hw3_51215903008_陈诺

作业链接

https://www.wolai.com/mathskiller/41MrDUFUXqvSvrKqpJgb4W?theme=light

习题部分

习题 1.设 $x \in R^n$ ， A 是 n 阶实对称正定矩阵，定义向量范数：

$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$$

又设 $f(t)$ 是 m 次实系数多项式，证明

$$\|f(A)x\|_A \leq max|f(\lambda_i)|\cdot \|x\|_A,$$

其中 $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 是 A 的特征值。

证明：

由于 A 是 n 阶实对称正定矩阵，故 A 满秩且其特征向量 $\xi_1, ...\xi_n$ 可以作为 x 的一组基，即 $\exists$一组$b_i \ni x = \sum_i (b_i * \xi_i)$ ，若记特征值矩阵 $\lambda = diag(\lambda_i)$ ，有 $f(A)x = \sum_i (f(A) * b_i * \xi_i) = \sum_i (f(\lambda_i) * b_i * \xi_i) = f(\lambda) * x$,所以

$$\begin{aligned}
\|f(A)x\|_A &= \|f(\lambda)x\|_A \\
&= \sqrt{f^2(\lambda) x^T A x} \\
&= \begin{pmatrix} |f(\lambda_1)| & & \\ & \ddots & \\ & & = |f(\lambda_n)| \end{pmatrix} \sqrt{x^T A x} \\
&\leq max|f(\lambda_i)|\cdot \|x\|_A
\end{aligned}$$

习题 2.求向量 $(1, 1, 1)^T$ 投影到一维子空间 $span\{(1, -1, 1)^T\}$ 的正交投影。

该子空间中的一个向量可表示为 $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix}$,故求正交投影可转换为求

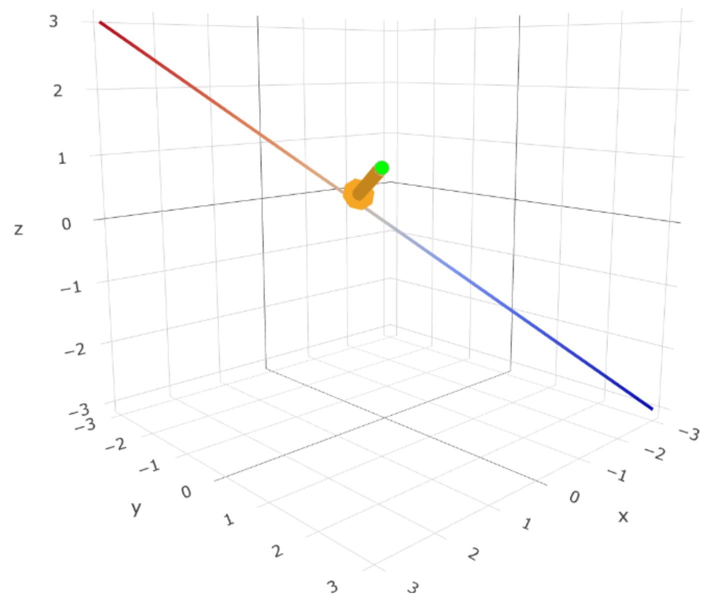
$$\begin{aligned}
&\min_x f \\
&= \min_x \left\| \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\
&= \min_x \left(2(x-1)^2 + (x+1)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x-1) + 2(x+1) = 6x - 2 \\
\text{令} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \text{则} x = \frac{1}{3} \\
\text{正交投影为} \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{gathered}$$

注：同样地，也可令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b = (1, 1, 1)^T$ ，则正交投影为 $AA^{\dagger}b$



习题 3.

求向量 $(1,1,1)^T$ 投影到仿射空间 $span\{(1,-1,1)^T,(1,1,0)^T\}+(1,2,1)^T$ 的正交投影。

该子空间中的一个向量可表示为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+1\\-x_1+x_2+2\\x_2+1\end{pmatrix}$$

