Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil
Escuela Profesional de Ingeniería de Sistemas

CÁLCULO (MA-282)

Trabajo de Cálculo N°1

Resolución de ejercicios de Cálculo Diferencial, Ecuaciones Diferenciables Ordinarias de variable Separable.

Docente: Dr. Miyagi
Grupo: B
Integrantes: RAMOS QUINTANILLA, Robert Briceño [27210104]
VARGAS HUAMAN, Jhoel Alexander [27210105]

Ayacucho - Perú
2025

Ejercicio 1

$$\tan x \sin^2 y \, dx + \cos^2 x \cot y \, dy = 0$$

Solución

Dividimos ambos lados de la ecuación por $\cos^2 x \sin^2 y$ (suponiendo $\cos x \neq 0$ y $\sin y \neq 0$):

$$\frac{\tan x \, \sin^2 y}{\cos^2 x \, \sin^2 y} \, dx + \frac{\cos^2 x \, \cot y}{\cos^2 x \, \sin^2 y} \, dy = 0,$$

$$\frac{\tan x}{\cos^2 x} \, dx + \frac{\cot y}{\sin^2 y} \, dy = 0.$$

Expresando en términos de senos y cosenos:

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx + \frac{\cos y}{\sin^3 y} \, dy = 0.$$

Integramos ambos términos:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx + \int \frac{\cos y}{\sin^3 y} \, dy = C.$$

Para la primera integral, sea $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx = -\int u^{-3} \, du = -\left(\frac{u^{-2}}{-2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} u^{-2} = \frac{1}{2} \sec^2 x.$$

Para la segunda integral, sea $v = \sin y \Rightarrow dv = \cos y \, dy$:

$$\int \frac{\cos y}{\sin^3 y} \, dy = \int v^{-3} \, dv = \frac{v^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2} \csc^2 y.$$

Sustituyendo ambos resultados en la ecuación integral:

$$\frac{1}{2} \sec^2 x - \frac{1}{2} \csc^2 y = C.$$

Multiplicamos por 2:

$$\sec^2 x - \csc^2 y = C'.$$

Utilizando las identidades trigonométricas:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \qquad \csc^2 y = 1 + \cot^2 y,$$

$$(1 + \tan^2 x) - (1 + \cot^2 y) = C'$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 x - \cot^2 y = C'.$$

$$-\cot^2 y = -\tan^2 x + C'.$$

Múltiplicamos por -1:

$$\cot^2 y = \tan^2 x - C'.$$

Renombramos la constante:

$$C' = C.$$

rpta: $\cot^2 y = \tan^2 x + C$

Ejercicio 2

$$xy\prime - y = y^3$$

Ejercicio 3

$$\sqrt{1 + x^3} \frac{dy}{dx} = x^2 y + x^2$$

Ejercicio 4

$$e^{2x-y} dx + e^{y-2x} dy = 0$$

Ejercicio 5

$$(x^2 y - x^2 + y - 1)dx + (xy + 2y - 3y - 6)dy = 0$$

Ejercicio 6

$$e^{x+y} senx \, dx + (2y + 1)e^{-y^2} dy = 0$$

Ejercicio 7

$$3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$$

Solución

$$3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$$

$$3e^x \operatorname{tg} y\, dx = -(1 - e^x) \sec^2 y\, dy$$

$$\frac{3e^x}{1 - e^x} = -\frac{\sec^2 y\, dy}{\operatorname{tg} y\, dx}$$

$$\frac{3e^x}{1 - e^x} dx = -\frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} dy$$

$$3 \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx = -\int \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} dy$$

se conose a la funcion tg y se puede utilizar la regla de la integral de tangente

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}) = sec^2 x$$

sustituyendo los Valores

$$u = 1 - e^x$$

$$du = -e^x\, dx$$

$$-du = e^x dx$$

Reemplazando en la integral

$$3 \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx = \int \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} dy$$

$$3 \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} dy$$

$$-3 \ln(u) = -\ln(\operatorname{tg} y) + C$$

$$\ln(1 - e)^3 = \ln(\operatorname{tg} y) + C$$

$$\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$$

rpta: $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$

Ejercicio 8

Solución

$$e^y(\frac{dy}{dx} + 1) = 1$$

$$e^y \left(\frac{dy + dx}{dx}\right) = 1$$

$$e^y dy + e^y dx = dx$$

$$e^y dy = dx - e^y dx$$

$$e^y dy = dx(1 - e^y)$$

$$\frac{e^y}{1 - e^y} dy = dx$$

$$\int \frac{e^y}{1 - e^y} dy = \int dx$$

sustituyendo los Valores

$$u = 1 - e^y$$

$$du = -e^y\, dy$$

$$\int \frac{e^y}{1 - e^y} dy = \int \frac{du}{u}$$

$$\ln(u) = \ln(1 - e^y) + C$$

$$\ln(1 - e^y) = \ln(u) + C$$

$$e^y = u + C$$

rpta: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - 1}$

Ejercicio 9

$$y\prime = 1 + x + y^2 + xy^2$$

Solución

$$y\prime = 1 + x + y^2 + xy^2$$

$$y\prime = (1 + x)(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x)dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx + \int (x)dx$$

sabemos que

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$$

es lo mismo tener $1 = 1^2$
reemplazando

$$\int \frac{dy}{1^2 + y^2} = \int dx + \int (x)dx$$

usando la regla de la integral de tangente

$$\int \frac{dy}{1^2 + y^2} = \frac{1}{1}\tan^{-1}\left(\frac{y}{1}\right) = \tan^{-1} y$$

$$\tan^{-1} y = x + \frac{x^2}{2} + C$$

O tambien se puede escribir como

$$\tan^{-1} y - x - \frac{x^2}{2} = C$$

se puede escribir como

$$\arctan y - x - \frac{x^2}{2} = C$$

rpta: $\arctan y - x - \frac{x^2}{2} = C$

Ejercicio 10

$$y - xy\prime = a(1 + x^2 y)$$

rpta:

$$y = \frac{a + cx}{1 + ax}$$