



线性代数

欧阳林茁

2023 年 6 月 22 日

这是一份考研复习使用的线性代数 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ 文档

序言

i 复习资料内容基于高等教育出版社出版的《线性代数与空间解析几何(第五版)》。复习资料是根据教材总结而成,不是抄书(内容可能会有出入,但会比对)



纳西妲为你加油

我以智慧之神的名义为你赐福,从今往后不再会有困惑阻碍你的旅途。

——纳西妲

目录

矩阵及其初等变换	5
1.1 矩阵及其运算	5
1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换	13
1.3 逆矩阵	15
1.4 分块矩阵	15
行列式	16
2.1 行列式的定义	16
2.2 行列式的性质与计算	16
2.3 拉普拉斯展开定理	16
2.4 克拉默法则	16
2.5 矩阵的秩	16
几何空间	17
3.1 空间直角坐标系与向量	17
3.2 向量乘法	17
3.3 平面	17
3.4 空间直线	17
向量空间	18
4.1 n 维向量空间	18
4.2 向量组的线性相关性	18
4.3 向量组的秩与极大无关组	18
4.4 线性方程解的结构	18

目录

特征值与特征向量	19
5.1 特征值与特征向量	19
5.2 矩阵的相似对角化	19
5.3 向量空间的正交性	19
5.4 实对称矩阵的相似对角化	19
二次型与二次曲面	20
6.1 实二次型及其标准型	20
6.2 正定二次型	20
6.3 曲面与空间曲线	20
6.4 二次曲面	20
术语索引	21

矩阵及其初等变换

Contents

1.1 矩阵及其运算	5
矩阵的概念	5
矩阵的线性运算	7
矩阵的乘法	8
矩阵的转置	11
1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换	13
高斯消元法	13
初等矩阵	15
1.3 逆矩阵	15
1.4 分块矩阵	15

1.1 矩阵及其运算

矩阵的概念



矩阵是一个由 $m \times n$ 数组成的 m 行 n 列的数表, 形如:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

我们将其称之为矩阵, 记作 $A_{m \times n}$ 或 $(a_{ij})_{m \times n}$, 通常使用大写字母来表示矩阵, 小写字母表示矩阵中的元素, 如需指明行列数, 需使用下标, 如前。

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

中的系数项可以组成 $m \times n$ **系数矩阵**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

而其系数项和常数项可以组成一个 $m \times (n+1)$ 的**增广矩阵**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_3 \end{pmatrix}$$

内部元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**, 记作 $O_{m \times n}$ 或 O

矩阵 $A_{m \times n}$ 中当 $m = n$ 时, 称为 n 阶矩阵或 n 阶**方阵**

只有一行或只有一列的 $A_{1 \times n}, A_{m \times 1}$ 分别称为**行矩阵**或**列矩阵**矩阵! 列矩阵

若方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的元 $a_{ij} = 0, (i \neq j)$, 则称 A 为**对角矩阵**. 记作 $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$



对角矩阵首先是方阵

矩阵及其初等变换

对角元全为 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**, n 阶单位矩阵记为 I_n , 不致混淆的情况下也记为 I

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

分别被称为**上三角矩阵**和**下三角矩阵**

矩阵的线性运算

矩阵的加法与矩阵的数乘统称为矩阵的**线性运算**

如果 A 和 B 都是 $m \times n$ 的矩阵, 则称 A 和 B 是**同型矩阵**

两个矩阵 A 和 B 相等, 如果他们是同型矩阵且对应元相等, 则称 A 和 B **相等**



证明矩阵定理的时候, 需要先证明同型, 再证明对应元相等, 两者缺一不可



矩阵加法就是: 设两个矩阵 A 和 B 是 $m \times n$ 的同型矩阵, 将他们的对应元相加得到:

$$C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$$

则称 C 是 $A+B$ 的和, 记作 $C = A + B$

将 A 中每一个元 a_{ij} 换做 $-a_{ij}$, 则可以得到**负矩阵**

矩阵减法就是将 A 矩阵和 B 的负矩阵相加而得

根据减法的定义, 显然 $A - B = O$ 与 $A = B$ 等价



设 A 为一个 $m \times n$ 矩阵, 常数 k 与矩阵 A 进行**矩阵数乘**, 将 A 中对应元做如下操作 $a_{ij} \leftarrow k \times a_{ij}$, 记为 kA

