

An Improved GNSS Positioning Algorithm Based on Factor Graph Optimization

Lang Xu¹, Xiaodong Chen², Pan Huang²

1. Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

2. Institute of Intelligent Operations Research and Information Security of Aerospace Science and Industry Co Ltd, Wuhan 430000, China

Abstract: When the traditional filtering method is applied to GNSS positioning in the satellite constrained environment, it is difficult to take into account the historical state information and the time correlation of satellite observations. Therefore, this paper proposes a GNSS positioning method based on factor graph. In this method, pseudorange, carrier phase and Doppler observations are added as factor nodes, and Doppler factors are introduced to connect two adjoining epochs to realize factor graph optimization of the solution model. For two modes of Single Point Positioning (SPP) and real-time kinematic (RTK), we collect static and vehicle-mounted dynamic data and carried out the experiment to verify. The results show that the proposed method is simple and easy to implement, and improves the positioning accuracy in the restricted environment of urban satellite. Compared with the conventional algorithm, the single point positioning can improve about 20% under static and dynamic conditions. The fixed rate of RTK is improved by 25% under static condition, and the overall horizontal accuracy is improved by about 40% with the proposed method.

Keywords: Factor Graph; GNSS; Single Point Positioning; Real-time kinematic

基于因子图优化的GNSS定位算法研究

徐浪¹, 陈晓东², 黄攀²

1. 哈尔滨工程大学, 哈尔滨, 中国, 150001

2. 航天科工智能运筹与信息安全研究院(武汉)有限公司, 武汉, 中国, 430000

1. langl@hrbeu.edu.cn

【摘要】传统滤波手段应用于卫星受限环境下的GNSS定位时,难以兼顾历史状态信息以及卫星观测量的时间相关性。为此,本文提出一种基于因子图的GNSS定位方法,该方法将伪距、载波相位、多普勒观测量添加为因子节点,引入多普勒因子连接历元间变量节点,实现解算模型的因子图优化。本文采集了静态和车载动态数据,针对单点定位(Single Point Positioning, SPP)与实时动态载波相位差分定位(Real-time kinematic, RTK)两种模式,开展了实验验证与比较。结果表明本文所提出的方法,简单易实现,在城市卫星受限环境下提高了定位精度。相较于常规算法,单点定位静态、动态下均能提升约20%;载波相位差分定位在静态下固定率提升25%,总体水平方向上精度提升约40%。

【关键词】因子图; 全球卫星导航系统; 伪距单点定位; 载波相位差分定位;

1 引言

伪距单点定位、载波相位差分定位作为全球卫星导航系统使用最为广泛的定位模式,可以为载体提供高精度、可靠的定位结果。然而,GNSS在诸如城市、施工现场、农田、密林等城市峡谷环境下,伪距受多径影响严重,载波相位容易产生周跳^[1,2],导致经典的单点定位和载波相位差分定位的精度和连续性降低^[3,4]。更重要的是,在此类环境下,这些测量值的时间相关性更加明显,使用传统的滤波手段进行处理仅考虑前一状态的值忽略了其他历史状态值,使得定位结果更加不精确。为充分挖掘历史信息的作用,引入因子图优化对GNSS测量值进行融合解算。

一直以来,以卡尔曼滤波为代表的滤波手段一直是信息融合的主流,然而在处理GNSS定位的问题上,解算当前历元的状态仅仅使用前一历元对当前历元进行约束,没有顾及到更多的历史信息,使得在城市环境下定位解算的精度更加不理想。因子图(Factor Graph Optimization, FGO)理论由Kschischang于2001年为处理含有较多变量的复杂全局函数的问题时提出,其把全局函数“分解”为多个局部函数,同时提出在因子图中通用的消息传递算法满足和积算法规则^[5-7]。许多学者将因子图理论引入导航定位领域,用于多源传感器的组合导航。2012年,针对美国国防高级研究计划局(Defense Advanced Research Projects Agency, DARPA)提出的全源定位导航(All Source Positioning and Navigation, ASPN)项目,美国的佐治

