帰無仮説と仮説検定の基礎

創作先生

2025 年 2 月 11 日

1　帰無仮説と対立仮説

統計学における「仮説検定」は、ある主張がデータによってどの程度支持されるかを判断するための方法です。主張を 2 つの仮説として立てます。

- **帰無仮説 (null hypothesis)**, H_0: ふつう「差がない」「効果がない」など、いわば「従来どおり」を仮定したもの
- **対立仮説 (alternative hypothesis)**, H_1: 「差がある」「効果がある」など、H_0 と反対の主張

検定では、まず H_0 を「いったん正しい」とみなしたうえで、観測データがどのくらい「偶然で起こり得るか」を数値で評価します。もし「偶然では説明しにくいほど珍しい」データが得られた場合は、「H_0 は信じがたい」と判断し、H_0 を棄却 (reject) します。

2　コイン投げの例 (二項分布)

2.1　問題設定

「このコインは本当に表裏が同じ確率で出るか」を検定したいとしましょう。

- H_0: 「コインは公平で、表が出る確率 $p = 0.5$」
- H_1: 「コインは公平ではない ($p \neq 0.5$)」

実際にコインを n 回投げてみて、表が出た回数を X とします。H_0 が正しいとき、X は**二項分布**に従います。

$$X \sim \mathrm{Binomial}(n, 0.5)$$

つまり、k 回表が出る確率は

$$P(X=k) \;=\; \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \;=\; \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

2.2　片側検定と両側検定

両側検定 (two-sided test) は、$p<0.5$ か $p>0.5$ かの両方をまとめて「公平ではない」として扱う検定です。一方、もし「コインは表が出やすいのでは？」という方向にだけ注目するなら、**片側検定**となります。

- 両側検定: 「$p=0.5$」対「$p\neq 0.5$」- 片側検定: 「$p=0.5$」対「$p>0.5$」(あるいは $p<0.5$)

高校の段階では、両側検定を簡単な例で押さえておけば十分です。

2.3　有意水準と p 値

検定を行う前に、**有意水準** α (ふつう 5%、すなわち 0.05 など) を決めます。帰無仮説が正しいとしたとき、今回の観測結果のような「極端なデータ」が得られる確率 (これを p **値** と呼ぶ) が α 未満なら「珍しすぎる」と判断して H_0 を棄却します。

$$\begin{cases} p\text{ 値} < \alpha & \Rightarrow \quad H_0\text{を棄却 (reject)} \\ p\text{ 値} \geq \alpha & \Rightarrow \quad H_0\text{を棄却しない (fail to reject)} \end{cases}$$

Note: 「棄却しない」からといって「H_0 が正しいと証明された」わけではなく、「H_0 が矛盾するほど珍しいデータではなかった」という意味にすぎません。

例題 1. コインを $n=10$ 回投げたら、表が $k=9$ 回出た。H_0:「公平 ($p=0.5$)」という仮説は成り立つか？有意水準を $\alpha=0.05$ とする。

- 両側検定を考える。観測 $k=9$ は $k=1$ と同程度「極端」なので、$k\leq 1$ か $k\geq 9$ が起きる確率を計算する。
- 二項分布の公式や統計ソフト等で $P(X\geq 9)+P(X\leq 1)$ を求めると、p 値はおよそ 0.0215 程度となる。
- $0.0215<0.05$ なので、H_0 を棄却する。

3　正規分布近似による検定 (大きい標本の場合)

n が大きいとき、**中心極限定理**により、二項分布は正規分布で近似できることがあります。一般には「母集団の平均が μ かどうか」を検定する際に、**Z 検定**という方法で

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

などを用いて検定することがあります (ここで $\overline{X}$ は標本平均、σ は母標準偏差、あるいは標本標準偏差の推定値)。Z が標準正規分布でどの程度「極端」かを見て p 値を求めます。

標準正規分布:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

3.1　標準正規分布のグラフと棄却域

図 1 は標準正規分布を描いたものです。片側検定で有意水準 $\alpha = 0.05$ とすると、$Z \approx 1.645$ の位置より右側（面積 0.05）を**棄却域**に設定します。ここに観測値 Z_{obs} が入れば、H_0 を棄却すると判断します。

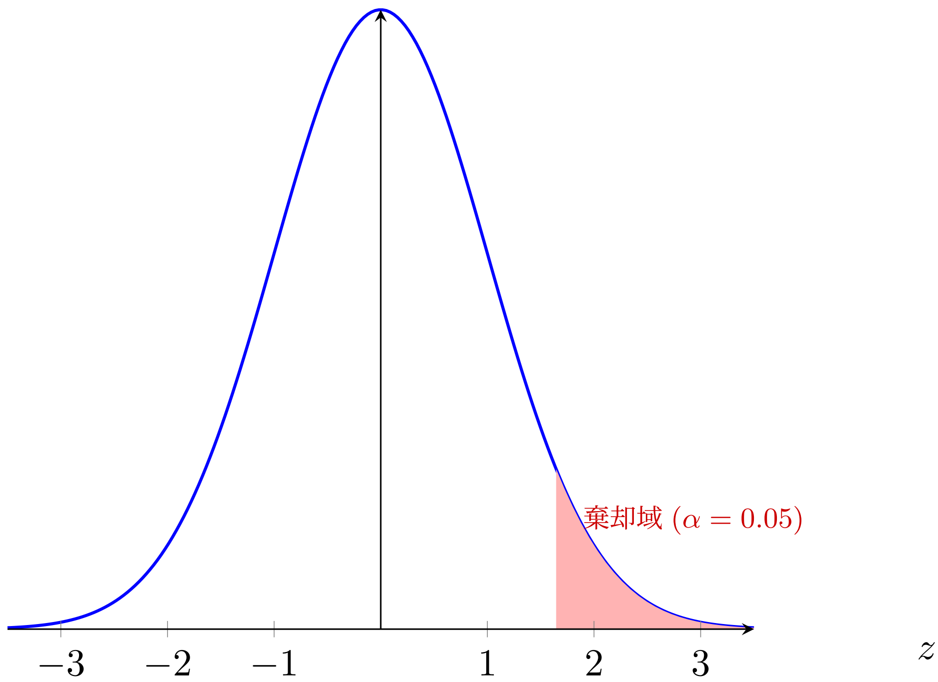

図 1　標準正規分布と片側検定における棄却域のイメージ

4　まとめ

- **帰無仮説**は「差がない・効果がない」とする仮説、**対立仮説**はそれに反する主張を表す。
- 帰無仮説をいったん正しいと仮定し、「今回のようなデータ」がどれだけ起こりやすいかを数値（p 値）で評価する。
- 有意水準 α 未満の確率しか起こらないような「珍しいデータ」なら、帰無仮説を棄却する（＝「効果があるかもしれない」などと判断)。
- 帰無仮説を「棄却しない」場合は、単に「データ上、珍しくはなかった」という意味であり、「帰無仮説が正しい」と証明したわけではない。

5　演習問題

演習問題 1. コインを $n = 20$ 回投げたところ、表が $k = 15$ 回出た。このコインが「表の出る確率 $p = 0.5$」という仮説と矛盾するかどうか、両側検定で判断せよ。有意水準を $\alpha = 0.05$ とする。

演習問題 2. 母平均が $\mu = 50$ であるとされる商品の重量を $n = 100$ 個抽出したところ、標本平均が $\overline{X} = 51.2$、標本標準偏差が $s = 4$ であった。

1. Z 値を求めよ。
2. 有意水準 5% の片側検定で母平均が 50 かどうかを検定せよ。