

hw1_51215903008_陈诺

作业链接

<https://www.wolai.com/mathskiller/diWoQZ6fB2ZKq4iFqJrAXE?theme=light>

习题部分

习题 1. 矩阵 $A^2 = A, B^2 = B$, 并且 B 的列是 A 的列的线性组合。证明 $AB = B$ 。

由 B 的列是 A 的列的线性组合，得 $B = AX$

$$\begin{aligned} \because A^2 &= A \\ \therefore (A - I)A &= 0 \\ (A - I)AX &= 0 \\ AAX &= AX \\ AB &= B \end{aligned}$$

习题 2. 已知 $\beta = (1, 2, 1, 1)^T$ ，以及

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, -1, -1)^T, \alpha_3 = (1, -1, 1, -1)^T, \alpha_4 = (1, -1, -1, 1)^T.$$

试将向量 β 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
$$\beta = \frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4$$

习题 3. 设 A, B 为任意两个 n 阶方阵，证明： AB 和 BA 具有相同的特征多项式，即 $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$ 。

由特征多项式 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| \Leftrightarrow \lambda_A = \lambda_B$,
故只需证明 AB 的特征值是 BA 的特征值

1° 当 $A = O$ 或 $B = O$ 时, $AB = BA = O$
 显然 AB 与 BA 有相同的特征值
 2° 当 $A \neq O$ 且 $B \neq O$ 时
 设 λ 是 AB 的特征值, $\alpha \neq \vec{0}$ 是对应的特征向量
 $i)$ 当 $\lambda \neq 0$ 时, $AB\alpha = \lambda\alpha$
 $BA \cdot B\alpha = \lambda \cdot B\alpha$
 记 $\beta = B\alpha$, 得 $BA\beta = \lambda\beta$,
 由于 $\lambda \neq 0, \alpha \neq \vec{0}$, 得 $AB\alpha = \lambda\alpha \neq \vec{0}$, 可知 $B\alpha = \beta \neq \vec{0}$
 所以 λ 也是 BA 的特征值, β 是对应的特征向量
 $ii)$ 当 $\lambda = 0$ 时, $AB\alpha = \lambda\alpha = \vec{0}$, 又 $\alpha \neq \vec{0}$, 即 $ABx = \vec{0}$ 有非零解即
 $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA| = 0$,
 所以 $BAx = \vec{0}$ 也有非零解, 不妨记为 β
 即 $BA\beta = \vec{0} = 0 \cdot \beta$, 所以 $\lambda = 0$ 也是 BA 的特征值.
 综合 $i)ii)$ 得: AB 的特征值是 BA 的特征值
 得证

实操部分

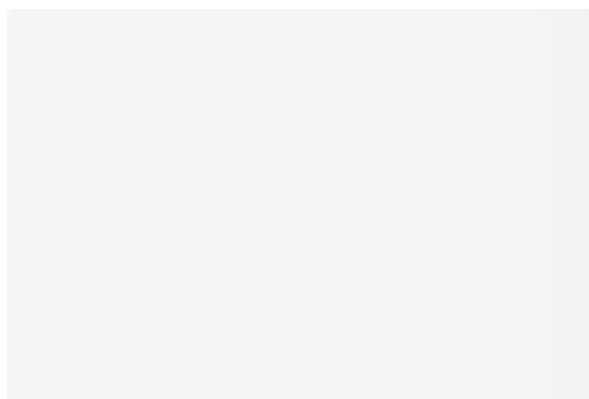
习题 4. 编写 Python 代码将你自选的一张图片旋转一定角度。该题的答案需包含三部分:

(1) 代码;

(2) 原来的图片;

(3) 旋转后的图片.

以下为图片和实现细节, 要翻转的是这只猫



```
from PIL import Image
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
img=np.array (Image.open ('test.jpg') ) #读取图像
#旋转参数
theta=30/180*np.pi # 旋转角度
cos_theta=np.cos(theta)
sin_theta=np.sin(theta)
center_i=len (img) /2# 中心点位置
center_j=len(img[0])/2
```

Python ▾

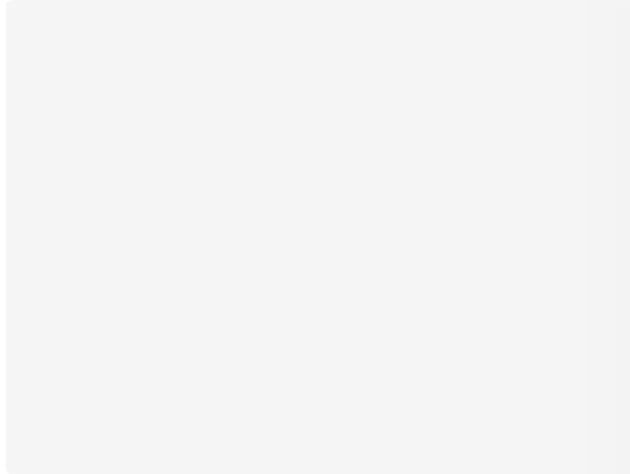
先做前向变换, 旋转像素方式的数学表示是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - s_1 \\ x_2 - s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

```
imgr=np.zeros_like (img) # 前向变换结果位置
for i in range(len(img)):
    for j in range(len(img[0])):
        yi=int(cos_theta*(i-center_i)-sin_theta*(j-center_j)+center_i)
        yj=int(sin_theta*(i-center_i)+ cos_theta*(j-center_j)+center_j)
        if (yi<0 or yj<0 or yi>=len(img)or yj>=len(img[0])):
            continue
        for k in range(3):
            imgr[yi] [yj] [k]=img[i][j][k]
# 输出结果图像
fig1=plt.figure()
ax=plt.subplot(111)
```

```
ax.imshow(imgr)
ax.axis('off')
plt.show()
```

Python ▾



可见通过前向变换得到的图片有噪点
再做前向变换，旋转像素方式的数学表示是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - d_1 \\ y_2 - d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

```
imgR=np.zeros_like (img) # 后向变换结果位置
for i in range(len(img)):
    for j in range(len(img[0])):
        xi= int(cos_theta*(i-center_i)+sin_theta*(j-center_j)+center_i)
        xj= int(-sin_theta*(i-center_i)+cos_theta*(j-center_j)+center_j)
        if xi<0 or xj<0 or xi>=len(img)or xj>=len(img[0]):
            continue
        for k in range(3):
            imgR[i][j][k]=img[xi] [xj] [k]
# 输出结果图像
fig2=plt.figure()
ax=plt.subplot(111)
ax.imshow(imgR)
ax.axis('off')
plt.show()
```

Python ▾

