hw2_51215903008_陈诺

作业链接

https://www.wolai.com/mathskiller/qKJu3K6bL873cTwjcAfuHN?theme=light

理论部分

习题 1.求下面矩阵的 1–范数、2–范数和无穷范数：

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered}\text{对于向量}x,\text{有}\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\\ \|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\\ \|x\|_\infty=\max_{i=1,\cdots,n}|x_i|\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{对于}A=(a_{ij})\in C^{m\times n}\\ \|A\|_1=\max_{1\leq j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\text{ 称为列和范数或1范数，数值等于最大列和}\\ \|A\|_\infty=\max_{l\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\text{ 称为行和范数或}\infty\text{范数，数值等于最大行和}\\ \|A\|_2=\sigma_1=\sqrt{\lambda_{m\times n}\left(A^HA\right)}\text{称为谱范数或2范数，}\\ \text{其中}\sigma_1\text{是矩阵}A\text{的最大奇异值，}\lambda_{m\times n}\left(A^HA\right)\text{ 表示}A^HA\text{的最大特征值}\\ \|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j}A_{i.j}^2}=\sqrt{\sum\lambda\left(A^HA\right)}\text{称为}Frobenius\text{范数，}\\ \text{其中}\sum\lambda\left(A^HA\right)\text{ 表示}A^HA\text{特征值的和}\end{gathered}$$

$$\|A_1\|_1=2,\|A_1\|_\infty=3,\|A_1\|_F=\sqrt{6}$$

$$\begin{gathered}{A_1}^TA_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\\ =\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}\\ |\lambda E-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2\\2&\lambda-4\end{vmatrix}\\ =\lambda^2-6\lambda+4=0\\ \lambda_1=3+\sqrt{5},\lambda_2=3-\sqrt{5}\\ \|A_1\|_2=\sqrt{3+\sqrt{5}}\end{gathered}$$

$$\|A_2\|_1=2,\|A_2\|_\infty=3,\|A_2\|_2=\sqrt{3+\sqrt{5}},\|A_2\|_F=\sqrt{6}$$

习题 2.有些平时称之为“距离”的函数其实并不是数学意义上的距离，请判断以下两种所谓的“距离”是否是数学意义上的距离并说明理由。

(1)假设向量 $a,b\in R^n$ ，定义余弦距离为 $d(a,b)=1-cos\langle a,b\rangle$ ，其中 $\langle a,b\rangle$ 为向量 a,b 间的夹角。

$$
\begin{gathered}
\text{设向量}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{V},\text{假设有一个从}\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R}\text{的函数,它满足}\\
(1)\text{非负性：对于}\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{V},\text{有}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geq 0,\langle x,x\rangle=0\text{当且仅当}\boldsymbol{x}=0;\\
(2)\text{齐次性：对于}\forall\lambda\in\mathbb{K},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{V},\text{有}\langle\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle;\\
(3)\text{三角不等式：对于}\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{V},\text{有}\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle\leq\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle\\
\text{该函数称为内积。}
\end{gathered}
$$

余弦距离不满足齐次性，故不是数学意义上的距离

(2)假设 S_1, S_2 分别表示两个字符串，定义 S_1, S_2 的编辑距离 $d(S_1, S_2)$ 为由 S_1 转成 S_2 所需的最少编辑操作次数。其中一次编辑操作可以是：将 S_1 中的一个字符替换成另一个字符；在 S_1 中插入一个字符；在 S_1 中删除一个字符。例如：kitten 和 sitting 的编辑距离是 3 。将

kitten 变为 sitting 的最小处理方式如下：

kitten→sitten（将 k 替换为 s）

sitten→sittin（将 e 替换为 i）

sittin→sitting（尾部插入 g）.

（1）非负性：编辑距离必然废物，对于完全相同单词距离为 0，满足非负性

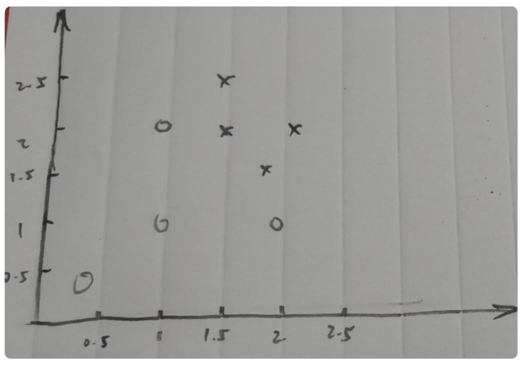
（2）齐次性：假如单词 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的距离为 c，则 $\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的距离为 λc

（3）三角不等式：编辑距离满足 $\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$

所以编辑距离是数学意义上的距离

实操部分

习题 3.复现 Lec6 例 13 的 KNN 的结果。其中负例为(1.5,2),(1.7,1.5),(2,2),(1.5,2.5)，正例为(1,2),(0.3,0.3),(2,1),(1,1)。分别采用欧式距离和曼哈顿距离两种距离度量方式。



根本打不开网课，不知道结果咋样

欧式距离：

```python
X = [[1.5,2], [1.7,1.5], [2,2], [1.5,2.5],[1,2],[0.3,0.3],[2,1],[1,1]]
y = [0,0,0,0,1,1,1,1]
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier
neigh = KNeighborsClassifier(n_neighbors=3,p=2)#欧式距离
#neigh = KNeighborsClassifier(n_neighbors=3,p=1)#曼哈顿距离
neigh.fit(X, y)
print(neigh.predict([[1.2,1.5]]))
print(neigh.predict_proba([[1.2,1.5]]))
#[1]
#[[0.33333333 0.66666667]]
```

Python

曼哈顿距离：

```python
X = [[1.5,2], [1.7,1.5], [2,2], [1.5,2.5],[1,2],[0.3,0.3],[2,1],[1,1]]
y = [0,0,0,0,1,1,1,1]
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier
#neigh = KNeighborsClassifier(n_neighbors=3,p=2)#欧式距离
neigh = KNeighborsClassifier(n_neighbors=3,p=1)#曼哈顿距离
neigh.fit(X, y)
print(neigh.predict([[1.2,1.5]]))
print(neigh.predict_proba([[1.2,1.5]]))
#[1]
#[[0.33333333 0.66666667]]
```

Python