I. 可分离变量的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y)$$

直接分离变量得

$$p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{q(y)}\mathrm{d}y$$

对两边积分即有

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{q(y)}\mathrm{d}y$$

齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

设 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x} = \varphi(u)$$

整理得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

最后将 $u = \frac{y}{x}$ 回代即得原方程的解.

需要注意的是, 求解方程的过程中可能会丢失一些解, 需要考虑一些边界情况.

II. 一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x) \tag{2.1}$$

齐次方程的通解

> 当 $q(x) \equiv 0$ 时, 该方程称为一阶齐次线性微分方程, 可求其通解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0$$

考虑直接分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x$$

两边积分并整理得

$$y = C\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)$$

非齐次方程的特解

> 当 $q(x) \not\equiv 0$ 时, 该方程称为一阶非齐次线性微分方程, 可先求其对应齐次方程的通解, 再求非齐次方程的一个特解, 两者相加即得该非齐次方程的通解.

对式 (2.1) 两边同时除以 y, 并整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x + \frac{q(x)}{y}\mathrm{d}x$$

两边积分并化简得

$$y = C\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x + \int \frac{q(x)}{y}\mathrm{d}x\right)$$

设 $c(x) = C\exp\left(\int \frac{q(x)}{y}\mathrm{d}x\right)$, 将其带入即有

$$y = c(x)\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right) \tag{2.2}$$

将上式带入式 (2.1) 得

$$c'(x)\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right) - c(x)\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)p(x) + p(x)c(x)\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right) = q(x)$$

注意到中间两项是可以消去的, 于是

$$c'(x) = q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)$$

两边积分得

$$c(x) = \int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right) + C$$

将 $c(x)$ 的表达式带入式 (2.2) 即得方程 (2.1) 的一个特解(消去 C 是因为常数项已经在通解中刻画了)

$$y^* = \exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)\int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)$$

结合齐次方程的通解, 则方程 (2.1) 的通解为

$$y = C\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right) + \exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)\int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)$$

伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n$$

两边同时除以 y^n 即得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

设 $Y = y^{1-n}, P(x) = (1-n)p(x), Q(x) = (1-n)q(x)$, 将两边同乘 $(1-n)$ 即得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} + P(x)Y = Q(x)$$

容易套用「一阶线性微分方程」的解法.

III. 可降阶的高阶微分方程

变量分离

$$y^{(n)} = f(x)$$

两边同时做 n 次积分即可, 最后结果形如

$$y = \int\left(\int\cdots\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\cdots\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C_1x^{n-1} + C_2x_{n-2} + \cdots + C_n$$

无显式原函数

$$y'' = f(x, y')$$

设 $y' = g(x)$, 则原式化为一阶微分方程

$$g'(x) = f(x, g(x))$$

解得

$$g(x) = \varphi(x, C_1)$$

积分即得

$$y = \int g(x)\mathrm{d}x + C = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

无显式自变量

$$y'' = f(y, y')$$

设 $y' = p(y)$, 则

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

回代得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{f(y, p(y))}{p(y)}$$

设其通解为 $p(y) = \varphi(y, C_1)$, 则分离变量后积分可得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

IV. 常系数线性微分方程

研究「常系数线性微分方程」一般以二阶微分方程为主, 形如

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

二阶常系数齐次线性微分方程

对于方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

注意到 e^{rx} 与其导数只差常数因子, 于是设 $y = \mathrm{e}^{rx}$ 即得

$$(r^2 + pr + q)\mathrm{e}^{rx} = 0$$

称 $r^2 + pr + q = 0$ 为原方程的「特征方程」, 求出来的根称为「特征根」.

注意到方程的通解可以用两个线性无关的特解的线性组合刻画(此处不加以证明), 于是考虑根据特征根构造两个特解.

- 当特征方程 $\Delta > 0$ 时, 存在两相异实根 r_1, r_2, 则该微分方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}$$

- 当特征方程 $\Delta = 0$ 时, 存在两相同实根 $r_1 = r_2$, 则该微分方程有一个特解 $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$.

设另一特解 $y_2 = y_1 u(x) = \mathrm{e}^{r_1 x} u(x)$, 将其带入方程得

$$\mathrm{e}^{r_1 x}\left((u''(x) + 2r_1 u'(x) + {r_1}^2 u(x)) + p(u'(x) + r_1 u(x)) + qu(x)\right) = 0$$

化简得

$$u''(x) + (2r_1 + p)u'(x) + ({r_1}^2 + pr_1 + q)u(x) = 0$$

由于 $r_1 = -\dfrac{p}{2}$ 且其为方程 ${r_1}^2 + pr_1 + q = 0$ 的根, 于是解得

$$u''(x) = 0$$

取 $u(x) = x$ 即得特解 $y_2 = x\mathrm{e}^{r_1 x}$, 结合特解 y_1 即有原方程通解

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{r_1 x}$$

- 当特征方程 $\Delta < 0$ 时, 存在一对共轭复根 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$.

