离散数学

「离散数学及其应用」学习笔记

CCA

Shenzhen MSU-BIT University

最初写作于: **2024 年 07 月 14 日**

最后更新于: **2024 年 07 月 21 日**

目录

I. 逻辑和证明

1.1 命题逻辑

1.1.1 逻辑运算

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\neg$	0	1
	1	0

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

表 1.1　四种基本逻辑运算的真值表

一句话描述 　提示 1.1.1

- 与($\wedge$)运算的结果为真当且仅当两者均为真.
- 或($\vee$)运算的结果为真当且仅当两者不都为假.
- 非($\neg$)运算改变作用对象的真假.
- 异或($\oplus$)运算的结果为真当且仅当两者不同. 特别的, 异或运算可以看作二进制意义下的不进位加法.

1.1.2 命题

Def 条件语句 　定义 1.1.1

令 p 和 q 为命题. 条件语句 $p \to q$ 是命题「如果 p, 则 q」.

条件语句 $p \to q$ 的真假同 $\neg p \vee q$, 也即 $p \to q$ 为假当且仅当 p 为真且 q 为假.

「p仅当q」和「q除非$\neg p$」 　注意 1.1.1

这两者都是 $p \to q$ 的等价表述.

- p 仅当 q 说的是只有 q 成立 p 才能成立, 也即若 q 为假则 p 也为假. 故当 p 为真时, 欲使得该命题成立, q 只能为真. 而当 p 为假时, 该命题对 q 无约束, q 既可以为真也可以为假.
- q 除非 $\neg p$ 说的是除了 $\neg p$ 为真(也即 p 为假)之外的情况, q 都成立. 故若 p 为真, 欲使得该命题成立, q 只能为真. 该描述与 $p \to q$ 等价.

Def 逆命题 逆否命题 否命题 定义 **1.1.2**

存在命题 $p \to q$, 则有

- $q \to p$ 被称为 $p \to q$ 的否命题.
- $\neg q \to \neg p$ 被称为 $p \to q$ 的逆否命题.
- $\neg p \to \neg q$ 被称为 $p \to q$ 的否命题.

Thm 逆否命题同真假 定理 **1.1.1**

命题 $p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等价.

Proof :

注意到该逆否命题为假当且仅当 $\neg q$ 为真且 $\neg p$ 为假, 也即 p 为真且 q 为假. 此即为 $p \to q$ 为假的充要条件.

$\mathcal{Q.E.D.}$

同理, 由于命题 $p \to q$ 的逆与否也互为逆否命题, 故它们也同真假.

1.1.3 复合命题

复合命题即若干命题通过基本逻辑运算结合构成的代数式.

有了前文所述工具, 我们可以对复合命题进行化简.

e.g. 化简复合命题$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$ 示例 **1.1.1**

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	p and q	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0

表 1.2 命题 $(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$ 关于 p, q 的真值表

1.1.4 逻辑谜题

e.g. 选择箱子 示例 **1.1.2**

国王允许你从三个箱子中选择一个作为奖赏, 其中有且仅有一个藏有宝藏. 第一和第二个箱子上都写着「这个箱子中没有宝藏」, 而第三个箱子上写着「宝藏在第二个箱子中」. 从不撒谎的皇后告诉你其中有且仅有一个提示是真的. 你会做出怎样的选择呢?

Solution :

设 p_i 为命题「宝藏在第 i 个箱子中」, $i = 1, 2, 3$. 皇后说的话等价于

$$(\neg p_1 \wedge \neg(\neg p_2) \wedge \neg p_2) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_2) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg(\neg p_2) \wedge p_2) \tag{1.1}$$

该命题等价于 $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2)$, 由分配律化简为 $p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_1$.

因此 p_1 为真, 宝藏在第一个箱子里. 将三个提示带入检验无误.

e.g. 骗子与老实人 示例 **1.1.3**

一个岛屿上住着两种人, 其中「骗子」只说假话, 「老实人」只说真话. 你在岛上碰到了两个人 A 和 B, A 说「B 是老实人」, B 说「我与 A 不是一类人」. 请你分析 A 和 B 分别是哪种人.

