

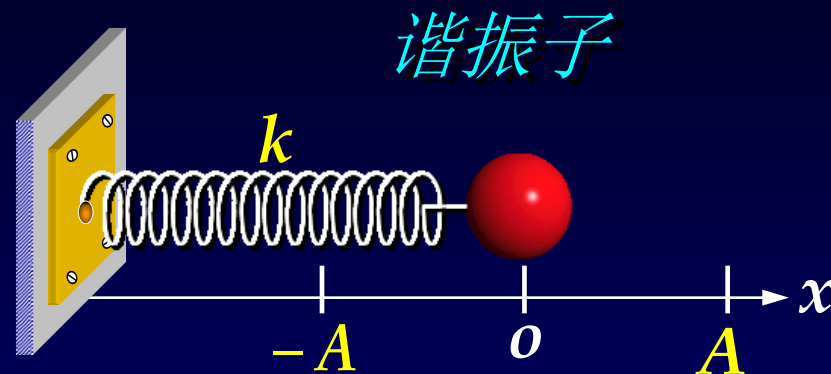
§ 9.4 简谐振动的能量

一、振动动能/势能/总能量

简谐振动:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$



$$\begin{aligned} \text{振动动能: } E_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\text{振动势能: } E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

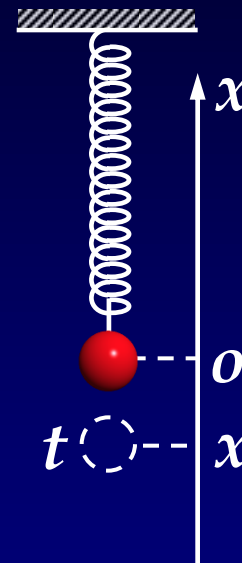
振动总能量: $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$t=0$ 时: $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$$

注意:

- ▲ 谐振子的振动势能不一定等于其弹性势能;
- ▲ 谐振子的振动总能量不一定等于其机械能;