资助信息:中央高校基本科研业务费专项资金(3072021CFJ0402),国家自然科学基金项目(Nos. 61773132, 61633008, 61803115, 62003109);国家重点研发计划项目(No. 2017YFE0131400);工业和信息化部145高技术船舶创新工程项目;黑龙江省优秀青年科学研究基金资助项目(No. YQ2020F009)

亚理工学院的Indelman等基于平滑定位算法理论^[8],首次将因子图算法应用于以惯性导航系统为核心的多源导航系统^[9],利用IMU节点、GNSS节点以及深度相机节点来分别表示惯性导航系统、GNSS定位系统与深度相机定位系统进行融合解算,实验结果表明与联邦卡尔曼滤波相比在精度上具有优势;ZENG Q等针对小型无人机中传感器输出频率以及融合周期不统一的问题,提出了一种基于因子图拓扑结构的多传感器融合算法^[10],选择适当的因子节点,实现了导航系统整体最优解的计算,采用QR分解的方法对算法进行优化,大大减少了系统的计算量。相较于滤波,因子图的优势体现在:能够进行多次线性化计算以及多次迭代以便更好的逼近真实的模型;能够将所有的历史信息加入到对当前状态的计算,提高系统的精度,尤其是对于某些具有时间相关性的测量值更为有效。然而,针对于利用因子图优化的方式对GNSS测量值进行融合的研究相对较少。Sunderhauf N首次将因子图引入单一的GNSS定位,其将接收机钟差、伪距、多普勒作为因子图的三个节点进行融合解算,在复杂环境中水平方向的平均误差能达到4.32m,但是其并未引入高精度测量值——载波相位导致实际应用受限^[11]。

本文首先就基于因子图的状态估计方法作详细推导,给出最终的目标函数,随后根据GNSS定位中的伪距、载波相位、多普勒的测量模型构造基于因子图优化的GNSS定位算法的模型。最后分别使用三种环境下的静态、动态数据对所提算法进行测试验证,并得到相关结论。

2 方法

本节首先对基于因子图的状态估计方法进行推导,随后针对GNSS中单点定位、载波相位差分定位两种最常用的定位方式,建立起基于因子图优化的GNSS解算框架,根据定位算法要求选取状态量作为变量节点,根据GNSS的测量模型建立因子节点,然后给出目标函数。

2.1 基于因子图的状态估计方法

因子图是一种二分图模型,它表征了全局函数和局部函数之间的关系,同时也表示了各个变量与局部函数之间的关系。以式(1)为例:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_A(x_1)f_B(x_2)f_C(x_1x_2x_3)f_D(x_3x_4)f_E(x_3x_5) \quad (1)$$

将全局函数 g 转为局部函数 f 的乘积,其对应的因子图如图1所示:

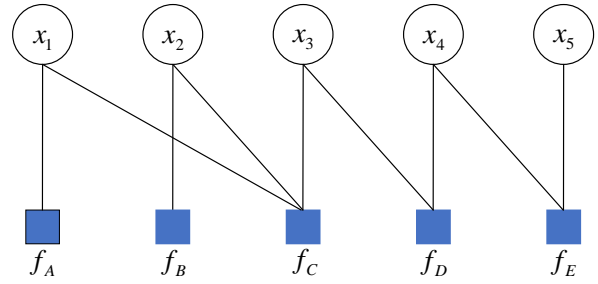


Figure 1. The example of expression of factor graph $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

图1 $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 的因子图表示例

其中,每一个变量 x 都对应着一个变量节点,每一个局部函数 f 都对应着一个因子节点,当且仅当变量 x 是局部函数 f 的自变量时,相应的变量节点和因子节点之间有一条边连接两个节点。这种类似于“因式分解”的表现形式大大方便了概率模型的表示。而基于因子图的状态估计方法正是将状态估计理解为对系统联合概率密度函数的最大后验估计问题。

一个系统可以描述为状态方程和量测方程两部分,并将状态误差和量测误差视为零均值白噪声即

$$\begin{cases} x_k = f_k(x_{k-1}, u_k) + w_k, & w_k \sim N(0, \Sigma_k) \\ z_k = h_k(x_k) + v_k, & v_k \sim N(0, \Lambda_k) \end{cases} \quad (2)$$