,故求正交投影可转换为求

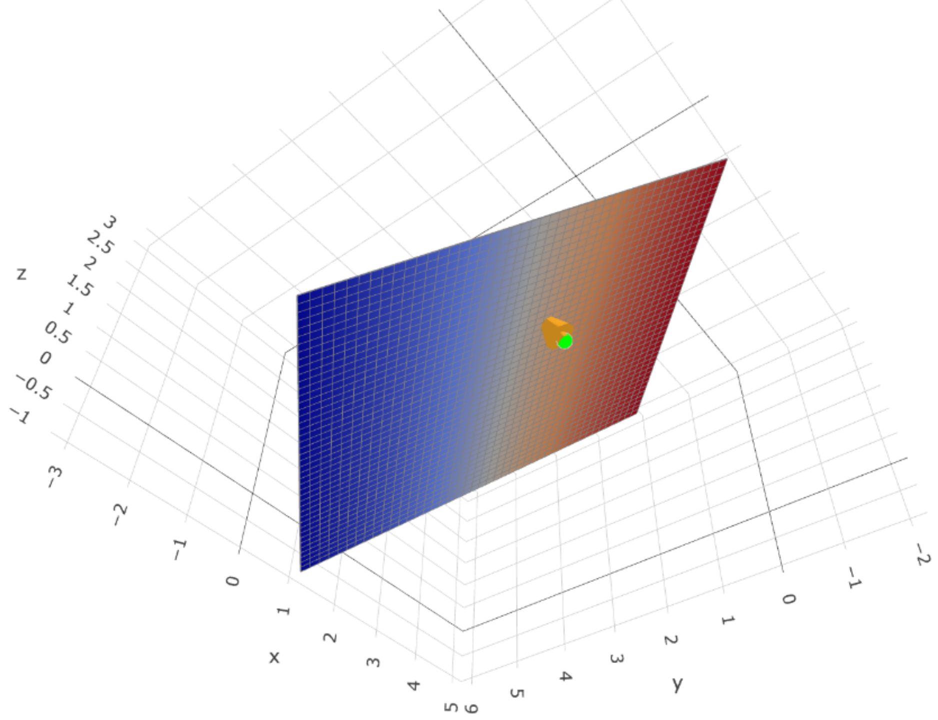
$$\begin{aligned}&\min_x f\\=&\min_x\left\|\begin{pmatrix}x_1+x_2+1\\-x_1+x_2+2\\x_1+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|_2^2\\=&\min_x\left\|\begin{pmatrix}x_1+x_2\\-x_1+x_2+1\\x_1\end{pmatrix}\right\|_2^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1+x_2)-2(-x_1+x_2+1)+2x_1=6x_1-2$$
$$令\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,则x_1=\frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2(x_1+x_2)+2(-x_1+x_2+1)=4x_2+2$$
$$令\frac{\partial f}{\partial x_2}=0,则x_2=-\frac{1}{2}$$
$$正交投影为\begin{pmatrix}x_1+x_2+1\\-x_1+x_2+2\\x_1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{7}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

注：同样地，问题可转变为求向量 $(0,-1,0)^T$ 投影到仿射空间 $span\{(1,-1,1)^T,(1,1,0)^T\}$ 的正交投影，即令

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$b=(0,-1,0)^T$ ，则正交投影为 $AA^{\dagger}b$ ，本题所求为 $AA^{\dagger}b+(1,2,1)^T$



习题 4.利用 Gram–Schmidt 正交化的过程，求下述矩阵列空间的一组正交基：

$$\begin{pmatrix} -10 & 13 & 7 & -11 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ -6 & 3 & 13 & -3 \\ 16 & -16 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

令

$$a_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -6 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 3 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 13 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} a_4 = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

由 Gram–Schmidt 正交化，

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -6 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/10 \\ -3/10 \\ 4/5 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$
$$b_2 = a_2 - [a_2, e_1]e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$b_3 = a_3 - [a_3, e_1]e_1 - [a_3, e_2]e_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 0 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$b_4 = a_4 - [a_4, e_1]e_1 - [a_4, e_2]e_2 - [a_4, e_3]e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$
$$e_1, e_2, e_3, e_4, \text{即为所求正交基}$$

```
from sympy.matrices import Matrix, GramSchmidt
l = [Matrix([-10,2,-6,16,2]), Matrix([13,1,3,-16,1]), Matrix([7,-5,13,-2,-5]),Matrix([-11,3,-3,5,-7])]
o = GramSchmidt(l)
o
#[Matrix([
 [-10],
 [  2],
 [ -6],
```

```
[ 16],
[  2]]),
Matrix([
[ 3],
[ 3],
[-3],
[ 0],
[ 3]]),
Matrix([
[6],
[0],
[6],
[6],
[0]]),
Matrix([
[ 0],
[ 5],
[ 0],
[ 0],
[-5]])]
```

