数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 4 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2022 年 3 月 10 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。
2. 作业书写说明：
   (a) 可以讨论，禁止抄袭！
   (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名**和**学号**
   (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 4 次作业”；
   (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
   (e) 题与题之间**请空一行**；
   (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 4 次作业

提交截至时间：**2022/03/11 本周五 20:00（晚上）**

理论部分 (范数与二次型)

习题 1. 对偶范数常在共轭函数及一些不等式中出现。向量的对偶函数定义为

$$\|z\|_* = \sup\left\{z^\top x \mid \|x\| \leq 1\right\}$$

若向量范数 l_p 与 l_q 互为对偶范数，则 $p, q \in R^n$ 需满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (称 p, q 为 Hölder 共轭)

(1) 试用对偶范数定义及上述性质证明 Hölder 不等式: 对 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 以及 $x, y \in R^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

解.

$$\|z\|_* = \sup\left\{z^\top x \mid \|x\| \leq 1\right\} = \sup_{x\neq 0}\frac{z^\top x}{\|x\|}$$

$$z^\top x \leq \|x\|\|z\|_*$$

由对偶范数性质

$$z^\top x \leq \|x\|_p\|z\|_q$$

其中,$p, q \in R^n$ 且满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

将其用元素形式展开得 Hölder 不等式，证毕

为便于理解，以 $q=1, n=2$ 为例,$\|x\|_1 \leq 1$, 不妨只考虑该图像在第一象限部分，

令 $Z=\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} kx_0 \\ k(1-x_0) \end{pmatrix}, \|x\|_1=k, 0 \leqslant x_0 \leqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant 1$

$$\begin{aligned}
& z_0 k x_0 + z_1 k\left(1-x_0\right) \\
= & k\left(\left(z_0-z_1\right) x_0 + z_1\right) \\
\leqslant & \begin{cases} k z_1, \textit{when } z_0-z_1 \leq 0, \textit{let } x_0=0 \\ k z_0, \textit{when } \ z_0-z_1>0, \textit{let } x_0=1 \end{cases} \\
= & \|x\|_1\|z\|_\infty
\end{aligned}$$

更一般地，由 Hölder 不等式，当 $q=\frac{p}{p-1}$, 即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时, 可得 $z^\top x \leq \|x\|_p\|z\|_q$。因此该对偶范数性质可以理解为范数视角下的 Hölder 不等式。

习题 2. 矩阵的范数主要包括三种主要类型：诱导范数，元素形式范数和 Schatten 范数。诱导范数又称矩阵空间上的算子范数 (operator norm)，常用的诱导范数为 p 范数, 定义如下

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p$$

注：矩阵的诱导范数是由向量范数诱导而来的，向量中的每个元素诱导为了每个列向量 (基)。

(1) 设 $A=(a_{ij}) \in C^{m\times n}$, 证明 1 范数为列和范数，无穷范数为行和范数

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \ \|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

元素形式范数即矩阵按列排成向量，然后采用向量范数的定义得到的矩阵范数，一般称 l_p 范数。

$$l_p : \|A\|_p = \sqrt[P]{\sum_{i,j} |a_{ij}|^P}$$

(2) 试比较 *l1* 范数

$$l_1 : \|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^1$$

与诱导范数的关系

解. *(1)*

$$\begin{aligned}
&A = (a, \ldots, a_n) \\
&\|Ax\|_1 = \| \sum_i a_i x_i \|_1 \\
&\leqslant \sum_i \|a_i x_i\|_1 \\
&= \sum_i \|x_i\| \|a_i\|_1 \\
&\leqslant (\max \|a_i\|_1) \left(\sum_i |x_i| \right) \\
&= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \, \|x\|_1 \\
&\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \\
&\left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_j |a_{ij} x_j| \\
&\leq \sum_j |a_{ij}| \max_j |x_j| \\
&\|Ax\|_\infty \leqslant \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, \|x\|_\infty
\end{aligned}$$