根据正态分布的特性可以得到真实状态 x_k 和理想量测 z_k 的条件概率分布满足:

$$\begin{cases} P(x_k | x_{k-1}) \propto e^{-\frac{1}{2} \|f_k(x_{k-1}) - x_k\|_{\Sigma_k}^2} \\ P(z_k | x_k) \propto e^{-\frac{1}{2} \|h_k(x_k) - z_k\|_{\Lambda_k}^2} \end{cases} \quad (3)$$

实际应用中,需求是根据现有的测量结果去寻求状态的值,即最大化 $P(X | Z)$ 。根据贝叶斯公式即可得到最大后验估计所求为

$$X_k^* = \arg \max_{X_k} P(X_k | Z_k) \propto \arg \max_{X_k} P(X_k)P(Z_k | X_k) \quad (4)$$

其中, $X_k = \{x_{0:k}\}$ 是状态的集合, $Z_k = \{z_{0:k}^j\}$ 是所有状态下量测的集合。若系统服从马尔科夫假设,那么

$$\begin{aligned} X_k^* &= \arg \max_{X_k} P(X_k | Z_k) \\ &\propto \arg \max_{X_k} P(x_0) \prod_{i=1}^k [P(x_i | x_{i-1}) \prod_{j=1}^{m_i} [P(z_i^j | x_i)]] \end{aligned} \quad (5)$$

对式取对数得到后,将式代入式可以得到,系统的状态估计可等价为全局代价函数的联合优化:

$$X^* = \arg \min_X \sum_i^k \left\{ \|f_i(x_{i-1}, u_i) - x_i\|_{\Sigma_i}^2 + \sum_{j=1}^{m_i} \|h_i^j(x_i) - z_i^j\|_{\Lambda_{ij}}^2 \right\} \quad (6)$$

式即为基于因子图优化的估计的一般表达式,其左项为系统状态转移过程,右项为量测过程, Σ 和 Λ 分别是状态转移过程和量测过程的协方差矩阵,进行求

解的是状态集合 X 。对于式(10)，可以用图2进行表示。

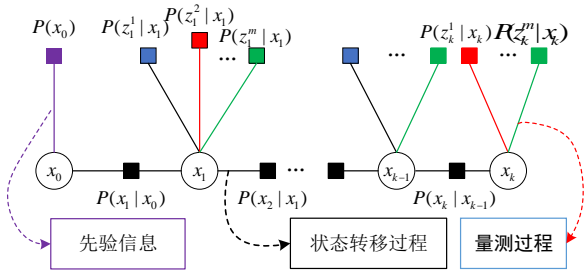


Figure 2. Representation of joint optimization of global cost functions with factor graph

图2 全局代价函数的联合优化的因子图表示

图2中用变量节点表示系统待估计的状态,用因子节点表示先验信息、状态转移和量测过程。利用因子图模型对估计系统的联合概率密度函数进行表示,可以直观地反映动态系统的动态演化过程和每个状态对应的量测过程。同时,图形化的表示使系统具有更好的通用性和扩展性。

2.2 基于因子图的伪距单点定位算法

基于因子图的伪距单点定位算法使用伪距、多普勒融合算法选取的状态变量为 $X_n = [x_n, y_n, z_n, \delta t_n]^T$, $p_{u,t} = [x_t, y_t, z_t]^T$ 是某时刻 t 的位置, 状态变量集合为 $\chi = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ 。选取伪距作为测量值, 多普勒的测速结果作为状态转移的约束。

伪距的观测模型为:

$$\rho_{u,t}^s = r_{u,t}^s + c(\delta t_{u,t} - \delta t_{u,t}^{(s)}) + I_{u,t}^s + T_{u,t}^s + \varepsilon_{u,t}^s \quad (7)$$