矩阵的线性运算符合以下性质, 其中 A, B, C 为同型矩阵, k, l 为常数:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$

矩阵及其初等变换

5. $1A = A$
6. $k(lA) = (kl)A$
7. $k(A + B) = kA + kB$
8. $(k+1)A = kA + 1A$

矩阵的乘法



设 A 为 $m \times p$ 型矩阵, B 为 $p \times n$ 型矩阵, 则由元 c_{ij} 组成的:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m : j = 1, 2, \dots, n)$$

$m \times n$ 型矩阵为矩阵 A 与 B 的乘积, 记作 $C = AB$

矩阵乘法满足以下性质:

1. 结合律 $A(BC) = (AB)C$
2. 数乘结合律 $k(AB) = k(AB)$
3. 分配律 $A(B + C) = AB + AC$
 $(B + C)A = BA + CA$



证明结合律: $A(BC) = (AB)C$

证明. 首先需要证明同型, 假设 A, B, C 分别为 $m \times p, p \times q, q \times n$ 型矩阵, 可知 $A(BC), (AB)C$ 都是 $m \times n$ 型矩阵

列举矩阵元:

$$A(BC) \rightarrow \sum_{k=1}^p a_{ik} \left(\sum_{l=1}^q b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$(AB)C \rightarrow \sum_{l=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

由于有限项求和符号可以交换次序, 所以两个矩阵元相等

综上所述, A, B 矩阵同型且矩阵元相等, 所以等式两边等价

□

矩阵及其初等变换

性质数乘结合律和分配律都可以套用结合律的模板,先证同型,再证矩阵元相等即可

一般情况下, $AB \neq BA$, 例如:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

当 $AB \neq BA$ 时称 A 与 B 不可交换, $AB = BA$ 时称 A 与 B 可交换, 一般不满足交换律



$AB - AC = A(B - C)$ 不能判断 $B - C = O$ 如上

但是对于单位矩阵 I 而言, I 满足如下性质:

$$I_m A_{m \times n} = A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$$

单位矩阵在矩阵运算中起到数的乘法中 1 的作用

其中 $kI = \text{diag}(k, k \cdots, k)$ 被称为数量矩阵, n 阶数量矩阵与 n 阶方阵 A 也是可交换的。



矩阵的幂为, 设 A 为 n 阶方阵, k 为正整数

$$\begin{cases} A^1 = A \\ A^{k+1} = A^k A, k = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

符合以下性质:

$$A^k A^m = A^{m+k}, (A^{m^k}) = (A^m)^k$$



一般来说, $(AB)^k \neq A^k B^k$



感性证明.

$$\begin{aligned}
 (AB)^k &= (AB)(AB) \cdots (AB) \\
 &= ABAB \cdots AB \quad \text{结合律} \\
 &\neq AAB B(AB \cdots AB) \quad AB \text{ 一般不可交换} \\
 &\text{依次类推} \\
 &\neq AA \cdots AAB B \cdots BB \\
 &\neq A^k B^k
 \end{aligned}$$

□

当 $AB = BA$ 时, 显然 $(AB)^k = A^k B^k$, 其逆不真



A 是一个 n 阶方阵

$$f(A) = a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

$f(A)$ 称作 A 的 k 阶 **多项式**

显然由 $f(A)g(A) = g(A)f(A)$

一般来说 $f(A)g(B) \neq g(B)f(A)$

一般来说:

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, (A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$$

但由于 $AI = IA$:

$$(A + I)^2 = A^2 + 2A + I, (A + I)(A - I) = A^2 - I$$

$$(A + \lambda U)^n = A^n + C_n^1 \lambda A + \cdots + C_n^{n-1} \lambda^{n-1} A + \lambda^n I$$

矩阵及其初等变换

n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 和 m 个变量之间的对应关系

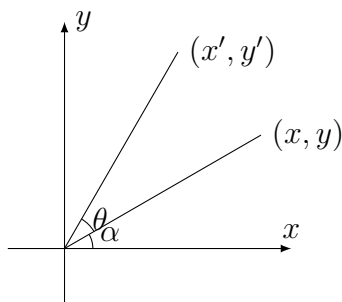
$$Y = AX$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