(2) 以 *l1* 范数与 *1* 范数，无穷范数为例，有

$$\|X\|_1 \leqslant \|X\|_1 (l1) \leqslant n\|X\|_1$$
$$\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_1 (l1) \leqslant m\|X\|_\infty$$

实际上对于有限维空间上的任何两个（以矩阵、向量为例）范数 *(*满足非负性、齐次性、三角不等式*)*，他们之间都是等价 *(equivalent)* 的。范数的等价性 *(equivalence)* 定义如下*:*

定义 0.0.1. 设 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是 $R^{m\times n}(R^n)$ 上任意两个范数, 如果存在 $\mu_1,\mu_2>0$, 使得

$$\mu_1\|X\|_\alpha \leqslant \|X\|_\beta \leqslant \mu_2\|X\|_\alpha, \quad \forall X\in R^{m\times n}(R^n)$$

则称范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和范数 $\|\cdot\|_\beta$ 是等价的。

证: *1.* 利用范数三角不等式的性质可以证明对于任意一个 $F^{m\times n}$ 上的范数 $\|\cdot\|$, 函数 $\varphi: F^{m\times n}\mapsto R, \varphi(X)=\|X\|$ 在 L_1 范数下是连续的。

$\forall X,Y\in F^{m\times n}$,

$$\begin{aligned}
|\varphi(X)-\varphi(Y)| &= |\|X\|-\|Y\|| \\
&= \|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}E_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}E_{ij}\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-y_{ij}\right)E_{ij}\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|\left(x_{ij}-y_{ij}\right)E_{ij}\| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}-y_{ij}|\,\|E_{ij}\| \\
&\to 0, X\to Y
\end{aligned}$$

其中，$E_{ij}\in F^{m\times n}$ 表示只有在第 i 行第 j 列的元素为 *1*，其他元素都为 *0* 的矩阵。

因此$\varphi(X)$ 是连续函数。

2. 故 $\varphi(Y;\alpha)=\|Y\|_\alpha$ 在有界闭集 $S=\{Y\in F^{m\times n}:\|Y\|_1=1\}$ 上连续，又 $\varphi(Y;\alpha)$ 在 S 恒大于零，因此在 S 内必有最大值 $C_{\max}>0$, 最小值 $C_{\min}>0$,

同理可得 $\varphi(Y;\beta)=\|Y\|_\beta$ 在 S 内必有最大值 $D_{\max}>0$, 最小值 $D_{\min}>0$。

为便于理解，以 $\alpha=\infty, F^{2\times 1}$*(向量)* 为例，

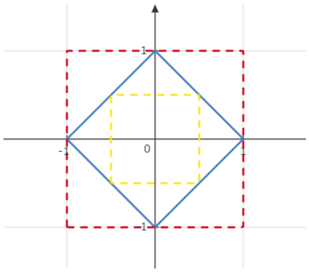

图 1: $\varphi(Y;\infty)$ 在单位范数球 S 上移动

图中蓝色部分为单位范数球 $S=\left\{Y\in F^{2\times 1}:\|Y\|_1=1\right\}, \varphi(Y;\infty)$ 在黄色处取到最小值 $C_{min}=$

$\frac{1}{2}$，在红色处取到最大值 $C_{min}=1$。

3. $\forall X \in F^{m\times n}$, 若 $X=\mathbf{0}$, 则命题显然成立。

若 $X\neq\mathbf{0}$, 令 $Y=\frac{X}{\|X\|_1}$, $\|Y\|_1=1$, 因此对 $Y\in S$, 有 $\frac{\|X\|_\beta}{\|X\|_\alpha}=\frac{\|Y\|_\beta}{\|Y\|_\alpha}\frac{\|X\|_1}{\|X\|_1}=\frac{\varphi(Y;\alpha)}{\varphi(Y;\beta)}\in\left[\frac{D_{\min}}{C_{\max}},\frac{D_{\max}}{C_{\min}}\right]$.