其中, $r_{u,t}^s$ 指 t 时刻卫星 s 与接收机的距离, $\delta t_{u,t}^{(s)}$ 、 $I_{u,t}^s$ 、 $T_{u,t}^s$ 分别指卫星钟差、电离层误差、对流层误差, 可以通过假定的模型进行估算, $\varepsilon_{u,t}^s$ 指随机误差。经过误差校正后的伪距观测模型为

$$\rho_c = f_c(p_{u,t}, p_t^s, \delta_{u,t}) + \omega_{\rho,t} \quad (8)$$

其中, $f_c(p_{u,t}, p_t^s, \delta_{u,t}) = \|p_{u,t} - p_t^s\| + \delta_{u,t}$, p_t^s 是卫星位置, $\omega_{\rho,t}$ 是伪距的测量误差, 其协方差矩阵为 $\Sigma_{\rho,t}^s$, 可以通过高度角模型、信号质量等建立起协方差矩阵。那么, 伪距测量的代价函数为:

$$\|e_{u,t}^s\|_{\Sigma_{\rho,t}^s}^2 = \|\rho_c - f_c(p_{u,t}, p_t^s, \delta_{u,t})\|_{\Sigma_{\rho,t}^s}^2 \quad (9)$$

目前, GNSS的多普勒测速误差能够达到0.03m/s, 伪距单点定位的标称误差在10米左右, 对多普勒定速的精度影响可以忽略不计^[12], 可以利用多普勒测速结果对相邻历元进行约束。多普勒测速的观测模型为

$$v_{u,t} = f_{v,t}(p_{u,t+1}, p_{u,t}) + \omega_{v,t} \quad (10)$$

其中, $f_{v,t}(p_{u,t+1}, p_{u,t}) = (p_{u,t+1} - p_{u,t}) / \Delta t$, Δt 是两状态的时间间隔即接收机接收数据频率的倒数, 可以预见的是数据接收频率越高, 式的模型越接近实际。 $\omega_{v,t}$ 是

多普勒测速的测量误差, 其协方差为 $\Sigma_{v,t}$, 可以通过接收机的标称测速精度或者多次实验进行调整。那么, 多普勒测速的代价函数为:

$$\|e_{v,t}\|_{\Sigma_{v,t}}^2 = \|v_{u,t} - f_{v,t}(p_{u,t+1}, p_{u,t})\|_{\Sigma_{v,t}}^2 \quad (11)$$

根据式(11)的一般模型, 可以得到基于因子图优化的融合伪距与多普勒测量值的定位解算方法的目标函数是

$$\chi^* = \arg \min_{\chi} \sum_t \|e_{v,t}\|_{\Sigma_{v,t}}^2 + \|e_{u,t}^s\|_{\Sigma_{\rho,t}^s}^2 \quad (12)$$

其中, 需要进行最优化计算的 χ 是状态的集合, 而非单独的历元。

2.3 基于因子图的载波相位差分定位算法

基于因子图的载波相位差分定位算法使用伪距、载波相位、多普勒进行融合算法, 选取的状态变量 $X_t = [x_t, y_t, z_t, \Delta \nabla N_{ur,t}^1, \dots, \Delta \nabla N_{ur,t}^{m-1}]^T$, $p_{u,t} = [x_t, y_t, z_t]^T$ 是移动站的位置, $[\Delta \nabla N_{ur,t}^1, \dots, \Delta \nabla N_{ur,t}^{m-1}]^T$ 是 t 时刻下移动站 u 和基准站 r 之间 m 颗共视卫星的 $m-1$ 个双差整周模糊度, 状态变量的集合为 $\chi = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ 。选取伪距双差、载波相位双差作为测量值, 多普勒的测速结果作为状态转移的约束。

对基准站和移动站作站间差、星间差后, 可以得到伪距双差的测量模型为:

$$\rho_{DD,\rho,t}^s = f_{DD,\rho,t}^s(p_{u,t}, p_{b,t}, p_t^s, p_t^b) + \omega_{DD,\rho,t}^s \quad (13)$$

其中, $f_{DD,\rho,t}^s(p_{u,t}, p_{b,t}, p_t^s, p_t^b) = \|p_{u,t} - p_t^s\| - \|p_{r,t} - p_t^s\| - \|p_{u,t} - p_t^b\| + \|p_{r,t} - p_t^b\|$, p_t^b 是共视卫星中的参考星位置, 为了使双差测量模型更加精确, 一般选取共视卫星中高度角最大的一个作为参考星。 $\omega_{DD,\rho,t}^s$ 是伪距双差测量模型的测量误差, 是由于即使经过双差处理, 若基准站、移动站的大气情况相差过大, 该测量模型仍存在误差, 其协方差为 $\Sigma_{DD,\rho,t}^s$, 那么, 伪距双差测量的代价函数为

$$\|e_{DD,\rho,t}^s\|_{\Sigma_{DD,\rho,t}^s}^2 = \|\rho_{DD,\rho,t}^s - f_{DD,\rho,t}^s(p_{u,t}, p_{b,t}, p_t^s, p_t^b)\|_{\Sigma_{DD,\rho,t}^s}^2 \quad (14)$$

