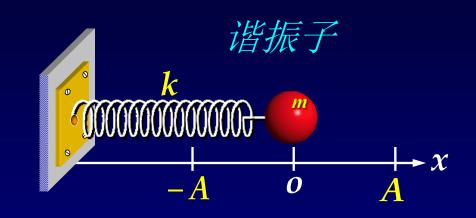
§ 9.1 简谐振动 § 9.2 旋转矢量

#### 一、简谐振动(谐振动)的描述

简谐振动:恢复力与位移关系为F = -kx的振动。

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \iff \omega^2 = \frac{k}{m}$$



§ 9. 1-2 简谐振动 旋转矢量

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \longrightarrow x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
 运动方程

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$
  $a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ 

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

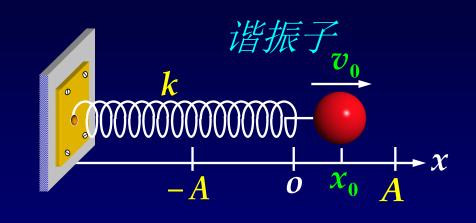
$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

 $x = x_0 = A\cos \varphi$ ,  $v = v_0 = -\omega A\sin \varphi$ 

●A:振幅,反映系统能

量大小,与初始条 件有关。

设 *t* = 0 时:



$$x_0 = A\cos\varphi$$

$$v_0 = -\omega A \sin \varphi$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

