线性代数

作者：欧阳林茁

时间：2023 年 6 月 22 日

这是一份考研复习使用的线性代数 $\LaTeX\,2_\varepsilon$ 文档

序言

笔记 复习资料内容基于高等教育出版社出版的《线性代数与空间解析几何（第五版）》。复习资料是根据教材总结而成，不是抄书（内容可能会有出入，但会比对）

纳西妲为你加油

我以智慧之神的名义为你赐福，从今往后不再会有困惑阻碍你的旅途。

——纳西妲

目录

第 1 章 矩阵及其初等变换

Contents

1.1 矩阵及其运算 C
1.1.1 矩阵的概念 C
1.1.2 矩阵的线性运算 . . . . . . D
1.1.3 矩阵的乘法 . . . . . . E
1.1.4 矩阵的转置 . . . . . . H
1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换 I
1.2.1 高斯消元法 I
1.2.2 初等矩阵 . . . . . . K
1.3 逆矩阵 . . . . . . K
1.3.1 逆矩阵的概念与性质 . . . . . . K
1.3.2 用行初等变化求逆矩阵 . . . . . . N
1.4 分块矩阵 . . . . . . N

1.1 矩阵及其运算

1.1.1 矩阵的概念

定义 1.1 (矩阵)

矩阵是一个由 $m \times n$ 个数组成的 m 行 n 列的数表，形如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

我们将其称之为矩阵，记作 $A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$，通常使用大写字母来表示矩阵，小写字母表示矩阵中的元素，如需指明行列数，需使用下标，如前。♣

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

中的系数项可以组成 $m \times n$ 系数矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

而其系数项和常数项可以组成一个 $m \times (n+1)$ 的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_3 \end{pmatrix}$$

内部元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $O_{m\times n}$ 或 O

矩阵 $A_{m\times n}$ 中当 $m = n$ 时, 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵

只有一行或只有一列的 $A_{1\times n}, A_{m\times 1}$ 分别称为行矩阵或列矩阵矩阵! 列矩阵

若方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的元 $a_{ij} = 0, (i \neq j)$, 则称 A 为对角矩阵. 记作 $A = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$

笔记 对角矩阵首先是方阵

对角元全为 1 的对角矩阵称为单位矩阵,n 阶单位矩阵记为 I_n, 不致混淆的情况下也记为 I

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

分别被称为上三角矩阵和下三角矩阵

1.1.2 矩阵的线性运算

笔记 矩阵的加法与矩阵的数乘统称为矩阵的线性运算

如果 A 和 B 都是 $m \times n$ 的矩阵, 则称 A 和 B 是同型矩阵

定义 1.2 (矩阵相等)

两个矩阵 A 和 B 相等, 如果他们是同型矩阵且对应元相等, 则称 A 和 B相等 ♣

笔记 证明矩阵定理的时候, 需要先证明同型, 再证明对应元相等, 两者缺一不可

定义 1.3 (矩阵加法)

矩阵加法就是：设两个矩阵 A 和 B 是 $m \times n$ 的同型矩阵，将他们的对应元相加得到：

$$C = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$$

则称 C 是 A+B 的和，记作 $C = A + B$

将 A 中每一个元 a_{ij} 换做 $-a_{ij}$，则可以得到负矩阵
矩阵减法就是将 A 矩阵和 B 的负矩阵相加而得
根据减法的定义，显然 $A - B = O$ 与 $A = B$ 等价

定义 1.4 (矩阵数乘)

设 A 为一个 $m\times n$ 矩阵, 常数 k 与矩阵 A 进行矩阵数乘, 将 A 中对应元做如下操作 $a_{ij} \leftarrow k \times a_{ij}$，记为 kA

矩阵的线性运算符合以下性质, 其中 A、B、C 为同型矩阵，k、l 为常数：

定理 1.1 (线性运算按性质)

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C))$
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. $1A = A$
6. $k(lA) = (kl)A$
7. $k(A + B) = kA + kB$
8. (k+l)A=kA+lA