同理, 载波相位双差的观测模型表示为

$$\phi_{DD,\phi,t}^s = f_{DD,\phi,t}^s(p_{u,t}, p_{b,t}, p_t^s, p_t^b, \Delta \nabla N_{ur,t}^1, \Delta \nabla N_{ur,t}^2, \dots, \Delta \nabla N_{ur,t}^{m-1}) + \omega_{DD,\phi,t}^s \quad (15)$$

其中, $f_{DD,\phi,t}^s(p_{u,t}, p_{b,t}, p_t^s, p_t^b) = (\|p_{u,t} - p_t^s\| - \|p_{r,t} - p_t^s\|) - (\|p_{u,t} - p_t^b\| - \|p_{r,t} - p_t^b\|) + \Delta \nabla N_{ur,t}^s$, $\omega_{DD,\phi,t}^s$ 是载波相位双差的测量误差, 协方差为 $\Sigma_{DD,\phi,t}^s$, 其代价函数为

$$\|e_{DD,\phi,t}^s\|_{\Sigma_{DD,\phi,t}^s}^2 = \|\phi_{DD,\phi,t}^s - f_{DD,\phi,t}^s(p_{u,t}, p_{b,t}, p_t^s, p_t^b)\|_{\Sigma_{DD,\phi,t}^s}^2 \quad (16)$$

多普勒测速的代价函数同式。

根据式的一般模型，可以得到基于因子图优化的融合伪距、载波相位和多普勒测量值的定位解算方法的目标函数是

$$\chi^* = \arg \min_{\chi} \sum_t \|e_{v,t}\|_{\Sigma_{v,t}}^2 + \|e_{DD,\phi,t}^s\|_{\Sigma_{DD,\phi,t}^s}^2 + \|e_{DD,\rho,t}^s\|_{\Sigma_{DD,\rho,t}^s}^2 \quad (17)$$

其中，需要进行最优化计算的 χ 是状态的集合，而非单独的历元。通过对式的求解即可得到各个历元的浮点解以及双差整周模糊度的浮点解，随后进行整周模糊度固定。如果能够固定再次进行计算即可得到精确的定位解，如果不能固定即用浮点解作为最终的解算结果。

3 实验测试

为验证所提出的基于因子图的GNSS定位算法的可行性与有效性，使用加权最小二乘法（Weighted Least Square, WLS）进行对比。对于伪距、多普勒的融合算法，分别在采用卫星受限情况下的静态数据、动态数据进行测试。对于伪距、多普勒、载波相位的融合算法，使用静态数据进行测试，整周模糊度的固定方法采用经典的LAMBDA算法，整周模糊度比率检验门限值设为3。

3.1 基于因子图的伪距单点定位算法

静态测试使用的数据由u-blox接收机进行接收，采样间隔为1s，实验地点选定于楼宇之间，具有明显的城市峡谷特性。多路径影响大且遮挡严重，可视卫星大大减小，分别使用加权最小二乘法、基于因子图优化的方法进行解算并进行比较。实验结果比较如图3、图4和表1所示。

