

离散数学

「离散数学及其应用」学习笔记

CCA 

Shenzhen MSU-BIT University

最初写作于: 2024 年 07 月 14 日

最后更新于: 2024 年 07 月 19 日

目录

1 逻辑和证明	3
1.1 命题逻辑	3
1.1.1 逻辑运算	3
1.1.2 命题	3
1.1.3 复合命题	4
1.1.4 逻辑谜题	5

I. 逻辑和证明

1.1 命题逻辑

1.1.1 逻辑运算

\wedge	0	1	\vee	0	1	\neg	0	1	\oplus	0	1
0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1				1	1	0

表 1.1 四种基本逻辑运算的真值表

💡 一句话描述

提示 1.1.1

- 与(\wedge)运算的结果为真当且仅当两者均为真.
- 或(\vee)运算的结果为真当且仅当两者不都为假.
- 非(\neg)运算改变作用对象的真假.
- 异或(\oplus)运算的结果为真当且仅当两者不同. 特别的, 异或运算可以看作二进制意义下的不进位加法.

1.1.2 命题

Def 条件语句

定义 1.1.1

令 p 和 q 为命题. 条件语句 $p \rightarrow q$ 是命题「如果 p , 则 q 」.

条件语句 $p \rightarrow q$ 的真假同 $\neg p \vee q$, 也即 $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真且 q 为假.

⚠️ 「 p 仅当 q 」和「 q 除非 $\neg p$ 」

注意 1.1.1

这两者都是 $p \rightarrow q$ 的等价表述.

- p 仅当 q 说的是只有 q 成立 p 才能成立, 也即若 q 为假则 p 也为假. 故当 p 为真时, 欲使得该命题成立, q 只能为真. 而当 p 为假时, 该命题对 q 无约束, q 既可以为真也可以为假.
- q 除非 $\neg p$ 说的是除了 $\neg p$ 为真(也即 p 为假)之外的情况, q 都成立. 故若 p 为真, 欲使得该命题成立, q 只能为真. 该描述与 $p \rightarrow q$ 等价.

Def 逆命题 逆否命题 否命题

定义 1.1.2

存在命题 $p \rightarrow q$, 则有

- $q \rightarrow p$ 被称为 $p \rightarrow q$ 的否命题.
- $\neg q \rightarrow \neg p$ 被称为 $p \rightarrow q$ 的逆否命题.
- $\neg p \rightarrow \neg q$ 被称为 $p \rightarrow q$ 的否命题.

Thm 逆否命题同真假

定理 1.1.1

命题 $p \rightarrow q$ 与 $\neg q \rightarrow \neg p$ 等价.

Proof :

注意到该逆否命题为假当且仅当 $\neg q$ 为真且 $\neg p$ 为假, 也即 p 为真且 q 为假. 此即为 $p \rightarrow q$ 为假的充要条件.

□

同理, 由于命题 $p \rightarrow q$ 的逆与否也互为逆否命题, 故它们也同真假.

1.1.3 复合命题

复合命题即若干命题通过基本逻辑运算结合构成的代数式.

有了前文所述工具, 我们可以对复合命题进行化简.

e.g. 化简复合命题 $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

示例 1.1.1

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \text{ and } q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0

表 1.2 命题 $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ 关于 p, q 的真值表

1.1.4 逻辑谜题

e.g. 选择箱子

示例 1.1.2

国王允许你从三个箱子中选择一个作为奖赏, 其中有且仅有一个藏有宝藏. 第一个和第二个箱子上都写着「这个箱子中没有宝藏」, 而第三个箱子上写着「宝藏在第二个箱子中」. 从不撒谎的皇后告诉你其中有且仅有一个提示是真的. 你会做出怎样的选择呢?

Solution :

设 p_i 为命题「宝藏在第 i 个箱子中」, $i = 1, 2, 3$. 皇后说的话等价于

$$(\neg p_1 \wedge \neg(\neg p_2) \wedge \neg p_2) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_2) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg(\neg p_2) \wedge p_2) \quad (1.1)$$

该命题等价于 $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2)$, 由分配律化简为 $p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_1$.

因此 p_1 为真, 宝藏在第一个箱子里. 将三个提示带入检验无误.

e.g. 骗子与老实人

示例 1.1.3

一个岛屿上住着两种人, 其中「骗子」只说假话, 「老实人」只说真话. 你在岛上碰到了两个人 A 和 B, A 说「B 是老实人」, B 说「我与 A 不是一类人」. 请你分析 A 和 B 分别是哪种人.

Solution :

设命题 p 为「A 是老实人」, q 为「B 是老实人」. 由题设可知以下两个命题为真:

$$p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow p \oplus q \quad (1.2)$$

由 $p, q \leftrightarrow p \oplus q$ 可知, p, q 均为假, 故 A 和 B 都是骗子.

e.g. 逻辑学家与啤酒

示例 1.1.4

三个逻辑学家去喝酒. 酒馆老板问「三位每人一杯啤酒吗?」A 率先说「我不知道」, B 随后说「我不知道」. 这时如果 C 想要一杯啤酒, 他会说什么?

Solution :

设命题 p, q, r 分别表示「A 想要一杯啤酒」「B 想要一杯啤酒」「C 想要一杯啤酒」.

A 面对的问题是「判断 $p \wedge q \wedge r$ 是否为真」, 他知道 p 是否为真, 且如果 p 为假, 那么 $p \wedge q \wedge r$ 也为假, 所以 B 和 C 同时知道了 p 为真. 同理, B 回答完后 A 和 C 也同时知道了 q 为真. 轮到 C 回答时, 他根据前面的信息判断出了 $p \wedge q \wedge r$ 为真.

因此 C 会说「是的。」

离散数学作业 1

CCA 2024/7/14

1. 试解释为什么 p, q 和 r 在全为真且不全为假时 $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 为真, 而当三个变量具有相同真值时为假.

1.1 - 43

Solution :

1. p, q, r 不全为真且不全为假意味着其中既存在真命题又存在假命题, 于是 p, q, r 中存在真命题, $\neg p, \neg q, \neg r$ 中也存在真命题. 进而 $p \vee q \vee r$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ 都是真命题, 于是 $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 为真.
2. 当三个变量具有相同真值的时候, p, q, r 或 $\neg p, \neg q, \neg r$ 均为假, 进而 $p \vee q \vee r$ 或 $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ 为假, 于是 $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 为假.

2. 有一个含 100 条语句的列表, 其中第 n 条语句是「列表中恰有 n 条语句为假」.

1. 你能从这些语句中得到什么结论?
2. 如果第 n 条语句写的是「列表中至少有 n 条语句为假」. 回答上一个问题.
3. 假设这个列表包含 99 条语句. 回答上一个问题.

1.1 - 53

Solution :

1. 注意到这些命题均互斥, 且加上命题「列表中命题均为真」后恰好覆盖了刻画假命题数量的所有命题. 又因为「列表中命题均为真」必为假, 所以该列表中有且仅有一个真命题. 因此, 该列表中仅有第 99 条语句为真.
 2. 设假命题数量为 x , 则有 $100 - x$ 条语句为假, 解得 $x = 50$. 于是列表中前 50 条语句为真, 后 50 条语句为假.
 3. 参照上一个问题, 方程 $x = 99 - x$ 无解, 于是该列表不存在.
3. 一个村庄的人要么只说真话, 要么只说谎. 并且他们对于所有的问题都用「是」或「否」来回答. 你站在两条岔路和一个村民前, 问村民一个什么问题可以知道走哪条路是正确的?

1.2 - 19

Solution :

「如果我问你左边的岔路是否正确, 你会回答"是"吗?」