 平面单位圆上的等距离抽样点上的 z 变换。

2. 补零是改善栅栏效应的一个方法, 通过补零运算可得到高密度谱。

65

1. 有限长序列 $x(n)$ 的离散傅立叶变换 $X(k)$ 就是 $x(n)$ 在 Z 平面单位圆上的等距离抽样点上的 Z 变换。

2. 若序列为无限长序列, 可以存在 DTFT, 但不存在 DFT。

1. 某序列的 DFT 表达式为 $X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)W_N^{nk}$ 。由此可看出, 该序列的时域长度是 M 。

2. 模拟时域抽样不失真条件为 $f_s \geq 2f_m$ 。数字频域抽样不失真条件为 $N=M$ 。

1. 某序列的 DFT 表达式为 $X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)W_N^{nk}$ 。由此可看出, 变换后数字域上相邻两个频

率样点的间隔是 $2\pi/N$ 。

2. 对信号进行频谱分析时, 截断信号引起的截断效应表现为频谱泄露和谱间干扰两个方面。

1. 对信号进行频谱分析时, 截断信号引起的截断效应表现为频谱泄露和谱间干扰。

2. DFT 与 DFS 有密切关系, 因为有限长序列隐含周期性。

二、判断改错题

在题后的括号内, 正确的打“√”, 错误的打“×”, 并在题下空处进行改正。

1. 有限长序列的离散傅立叶变换 $X(k)$ 就是在 Z 平面单位圆上的等分点上的 Z 变换。 (√)

2. FFT 与 DFT 在本质上根本不相同。 (×)

根本相同

1. FFT 算法使信号的实时处理成为可能。 (√)

2. 有限长序列由于不存在离散时间傅立叶变换, 所以才去求它的离散傅立叶变换。 (×)

存在

1. 对于离散傅里叶变换而言, 其信号特点是: 时域、频域均离散周期。 (√)

2. 实序列 $x(n)$ 的 10 点 DFT $[x(n)] = X(k)$ ($0 \leq k \leq 9$), 已知 $X(1) = 1 + j$,

则 $X(9) = 1 + j$ 。 (×)

$$X(9) = 1 - j$$

1. FFT 是序列傅里叶变换 DFT 的快速算法。 (√)

2. 离散傅里叶变换 DFT 与离散傅里叶级数变换 DFS 之间有密切的联系, 如 DFT 经过截取主值可得到对应的 DFS。 (×)

周期延拓

1. FFT 不是离散傅里叶级数变换 DFS 的快速算法。 (√)

2. 离散傅里叶变换 DFT 与离散傅里叶级数变换 DFS 之间有密切的联系, 如 DFS 经过周期延拓可得到对应的 DFT。 (×)

截取主值

1. 对于离散傅里叶变换而言, 其信号特点是: 时域、频域均离散周期。 (√)

2. 实序列 $x(n)$ 的 10 点 $DFT[x(n)] = X(k)$ ($0 \leq k \leq 9$), 已知 $X(2) = 1 + j$,

则 $X(8) = 1 + j$ 。 (×)

$$X(8) = 1 - j$$

1. FFT 算法使信号的实时处理成为可能。 (√)

2. 有限长序列由于不存在离散时间的 Z 变换, 所以才去求它的离散傅立叶变换。 (×)

存在

1. 有限长序列 $x(n)$ 的离散傅立叶变换 $X(k)$ 就是在 Z 平面单位圆上的等分点上的 Z 变换。 (√)

2. DFS 与 DFT 在本质上没有联系。 (×)

有联系

三、简答题

67

1. 简述 DFT 隐含周期性 (离散傅氏变换 DFT 与离散傅氏级数变换 DFS 有什么关系?)。

答:

$$x(n) \xleftrightarrow[\text{IDFT}]{\text{DFT}} X(k)$$

截取主值 \uparrow 周期延拓 周期延拓 \downarrow 截取主值

$$x_p\langle n \rangle \xleftrightarrow[\text{IDFS}]{\text{DFS}} X_p\langle k \rangle$$

2. 简述用圆周卷积计算线性卷积的条件。

答: 设 $x_1(n)$ 是长度为 N_1 的有限长序列, $x_2(n)$ 是长度为 N_2 的有限长序列, 则线性卷积为

$$y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$y_l(n)$ 是一个长度为 N_1+N_2-1 的有限长序列。

