数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 11 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 3 月 29 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。
2. 作业书写说明：
   (a) 可以讨论，禁止抄袭！
   (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名**和**学号**
   (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 11 次作业”；
   (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
   (e) 题与题之间**请空一行**；
   (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 11 次作业

提交截至时间：**暂定 2022/04/08 下周五 20:00（晚上）**

理论部分 (奇异值分解)

定理 0.0.1. 矩阵奇异值分解。矩阵 $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$, 它的奇异值分解为

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}} = U\begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^{\mathrm{T}}$$

其中: $U \in R^{m\times m}$ 和 $V \in R^{n\times n}$ 均为正交矩阵, 对角矩阵 $\Sigma_r = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\right) \in R^{r\times r}$, 且其对角线元素满足 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 。

矩阵 A 的秩为 $\mathrm{rank}(A) = r$。记 $U = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$, $V = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$, 则 A 可重新表示为

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^{\mathrm{T}}$$

u_i 和 v_i 分别为奇异值 σ_i 对应的左奇异向量和右奇异向量。易知 $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2}$, 矩阵 A 在 Frobenius 范数意义下的最优秩 r_0 逼近为 $A_{r_0} = \sum_{i=1}^{r_0}\sigma_i u_i v_i^{\mathrm{T}}$, 且 $\|A - A_{r_0}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=r_0+1}^{r}\sigma_i^2$, 其中 $r_0 < r$。
矩阵 A 的谱范数定义为 $\|A\|_2 = \sigma_1$, 核范数定义为

$$\|A\| = \max_{U,V}\left\{tr\left(U^{\mathrm{T}}AV\right) : U^{\mathrm{T}}U = I_m, V^TV = I_n\right\}$$

其中: I_m 表示 m 阶单位矩阵。矩阵 A 的核范数可用它的奇异值来表示, 即 $\|A\|_* = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i$, 且当 A 满足 $\|A\|_2 \leqslant 1$ 时, 此范数是 $\mathrm{rank}(A)$ 的包络。
由矩阵 A 的 Frobenius 范数

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2} = \sqrt{tr(A^{\mathrm{T}}A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2}$$

可得假设矩阵 A 作为图片数据，$\|A\|_F^2$ 等于所有像素的平方和，等于 $A^{\mathrm{T}}A$ 的迹，等于数据的总方差 (Total Variance)，等于 $A^{\mathrm{T}}A$ 特征值的和，等于 A 奇异值的平方和。
而在 PCA 中，第 i 个主成分的重要性由其在总方差中的比例

$$\frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2}$$

决定，矩阵 A 在 Frobenius 范数意义下的秩 r_0 逼近的压缩比（损失信息率）为

$$\frac{\sum_{j=1}^{r_0}\sigma_j^2}{\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2}$$

阅读以上材料理解奇异值分解可得到矩阵在 Frobenius 范数下的最优逼近, 进一步理解 Frobenius 范数及压缩比，并解答以下问题。

习题 1.

$$\text{对于课件中的矩阵}A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&4\\0&3&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}\text{其秩}r=3,\text{其紧奇异值分解为:}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&4\\0&3&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\sqrt{0.2}\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&\sqrt{0.8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

若取 $k=2$, 则其截断奇异值分解为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&4\\0&3&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&4\\0&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

请问 $k=2$ 的截断方式损失了多少信息？(写出压缩比)

解. *(30-5)/30=5/6*

习题 2. 利用习题 *1* 中矩阵 A 的奇异值分解结果求 A 的 *Moore-Penrose* 广义逆。(无需化简)

解.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&4\\0&3&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}^{\dagger}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^{\mathrm{H}}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&\sqrt{5}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&\sqrt{0.2}\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&\sqrt{0.8}\end{pmatrix}^{\mathrm{H}}$$