Python

```python
from sympy.matrices import Matrix, GramSchmidt
l =  [Matrix([-10,2,-6,16,2]), Matrix([13,1,3,-16,1]), Matrix([7,-5,13,-2,-5]),Matrix([-11,3,-3,5,-7])]
o = GramSchmidt(l, True)
o
#[Matrix([
[ -1/2],
[ 1/10],
[-3/10],
[  4/5],
[ 1/10]]),
Matrix([
[ 1/2],
[ 1/2],
[-1/2],
[   0],
[ 1/2]]),
Matrix([
[sqrt(3)/3],
[        0],
[sqrt(3)/3],
[sqrt(3)/3],
[        0]]),
Matrix([
[          0],
[ sqrt(2)/2],
[          0],
[          0],
[-sqrt(2)/2]])]
```

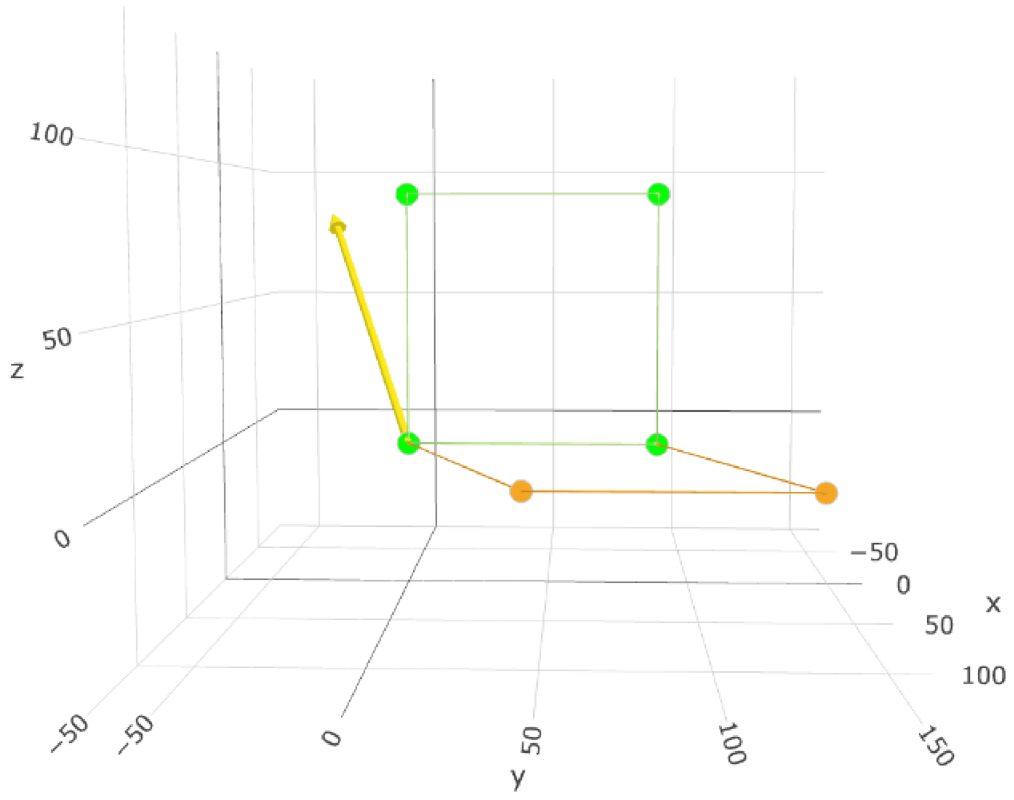
Python

习题 5.将一张图片（图片自选）竖立放置在空间坐标系的 yOz 平面 (如下图所示)。现有一束光沿着 $v=(-1,-1/2,1)^T$ 的 方向照射在该图片上。请编写代码并绘制出这张图片在 xOy 平面上的影子。