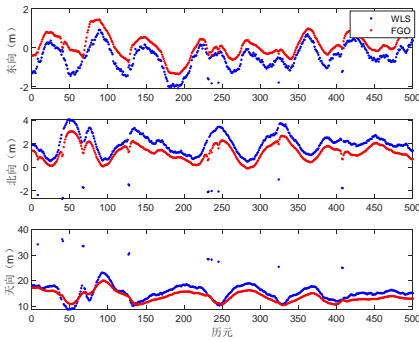


Figure 3 Position errors of SPP in the static
图3 静态下单点定位三向误差比较

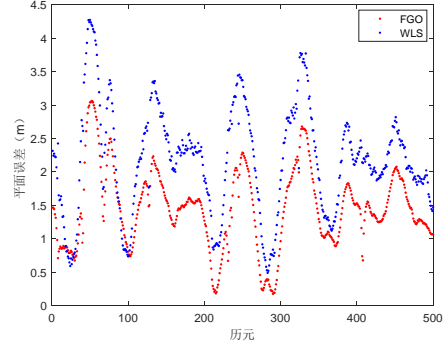


Figure 4 Position errors of SPP in the static
图4 静态下单点定位平面误差比较

Table 1 Comparison of positioning results of SPP in the static

Model	RMS/m			CEP95 (m)	SEP95 (m)
	E	N	U		
WLS	1.5930	1.4312	18.56	3.5848	18.32
FGO	1.3120	0.9896	16.78	2.5404	17.97

表1 静态下单点定位的定位误差比较

结果表明，基于因子图优化的解算的方法所得的结果误差更小。在向东、北向、天向上精度分别提高17.6%、30.8%、9.6%，另外，相比较起来较为集中在真实位置处，在WLS的解算误差较大的历元处，速度约束能够较好的对误差进行平滑，将解算结果更好的接近真实点。在高程误差上，FGO的平滑作用没有特别明显，对于减小误差的作用有限，主要原因是高程的异常值过大较难进行处理。但是总体来看，FGO的解算方法优于WLS，体现出了所提方法的可行性和优越性。

动态测试选用中国矿业大学的数据进行分析，使用Trimble接收机进行测试，采样间隔为1s，真值由SPAN-CPT组合导航输出，此段数据质量较好，在使用RTKlib进行解算时的固定率为87.7%。由于FGO的解算需要大量的计算，因此只选用其中的500个历元作分析，定位结果如图5、6、7所示、表2所示。

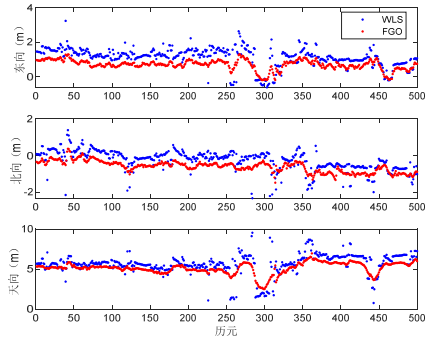


Figure 5 Position errors of SPP in the dynamic
图5 动态下单点定位三向误差比较

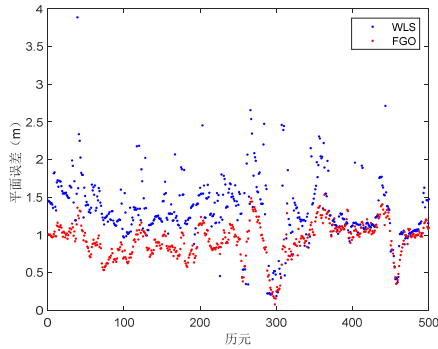


Figure 6 Horizontal error of SPP errors in the dynamic
图 6 动态下单点定位的平面误差比较

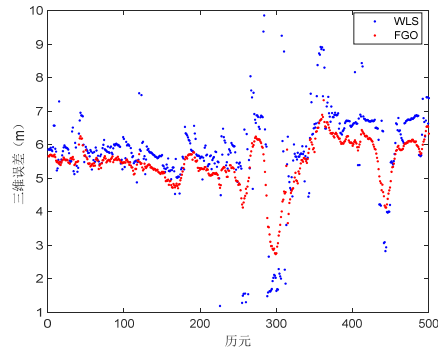


Figure 7 Three dimensional error of SPP in the dynamic
图 7 动态下单点定位的三维误差比较

Table 2 Comparison of positioning results of SPP in the dynamic

Model	RMS/m			CEP95 (m)	SEP95 (m)
	E	N	U		
WLS	1.2463	0.6157	5.7800	2.0309	7.7410
FGO	0.8813	0.5422	5.3638	1.5051	6.3513