1.1.3 矩阵的乘法

定义 1.5 (矩阵乘法)

设 A 为 $m \times p$ 型矩阵,B 为 $p \times n$ 型矩阵，则由元 c_{ij} 组成的：

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_[ik]b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m : j = 1, 2, \cdots, n)$$

$m \times n$ 型矩阵为矩阵 A 与 B 的乘积，记作 $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$

矩阵乘法满足以下性质：

定理 1.2 (矩阵乘法性质)

1. 结合律 $A(BC) = (AB)C$
2. 数乘结合律 $k(AB) = k(AB)$

3. 分配律 $$\begin{aligned}A(B+C)&=AB+AC\\(B+C)A&=BA+CA\end{aligned}$$

问题 1.1 证明结合律：$A(BC)=(AB)C$

证明 首先需要证明同型，假设 A,B,C 分别为 $m\times p, p\times q, q\times n$ 型矩阵，可知 $A(BC)$,$(AB)C$ 都是 $m\times n$ 型矩阵

列举矩阵元:

$$A(BC)\to\sum_{k=1}^{p}a_{ik}(\sum_{l=1}^{q}b_{kl}c_{lj})=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$
$$(AB)C\to\sum_{l=1}^{q}(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kl})c_{lj}=\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$

由于有限项求和符号可以交换次序，所以两个矩阵元相等

综上所述，A、B 矩阵同型且矩阵元相等，所以等式两边等价

性质数乘结合律和分配律都可以套用结合律的模板，先证同型，再证矩阵元相等即可

一般情况下，$AB\neq BA$, 例如：

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$$

当 $AB\neq BA$ 时称 A 与 B 不可交换，$AB=BA$ 时称 A 与 B 可交换，一般不满足交换律

笔记 $AB-AC=A(B-C)O$ 不能判断 $B-C=O$ 如上

但是对于单位矩阵 I 而言，I 满足如下性质:

$$I_mA_{m\times n}=A_{m\times n}I_n=A_{m\times n}$$

单位矩阵在矩阵运算中起到数的乘法中 1 的作用

其中 $kI=diag(k,k\,cdots,k)$ 被称为数量矩阵，n 阶数量矩阵与 n 阶方阵 A 也是可交换的。

定义 1.6 (矩阵的幂)

矩阵的幂为, 设 A 为 n 阶方阵,k 为正整数

$$\begin{cases}A^1=A\\A^{k+1}=A^KA,k=1,2,3,\cdots,\end{cases}$$

符合以下性质：

$$A^kA^m=A^{m+k},(A^{m^k})=(A^m)^k$$

例题 1.1 一般来说，$(AB)^k \neq A^kB^k$

证明 [感性证明]

$$\begin{aligned}(AB)^k &= (AB)(AB)\cdots(AB)\\ &= ABAB\cdots AB \quad \text{结合律}\\ &\neq AABB(AB\cdots AB) \quad \text{AB 一般不可交换}\\ &\text{依次类推}\\ &\neq AA\cdots AABB\cdots BB\\ &\neq A^kB^k\end{aligned}$$

当 $AB = BA$ 时，显然 $(AB)^k = A^kB^k$，其逆不真

定义 1.7 (矩阵的多项式)

A 是一个 n 阶方阵

$$f(A) = a_kA^k + \cdots + a_1A + a_0I$$

f(A) 称作 A 的 k 阶多项式

显然由 f(A)g(A)=g(A)f(A)

一般来说 $f(A)g(B) \neq g(B)f(A)$

一般来说:

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

但由于 AI=IA:

$$(A+I)^2 = A^2 + 2A + I, (A+I)(A-I) = A^2 - I$$

$$(A+\lambda U)^n = A^n + C_n^1\lambda A + \cdots + C_n^{n-1}\lambda^{n-1}A + \lambda^n I$$

