

# Ejercicios Tema 2 - Estimación SOLUCIONES. Taller 3

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso completo de estadística inferencial con R y Python

## Contenidos

<b>1</b>	<b>Estimación taller 3</b>	<b>1</b>
1.1	Ejercicio 1	1
1.2	Ejercicio 2	1
1.3	Ejercicio 3	1
1.4	Ejercicio 4	2
<b>2</b>	<b>Soluciones</b>	<b>2</b>
2.1	Solución ejercicio 1	2
2.2	Solución ejercicio 2	2
2.3	Solución ejercicio 3	3
2.4	Solución ejercicio 4	3

## 1 Estimación taller 3

### 1.1 Ejercicio 1

Supongamos que  $X_1, X_2, \dots, X_6$  es una muestra aleatoria de una variable aleatoria normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Hallar la constante  $C$  tal que

$$C \cdot ((X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2),$$

sea un estimador sin sesgo de  $\sigma^2$ .

### 1.2 Ejercicio 2

Supongamos que  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  son estimadores sin sesgo de un parámetro desconocido  $\theta$ , con varianzas conocidas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ , respectivamente. Demostrar que  $\Theta = (1 - a) \cdot \Theta_1 + a \cdot \Theta_2$  también es insesgado para cualquier valor de  $a \neq 0$ .

### 1.3 Ejercicio 3

Sea  $X_1, \dots, X_{2n}$  una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria  $N(\mu, \sigma)$ . Sea:

$$T = C \left( \left( \sum_{i=1}^{2n} X_i \right)^2 - 4n \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{2i-1} \right)$$

un estimador del parámetro  $\sigma^2$ . ¿Cuál es el valor de  $C$  para que  $T$  sea un estimador insesgado?

## 1.4 Ejercicio 4

Una variable aleatoria  $X$  sigue la distribución de Rayleigh con parámetro  $\theta > 0$  si es una variable aleatoria con valores  $x > 0$  y función de densidad:

$$f(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}.$$

Hallar el estimador máximo verosímil del parámetro  $\theta$ .

## 2 Soluciones

### 2.1 Solución ejercicio 1

Recordemos que  $E(X_i) = \mu$ , y que  $\sigma^2 = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = E(X_i^2) - \mu^2$  luego  $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$  para  $i = 1, 2, 3$ . Además al ser independientes  $E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2) = \mu \cdot \mu = \mu^2$  y lo mismo para  $E(X_3 \cdot X_4) = E(X_5 \cdot X_6) = \mu^2$ .

Ahora

$$\begin{aligned} E((X_1 - X_2)^2) &= E(X_1^2 - 2 \cdot X_1 \cdot X_2 + X_2^2) \\ &= E(X_1^2) - 2 \cdot E(X_1 \cdot X_2) + E(X_2^2) \\ &= (\sigma^2 + \mu^2) - 2 \cdot (\mu \cdot \mu) + (\sigma^2 + \mu^2) \\ &= 2 \cdot \sigma^2. \end{aligned}$$

Utilizando adecuadamente los cálculos anteriores

$$E\left(C \cdot ((X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2)\right) = C \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sigma^2.$$

Luego el valor de  $C$  para que el estimador sea insesgado es la solución de la ecuación

$$C \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sigma^2 = \sigma^2$$

Así que el valor buscado es  $C = \frac{1}{6}$ .

### 2.2 Solución ejercicio 2

Supongamos que  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  son estimadores sin sesgo de un parámetro desconocido  $\theta$ , con varianzas conocidas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ , respectivamente. Demostrar que  $\Theta = (1 - a) \cdot \Theta_1 + a \cdot \Theta_2$  también es insesgado para cualquier valor de  $a$ .

Tenemos que  $E(\Theta_1) = E(\Theta_2) = \theta$  y que  $Var(\Theta_1) = \sigma_1$  y  $Var(\Theta_2) = \sigma_2$ .

Nos piden que demostremos que para cualquier  $a \neq 0$

$$E(\Theta) = E((1 - a) \cdot \Theta_1 + a \cdot \Theta_2) = \theta.$$

efectivamente

$$E(\Theta) = (1 - a) \cdot E(\Theta_1) + a \cdot E(\Theta_2) = (1 - a) \cdot \theta + a \cdot \theta = \theta.$$

### 2.3 Solución ejercicio 3

Como  $X_1, \dots, X_{2n}$  una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria  $N(\mu, \sigma)$ . Sabemos que  $\sum_{i=1}^{2 \cdot n} X_i$  sigue una ley  $N\left(2 \cdot n \cdot \mu, \sqrt{2 \cdot n \cdot \sigma^2}\right)$  luego  $E\left(\sum_{i=1}^{2 \cdot n} X_i\right) = 2 \cdot n \cdot \mu$ ,  $Var(\sum_{i=1}^{2 \cdot n} X_i) = 2 \cdot n \cdot \sigma^2$  y  $E\left(\left(\sum_{i=1}^{2 \cdot n} X_i\right)^2\right) = 2 \cdot n \cdot \sigma^2 + 2 \cdot n \mu^2$ . Además como  $X_{2 \cdot i}$  y  $X_{2 \cdot i-1}$  son independientes  $E(X_{2 \cdot i} \cdot X_{2 \cdot i-1}) = E(X_{2 \cdot i}) \cdot E(X_{2 \cdot i-1}) = \mu \cdot \mu = \mu^2$ . Entonces

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(C \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{2n} X_i\right)^2 - 4n \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{2i-1}\right)\right) \\ &= C \cdot (2 \cdot n \cdot \sigma^2 + (2 \cdot n \cdot \mu)^2 - 4 \cdot n \cdot n \cdot \mu^2) \\ &= C \cdot 2 \cdot n \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

Por lo que el valor de  $C$  pedido es la solución de la ecuación

$$C \cdot 2 \cdot n \cdot \sigma^2 = \sigma^2$$

despejando  $C$  obtenemos que el valor buscado es  $C = \frac{1}{2 \cdot n}$ .

### 2.4 Solución ejercicio 4

Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la realización de una más de una variable aleatoria  $X$  con distribución Rayleigh de parámetro  $\theta > 0$ . Su función de verosimilitud es

$$\begin{aligned} L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_X(x_1; \theta) \cdot f_X(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot f_X(x_n; \theta) \\ &= \frac{x_1}{\theta} e^{-\frac{x_1^2}{2\theta}} \cdot \frac{x_2}{\theta} e^{-\frac{x_2^2}{2\theta}} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{\theta} e^{-\frac{x_n^2}{2\theta}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}}. \end{aligned}$$

Buscamos el  $\theta$  que maximiza  $L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$  que es el mismo que maximiza su logaritmo, es decir

$$\ln(L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)) = \ln\left(\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) - \ln(\theta^n) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}.$$

Ahora derivamos la expresión respecto de  $\theta$ , la igualamos a cero y despejamos  $\theta$

$$\ln(L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n))' = \left(\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) - \ln(\theta^n) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}\right)' = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^2} = 0.$$

de donde multiplicando los dos términos de la última igualdad por  $\theta^2$ .

$$-n \cdot \theta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2} = 0$$

resolviendo la ecuación obtenemos que el estimador máximo verosímil de  $\theta$  es

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2 \cdot n}.$$