● Ø 角频率或园频率,反映振动快慢,系统属性。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

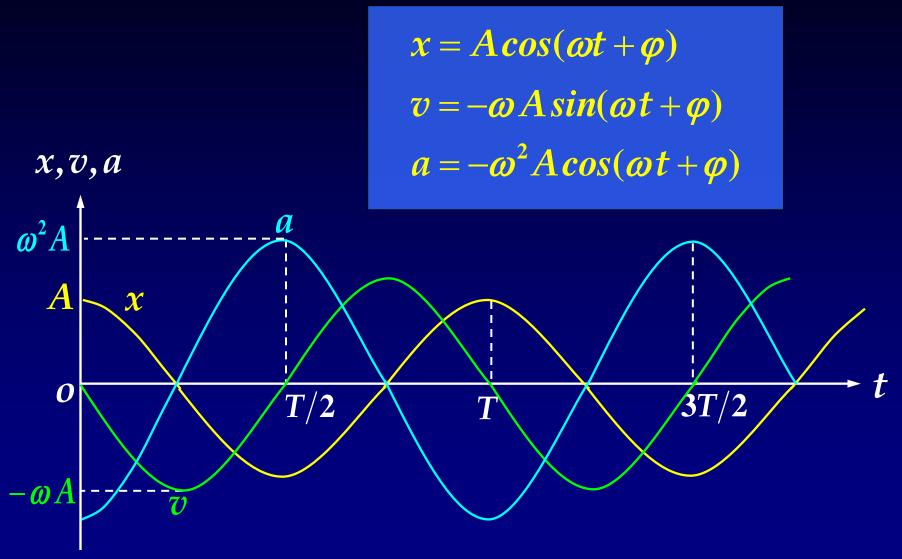
 $ot + \varphi$  相位或周相或相,反映谐振子振动状态。

$$\phi(t) = \omega t + \varphi \longrightarrow x, v, a$$

**9**: 初相位,反映谐振子初始时刻振动状态。

§ 9. 1-2 简谐振动 旋转矢量

# 二、谐振动曲线



## 三、谐振动的图解法——旋转矢量法

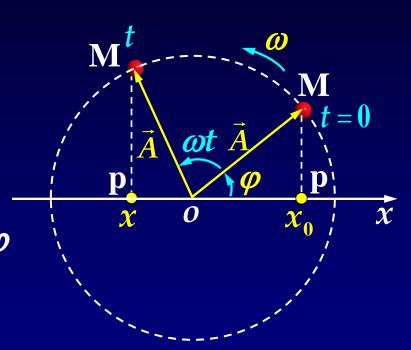
旋转矢量 A: 作逆时针匀角速率 ω 旋转。

t 时刻其投影 p 的坐标:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

即做简谐振动。

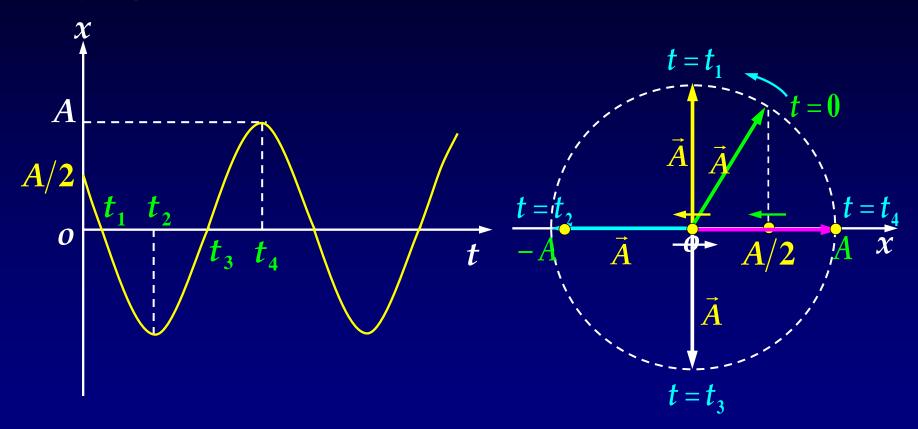
t 时刻 $\overline{A}$ 与+x 轴夹角 =  $\omega t$  +  $\varphi$  对应于物体谐振动的相位。



 $\phi(t) = \omega t + \varphi \longleftrightarrow$  旋转矢量  $\vec{A} \longleftrightarrow x, v, a$ 

例如,下图中 t=0、 $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$ 、 $t_4$ 时刻谐振动所对应

的旋转矢量:  $x,v,a \longrightarrow$  旋转矢量  $\tilde{A}$ 



思考:该振动的初相位  $\varphi = ?$ 

# 四、振动问题求解

美键: A、 $\omega$ 、 $\varphi$ 的求解

- 1. 明确初始条件,如已知 $x_0$ , $v_0$ 方向等;
- 2. 画出与初始条件相对应的 旋转矢量;
- 3. 该旋转矢量与+x轴的夹角 即为初相位 $\varphi$ 。

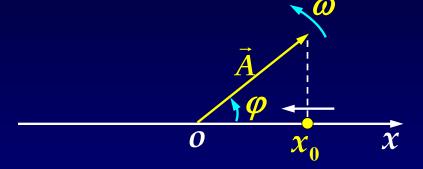


Fig. t = 0 时的旋转矢量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
  $A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$ 

例 一物体作简谐振动,其速度最大值  $v_{\rm m}$ =3×10<sup>-2</sup> m/s,振幅A=2×10<sup>-2</sup> m。若 t=0 时,物体位于平衡位置且向-x方向运动,求: T、 $a_{\rm max}$ 、振动方程。

 $\mathbf{m} \quad v = -\boldsymbol{\omega} A \sin(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\varphi})$ 

$$v_m = \omega A$$
  $\omega = \frac{v_m}{A} = 1.5 \text{ rad/s}$ 

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 4.19 \,\mathrm{s}$$

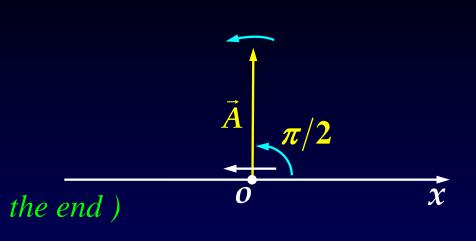
$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a_{max} = \omega^2 A = 1.5^2 \times 2 \times 10^{-2} = 4.5 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