二、势能、能量曲线

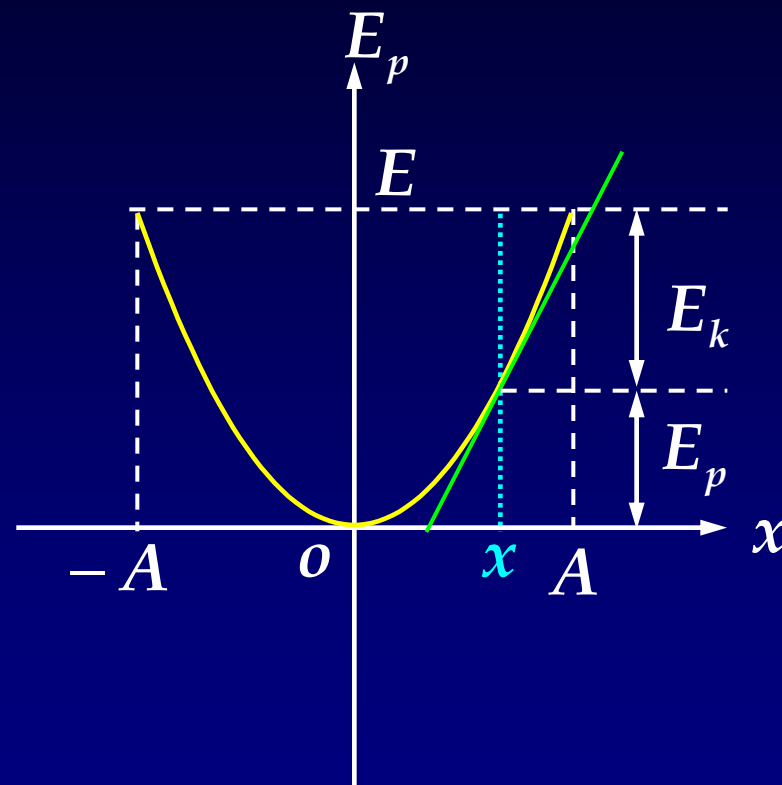
谐振动势能曲线：

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

恢复力：
$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$$

$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$ 时：

$$E_p = E_k = \frac{1}{4} kA^2$$



谐振动能量曲线：

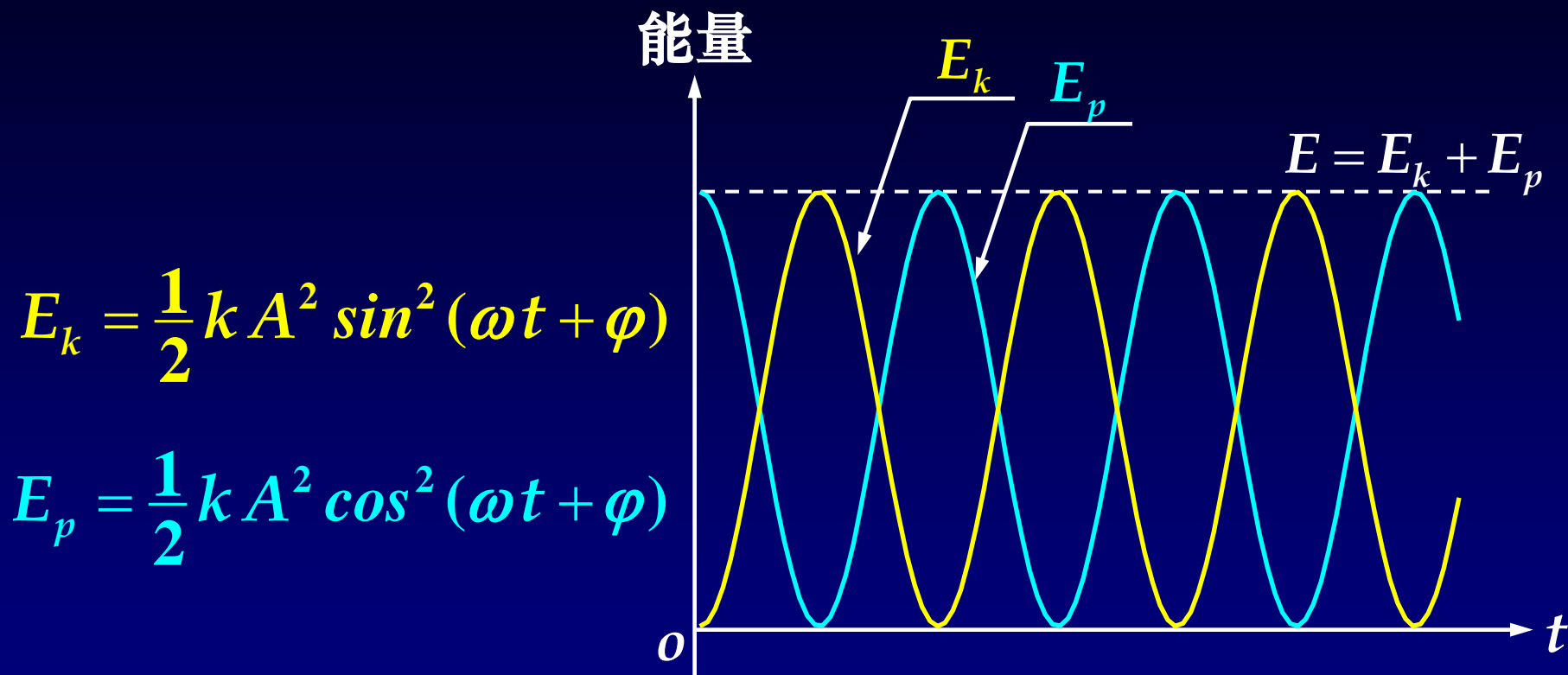


Fig. $\varphi = 0$ 时的能量曲线

例 质量为 0.10kg 的物体以振幅 $1.0\times 10^{-2}\text{m}$ 作简谐振动，其最大加速度为 $1.0\times 10^{-2}\text{m/s}^2$ ，求 T 、 v_{\max} 、总能量 E 。

解 $a_{\max} = \omega^2 A$ $\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = 20\text{s}^{-1}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\text{s}$$

在平衡位置处， $v = v_{\max}$ ： $v_{\max} = \omega A = 0.2\text{m/s}$

总能量： $E = E_k + E_p = E_{k\max} = E_{p\max} = \frac{1}{2}kA^2$

$$= \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 2.0\times 10^{-3}\text{J}$$

课堂练习 如图, 已知: k 、 m 、 M 、 u , 子弹击中木块并留在其中, 求碰撞后系统振动方程。

提示 击中后, 系统初始状态:

$$v_0 = \frac{mu}{M+m}, \quad x_0 = \frac{mg}{k}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

答案: $x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t + \varphi\right)$

$$A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{ku^2}{(M+m)g^2}}$$