表2 动态下单点定位的误差比较

从动态数据的结果分析来看，基于FGO的解算结果优于使用加权最小二乘的结果，在东向、北向、天向上精度分别提高29.3%、11.9%、7%，而且有效的处理了异常结果，误差曲线较位平滑。相比较起来，高程上的解算优势并不明显，这与理论上多普勒测速的高程误差相对较大吻合。另外，此数据的质量较好，传统的单点定位算法已有一定的精度，囿于伪距的精度单点定位的精度很难提高。而且接收机频率仅为1Hz，对于运动中的载体瞬时速度与平均速度的关系不严格服从式的模型。如果后期进行数据实测，应采用高频接收机进行数据采集以提高模型的准确度。

3.2 基于因子图的载波相位差分定位算法

对于基于因子图的伪距、载波相位多普勒融合定位算法，采取静态测试的方法进行验证。数据采用澳大利亚科廷大学CUT00和CYUTA0的2014年6月17日

的数据，采样间隔为1s，基线长度为8.42m。为模拟收星受限的环境，仅使用GPS的L1频数据，截止高度角设置为40度^[13, 14]，对于数据不作特殊的校正只进行简单的双差处理。其静态实验场景如图8所示，定位结果及比较如图9、图10、表3所示。

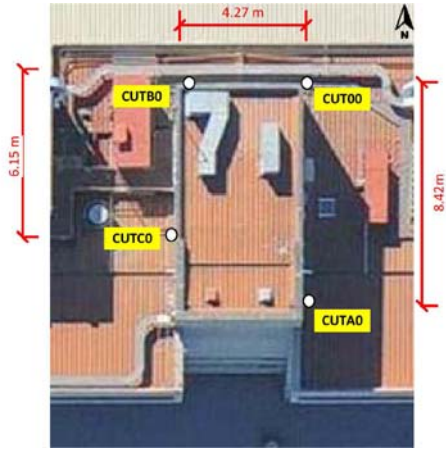


Figure 8. Installation environment of receiver
图 8 接收机安装环境

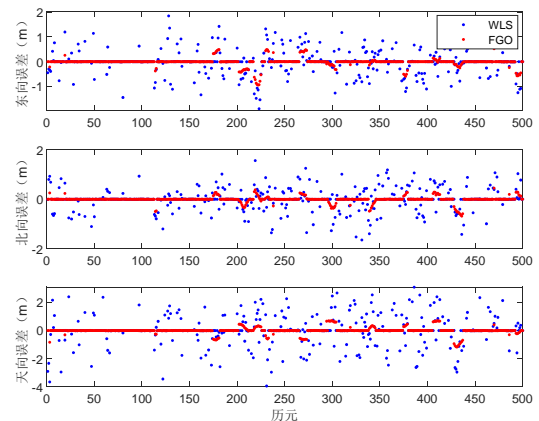


Figure 9 Position errors of RTK in the static
图 9 静态载波相位差分定位的三向误差比较

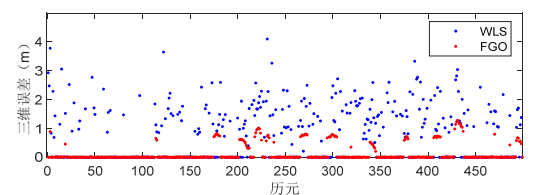


Figure 10 Three dimensional comparison of RTK in the static
图 10 静态载波相位差分定位的三维误差比较

Table 3 Comparison of positioning results of RTK in the static

模式	RMS/m			CEP95 (m)	SEP95 (m)	固定率 (%)
	E	N	U			
WLS	0.4522	0.4076	0.9691	1.2697	2.4246	56.2
FGO	0.1693	0.1229	0.2381	0.6258	0.7745	81.6

表3 载波相位差分定位的整体结果比较

Table 4 Comparison of positioning results of no-fixed epochs

模式	RMS/m			CEP95 (m)	SEP95 (m)
	E	N	U		
WLS	0.6833	0.6158	1.4643	1.5266	2.7149
FGO	0.3945	0.2865	0.5551	0.7887	1.3714

