Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil
Escuela Profesional de Ingeniería de Sistemas

CÁLCULO (MA-282)

Trabajo de Cálculo N°1

Resolución de ejercicios de Cálculo Diferencial, Ecuaciones Diferenciables Ordinarias de variable Separable.

Docente: Dr. Miyagi
Grupo: B
Integrantes: RAMOS QUINTANILLA, Robert Briceño [27210104]
VARGAS HUAMAN, Jhoel Alexander [27210105]

Ayacucho - Perú
2025

Ejercicio 1

$$\tan x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \cot y\, dy = 0$$

Solución

Dividimos ambos lados de la ecuación por $\cos^2 x \sin^2 y$ (suponiendo $\cos x \neq 0$ y $\sin y \neq 0$):

$$\frac{\tan x\, \sin^2 y}{\cos^2 x\, \sin^2 y}\, dx + \frac{\cos^2 x\, \cot y}{\cos^2 x\, \sin^2 y}\, dy = 0$$

$$\frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx + \frac{\cot y}{\sin^2 y}\, dy = 0$$

Expresando en términos de senos y cosenos:

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx + \frac{\cos y}{\sin^3 y}\, dy = 0$$

Integramos ambos términos:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx + \int \frac{\cos y}{\sin^3 y}\, dy = C$$

Para la primera integral, sea $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\, dx$:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx = -\int u^{-3}\, du = -\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}u^{-2} = \frac{1}{2}\sec^2 x$$

Para la segunda integral, sea $v = \sin y \Rightarrow dv = \cos y\, dy$:

$$\int \frac{\cos y}{\sin^3 y}\, dy = \int v^{-3}\, dv = \frac{v^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2}\csc^2 y$$

Sustituyendo ambos resultados en la ecuación integral:

$$\frac{1}{2}\sec^2 x - \frac{1}{2}\csc^2 y = C.$$

Multiplicamos por 2:

$$\sec^2 x - \csc^2 y = C'$$

Utilizando las identidades trigonométricas:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \qquad \csc^2 y = 1 + \cot^2 y,$$

$$(1 + \tan^2 x) - (1 + \cot^2 y) = C'$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 x - \cot^2 y = C'$$

$$-\cot^2 y = -\tan^2 x + C'$$

Múltiplicamos por -1:

$$\cot^2 y = \tan^2 x - C'$$

Renombramos la constante:

$$C' = C$$

rpta: $\cot^2 y = \tan^2 x + C$

Ejercicio 2

$$xy\prime - y = y^3$$

Solución

Partimos de la ecuación diferencial:

$$xy' - y = y^3$$

Despejamos la derivada:

$$xy' = y + y^3$$

$$y' = \frac{y + y^3}{x} = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x}$$

Reconocemos que es una ecuación de Bernoulli de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

donde

$$P(x) = -\frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{1}{x}, \quad n = 3$$

Aplicamos el cambio de variable correspondiente a Bernoulli:

$$z = y^{1-n} = y^{-2}$$

Derivando:

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}y' \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{2}y^3\frac{dz}{dx}$$

Sustituimos en la ecuación original:

$$x\left(-\frac{1}{2}y^3\frac{dz}{dx}\right) - y = y^3$$

Simplificamos:

$$-\frac{1}{2}xy^3\frac{dz}{dx} = y + y^3$$

Dividimos ambos lados entre y^3 (suponiendo $y \neq 0$):

$$-\frac{1}{2}x\frac{dz}{dx} = \frac{y}{y^3} + 1 = y^{-2} + 1$$

Sustituyendo $y^{-2} = z$:

$$-\frac{1}{2}x\frac{dz}{dx} = z + 1$$

Despejamos la derivada:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = -\frac{2}{x}$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden en z. El factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$$