将这种变化称为矩阵的线性变化

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

将点 (x,y) 逆时针旋转 θ 到 (x',y') 叫做旋转变化



$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\theta + \alpha) \\ &= r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha \\ &= x \cos \theta - y \sin \alpha \\ y' &= r \sin(\theta + \alpha) \\ &= r \sin \theta \cos \alpha + r \sin \alpha \cos \theta \\ &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

矩阵的转置

把一个矩阵行列互换,则称处理后的矩阵叫做矩阵的转置,对于矩阵 A 而言:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的转置如下所示：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然有 $m \times n$ 的矩阵, 转置后为 $n \times m$ 的矩阵

矩阵转置具有如下性质：

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A^T) + B^T = A^T + B^T$
3. $k(A^T) = (kA)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$



$$(AB)^T = B^T A^T$$

证明. 首先证明同型, 假设 A 为 $m \times p$, B 为 $p \times n$ 型矩阵, 则 $(AB)^T, B^T A^T$ 均为 $m \times n$

然后证明矩阵元相等：

$$(AB)^T \rightarrow c_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$B^T A^T \rightarrow c_{ji} = \sum_{k=1}^p b_{kj} a_{ik}$$

显然有矩阵元相等

□

若 $A^T = A$, 则称 A 为**对称矩阵**, 若 $A^T = -A$, 则称 A 为**反称矩阵**

显然对称矩阵和反称矩阵都是方阵, 且对称矩阵中 $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$

反称矩阵中 $a_{ii} = 0, a_{ij} = -a_{ji}, i \neq j$

对称矩阵的线性运算仍为对称矩阵吗, 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵



假设 A 与 B 都是 n 阶对称矩阵, 证明矩阵 AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$

证明. 先证充分性: $AB=BA, (AB)^T = B^T A^T = BA$, 符合对称矩阵的定义,



则 AB 为对称矩阵

再证必要性: AB 为对称矩阵, $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 所以能够证明 $AB=BA$ □

对于任意矩阵 A, AA^T 和 $A^T A$ 为对称矩阵

1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换

高斯消元法

一般地我们把 $AX = b$ 中如果 b 中所有元素至少有一个不为 0, 则称为非齐次线性方程组, 否则称为齐次线性方程组, 满足方程的一组 X 称为方程组的一组解 矩阵的行列初等变化如下:

1. 交换两行 (列) 的位置
2. 用一非零数乘某一行 (列) 的所有元
3. 把矩阵的某一行 (列) 的适当倍数加到另一行上

解线性方程组可以使用有限次的初等行变换操作增广矩阵

Algorithm 1: 高斯消元法

1 $i \leftarrow 1$

2 $j \leftarrow 1$

3 首先将一般矩阵转化为行阶梯形矩阵

1. 对于第 j 列寻找非零元, 如果存在, 利用初等行变换, 将他替换到第 i 行, 如果不存在, $j=j+1$, 继续执行 1, 直到 j 无法再增加
2. 利用初等行变换, 将 i 以下所有行第 j 列元素更新为 0, 第 i 行第 j 列元素更新为 1, $i++, j++$
3. 如果 i 无法再增加, 结束循环, 如果 i 可以再增加, 转到 1

然后将行阶梯形矩阵转化为行简化阶梯型矩阵

然后此时 i 和 j , 再进行自减, 重复上面类似的操作, 对于非零首元更新 i 以上的第 j 列元素为 0

如果一个矩阵每个非零元都出现再上一行非零首元的右边, 则称为行阶梯形矩阵

矩阵及其初等变换

如果行阶梯形矩阵每个非零行的非零首元都是 1, 且非零首元所在列其余元都是 0, 则称为**行简化阶梯型矩阵**



线性方程组解的特征

对于一般的线性方程组, 可以通过消元步骤将其化为行简化阶梯型矩阵, 假设 $\bar{A} = (A, b)$ 为方程组 $AX = b$ 的行简化阶梯型矩阵:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{21} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{r+1} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果 $d_{r+1} \neq 0$, 则方程组无解

如果 $d_{r+1} = 0$, 则存在如下情况:

1. $r=n$, 存在唯一解

$$\begin{cases} x_1 & = d_1, \\ x_2 & = d_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n & = d_n \end{cases}$$