由旋转矢量图可知:  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 

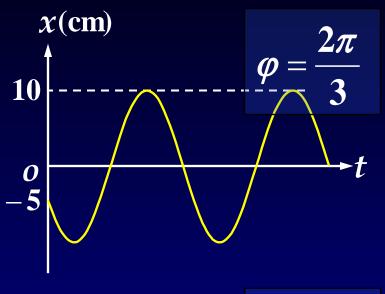
物体的振动方程为:

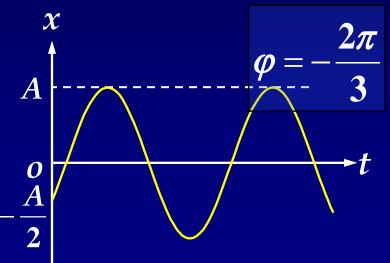
$$x = 2 \times 10^{-2} \cos(1.5t + \frac{\pi}{2})$$
 (the end)

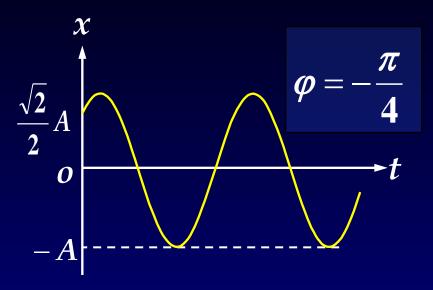


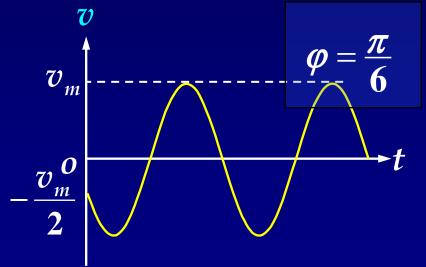
§ 9. 1-2 简谐振动 旋转矢量

## 课堂练习 用旋转矢量法判断下列各振动的初位相 φ









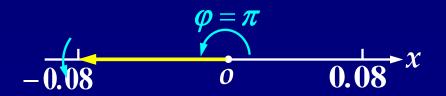
例 平衡时将物体向下拉到0.08m处由静止释放后物体作简谐振动,已知 T = 4 s, m = 0.01 kg, 求:

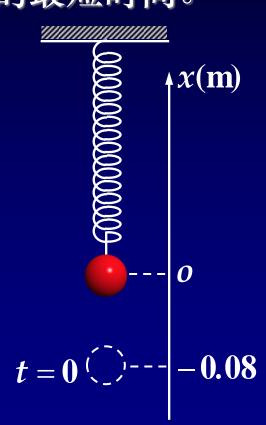
- (1) t = 1.5 s 时,物体所处位置和所受到弹簧作用力;
- (2) 由起始位置运动到 x = 0.04m处所需的最短时间。

解 物体振幅: A= 0.08 m

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

由旋转矢量图得:  $\varphi = \pi$ 





§ 9. 1-2 简谐振动 旋转矢量

物体的振动方程:  $x = 0.08 cos(\frac{\pi}{2}t + \pi)$ 

t=1.5 s 时,物体位置:  $x = 0.08 cos(\frac{\pi}{2} \times 1.5 + \pi) \approx 0.057 \text{ m}$ 

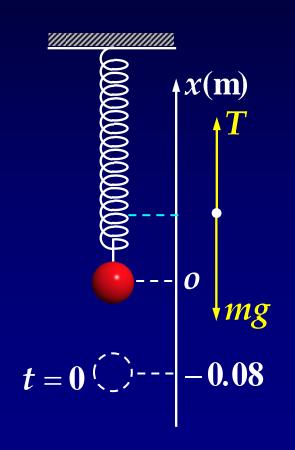
## 物体所受合力:

$$F = -kx$$
  $\omega = \sqrt{k/m}$ 

$$F = -m\omega^2 x \approx -1.41 \times 10^{-3} \,\mathrm{N}$$

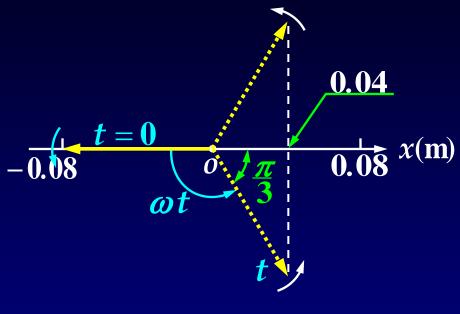
$$F = T - mg$$

$$T = F + mg \approx 9.7 \times 10^{-2} \,\mathrm{N}$$



§ 9. 1-2 简谐振动 旋转矢量

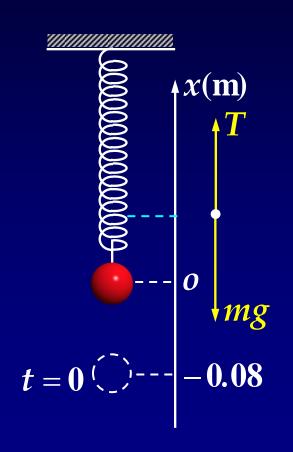
#### (2) 由起始位置运动到 x = 0.04m处所需的最短时间。



$$\omega t = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
  $\omega = \frac{\pi}{2}$ 

最短时间: t≈1.33s

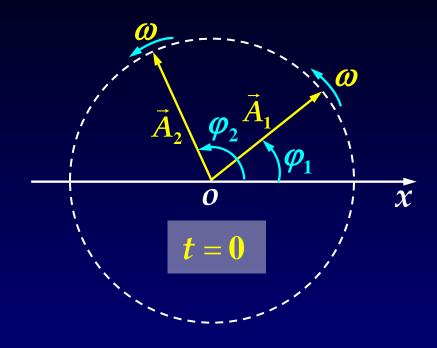
(the end)



# 五、简谐振动的超前与落后

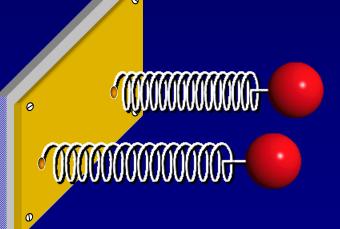
$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$





$$x_1$$
 超前  $x_2$  位相:  $2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$ 



#### 课堂练习 周期皆为 T=2s,问:哪个超前?超前多少

位相和时间?

解 由旋转矢量图可知:

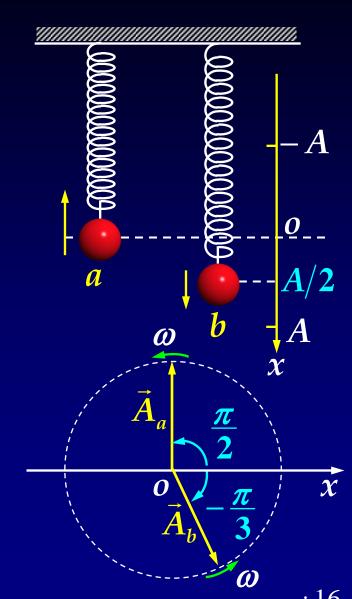
$$a$$
超前  $b$  位相:  $\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{6}$ 

$$\omega \Delta t = \frac{5\pi}{6}$$
  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 

$$\Delta t = \frac{5}{12} T \approx 0.83 \,\mathrm{s}$$

a超前 b 时间约 0.83 秒。

b超前 a 多少位相和时间?



# 归纳

1. 简谐振动的描述 恢复力: F = -kx

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$$

2. 旋转矢量法

$$\phi(t) = \omega t + \varphi \longleftrightarrow 旋转矢量 Ā \longleftrightarrow x, v, a$$

3. 振动的超前与落后