♣

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 m 个变量之间的对应关系

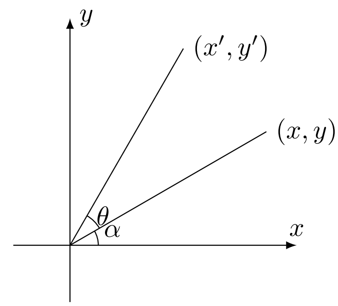
$$Y = AX$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

将这种变化称为矩阵的线性变化

$$\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

将点 (x,y) 逆时针旋转 θ 到 (x’,y’) 叫做旋转变化



证明

$$
\begin{aligned}
x' &= r\cos(\theta+\alpha) \\
&= r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\
&= x\cos\theta - y\sin\alpha \\
y' &= r\sin(\theta+\alpha) \\
&= r\sin\theta\cos\alpha + r\sin\alpha\cos\theta \\
&= x\sin\theta + y\cos\theta
\end{aligned}
$$

1.1.4 矩阵的转置

定义 1.8 (矩阵转置)

把一个矩阵行列互换，则称处理后的矩阵叫做矩阵的转置，对于矩阵 A 而言：

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

矩阵 A 的转置如下所示：

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\
a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

显然有 $m \times n$ 的矩阵，转置后为 $n \times m$ 的矩阵 ♣

矩阵转置具有如下性质：

定理 1.3 (转置矩阵性质)

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A^T) + B^T = A^T + B^T$
3. $k(A^T) = (kA)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

例题 1.2 $(AB)^T = B^T A^T$

证明 首先证明同型，假设 A 为 $m \times p$,B 为 $p \times n$ 型矩阵，则 $(AB)T$,$B^T A^T$ 均为 $m \times n$
然后证明矩阵元相等：

$$(AB)^T \to c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$
$$B^T A^T \to c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} a_{ik}$$

显然有矩阵元相等

若 $A^T = A$，则称 A 为对称矩阵，若 $A^T = -A$, 则称 A 为反称矩阵
显然对称矩阵和反称矩阵都是方阵，且对称矩阵中 $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$
反称矩阵中 $a_{ii} = 0, a_{ij} = -a_{ji}, i \neq j$
对称矩阵的线性运算仍为对称矩阵吗，对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵

例题 1.3 假设 A 与 B 都是 n 阶对称矩阵，证明矩阵 AB 为对称矩阵的充要条件是 AB=BA

证明 先证充分性:AB=BA,$(AB)^T = B^T A^T = BA$，符合对称矩阵的定义，则 AB 为对称矩阵
再证必要性：AB 为对称矩阵,$(AB)T = B^T A^T = BA = AB$，所以能够证明 AB=BA

对于任意矩阵 A,AA^T 和 $A^T A$ 为对称矩阵

1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换

1.2.1 高斯消元法

定义 1.9 (初等变化)

一般地我们把 $AX = b$ 中如果 b 中所有元素至少有一个不为 0，则称为非齐次线性方程组，否则称为齐次线性方程组, 满足方程的一组 X 称为方程组的一组解 矩阵的行列初等变化如下：

1. 交换两行 (列) 的位置
2. 用一非零数数乘某一行 (列) 的所有元
3. 把矩阵的某一行 (列) 的适当倍数加到另一行上

笔记 解线性方程组可以使用有限次的初等行变换操作增广矩阵

$i \leftarrow 1$

$j \leftarrow 1$

首先将一般矩阵转化为行阶梯形矩阵

1. 对于第 j 列寻找非零元，如果存在，利用初等行变换，将他替换到第 i 行，如果不存在，j=j+1，继续执行 1, 直到 j 无法再增加
2. 利用初等行变换，将 i 以下所有行第 j 列元素更新为 0，第 i 行第 j 列元素更新为 1,i++,j++
3. 如果 i 无法再增加，结束循环，如果 i 可以再增加，转到 1