表4 未固定历元的定位结果比较

实验中，对于不能固定的历元使用浮点解作为解算结果。从实验结果来看，相比于经典的加权最小二乘方法，基于因子图的融合了伪距、载波相位、多普勒的定位算法更具优势。相较起来，FGO在东向、北向、天向上分别提高了62.5%、70.7%、75%，这主要得益于整周模糊度固定率提高了25.2%，另外，在FGO解算模式下，即使是未固定的历元，其浮点解精度也能够大幅度提升，如表4所示。这主要是因为FGO使用高精度的多普勒速度结果进行约束大大提高了浮点解的精度。然而，也注意到少数历元使用WLS的方法可以固定然而使用FGO不能固定的现象，这是因为受多普勒测速结果的异常值影响，但没有影响整体的定位效果。

4 结论

本文提出一种基于因子图的GNSS定位方法，该方法将伪距、载波相位、多普勒观测量添加为因子节点，引入多普勒因子连接历元间变量节点，实现解算模型的因子图优化。本文采集了静态和车载动态数据，针对单点定位与实时动态载波相位差分定位两种模式，开展了实验验证与比较。结果表明本文所提出的方法，简单易实现，在城市卫星受限环境下提高了定位精度。相较于常规算法，单点定位静态、动态下均能提升20%左右；载波相位差分定位在静态下固定率提升25%，总体水平方向上精度提升40%左右。

然而，基于因子图的算法都有共有的问题即计算量大，所提算法的目标函数需要优化计算的都是状态的集合，而非单个状态，后续的研究将着眼于实时性解算方面。

致谢

澳大利亚科廷大学的GNSS研究中心提供了实验所用的GNSS数据以及LAMBDA算法工具包，在此表示感谢。

References (参考文献)

- [1] Li L , Quddus M , Zhao I L . Multiple reference consistency check for LAAS: a novel position domain approach[J]. GPS Solutions, 2012..
- [2] Li L , Shi H , Jia C , et al. Position-domain integrity risk-based ambiguity validation for the integer bootstrap estimator[J]. Gps Solutions, 2018, 22(2):39..
- [3] Chun J, Lin Z, Liang L,etal. Improving The Triple-Carrier Ambiguity Resolution With A New Ionosphere-Free And Variance-Restricted Method [J]. 2017, 9(11): 1108.
- [4] Chun J , Lin Z , Liang L , et al. Improving the Triple-Carrier Ambiguity Resolution with a New Ionosphere-Free and Variance-Restricted Method[J]. Remote Sensing, 2017, 9(11):1108.
- [5] Kschischang F R , Frey B J , Loeliger H A . Factor graphs and the sum-product algorithm[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(2):498-519.
- [6] Kaess M , Ila V , Roberts R , et al. The Bayes Tree: An Algorithmic Foundation for Probabilistic Robot Mapping[C]// Algorithmic Foundations of Robotics IX - Selected Contributions of the Ninth International Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics, WAFR 2010, Singapore, December 13-15, 2010. 2010.
- [7] Kaess M . Incremental smoothing and mapping[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 24(6):1365-1378.
- [8] Dellaert F , Kaess M . Square Root SAM: Simultaneous Localization and Mapping via Square Root Information Smoothing[J]. The International Journal of Robotics Research, 2006, 25(12):1181-1203.
- [9] Vadim Indelman*, Stephen Williams*, Michael Kaess†, et al. Factor Graph Based Incremental Smoothing in Inertial Navigation Systems[C]// International Conference on Information Fusion. IEEE, 2012.
- [10] ZENG Q, CHEN W, LIU J, et al. An Improved Multi-Sensor Fusion Navigation Algorithm Based on the Factor Graph [J]. Sensors, 2017, 17(3): 641..
- [11] Sunderhauf N , Protzel P . Towards robust graphical models for GNSS-based localization in urban environments. IEEE, 2012.
- [12] He Z . High-Sensitivity GNSS Doppler and Velocity Estimation for Indoor Navigation[J]. EngineeringEngineering--AerospaceEngineering--Electronics and Electrical, 2013.
- [13] Jonge P D , Tiberius C . The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects[J]. No of Lgr Series, 1998
- [14] Gao J , Tang X ,Zhang H , et al. Vehicle INS/GNSS/OD integrated navigation algorithm based on factor graph[J]. Systems Engineering and Electronics, 2018.