Multiplicamos toda la ecuación por x^2:

$$x^2\frac{dz}{dx} + 2xz = -2x$$

El lado izquierdo corresponde a una derivada de producto:

$$\frac{d}{dx}(x^2z) = -2x$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}(x^2z)\,dx = \int -2x\,dx$$

$$x^2z = -x^2 + C$$

Despejamos z:

$$z = -1 + \frac{C}{x^2}$$

Volvemos a la variable original $z = y^{-2}$:

$$y^{-2} = -1 + \frac{C}{x^2}$$

Simplificamos, factorizamos y sacamos la raiz cuadrada:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{C - x^2}{x^2}$$

$$x^2 = y^2(C - x^2)$$

$$x^2 = y^2C - y^2x^2$$

$$x^2 + y^2x^2 = y^2C$$

$$x^2(1 + y^2) = y^2C$$

$$x^2 = \pm\sqrt{\frac{y^2C}{1 + y^2}}$$

$$x^2 = \pm\sqrt{\frac{y^2C}{1 + y^2}}$$

$$x = \pm\frac{yC}{\sqrt{1 + y^2}}$$

rpta: $x = \pm\frac{yC}{\sqrt{1+y^2}}$

Ejercicio 3

$$\sqrt{1 + x^3}\frac{dy}{dx} = x^2y + x^2$$

Ejercicio 4

$$e^{2x-y}dx + e^{y-2x}dy = 0$$

Ejercicio 5

$$(x^2y - x^2 + y - 1)dx + (xy + 2y - 3y - 6)dy = 0$$

Ejercicio 6

$$e^{x+y}senx\,dx + (2y + 1)e^{-y^2}dy = 0$$

Ejercicio 7

$$3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$$

Solución

$$3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$$

$$3e^x \operatorname{tg} y\, dx = -(1-e^x)\sec^2 y\, dy$$

$$\frac{3e^x}{1-e^x} = -\frac{\sec^2 y\, dy}{\operatorname{tg} y\, dx}$$

$$\frac{3e^x}{1-e^x}dx = -\frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy$$

$$3\int \frac{e^x}{1-e^x}dx = -\int \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy$$

se conose a la funcion tg y se puede utilizar la regla de la integral de tangente

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}) = sec^2 x$$

sustituyendo los Valores

$$u = 1-e^x$$

$$du = -e^x\, dx$$

$$-du = e^x dx$$

Reemplazando en la integral

$$3\int \frac{e^x}{1-e^x}dx = \int \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy$$

$$3\int \frac{-du}{u} = -\int \frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y}dy$$

$$-3\ln(u) = -\ln(\operatorname{tg} y) + C$$

$$\ln(1-e)^3 = \ln(\operatorname{tg} y) + C$$

$$\operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3$$

rpta: $\operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3$

Ejercicio 8

Solución

$$e^y(\frac{dy}{dx}+1) = 1$$

$$e^y\left(\frac{dy+dx}{dx}\right) = 1$$

$$e^y dy + e^y dx = dx$$

$$e^y dy = dx - e^y dx$$

$$e^y dy = dx(1-e^y)$$

$$\frac{e^y}{1-e^y}dy = dx$$

$$\int \frac{e^y}{1-e^y}dy = \int dx$$

sustituyendo los Valores

$$u = 1-e^y$$

$$du = -e^y\, dy$$

$$\int \frac{e^y}{1-e^y}dy = \int \frac{du}{u}$$

$$\ln(u) = \ln(1-e^y) + C$$

$$\ln(1-e^y) = \ln(u) + C$$

$$e^y = u + C$$

rpta: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y-1}$

Ejercicio 9

$$y\prime = 1 + x + y^2 + xy^2$$

Solución

$$y\prime = 1 + x + y^2 + xy^2$$

$$y\prime = (1 + x)(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x)dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx + \int (x)dx$$

sabemos que

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$$

es lo mismo tener $1 = 1^2$
reemplazando

$$\int \frac{dy}{1^2 + y^2} = \int dx + \int (x)dx$$

usando la regla de la integral de tangente

$$\int \frac{dy}{1^2 + y^2} = \frac{1}{1} \tan^{-1}\left(\frac{y}{1}\right) = \tan^{-1} y$$

$$\tan^{-1} y = x + \frac{x^2}{2} + C$$

O tambien se puede escribir como

$$\tan^{-1} y - x - \frac{x^2}{2} = C$$

se puede escribir como

$$\arctan y - x - \frac{x^2}{2} = C$$

rpta: $\arctan y - x - \frac{x^2}{2} = C$

Ejercicio 10

$$y - xy\prime = a(1 + x^2 y)$$

rpta:

$$y = \frac{a + cx}{1 + ax}$$