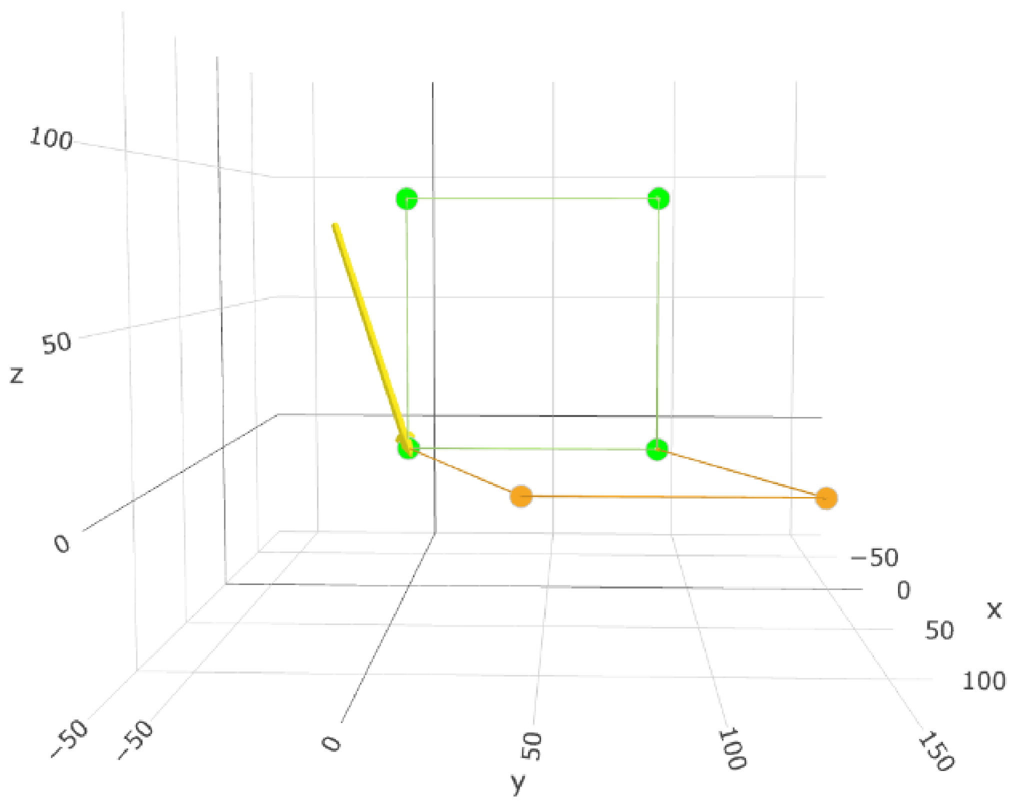
```python
import cv2
import numpy as np
img = cv2.imread ('dase.png' , 0)
row_num = img.shape[0]#89
col_num = img.shape[1]#89
factor = 2
img_rotate = np.zeros((factor*row_num, factor*col_num),dtype=np.uint8)
#为保证投影后图片不超边界，扩大两倍
```

Python

学院官网的 DASE 图片大小为 89*89，作草图：



首先由上图可以看出这道题光方向打反了，应为(1,1/2,−1)^T 才能打到 xOy 平面上形成影子，现将其矫正



以四个角的投影为例，原图的四个角坐标分别为：

$$a_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad a_2=\begin{pmatrix}0\\89\\0\end{pmatrix}\quad a_3=\begin{pmatrix}0\\0\\89\end{pmatrix}\ a_4=\begin{pmatrix}0\\89\\89\end{pmatrix}$$

四角沿光线投影到 xOy 平面即平移四角使得 z 坐标为 0，故四个角坐标为：

$$a_1'=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad a_2'=\begin{pmatrix}0\\89\\0\end{pmatrix}$$
$$a_3'=\begin{pmatrix}0\\0\\89\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0.5\\-1\end{pmatrix}*89=\begin{pmatrix}89\\44.5\\0\end{pmatrix}$$
$$a_4'=\begin{pmatrix}0\\89\\89\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0.5\\-1\end{pmatrix}*89=\begin{pmatrix}89\\133.5\\0\end{pmatrix}$$

```Python
for i in range(factor*row_num):
    for j in range (factor * col_num):
        y = int(j-1/2*i)
        x = row_num-i-1
        if x >= row_num or y >= col_num or x < 0 or y < 0:
            img_rotate[i][j] = 255;
        else:
            img_rotate[i][j] = img[x][y]
cv2.imwrite ("res.jpg", img_rotate)
```

变换前后的图像为：