设 $x_1(n)$ 是长度为 L 的有限长序列, $x_2(n)$ 也是长度为 L 的有限长序列, 则圆周卷积为

$$y_c(n) = x_1(n) \odot x_2(n)$$

$y_c(n)$ 是一个长度为 L 的有限长序列。

所以 L 点圆周卷积 $y_c(n)$ 是线性卷积 $y_l(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。因

为 $y_l(n)$ 有 N_1+N_2-1 个非零值, 所以只有当 $L=N_1+N_2-1$ 时, 各延拓周期才不会混叠, 也

即要使圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是: $L=N_1+N_2-1$ 。

3. DFT 和离散时间傅里叶变换 DTFT 之间的关系是什么? 和 Z 变换之间的关系又是什么?

答: $X(k)$ 是离散时间的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的等间隔采样值, 采样间隔为

$$\Delta\omega = 2\pi/N, \text{ 即 } X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}。 X(k) \text{ 是序列 } Z \text{ 变换 } X(z) \text{ 在单位圆上的等距离}$$

采样, 即 $X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}}。$

4. 试给出 $x(n)$ 离散时域到 $X(k)$ 离散频域变换的三条途径 (允许在中间添加某些域),

注明变换的名称, 写出变换的表达式 (或叙述其含义)。

答: (1) DFT:
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

(2) Z 变换后采样:
$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}, X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

(3) DTFT 变换后采样: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$, $X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$

5. 在离散傅里叶变换中引起频谱混叠和泄漏的原因是什么, 怎样减小这种效应?

答: 频谱混叠是因为不等式 $f_s \geq 2f_c$ 没有得到满足, 可令 $f_s \geq 2f_c$; 漏泄是因截断而起, 可选用其他形式的窗函数。

6. 试用表归纳 4 种傅里叶变换的形式, 并给出四种变换形式中最一般的规律。

答:

4 种傅里叶变换形式的归纳

时 间 函 数	频 率 函 数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期 (T_p)	非周期和离散 ($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)
离散 (T) 和非周期	周期 ($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$) 和连续
离散 (T) 和周期 (T_p)	周期 ($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$) 和离散 ($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)

由上可见: 时域和频域变换的一般规律是, 一个域的离散对应另一个域的周期函数 (周期延拓), 一个域的连续必定对应另一个域的非周期函数。

7. 简述时域采样定理和频域采样定理的内容。

答: 做一个概念的类比, 时域采样、频域周期延拓, 如不造成频域混叠, 延拓周期 Ω_s (或 f_s) 必须大于或等于原模拟信号 (非序列 $x(n)$) 频宽, 即满足 $f_s \geq 2f_c$ 。则频域采样、时域周期延拓, 如不造成时域混叠, 延拓周期 N (时间周期 NT) 必须大于或等于原非周期信号 (非周期序列) 时宽, 即满足 $N \geq M$ 。

8. 写出序列 $x(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 的离散时间傅氏变换 $X(e^{j\omega})$ 、离散傅氏变换 $X(k)$ 和 Z 变换 $X(z)$ 的定义式, 并说明这三种变换之间的关系。

答:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

69

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} \text{ 或 } X(k) \text{ 是序列傅氏变换的采样值。}$$

$$X(k) = X(z) \Big|_{z = W_N^{-k}}, \text{ 或 } X(k) \text{ 是该序列 } Z \text{ 变换单位圆上等距离的采样值。}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z = e^{j\omega}}, \text{ 或序列傅氏变换实质上就是单位圆上的 } Z \text{ 变换。}$$

四、画图题

暂无。

五、计算题

1. 已知某有限长序列 $x(n) = (n+1)R_4(n)$, 求该序列的离散傅里叶变换 $X(k)$ 。
2. 已知某有限长序列 $x(n) = \sum_{k=0}^3 (k+1)\delta(n-k)$, 求该序列的离散傅里叶变换 $X(k)$ 。
3. 已知某有限长序列 $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$, $n=0, 1, 2, 3$, 求该序列的离散傅里叶变换 $X(k)$ 。
4. 已知某有限长序列 $x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 3, x(3) = 4$, 求该序列的离散傅里叶变换 $X(k)$ 。

参考答案:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}; \quad k=0, 1, 2, 3; \quad N=4, \text{ 得:}$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 0} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1} + 3e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 4e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3}$$

$$= 1 + 2(-j) + 3(-1) + 4j = -2 + 2j$$

$$X(2) = e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 0} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 1} + 3e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 2} + 4e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= 1 + (-2) + 3 + 4(-1) = -2$$

$$X(3) = e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 0} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 1} + 3e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 2} + 4e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 3}$$

$$= 1 + 2j + (-3) + (-4j) = -2 - 2j$$