令 $\mu_1=\frac{D_{\min}}{C_{max}},\mu_2=\frac{D_{\max}}{C_{\min}}$, 则: $0<\mu_1\leq\frac{\|X\|_\beta}{\|X\|_\alpha}\leq\mu_2$

习题 3. *(作为阅读材料, 不计入分数)*

由 $\|A\|_p=\sup_{\|x\|_p\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$,

矩阵 A 的诱导范数可理解为线性变换 Ax 对向量 x 的最大“拉长倍数”

由 $\|A\|_p=\sup_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p$,

矩阵 A 的诱导范数也可理解为 x 在单位范数球上运动时 $\|Ax\|_p$ 的最大值

以下情形可便于理解诱导范数

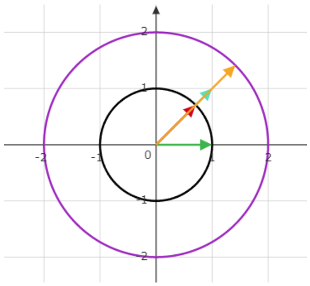

图 2: 诱导范数例 (p=2)

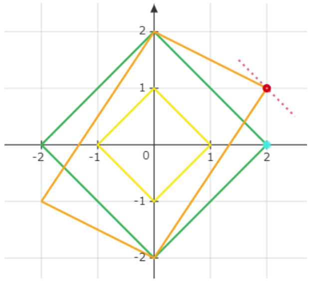

图 3: 诱导范数例 (p=1)

例: 左图为 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, p(A)=1, p=2$ 时的情形，在 $x=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ 时 $\|Ax\|_2$ 取到最大值 2

例: 右图绿线为 $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}, p=1$ 时的情形，在 $x=(1,0)$ 时 $\|Ax\|_1$ 取到最大值 2

例: 右图橙线为 $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}, p=1$ 时的情形，在 $x=(1,1)$ 时 $\|Ax\|_1$ 取到最大值 3

(1) 试证明

$$||A||_2=\sigma_{max}=\sqrt{\lambda\left(A^\top A\right)}$$

, 其中 σ_{max} 为谱范数，即矩阵 A 的最大奇异值，$\lambda\left(A^\top A\right)$ 表示 $A^\top A$ 的最大特征值。

证: 即证明对于矩阵 $A_{m\times n}$, 对任意向量 x, 在矩阵 A 的变换 (即 Ax) 后, 其长度不大于 $\sigma_{max}\|x\|_2$, 即 $\|Ax\|_2\leq\sigma_{max}\|x\|_2$ 。

$A^\top A$ 是实对称阵, 其特征向量两两正交。不妨令 $B=A^\top A$, 特征向量矩阵为 $\lambda=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)=$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,$p_1,...,p_n$ 为 B 的一组标准正交特征向量，则 $P=(p_1,...,p_n)$ 为正交矩阵, 故

$$BP=P\lambda \Leftrightarrow B=P\lambda P^{-1} \Leftrightarrow B=P\lambda P^{\top}$$

(称 λ 合同于 B) 假设对一个向量 x, 在矩阵 A 的变换（即 Ax）后得到 y, 即满足 $y=Ax$。则

$$\|y\|_2^2=y^{\top}y=(Ax)^{\top}(Ax)=x^{\top}A^{\top}Ax=x^{\top}Bx=x^{\top}P\lambda P^{\top}x=(P^{\top}x)^{\top}\lambda P^{\top}x$$

对于二次型，可以看作是一个二次齐次多项式的图形，而正交矩阵 P 的变换，可以保证变换图形的形状和大小不变，仅仅做了位移、旋转或翻转的变换，类似把物体从一个地方移到另一个地方。(可以想象一个三维坐标系，在坐标系上的点构成的图形通过一个非正交的基表示，现坐标系换了一组标准正交基 P，用这组基变换图形不过是移动 (掰正) 了图形的位置。记 $z=P^{\top}x$，所以 z 不过是一个与 x 一样的（同范数的）向量，只是换了位置，而 $\lambda=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ 则进行了掰正位置后的放缩。因而

$$\begin{aligned}
|y|^2 &= z^T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} z=\sum_i \lambda_i z_i^2 \\
&= \sum_i\left(\sqrt{\lambda_i} z_i\right)^2 \leq \sum_i\left(\max_j\left(\sqrt{\lambda_j}\right) z_i\right)^2 \\
&= \max\left(\sqrt{\lambda_j}\right)^2 \sum_i z_i^2=\max\left(\lambda_j\right)|z|^2==\max\left(\lambda_j\right)|x|^2
\end{aligned}$$

