偏导数

偏导数定义

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

偏导数计算方式

将求导的元素视为变量，非求导的元素视为常量进行运算

偏导数与连续性

~~可导必连续（一元函数）~~

可导不一定连续，连续也不一定可导（多元函数）

高阶偏导数

二阶混合偏导数

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

性质

若$f_{xy}(x,y)$,$f_{yx}(x,y)$在点（x，y）连续，则$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

多元复合函数求导

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3}$$

其中u=u(x,y),v=v(x,y)

隐函数求导法

一个方程

二元函数

若方程$F(x,y) = 0$满足

1. 在$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数F_x，F_y
2. F（x_0,y_0)=0
3. $F_y(x_0,y_0) \neq 0$

   则由方程唯一确定$F(x,y) = 0$唯一确定单值连续且有连续导数的函数y=f(x),使得$F(x,f(x)) = 0$,且$y_0 = f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{4}$$

x(y)同理

多元函数

若方程F(x,y,z)=0满足

1. $M_0(x_0,y_0,z_0)$具有连续偏导数$F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z)$
2. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
3. $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则由方程唯一确定的F（x，y，z）=0一个单值连续且有连续偏导数的函数z=f(x,y),满足$z_0=f(x_0,y_0)$,并有

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}} \tag{6}$$

x(y,z),y(x,z)同理

多个函数

雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_u & F_v \\ G_x & G_y & G_u & G_v \end{pmatrix} \tag{7}$$

雅可比行列式

$$\boldsymbol{J(p_0)=\begin{vmatrix} F_u(p_0) & F_v(p_0) \\ G_u(p_0) & G_v(p_0) \end{vmatrix}} \tag{8}$$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{9}$$

方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \tag{10}$$

其中

1. 在点$p_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数
2. $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$
3. F,G关于x,y,u,v的雅可比矩阵（如上）在点P_0的秩为2，既雅可比行列式$J(p_0)\neq 0$

则存在可唯一确定的函数u(x,y),v(x,y)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{J}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{J}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{J}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \tag{13}$$

$$\partial x \qquad J \qquad J \quad \partial(y,v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{J}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} \tag{14}$$

一般记不住（建议现场推）

原方程组依次对x和y求偏导，解方程

偏导数在几何上的应用

空间曲线

切线：

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)} \tag{15}$$

法平面：

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0 \tag{16}$$

切向量：[偏导数转化]

$$(x'(t_0),y'(t_0).z'(t_0)) \tag{17}$$

（参数式如上，其余可根据其进行变化）

多个方程参考[方程组偏导数求法]

空间平面

M指代平面中的一个点

切平面：

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0 \tag{18}$$

法线：

$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)} \tag{19}$$

（参数式如上，其余可根据其进行变化）

法向量：[偏导数转化]

$$(F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)) \tag{20}$$

多个方程参考[方程组偏导数求法]

方向导数

表示f在沿l方向的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}cos\beta \tag{21}$$

其中$cos\alpha, cos\beta$为l的方向余弦

梯度

表示f沿哪个方向方向导数最大，记作**grad** f,可简记为∇f,∇又称为哈密顿算子

$$\mathbf{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}) \tag{22}$$

极值与条件极值

无条件极值

充分必要条件

$f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$或$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$

(x,y)在(x_0,y_0)的邻域内

必要条件

z=f(x,y)在点$p_0(x_0,y_0)$处具有偏导数f_x，f_y，且在该点取得极值，则必有：

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0) = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0,y_0) = 0 \tag{24}$$

充分条件

设函数f（x，y）在（x_0，y_0）的某一邻域内具有二阶连续偏导数，且有$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$

$$\boldsymbol{H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}} \tag{25}$$

