Ejercicios con SOLUCIONES Tema 2 - Estimación. Taller 1

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso completo de estadística inferencial con R y Python

Contenidos

1 Estimación taller 1

1.1 Ejercicio 1

El fabricante SMART_LED fabrica bombillas led inteligentes y de alta gama. Supongamos que la vida de de estas bombillas sigue una distribución exponencial de parámetro λ. Si tomamos una muestra aleatoria de tamaño n de estas bombillas y representamos por X_i la duración de la $i-$ésima bombilla para $i = 1, \ldots, n$, ¿cuál es la función de densidad conjunta de la muestra?

1.2 Ejercicio 2

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ variables aleatorias que son una muestra aleatoria simple de una v.a. X. a. Dividimos la muestra en dos partes: de forma que la primera son los 5 primeros valores y la segunda los restantes. ¿Son independientes las dos partes? b. Volvemos a dividir la muestra en dos partes: la primera está formada por los 5 valores más pequeños y la segunda por el resto. ¿Son independientes las dos partes?

1.3 Ejercicio 3

Un fabricante de motores pone a prueba 6 motores sobre el mismo prototipo de coche de competición. Para probar que los motores tienes las mismas prestaciones se someten a distintas pruebas en un circuito. Las velocidades máximas en 10 vueltas al circuito de cada motor tras la prueba son $190, 195, 193, 177, 201$ y 187 en Km/h. Estos valores forman una muestra aleatoria simple de la variable $X =$ velocidad máxima de un motor en 10 vueltas. Se pide calcular los valores observados de los siguientes estadísticos de la muestra: a. $\overline{X}$. b. $\tilde{S}^2$. c. Mediana. d. $X_{(4)}$ (valor que ocupa el cuarto lugar ordenados los valores de menor a mayor).

1.4 Ejercicio 4

¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de de una muestra de tamaño $n = 10$ de una v.a. uniforme en el intervalo $(0, 1)$ sea mayor que 0.9? ¿Cuál es la probabilidad de sea menor que $\frac{1}{2}$?

1.5 Ejercicio 5

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria normal de parámetros μ y σ. Denotemos por $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq, \ldots, \leq X_{(n)}$ la muestra ordenada de menor a mayor. a. Calcular la funciones de densidad del mínimo $X_{(1)}$ y del máximo $X_{(n)}$ b. ¿Alguna de estas variables sigue una distribución normal?

1.6 Ejercicio 6

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una v.a X de media μ y varianza σ^2 desconocidas. Definimos

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ y } T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X} - \mu)}{\sigma}.$$

a. ¿Cuál es la distribución de T?
b. ¿Es T un estadístico?

1.7 Ejercicio 7

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal estándar. Calculad $P\left(2.56 < \sum_{i=1}^{10} X_i^2 < 18.31\right)$.

1.8 Ejercicio 8

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal $N(\mu = 2, \sigma = 4)$. Definimos la siguiente variable aleatoria $Y = \frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i - 2)^2}{16}$. Calculad $P(Y \leq 2.6)$

2 Soluciones

2.1 Solución ejercicio 1

Cada X_i sigue una ley $Exp(\lambda)$ la densidad es

$$f_{X_i}(x_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x_i} & \text{si } x_i > 0 \\ 0 & \text{si } x_i \leq 0 \end{array} \right.$$

Así la densidad conjunta de la muestra es

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots x_n) &= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \lambda^n \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i} & \text{si } x_i > 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{si } x_i \leq 0 \text{ para algún } i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right. . \end{aligned}$$

2.2 Solución ejercicio 2

En el primer caso las muestras son independientes, saber los resultados del los 5 primeros no aporta información sobre los 5 últimos. En el segundo caso sí que aporta información pues los valores de la segunda parte deben ser mayores que todos los de la primera parte, luego no son independientes.

2.3 Solución ejercicio 3

Lo calcularemos con R

```
x=c(190,195,193,177,201,187)
x
```

```
## [1] 190 195 193 177 201 187
```

```
n=length(x)
n # tamaño de la muestra
```

```
## [1] 6
```

```
mean(x)# media
```

```
## [1] 190.5
```

```
var(x)# variana muestral con la función var
```

```
## [1] 66.3
```

```
sum((x-mean(x))^2)/(n-1) # variana muestral calculada directamente con R
```

```
## [1] 66.3
```

```r
median(x)
```

```
## [1] 191.5
```

```r
sort(x) # muestra ordenada
```

```
## [1] 177 187 190 193 195 201
```

```r
sort(x)[4] # M_(4) el cuarto valor de la muestra ordenada
```

```
## [1] 193
```

2.4 Solución ejercicio 4

La primera probabilidad es

$P(\max\{X_1,\ldots,X_n\}\geq 0.9) = 1-P(\max\{X_1,\ldots,X_n\}\leq 0.9) = 1-P(X_1\leq 0.9, X_2\leq 0.9,\ldots,X_n\leq 0.9) = 1-P(X_1\leq 0.9)\cdot P(X_2\leq 0.9)\cdot\ldots\cdot P(X_n\leq 0.9) = 1-0.9^10 = 0.6513.$

La segunda es

$P(\max\{X_1,\ldots,X_n\}\leq 0.5) = P(X_1\leq 0.5, X_2\leq 0.5,\ldots,X_n\leq 0.5) = P(X_1\leq 0.5)\cdot P(X_2\leq 0.5)\cdot\ldots\cdot P(X_n\leq 0.5) = 0.5^{10} = 9.765625\times 10^{-4}.$

Hemos utilizado que la distribución uniforme

$$P(X_i\leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ x & \text{si } 0<x<1\\ 1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

2.5 Solución ejercicio 5

Sea F_X la distribución de la variable que se muestrea entonces $F_{X_i}=F_X$ para $i=1,2,\ldots,n$.