此时原方程有两个解

$$y = \exp\left((\alpha \pm i\beta)x\right)$$

运用欧拉公式 $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 得到

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\cos\beta x \pm i\sin\beta x\right)$$

通过线性组合构造两个线性无关的解

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\sum y = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2 &= \frac{1}{2i}\Delta y = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

于是原方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

以上结论均可推广到高阶情形.

二阶常系数非齐次线性微分方程

对形如下式的微分方程

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)$$

根据前面的经验, 我们只需要求出该方程的一个特解.

设特解 $y^* = \mathrm{e}^{\lambda x} g(x)$, 则有

$$\begin{aligned} y^{*\prime} &= \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda g(x) + g'(x)) \\ y^{*\prime\prime} &= \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 g(x) + 2\lambda g'(x) + g''(x)) \end{aligned}$$

带入原方程并化简得

$$g''(x) + (2\lambda + p)g'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)g(x) = f(x) \tag{4.1}$$

注意到当 λ 分别为特征方程的 $k = 0, 1, 2$ 重根的时候, $g(x)$ 和 $g'(x)$ 对应项会依次变为 0. 这意味着当 k 取 $0, 1, 2$ 时, $g(x), g'(x)$ 和 $g''(x)$ 需要分别为与 $f(x)$ 同次数的多项式, 于是不妨设 $r(x)$ 为与 $f(x)$ 同次数的待定系数多项式, 特解即为

$$y^* = g(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = x^k r(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

将其带入式 (4.1) 中即可算出 $r(x)$ 的各系数, 进而得到方程的一个特解.

对形如下式的微分方程

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x} \left(f(x) \cos \omega x + g(x) \sin \omega x \right)$$

应用欧拉公式将等式右侧化为

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathrm{e}^{\lambda x} \left(f(x) \cos \omega x + g(x) \sin \omega x \right) \\ &= \mathrm{e}^{\lambda x} \left(f(x) \frac{\mathrm{e}^{\omega x i} + \mathrm{e}^{-\omega x i}}{2} + g(x) \frac{\mathrm{e}^{\omega x i} - \mathrm{e}^{-\omega x i}}{2i} \right) \\ &= \left(\frac{f(x)}{2} + \frac{g(x)}{2i} \right) \mathrm{e}^{(\lambda + \omega i)x} + \left(\frac{f(x)}{2} - \frac{g(x)}{2i} \right) \mathrm{e}^{(\lambda - \omega i)x} \\ &= h_1(x) \mathrm{e}^{(\lambda + \omega i)x} + h_2(x) \mathrm{e}^{(\lambda - \omega i)x} \end{aligned}$$

其中 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 为从 $f(x)$ 和 $g(x)$ 线性组合得到的函数, 且对应项系数共轭.

设 $\lambda + \omega i$ 是特征方程的 k 重根($k = 0, 1$), 则方程

$$y'' + py' + qy = h_1(x) \mathrm{e}^{(\lambda + \omega i)x}$$

有特解

$$y_1{}^* = x^k r(x) \mathrm{e}^{(\lambda + \omega i)x} \tag{4.2}$$

设 m 为 $f(x), g(x)$ 中次数较大者的次数, $r(x)$ 是待定系数的 m 次多项式. 对式 (4.2) 两边取共轭即得

$$\overline{y_1{}^*}'' + p\overline{y_1{}^*}' + q\overline{y_1{}^*} \equiv h_1(x) \mathrm{e}^{(\lambda + \omega i)x} = h_2(x) \mathrm{e}^{(\lambda - \omega i)x}$$

因此 $y_2{}^* = \overline{y_1{}^*}$ 为以下方程的特解

$$y'' + py' + qy = h_2(x) \mathrm{e}^{(\lambda - \omega i)x}$$

于是原方程的特解可以用两部分的特解之和来刻画, 即

$$\begin{aligned} y^* &= y_1{}^* + y_2{}^* \\ &= x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \left(r(x) \mathrm{e}^{i\omega x} + \overline{r(x)} \mathrm{e}^{-i\omega x} \right) \\ &= x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \left(r_1(x) \cos \omega x + r_2(x) \sin \omega x \right) \end{aligned}$$

从上述推到中我们可以发现 y^* 实则是个实函数, 于是 r_1 和 r_2 也均为 m 次实多项式.

综上, 对于微分方程

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x} \left(f(x) \cos \omega x + g(x) \sin \omega x \right)$$

可以设特解为

$$y^* = x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \left(r_1(x) \cos \omega x + r_2(x) \sin \omega x \right)$$

然后代入原方程解出待定系数. 该结论也可推广到高阶形式.