其中$f_{xx}=A, f_{xy}=f_{yx}=B, f_{yy}=C$上式可简记为：

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \tag{26}$$

若AC-B^2>0,A>0,则H_f为正定矩阵，$f(x_0,y_0)$为极小值

若AC-B^2>0,A<0,则H_f为负定矩阵，$f(x_0,y_0)$为极大值

若AC-B^2<0,则H_f为不定矩阵，$f(x_0,y_0)$不是极值

条件极值（拉格朗日乘数法）

$u=f(x,y)$在$\phi(x,y)=0$的情况下：

即寻找下式的解（其中λ为一个常数）：

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\phi_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\phi_y(x_0,y_0)=0 \\ \phi(x_0,y_0)=0 \end{cases} \tag{27}$$

可构造函数：

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y) \tag{28}$$

$\nabla F = 0$（哈密顿算符）

即为计算上式解的过程。（可以推广至n元，λ数量等于条件个数）

全微分

定义

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$可以表示为$A(x_0,y_0)\Delta x + B(x_0,y_0)\Delta y + O(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$则称其线性主部为在（x,y）的全微分

性质

1. 可微，该点偏导数必存在
2. 函数在该点可微则函数在该点必连续
3. 函数在该点既连续且两个偏导数均存在，无法保证函数在该点可微

充分条件

函数在该点两个偏导数均存在，且偏导数连续，则函数可微

一阶全微分形式不变性

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

代入下式：

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

得到：

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

全微分运算公式

$d(u \pm v) = du \pm dv$

$d(uv) = vdu + udv$

$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu-udv}{v^2}$

多元数量值函数积分

通式,其中Ω代表积分区域：

$$\int_{\Omega} f(M)d\Omega \tag{29}$$

性质：

1. 线性性质：

$$\int_{\Omega}[\alpha f(M) + \beta f(M)]d\Omega = a\int_{\Omega} f(M)d\Omega + \beta\int_{\Omega} f(M)]d\Omega \tag{30}$$

2. 区域可加性(其中闭区域Ω可分为Ω_1,Ω_2的两个无公共点的闭区域)：

$$\int_{\Omega} f(M)d\Omega = \int_{\Omega_1} f(M)d\Omega + \int_{\Omega_2} f(M)d\Omega \tag{31}$$

3. 保序性：（在Ω上 $f(M) \le g(M)$）

$$\int_{\Omega} f(M)d\Omega \le= \int_{\Omega} g(M)d\Omega \tag{32}$$

4. 积分中值定理$f(M)$在闭几何体Ω上总存在M_0使得：

$$\int f(M)d\Omega = f(M_0)\,(\Omega) \tag{33}$$

$$\int_{\Omega} f(M)d\Omega = f(M_0) \times (\Omega) \tag{33}$$

5. 对称性：（被积区域关于x对称的时候)同理可知y，z

$$\begin{aligned} &\text{若被积函数}f(M)\text{关于变量}x\text{为奇函数，则}\int_{\Omega} f(M)d\Omega = 0 \\ &\text{若被积函数}f(M)\text{关于变量}x\text{为偶函数，则}\int_{\Omega} f(M)d\Omega = 2\int_{\Omega'} f(M)d\Omega, \Omega'\text{为}\Omega\text{在}x > 0\text{的部分} \end{aligned} \tag{34}$$

二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \tag{35}$$

直角坐标系

先对y求积分，再对x求积分（先对x求积分，再对y求积分同理）

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y1(x)}^{y2(x)} f(x,y)dy \tag{36}$$

极坐标系

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(rcos\theta, rsin\theta)rdrd\theta \tag{37}$$

二重积分换元法

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f[u(x,y),v(x,y)]\left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right|dudv \tag{38}$$

对应面积微元为雅可比行列式的绝对值

三重积分

$$\iiint_V f(x,y,z)dV \tag{39}$$

直角坐标系

先一后二

先对z定积分，再对x，y二重积分（其他顺序可以类比）

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{40}$$

先二后一

先对x，y二重积分，再对z定积分（其他顺序可以类比）

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_{z1}^{z2} dz \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)dxdy \tag{41}$$