然后将行阶梯形矩阵转化为行简化阶梯型矩阵

然后此时 i 和 j，再进行自减，重复上面类似的操作，对于非零首元更新 i 以上的第 j 列元素为 0

Algorithm 1: 高斯消元法

如果一个矩阵每个非零元都出现再上一行非零首元的右边，则称为行阶梯形矩阵

如果行阶梯形矩阵每个非零行的非零首元都是 1，且非零首元所在列其余元都是 0，则称为行简化阶梯型矩阵

定理 1.4 (线性方程组解的特征)

线性方程组解的特征

对于一般的线性方程组，可以通过消元步骤将其化为行简化阶梯型矩阵，假设 $\bar{A} = (A, b)$ 为方程组 $AX = b$ 的行简化阶梯型矩阵：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{21} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{r+1} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果 $d_{r+1} \neq 0$，则方程组无解

如果 $d_{r+1} = 0$, 则存在如下情况：

1. r=n，存在唯一解

$$\begin{cases} x_1 & = d_1, \\ \quad x_2 & = d_2, \\ \quad\quad \cdots\cdots & \\ \quad\quad\quad x_n & = d_n \end{cases}$$

2. 当 r<n 时，存在无穷多的解
   把矩阵的每一个非零首元所在列的元称为基本未知量，将其余元所在列称为自由未知量，基本变量由自由变量的线性组合表示。

♡

关于齐次线性方程组 $AX = 0$, 总是存在零解 (平凡解)，X=O

当 r<n 时，存在无穷多的解，设 m 个 n 元方程组组成的线性方程组 $AX=0$，若 $m<n$, 则方程组必有非零解

定义 1.10 (矩阵等价)

若一个矩阵 A 能够通过有限次的初等变化变成 B, 则称 A 与 B等价, 记作 $A\cong B$，如果使用的时行 (列）初等变化，则称为 A 与 B 行 (列) 等价

♣

矩阵的等价关系性质如下：

定理 1.5 (矩阵的等价关系性质)

- 反身性: 若 $A\cong A$
- 对称性: 若 $A\cong B$, 则 $B\cong A$
- 传递性: 若 $A\cong B, B\cong C$, 则 $A\cong C$

♡

1.2.2 初等矩阵

定义 1.11 (初等矩阵)

将单位矩阵作一个初等变换得到的矩阵，叫做初等矩阵

♣

对一个 $m\times n$ 的矩阵而言，进行初等行变换相当于左乘一个初等矩阵，进行初等列变换相当于右乘一个初等矩阵

笔记 如果一个矩阵能够由 A 进行行初等变换得到，则必然存在有限个初等矩阵，使得

$$B=E_kE_{k-1}\cdots E_1A$$

如果一个矩阵能够由 A 进行列初等变换得到，则必然存在有限个初等矩阵，使得

$$B=AE_1'E_2'\cdots E_k'$$

如果一个矩阵能够由 A 进行初等变化得到，则必然存在有限个初等矩阵，使得

$$B=P_kP_{k-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_l$$

1.3 逆矩阵

1.3.1 逆矩阵的概念与性质

定义 1.12 (逆矩阵)

设 A 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B 使得

$$AB=BA=I$$

则称 A 是可逆矩阵，简称 A 可逆，B 为 A 的逆矩阵

♣

例题 1.4 如果 A 可逆，A 的逆矩阵唯一

证明 假设存在 B 和 C 两个逆矩阵，根据性质可知:

$$AB = BA = I$$
$$AC = CA = I$$
$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

由此可知 B 和 C 相等，A 的逆矩阵唯一

由定义可知：如果 A 是 B 的逆矩阵，那么 B 也是 A 的逆矩阵，AB 互为逆矩阵

根据定义可以得知，若 A 为对角矩阵

$$diag(d_1, d_2, \cdots .d_n), d_i \neq 0$$

, 则对角矩阵的逆矩阵为：

$$A^{-1} = diag(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_n})$$

并非每个矩阵都可逆

定理 1.6 (逆矩阵)

逆矩阵的性质，假设 A 与 B 均为 n 阶可逆矩阵，数 $\lambda \neq 0$, 则

1. A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$
2. λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
3. (AB) 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

