

# Ejercicios con SOLUCIONES Tema 2 - Estimación. Taller 1

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso completo de estadística inferencial con R y Python

## Contenidos

<b>1</b>	<b>Estimación taller 1</b>	<b>1</b>
1.1	Ejercicio 1 . . . . .	1
1.2	Ejercicio 2 . . . . .	2
1.3	Ejercicio 3 . . . . .	2
1.4	Ejercicio 4 . . . . .	2
1.5	Ejercicio 5 . . . . .	2
1.6	Ejercicio 6 . . . . .	2
1.7	Ejercicio 7 . . . . .	2
1.8	Ejercicio 8 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Soluciones</b>	<b>3</b>
2.1	Solución ejercicio 1 . . . . .	3
2.2	Solución ejercicio 2 . . . . .	3
2.3	Solución ejercicio 3 . . . . .	3
2.4	Solución ejercicio 4 . . . . .	4
2.5	Solución ejercicio 5 . . . . .	4
2.6	Solución ejercicio 6 . . . . .	5
2.7	Solución ejercicio 7 . . . . .	5
2.8	Solución ejercicio 8 . . . . .	6

## 1 Estimación taller 1

### 1.1 Ejercicio 1

El fabricante SMART\_LED fabrica bombillas led inteligentes y de alta gama. Supongamos que la vida de de estas bombillas sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . Si tomamos una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de estas bombillas y representamos por  $X_i$  la duración de la  $i$ -ésima bombilla para  $i = 1, \dots, n$ , ¿cuál es la función de densidad conjunta de la muestra?

## 1.2 Ejercicio 2

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  variables aleatorias que son una muestra aleatoria simple de una v.a.  $X$ . a. Dividimos la muestra en dos partes: de forma que la primera son los 5 primeros valores y la segunda los restantes. ¿Son independientes las dos partes? b. Volvemos a dividir la muestra en dos partes: la primera está formada por los 5 valores más pequeños y la segunda por el resto. ¿Son independientes las dos partes?

## 1.3 Ejercicio 3

Un fabricante de motores pone a prueba 6 motores sobre el mismo prototipo de coche de competición. Para probar que los motores tienen las mismas prestaciones se someten a distintas pruebas en un circuito. Las velocidades máximas en 10 vueltas al circuito de cada motor tras la prueba son 190, 195, 193, 177, 201 y 187 en Km/h. Estos valores forman una muestra aleatoria simple de la variable  $X$  = velocidad máxima de un motor en 10 vueltas. Se pide calcular los valores observados de los siguientes estadísticos de la muestra: a.  $\bar{X}$ . b.  $\tilde{S}^2$ . c. Mediana. d.  $X_{(4)}$  (valor que ocupa el cuarto lugar ordenados los valores de menor a mayor).

## 1.4 Ejercicio 4

¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de una muestra de tamaño  $n = 10$  de una v.a. uniforme en el intervalo  $(0, 1)$  sea mayor que 0.9? ¿Cuál es la probabilidad de sea menor que  $\frac{1}{2}$ ?

## 1.5 Ejercicio 5

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . Denotemos por  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  la muestra ordenada de menor a mayor. a. Calcular la función de densidad del mínimo  $X_{(1)}$  y del máximo  $X_{(n)}$  b. ¿Alguna de estas variables sigue una distribución normal?

## 1.6 Ejercicio 6

Consideremos la muestra aleatoria simple  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una v.a  $X$  de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  desconocidas. Definimos

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ y } T = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma}.$$

- a. ¿Cuál es la distribución de  $T$ ?
- b. ¿Es  $T$  un estadístico?

## 1.7 Ejercicio 7

Consideremos la muestra aleatoria simple  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de tamaño  $n = 10$  de una v.a  $X$  normal estándar. Calculad  $P\left(2.56 < \sum_{i=1}^{10} X_i^2 < 18.31\right)$ .