柱面坐标系

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(rcos(\theta), rsin(\theta), z)rdrd\theta dz \tag{42}$$

球面坐标系

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(\rho sin(\phi)cos(\theta), \rho sin(\phi)sin(\theta), \rho cos(\phi))\rho^2 sin)(\phi)d\rho d\phi d\theta \tag{43}$$

其中

$$\begin{cases} x = \rho sin\phi cos\theta \\ y = \rho sin\phi sin\theta \\ z = \rho cos\phi \end{cases} \tag{44}$$

三重积分换元法

体积微元为[雅可比行列式]

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \tag{45}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dx, dy, dz = \iiint\limits_V f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]|J|dudvdw \tag{46}$$

第一类曲线积分

$$\int\limits_L f(x,y)ds \tag{47}$$

$$\int\limits_L f(x,y,z)ds \tag{48}$$

直角坐标系

参量式表示如下（其余方式可以由此推导）

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt(\alpha < \beta) \tag{49}$$

$$\int\limits_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt \tag{50}$$

极坐标系

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)cos\theta, r(\theta)sin\theta]\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta \tag{51}$$

第一类曲面积分

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS \tag{52}$$

直角坐标系

先xoy平面投影如下计算（其余投影方向可以由此推导）

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy \tag{53}$$

应用

质心

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_\Omega x\mu(M)d\Omega}{\int_\Omega \mu(M)d\Omega}\\ \bar{y} &= \frac{\int_\Omega y\mu(M)d\Omega}{\int_\Omega \mu(M)d\Omega}\\ \bar{z} &= \frac{\int_\Omega z\mu(M)d\Omega}{\int_\Omega \mu(M)d\Omega}\end{aligned} \tag{54}$$

$\mu(M)$是质量在单位区域上的度量（密度）

转动惯量

$$\begin{aligned}I_x &= \int\limits_\Omega (y^2+z^2)d\mu(M)d\Omega\\ I_y &= \int\limits_\Omega (x^2+z^2)d\mu(M)d\Omega\\ I_z &= \int\limits_\Omega (x^2+y^2)d\mu(M)d\Omega\end{aligned} \tag{55}$$

$\mu(M)$是质量在单位区域上的度量（密度）

引力

$$\begin{aligned}F_x &= G\int\limits_\Omega \frac{\mu(M)m(x-x_0)}{r^3}d\Omega\\ F_y &= G\int\limits_\Omega \frac{\mu(M)m(y-y_0)}{r^3}d\Omega\\ F_z &= G\int\limits_\Omega \frac{\mu(M)m(z-z_0)}{r^3}d\Omega\end{aligned} \tag{56}$$

$\mu(M)$是质量在单位区域上的度量（密度）

含参变量积分

1. 连续性：(函数f(x,y在区域D连续，则函数在$\phi(x)=\int_a^b f(x,y)dy$区域连续)

$$lim_{x\to x_0}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b [lim_{x\to x_0} f(x,y)]dy = \int_a^b f(x_0,y)dy \tag{57}$$

2. 可导性：(函数f(x,y)及其偏导数$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$在区域内连续，则函数$\phi(x)=\int_a^b f(x,y)dy$)在区域内有连续导函数

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}[\int_a^b f(x,y)dy] = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy \tag{58}$$

3. 莱布尼茨公式：

$$\phi'(x)=\frac{d}{dx}[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)dy]$$
$$=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy+f[x,\beta(x)]\beta'(x)-f[x,\alpha(x)]\alpha'(x) \tag{59}$$

可以通过下面的式子推导：其中$\alpha(x),\beta(x)$代表其中的α,β

$$\phi(x)=F(x,\alpha,\beta)$$
$$\phi'(x)=\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} \tag{60}$$

4. 可积性或积分交换次序：(f(x,y)在区域内连续)