2. 当 $r < n$ 时, 存在无穷多的解

把矩阵的每一个非零首元所在列的元称为**基本未知量**, 将其余元所在列称为**自由未知量**, 基本变量由自由变量的线性组合表示。

关于齐次线性方程组 $AX = 0$, 总是存在零解 (**平凡解**), $X=0$

当 $r < n$ 时, 存在无穷多的解, 设 m 个 n 元方程组组成的线性方程组 $AX = 0$, 若 $m < n$, 则方程组必有非零解

若一个矩阵 A 能够通过有限次的初等变化变成 B , 则称 A 与 B **等价**, 记作 $A \cong B$, 如果使用的初等变化是行 (列) 初等变化, 则称为 A 与 B 行 (列) 等价

矩阵的等价关系性质如下:

- 反身性: 若 $A \cong A$

矩阵及其初等变换

- 对称性: 若 $A \cong B$, 则 $B \cong A$
- 传递性: 若 $A \cong B, B \cong C$, 则 $A \cong C$

初等矩阵

将单位矩阵作一个初等变换得到的矩阵,叫做初等矩阵

对一个 $m \times n$ 的矩阵而言,进行初等行变换相当于左乘一个初等矩阵,进行初等列变换相当于右乘一个初等矩阵



如果一个矩阵能够由 A 进行行初等变换得到,则必然存在有限个初等矩阵,使得

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

如果一个矩阵能够由 A 进行列初等变换得到,则必然存在有限个初等矩阵,使得

$$B = A E'_1 E'_2 \cdots E'_k$$

如果一个矩阵能够由 A 进行初等变化得到,则必然存在有限个初等矩阵,使得

$$B = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_l$$

1.3 逆矩阵

1.4 分块矩阵

行列式

Contents

2.1 行列式的定义	16
2.2 行列式的性质与计算	16
2.3 拉普拉斯展开定理	16
2.4 克拉默法则	16
2.5 矩阵的秩	16

2.1 行列式的定义

2.2 行列式的性质与计算

2.3 拉普拉斯展开定理

2.4 克拉默法则

2.5 矩阵的秩

几何空间

Contents

3.1 空间直角坐标系与向量	17
3.2 向量乘法	17
3.3 平面	17
3.4 空间直线	17

3.1 空间直角坐标系与向量

3.2 向量乘法

3.3 平面

3.4 空间直线

向量空间

Contents

4.1	n 维向量空间	18
4.2	向量组的线性相关性	18
4.3	向量组的秩与极大无关组	18
4.4	线性方程解的结构	18

4.1 n 维向量空间

4.2 向量组的线性相关性

4.3 向量组的秩与极大无关组

4.4 线性方程解的结构

特征值与特征向量

Contents

5.1 特征值与特征向量	19
5.2 矩阵的相似对角化	19
5.3 向量空间的正交性	19
5.4 实对称矩阵的相似对角化	19

5.1 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 向量空间的正交性

5.4 实对称矩阵的相似对角化

二次型与二次曲面

Contents

6.1 实二次型及其标准型	20
6.2 正定二次型	20
6.3 曲面与空间曲线	20
6.4 二次曲面	20

6.1 实二次型及其标准型

6.2 正定二次型

6.3 曲面与空间曲线

6.4 二次曲面

术语索引

初等矩阵	15	矩阵相等	7
同型矩阵	7	矩阵等价	14
旋转变换	11	矩阵线性运算	7
矩阵	6	矩阵减法	7
上三角矩阵	7	矩阵加法	7
下三角矩阵	7	矩阵数乘	7
单位矩阵 I	7	矩阵转置	11
反称矩阵	12	线性变化	11
增广矩阵	6	线性方程组解的特征	14
对称矩阵	12	基本未知量	14
对角矩阵 diag	6	自由未知量	14
数量矩阵	9	负矩阵	7
方阵	6	非齐次线性方程组	13
系数矩阵	6	高斯消元法	13
行矩阵	6	矩阵的行列初等变化	13
零矩阵 O	6	行简化阶梯型矩阵	14
矩阵乘法	8	行阶梯形矩阵	13
矩阵的多项式	10	齐次线性方程组	13
矩阵的幂	9	平凡解	14