♡

下面分别证明 3 和 4 号定理：

例题 1.5 假设 A 与 B 均为 n 阶可逆矩阵,(AB) 可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

证明

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

所以 AB 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

例题 1.6 假设 A 为 n 阶可逆矩阵，A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

证明

$$\begin{aligned} A^T(A^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T \quad \because B^TA^T = (AB)^T \\ &= I^T \\ &= I \end{aligned}$$

所以 A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

其中 3 号定理可以推广到 n 个可逆矩阵的情况：

$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$$

证明矩阵是否可逆的关键是证明一个矩阵是否存在另一个矩阵使得两个矩阵相乘为 I

以下是几道例题：

例题 1.7

设方阵 B 为幂等矩阵 ($B^2 = B$, 从而 $\forall k \in N^*$[1]), 证明 A 可逆，且 A 的逆矩阵为：

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$$

证明

$$A(\frac{1}{2}(3I - A)) = \frac{1}{2}(A - 3A^2)$$
$$\because A = I + B \quad \therefore A^2 = (I^2 + 2B + B^2)$$
$$\because B\text{是幂等矩阵.} \quad \therefore A^2 = (I + 3B) = (3A - 2I)$$
$$A(\frac{1}{2}(3I - A)) = \frac{1}{2}(3A - 3A + 2I) = I$$
$$\therefore A\text{可逆且}A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$$

笔记 若已知 A 的逆矩阵则可以直接相乘证明乘积为 I

例题 1.8 设矩阵 A 满足 $A^2 - 3A - 10I = O$, 证明 A,A-4I 都可逆

证明

由 $A^2 - 3A - 10I = O$，可知 $A(A - 3I) = 10O$,$A(\frac{1}{10}(A - 3I)) = I$,A 可逆，且 $A^-1 = \frac{1}{10}(A - 3I)$

由 $A^2 - 3A - 10I = O$，可知 $(A + I)(A - 4I) = 6I$,$(A - 4I)(\frac{1}{6}(A + I)) = I$,A-4I 可逆，且 $(A - 4I)^-1 = \frac{1}{6}(A + I)$

笔记 若 A 的逆矩阵未知，则通过已知条件，凑出 A 乘另一个矩阵等于 I 的形式，则可以证明 A 可逆

定理 1.7 (可逆的等价命题)

设 A 为 n 阶矩阵，则下列命题是等价的：

1. A 是可逆的
2. 齐次线性方程组 AX=0 只有零解
3. A 与 I 行等价
4. A 可表示为有限个初等矩阵的乘积

♡

以下进行循环证明：

证明

$1 \Rightarrow 2$

$$AX = 0$$
$$\because A\text{可逆},\therefore A^{-1}AX = IX = 0$$
$$\therefore X = 0$$

---

[1] N^* 为正整数集合，即 $N\backslash\{0\}$

AX=0 只有零解

$2 \Rightarrow 3$

若齐次线性方程组 AX=0 只有零解

$$A \xrightarrow{\text{行初等变化}} B(B\text{ 为行阶梯形矩阵})$$

则 AX=0 与 BX=0 同解，假设 B 中的对角元[1]存在 0，则根据定理??, 存在无穷多的解，与原定义不符。所以 B 中对角元全不为 0,A 经过行初等变化后可以得到的行阶梯形矩阵为 I，根据定义??, 则 A 与 I 行等价

$3 \Rightarrow 4$

A 与 I 行等价，所以 A 经过初等行变换能够变成 I，初等行变换相当于矩阵左乘有限多个初等矩阵，即存在有限多个 E，使得

$$(E_1E_2\cdots E_k)A = I$$
$$A = I(E_K^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1})$$

初等矩阵的逆仍为初等矩阵, 所以 A 可表示为有限个初等矩阵的乘积

$4 \Rightarrow 1$

A 可表示为有限个初等矩阵的乘积，则对于初等矩阵 $E_1, E_2, \cdots, E_k$:

$$A = E_1E_2\cdots E_kI$$
$$A(E_K^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}) = I$$