Solution :

设命题 p 为「A 是老实人」, q 为「B 是老实人」. 由题设可知以下两个命题为真:

$$p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow p \oplus q \tag{1.2}$$

由 $p, q \leftrightarrow p \oplus q$ 可知, p, q 均为假, 故 A 和 B 都是骗子.

e.g. 逻辑学家与啤酒 示例 **1.1.4**

三个逻辑学家去喝酒. 酒馆老板问「三位每人一杯啤酒吗?」 A 率先说「我不知道」, B 随后说「我不知道」. 这时如果 C 想要一杯啤酒, 他会说什么?

Solution :

设命题 p, q, r 分别表示「A 想要一杯啤酒」「B 想要一杯啤酒」「C 想要一杯啤酒」.

A 面对的问题是「判断 $p \wedge q \wedge r$ 是否为真」, 他知道 p 是否为真, 且如果 p 为假, 那么 $p \wedge q \wedge r$ 也为假, 所以 B 和 C 同时知道了 p 为真. 同理, B 回答完后 A 和 C 也同时知道了 q 为真. 轮到 C 回答时, 他根据前面的信息判断出了 $p \wedge q \wedge r$ 为真.

因此 C 会说「是的.」

1.2 命题等价式

1.2.1 逻辑等价式

Def 逻辑等价 **定义 1.2.1**

若 $p \leftrightarrow q$ 是永真式(tautology), 则命题 p 与 q 是逻辑等价的, 记作 $p \equiv q$. (有时也用 $p \Leftrightarrow q$ 替代)

等价式	名称
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	恒等律
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	支配律
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	幂等律
$\neg(\neg p) \equiv p$	双重否定律
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	交换律
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	结合律
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	分配律
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	德 · 摩根律
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	吸收律
$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	否定律

表 1.4 逻辑等价式

$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

表 1.5 条件命题的逻辑等价式

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

表 1.6 双条件命题的逻辑等价式

1.2.2 可满足性

离散数学作业 1

CCA 2024/7/14

1. 试解释为什么 p, q 和 r 在不全为真且不全为假时 $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 为真, 而当三个变量具有相同真值时为假.

1.1 – 43

Solution :

1. p, q, r 不全为真且不全为假意味着其中既存在真命题又存在假命题, 于是 p, q, r 中存在真命题, $\neg p, \neg q, \neg r$ 中也存在真命题. 进而 $p \vee q \vee r$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ 都是真命题, 于是 $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 为真.
2. 当三个变量具有相同真值的时候, p, q, r 或 $\neg p, \neg q, \neg r$ 均为假, 进而 $p \vee q \vee r$ 或 $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ 为假, 于是 $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 为假.

2. 有一个含 100 条语句的列表, 其中第 n 条语句是「列表中恰有 n 条语句为假」.

1. 你能从这些语句中得到什么结论?
2. 如果第 n 条语句写的是「列表中至少有 n 条语句为假」. 回答上一个问题.
3. 假设这个列表包含 99 条语句. 回答上一个问题.

1.1 – 53

Solution :

1. 注意到这些命题均互斥, 且加上命题「列表中命题均为真」后恰好覆盖了刻画假命题数量的所有命题. 又因为「列表中命题均为真」必为假, 所以该列表中有且仅有一个真命题. 因此, 该列表中仅有第 99 条语句为真.
2. 设假命题数量为 x, 则有 $100 - x$ 条语句为假, 解得 $x = 50$. 于是列表中前 50 条语句为真, 后 50 条语句为假.
3. 参照上一个问题, 方程 $x = 99 - x$ 无解, 于是该列表不存在.

3. 一个村庄的人要么只说真话, 要么只说谎. 并且他们对于所有的问题都用「是」或「否」来回答. 你站在两条岔路和一个村民前, 问村民一个什么问题可以知道走哪条路是正确的?

1.2 – 19

Solution :

「如果我问你左边的岔路是否正确, 你会回答"是"吗?」