## 1.8 Ejercicio 8

Consideremos la muestra aleatoria simple  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de tamaño  $n = 10$  de una v.a  $X$  normal  $N(\mu = 2, \sigma = 4)$ . Definimos la siguiente variable aleatoria  $Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16}$ . Calculad  $P(Y \leq 2.6)$

## 2 Soluciones

### 2.1 Solución ejercicio 1

Cada  $X_i$  sigue una ley  $Exp(\lambda)$  la densidad es

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_i} & \text{si } x_i > 0 \\ 0 & \text{si } x_i \leq 0 \end{cases}$$

Así la densidad conjunta de la muestra es

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) \\ &= \begin{cases} \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i} & \text{si } x_i > 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{si } x_i \leq 0 \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

### 2.2 Solución ejercicio 2

En el primer caso las muestras son independientes, saber los resultados de los 5 primeros no aporta información sobre los 5 últimos. En el segundo caso sí que aporta información pues los valores de la segunda parte deben ser mayores que todos los de la primera parte, luego no son independientes.

### 2.3 Solución ejercicio 3

Lo calcularemos con R

```
x=c(190,195,193,177,201,187)
x
```

```
## [1] 190 195 193 177 201 187
```

```
n=length(x)
n # tamaño de la muestra
```

```
## [1] 6
```

```
mean(x) # media
```

```
## [1] 190.5
```

```
var(x) # varianza muestral con la función var
```

```
## [1] 66.3
```

```
sum((x-mean(x))^2)/(n-1) # varianza muestral calculada directamente con R
```

```
## [1] 66.3
```

```
median(x)
```

```
## [1] 191.5
```

```
sort(x) # muestra ordenada
```

```
## [1] 177 187 190 193 195 201
```

```
sort(x)[4] #  $M_4$  el cuarto valor de la muestra ordenada
```

```
## [1] 193
```

## 2.4 Solución ejercicio 4

La primera probabilidad es

$$P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq 0.9) = 1 - P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq 0.9) = 1 - P(X_1 \leq 0.9, X_2 \leq 0.9, \dots, X_n \leq 0.9) = 1 - P(X_1 \leq 0.9) \cdot P(X_2 \leq 0.9) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq 0.9) = 1 - 0.9^{10} = 0.6513.$$

La segunda es

$$P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq 0.5) = P(X_1 \leq 0.5, X_2 \leq 0.5, \dots, X_n \leq 0.5) = P(X_1 \leq 0.5) \cdot P(X_2 \leq 0.5) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq 0.5) = 0.5^{10} = 9.765625 \times 10^{-4}.$$

Hemos utilizado que la distribución uniforme

$$P(X_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

## 2.5 Solución ejercicio 5

Sea  $F_X$  la distribución de la variable que se muestrea entonces  $F_{X_i} = F_X$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

La distribución del máximo es

$$\begin{aligned} P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x) \\ &= F_{X_1}(x) \cdot F_{X_1}(x) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x) = F_X(x)^n \end{aligned}$$

La distribución del mínimo es

$$\begin{aligned} P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) &= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq x) \\ &= 1 - P(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) \\ &= 1 - (P(X_1 \geq x) \cdot P(X_2 \geq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \geq x)) \\ &= 1 - P(X_1 \geq x) \cdot P(X_2 \geq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \geq x) \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq x)) \cdot (1 - P(X_2 \leq x)) \cdot \dots \cdot (1 - P(X_n \leq x)) \\ &= 1 - (1 - F_X(x)) \cdot (1 - F_X(x)) \cdot \dots \cdot (1 - F_X(x)) \\ &= 1 - (1 - F_X(x))^n. \end{aligned}$$

Obviamente las distribuciones del mínimo y del máximo no son gaussianas (para  $n > 1$ ); Las calculamos a continuación.