A 可逆

引理 1.1

如果非齐次线性方程组 AX=b 有唯一解的充分必要条件是 A 可逆

证明 先证充分性，若 A 可逆，则 AX=b 有唯一解，且唯一解为 $A^{-1}b$

再证必要性，假设存在 AX=b 有唯一解，当时 A 不可逆，即对于 AX=0 存在一个非零解 Z

假设 X_1 为 AX=b 的唯一解，已知 $X_2 = X_1 + Z$

则 $AX_2 = A(X_1 + Z) = b + O = b0000000$

X_2 也为 AX=b 的一个解, 因此假设不成立, 原命题成立

♡

1.3.2 用行初等变化求逆矩阵

笔记 若对矩阵 (A,I) 施以行初等变换将 A 变为 I, 则 I 变为 A^{-1}

$$(A,I) \xrightarrow{\text{行初等变化}} (I, A^{-1})$$

[1] 矩阵行列式中对角线上的元素

1.4 分块矩阵

第 2 章 行列式

Contents

2.1 行列式的定义 0
2.2 行列式的性质与计算 0
2.3 拉普拉斯展开定理 0
2.4 克拉默法则 0
2.5 矩阵的秩 0

2.1 行列式的定义

2.2 行列式的性质与计算

2.3 拉普拉斯展开定理

2.4 克拉默法则

2.5 矩阵的秩

第 3 章 几何空间

Contents

3.1 空间直角坐标系与向量 . . . . **P**
3.2 向量乘法 . . . . **P**
3.3 平面 . . . . **P**
3.4 空间直线 . . . . **P**

3.1 空间直角坐标系与向量

3.2 向量乘法

3.3 平面

3.4 空间直线

第 4 章 向量空间

Contents

4.1 n 维向量空间 . . . . Q
4.2 向量组的线性相关性 . . . . Q
4.3 向量组的秩与极大无关组 . . . . Q
4.4 线性方程解的结构 . . . . Q

4.1 n 维向量空间

4.2 向量组的线性相关性

4.3 向量组的秩与极大无关组

4.4 线性方程解的结构

第 5 章 特征值与特征向量

Contents

5.1 特征值与特征向量 . . . . R
5.2 矩阵的相似对角化 . . . . R
5.3 向量空间的正交性 . . . . R
5.4 实对称矩阵的相似对角化 . . . . R

5.1 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 向量空间的正交性

5.4 实对称矩阵的相似对角化

第 6 章 二次型与二次曲面

Contents

6.1 实二次型及其标准型 . . . . S
6.2 正定二次型 . . . . S
6.3 曲面与空间曲线 . . . . S
6.4 二次曲面 . . . . S

6.1 实二次型及其标准型

6.2 正定二次型

6.3 曲面与空间曲线

6.4 二次曲面

术语索引

初等矩阵 K
同型矩阵 D

旋转变化 G

矩阵 C
- 上三角矩阵 D
- 下三角矩阵 D
- 单位矩阵 I D
- 反称矩阵 I
- 增广矩阵 D
- 对称矩阵 I
- 对角矩阵 diag D
- 数量矩阵 F
- 方阵 D
- 系数矩阵 C
- 行矩阵 D
- 零矩阵 O D

矩阵乘法 E
矩阵的多项式 G
矩阵的幂 F
矩阵相等 D
矩阵等价 K
矩阵线性运算 D
- 矩阵减法 E
- 矩阵加法 E
- 矩阵数乘 E

矩阵转置 H
线性变化 G
线性方程组解的特征 J
- 基本未知量 J
- 自由未知量 J

负矩阵 E

逆矩阵 K
- 对角矩阵的逆矩阵 L
- 逆矩阵的性质 L

非齐次线性方程组 I
高斯消元法 I
- 矩阵的行列初等变化 I
- 行简化阶梯型矩阵 J
- 行阶梯形矩阵 J

齐次线性方程组 I
- 平凡解 J