La distribucion del máximo es

$$\begin{aligned} P(\max\{X_1,\ldots,X_n\}\leq x) &= P(X_1\leq x, X_2\leq x,\ldots,X_n\leq x)\\ &= P(X_1\leq x)\cdot P(X_2\leq x)\cdot\ldots\cdot P(X_n\leq x)\ .\\ &= F_{X_1}(x)\cdot F_{X_1}(x)\ldots\cdot F_{X_n}(x) = F_X(x)^n \end{aligned}$$

La distribucion del mínimo es

$$\begin{aligned} P(\min\{X_1,\ldots,X_n\}\leq x) &= 1-P(\min\{X_1,\ldots,X_n\}\geq x)\\ &= 1-P(X_1\geq x, X_2\leq x,\ldots,X_n\geq x)\\ &= 1-(P(X_1\geq x)\cdot P(X_2\geq x)\cdot\ldots\cdot P(X_n\geq x))\\ &= 1-P(X_1\geq x)\cdot P(X_2\geq x)\cdot\ldots\cdot P(X_n\geq x)\\ &= 1-(1-P(X_1\leq x))\cdot(1-P(X_1\leq x))\cdot\ldots\cdot(1-P(X_1\leq x))\\ &= 1-(1-F_X(x))\cdot(1-F_X(x))\ldots\cdot(1-F_X(x))\\ &= 1-(1-F_X(x))^n. \end{aligned}$$

Obviamente las distinuciones del mínimo y del máximo no son gaussianas (para $n>1$); Las calculamos a continuación.

Denotemos por $F_Z = \int_{-\infty}^{x} f_Z(s)dx$ y $f_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ a las funciones de distribución y de densidad de una $N(0,1)$ sabemos que si X sigue una ley $N(\mu,\sigma)$ entonces la función de distribución de X es $F_X(x) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$ y la densidad es $f_X(x) = f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

Entonces la distribución del máximo M es

$F_M(x) = 1-(1-F_X(x))^n = 1-(1-F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}))^n$ y su densidad es su derivada respecto de x

$f_M(x) = (F_M(x))' = n\cdot(1-F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{n-1}\cdot f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

De forma similar, se deja como ejercicio, se calcula la distribución del mínimo.

2.6 Solución ejercicio 6

Ahora tenemos una muestra aleatoria simple de una distribución de media μ y desviación típica sigma y como siempre tenemos el estadśitico $\overline{X}$.

a. Nos piden la distribución de $T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$ operando

$$T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{\sigma} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Ahora sabemos que la distribución de T por el Teorema Central de Límite converge en distribución a una normal estándar cuando $n\to\infty$.

Además si las variables fueran normales T seguirá distribución normal estándar.

b. Claro que T es un estadístico, ya que estadístico es cualquier función de una muestra. Además si nos fijamos bienes simplemente la tipificación del estadístico $\overline{X}$.

2.7 Solución ejercicio 7

Como se una muestra de una normal estándar tenemos que $\mu = 0$ y $sigma = 1$

Así que si denotamos por $Y = \sum_{i=1}^{n}$, resulta que Y es la suma de normales estándar $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, idénticamente distribuidas y por lo tanto sabemos que Y sigue una ley $N(n\cdot 0 = 0, n\cdot\sqrt{\cdot}\sigma = \sqrt{10})$. Ahora podemos operar

$P\left(1.56 < \sum_{i=1}^{n} < 18.31\right) = P(2.56 < Y < 18.31) = P(Y < 18.31) - P(Y < 2.56) = 0.9664497 - 0.6010246 = 0.3654251$.

```r
pnorm(18.31,mean=0,sd=sqrt(10))
```

```
## [1] 1
```

```r
pnorm(2.56,mean=0,sd=sqrt(10))
```

```
## [1] 0.7908986
```

```r
pnorm(18.31,mean=0,sd=sqrt(10))-pnorm(2.56,mean=0,sd=sqrt(10))
```

```
## [1] 0.2091014
```

o también, tipificando $Z = \frac{Y}{\sqrt{10}}$ es una $N(0,1)$

```r
pnorm(18.31/sqrt(10),mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 1
```

```r
pnorm(2.56/sqrt(10),mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 0.7908986
```

```r
pnorm(18.31/sqrt(10),mean=0,sd=1)-pnorm(2.56/sqrt(10),mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 0.2091014
```

obtenemos el mismo resultado.

2.8 Solución ejercicio 8

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal $N(\mu = 2, \sigma = 4)$. Definimos la siguiente variable aleatoria $Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16}$. Calculad $P(Y \leq 2.6)$

Notemos que $Z_i = \frac{X_i - 2}{4}$ son variables $N(0,1)$ para $i = 1.2, \ldots, 10$

Ahora

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16} = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i - 2}{4}\right)^2 = \sum_{i=1}^{10} Z_i^2 = \chi^2_{10}.$$

Luego $Y = \chi^2_{10}$ es una v.a. χ^2 con 10 grados de libertad. Ya podemos calcular la probabilidad pedida $P(Y \leq 2.6) = P(\chi^2_{10} \leq 2.6) = 0.010663$.

El cálculo lo hemos hecho con

```r
pchisq(2.6,df=10)
```

```
## [1] 0.01066303
```