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx \tag{61}$$

多元向量值函数积分

第二类曲线积分

弧微分

规定在曲线L上任一点的弧微分向量ds，其方向与单位切向量$\boldsymbol{\tau_0}$一致，大小为ds的值

$$\boldsymbol{ds}=\boldsymbol{\tau_0}ds=[x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}+z'(t)\boldsymbol{k}]=(dx,dy,dz) \tag{62}$$

向量形式

$$F(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$
$$\int_L F(x,y,z)\cdot ds$$
$$\oint_L F(x,y,z)\cdot ds \tag{63}$$

坐标形式

$$\int_L F(x,y,z)\cdot ds=\int_L P(x,y,z)dx+\int_L Q(x,y,z)dy+\int_L R(x,y,z)dz \tag{64}$$

计算方式

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt \tag{65}$$

（参数式方程如上，其余可以根据参数式推导）

第二类曲面积分

方向

曲面上的法向量

向量形式

$$\begin{gathered}\iint\limits_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n_0}(x,y,z)dS \\ \oiint\limits_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n_0}(x,y,z)dS\end{gathered} \tag{66}$$

坐标形式

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{dS} = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \tag{67}$$

计算方式

分面计算法

$$\begin{gathered}\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} R(x(y,z),y,z)dydz \\ \iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint\limits_{D_{zx}} R(x,y(z,x),z)dzdx \\ \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy\end{gathered} \tag{68}$$

将其转化为分别关于yoz，zox，xoy平面上的三个二重积分，正负号取决于法向量$\boldsymbol{n_0}$与x,y,z轴正向角度，即若法向量大于0取正号，反之负号。

合一投影法

$$\iint\limits_S F(x,y,z(x,y))dS = \iint\limits_{D_{xy}} (P(x,y,z(x,y)),Q(x,y,z(x,y)),R(x,y,z(x,y)))\cdot\vec{n}_0 dxdy \tag{69}$$

将其转化为关于一个平面上的一个二重积分，法向量与P，Q，R的点积，（xoy平面如上式，其余可根据其推导）

格林公式

边界曲线方向

当人沿边界曲线行进，D总在其左侧（外边界逆时针，内边界顺时针）

格林公式内容

对于平面单连通区域和有限平面复连通区域，L取边界曲线正方向

$$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x})dxdy = \oint\limits_L (Pdx + Qdy) \tag{70}$$

将封闭平面曲线的第二类曲线积分转化为边界所围成平面的二重积分

高斯公式

S方向是闭曲面外侧

$$\iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdy = \oiint_S (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) \tag{71}$$

V是由闭曲面围成的空间，将闭曲面上的第二类曲面积分转化成所围空间上三重积分

斯托克斯公式

$$\iint_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \tag{72}$$

其中L的方向与S的侧符合右手定则，四指绕向L，大拇指指向S，常记作：

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \tag{73}$$

将空间闭曲线上的第二类曲线积分转化成以空间闭曲线为边界的曲面S上与其方向一致的第二类曲面积分

曲线积分与路径无关

等价命题(二元)

1. 对于D内任任一分段的光滑闭曲线L，有

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{74}$$

2. 曲线积分与路径无关
3. 被积表达式是某个二元函数全微分

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{75}$$

4.
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{76}$$

等价命题（三元）

1.
$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{77}$$

2. 曲线积分与路径无关
3. 北极函数是某个三元函数全微分
4.
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \tag{78}$$

场论初步

通量与散度

通量

$$\iint\limits_S A \cdot dS = \iint\limits_S A \cdot \boldsymbol{n_0} dS \tag{79}$$

指向量场A通过有向曲面S指定一侧的通量

散度

$$divA = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{80}$$

环量与旋度

环量

$$\oint\limits_L A \cdot \boldsymbol{ds} = \oint\limits_L A \cdot \vec{\tau}_0 ds \tag{81}$$

指向量场A沿邮箱闭曲线L的环量

旋度

$$rotA = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{82}$$