当且仅当除 $z_{opt\,\max_j(\lambda_j)}$ 以外的其他元素均等于 *0* 时, 该不等式的等号成立。

即 $\|Ax\|_2 \leq \sigma_{max}\|x\|_2$，证毕

(2) 元素形式下矩阵的 l_2 范数称为 *Frobenius* 范数，即

$$l_2: \|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$$

试比较 $\|A\|_2$ 与 $\|A\|_F$ 的大小

答:$\|A\|_2 \leq \|A\|_F$

习题 4. 上题提到矩阵 A 的诱导范数也可理解为 x 在单位范数球上运动时 $\|Ax\|_p$ 的最大值，而对于某些矩阵，x 的巨大变化只能引起 Ax 很小的变化（旋转而非放缩）。反之，对于线性方程组 $Ax=b$，b（或 A）的微小变化会带来解 x 的巨大变化。这样的矩阵 A（及线性方程组）称作病态的。如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\|\delta b\|_\infty = \left\|(2,2)^\mathrm{T} - (2,2.0001)^\mathrm{T}\right\|_\infty = 0.0001, \|\delta x\|_\infty = \left\|(2,0)^\mathrm{T} - (1,1)^\mathrm{T}\right\|_\infty = 1$, 方程组解 x 的变化程度是 b 变化程度的 *10000* 倍, 因此称矩阵 A 是病态的。

(1) 试推测什么样的矩阵是病态矩阵，用矩阵范数表示。

提示：对线性方程组 $Ax = b$, 设 A 是精确的, b 有微小的扰动 δb, 新方程组的解为 $x + \delta x$, 即 $A(x + \delta x) = b + \delta b$, 用

$$Ax = b \Rightarrow \|A\| \|x\| \geq \|b\|$$

$$A\delta x = \delta b, \delta x = A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

证明

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

解. 对于提示中的证明，将两个不等式相乘即可，故评价矩阵输入误差的敏感性指标为 $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$（又称条件数）。

以二维向量为例，$A = (a_1, a_2)$ 对 x 的变换 Ax 相当于把 x 从 *(1,0),(0,1)* 的基换成了 a_1, a_2 的基下表示，而这个变换又可以拆分为旋转，放缩和投影三种效应（通过之后会学到的奇异值分解）。

对于 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 这样的奇异阵，由于基 *(1,1)* 与 *(1,1)* 方向相同，所以 Ax 只能在一个方向移动（没有旋转），同时也可注意到最小特征值为 *0*（由于 A 是对称方阵，特征向量两两正交，故特征值与奇异值相等）。

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}$ 只是在上述共线的基上进行很小的变换，所以基的夹角很小，即使 x 变化很大，也只能引起 Ax 很小的变化。同时也可注意到，最小特征值从 *0* 变为约 *0.00005*。

实际上，在二范数下，条件数等于最大奇异值与最小奇异值的比。

$$||A||_2 = \sigma_{max}(A)$$

$$||A^{-1}||_2 = \sigma_{max}(A^{-1}) = 1/\sigma_{min}(A)$$

$$k(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2 = \frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)}$$

其中, $\sigma_{\max}(A)$ 为矩阵 A 的最大奇异值, $\sigma_{\min}(A)$ 为矩阵 A 的最小奇异值。

特殊地，对于对称方阵，特征值与奇异值相等，条件数又可表示为

$$k(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2 = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

其中, $\lambda_{\max}(A)$ 为矩阵 A 的最大特征值, $\lambda_{\min}(A)$ 为矩阵 A 的最小特征值。