

数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 5 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 3 月 16 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。
2. 作业书写说明：
 - (a) 可以讨论，**禁止抄袭！**
 - (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名和学号**
 - (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 5 次作业”；
 - (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
 - (e) 题与题之间**请空一行**；
 - (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；**未交作业的当次作业记为 0 分**。

第 5 次作业



提交截至时间：**暂定 2022/03/26 下周五 20:00（晚上）**

理论部分 (特殊的正交阵)

习题 1. 计算: $\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^n$, 并指出 $n < 0$ 时的含义。

解. 由于

$$\begin{bmatrix} \cos k\phi & -\sin k\phi \\ \sin k\phi & \cos k\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\phi & -\sin(k+1)\phi \\ \sin(k+1)\phi & \cos(k+1)\phi \end{bmatrix}$$

而

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{bmatrix}$$

当 $n < 0$ 时, 对应的是旋转矩阵的逆变换, 即顺时针旋转 $n\phi$ 。

习题 2. *Householder* 变换可以在数值算法中构造正交基, 如 *Householder QR* 分解能使线性方程组易于求解。从计算观点看, *Householder* 变换可以在保持向量范数不变的情况下使向量的某些元素变为零, 如使非零向量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$ 变为标准向量 $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^\top$ 的某个常数倍。即

定理 0.0.1. 设 $0 \neq x \in R^n$, 则可构造单位向量 $w \in R^n$, $\|w\|_2 = 1$, 使得 H 满足 $Hx = \alpha e_1$, 其中 $\alpha = \pm\|x\|_2$

试证明该定理。

提示:

$$Hx = (I - 2ww^\top)x = x - 2(w^\top x)w$$

要使

$$Hx = \alpha e_1$$

则

$$2w^\top x w = x - \alpha e_1 \tag{1}$$

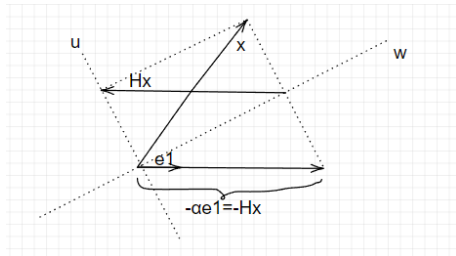
两边取范数

$$(2w^\top x) \|w\|_2 = \|x - \alpha e_1\|_2 \tag{2}$$

(1)(2) 相除, 有

$$w = \frac{x - \alpha e_1}{\|x - \alpha e_1\|_2} \tag{3}$$

故将 (3) 代回 (1), 证明当 $\alpha = \pm\|x\|_2$ 时 (1) 成立即可

图 1: 合适的 $H(w)$ 使得 $Hx = \alpha e_1$

解.

$$\begin{aligned}
 & 2w^\top xw \\
 &= \frac{2}{\|x - \alpha e_1\|_2^2} (x^\top - \alpha e_1^\top) x (x - \alpha e_1) \\
 &= \frac{2x^\top x - 2\alpha e_1^\top x}{\|x - \alpha e_1\|_2^2} (x - \alpha e_1) \\
 &= \frac{2\|x\|_2^2 - 2\alpha e_1^\top x}{\|x\|_2^2 - 2\alpha e_1^\top x + \alpha^2} (x - \alpha e_1) \\
 &\stackrel{\|x\|_2^2 = \alpha^2}{=} \frac{2\alpha^2 - 2\alpha e_1^\top x}{2\alpha^2 - 2\alpha e_1^\top x} (x - \alpha e_1) \\
 &= x - \alpha e_1
 \end{aligned}$$