Denotemos por  $F_Z = \int_{-\infty}^x f_Z(s)dx$  y  $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  a las funciones de distribución y de densidad de una  $N(0, 1)$  sabemos que si  $X$  sigue una ley  $N(\mu, \sigma)$  entonces la función de distribución de  $X$  es  $F_X(x) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$  y la densidad es  $f_X(x) = f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$ .

Entonces la distribución del máximo  $M$  es

$F_M(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - (1 - F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}))^n$  y su densidad es su derivada respecto de  $x$

$$f_M(x) = (F_M(x))' = n \cdot (1 - F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{n-1} \cdot f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

De forma similar, se deja como ejercicio, se calcula la distribución del mínimo.

## 2.6 Solución ejercicio 6

Ahora tenemos una muestra aleatoria simple de una distribución de media  $\mu$  y desviación típica sigma y como siempre tenemos el estadístico  $\bar{X}$ .

a. Nos piden la distribución de  $T = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma}$  operando

$$T = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Ahora sabemos que la distribución de  $T$  por el Teorema Central de Límite converge en distribución a una normal estándar cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Además si las variables fueran normales  $T$  seguirá distribución normal estándar.

b. Claro que  $T$  es un estadístico, ya que estadístico es cualquier función de una muestra. Además si nos fijamos bien simplemente la tipificación del estadístico  $\bar{X}$ .

## 2.7 Solución ejercicio 7

Como se una muestra de una normal estándar tenemos que  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$

Así que si denotamos por  $Y = \sum_{i=1}^n$ , resulta que  $Y$  es la suma de normales estándar  $N(\mu = 0, \sigma = 1)$ , idénticamente distribuidas y por lo tanto sabemos que  $Y$  sigue una ley  $N(n \cdot 0 = 0, n \cdot \sqrt{\sigma} = \sqrt{10})$ . Ahora podemos operar

$$P(1.56 < \sum_{i=1}^n < 18.31) = P(2.56 < Y < 18.31) = P(Y < 18.31) - P(Y < 2.56) = 0.9664497 - 0.6010246 = 0.3654251.$$

```
pnorm(18.31,mean=0,sd=sqrt(10))
```

```
## [1] 1
```

```
pnorm(2.56,mean=0,sd=sqrt(10))
```

```
## [1] 0.7908986
```

```
pnorm(18.31,mean=0,sd=sqrt(10))-pnorm(2.56,mean=0,sd=sqrt(10))
```

```
## [1] 0.2091014
```

o también, tipificando  $Z = \frac{Y}{\sqrt{10}}$  es una  $N(0, 1)$

```
pnorm(18.31/sqrt(10),mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 1
```

```
pnorm(2.56/sqrt(10),mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 0.7908986
```

```
pnorm(18.31/sqrt(10),mean=0,sd=1)-pnorm(2.56/sqrt(10),mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 0.2091014
```

obtenemos el mismo resultado.

## 2.8 Solución ejercicio 8

Consideremos la muestra aleatoria simple  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de tamaño  $n = 10$  de una v.a  $X$  normal  $N(\mu = 2, \sigma = 4)$ . Definimos la siguiente variable aleatoria  $Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16}$ . Calculad  $P(Y \leq 2.6)$

Notemos que  $Z_i = \frac{X_i - 2}{4}$  son variables  $N(0, 1)$  para  $i = 1, 2, \dots, 10$

Ahora

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16} = \sum_{i=1}^{10} \left( \frac{X_i - 2}{4} \right)^2 = \sum_{i=1}^{10} Z_i^2 = \chi_{10}^2.$$

Luego  $Y = \chi_{10}^2$  es una v.a.  $\chi^2$  con 10 grados de libertad. Ya podemos calcular la probabilidad pedida  $P(Y \leq 2.6) = P(\chi_{10}^2 \leq 2.6) = 0.010663$ .

El cálculo lo hemos hecho con

```
pchisq(2.6,df=10)
```

```
## [1] 0.01066303
```