

法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象学院

■ 新浪微博：小象AI学院



SLAM-无人驾驶、VR/AR

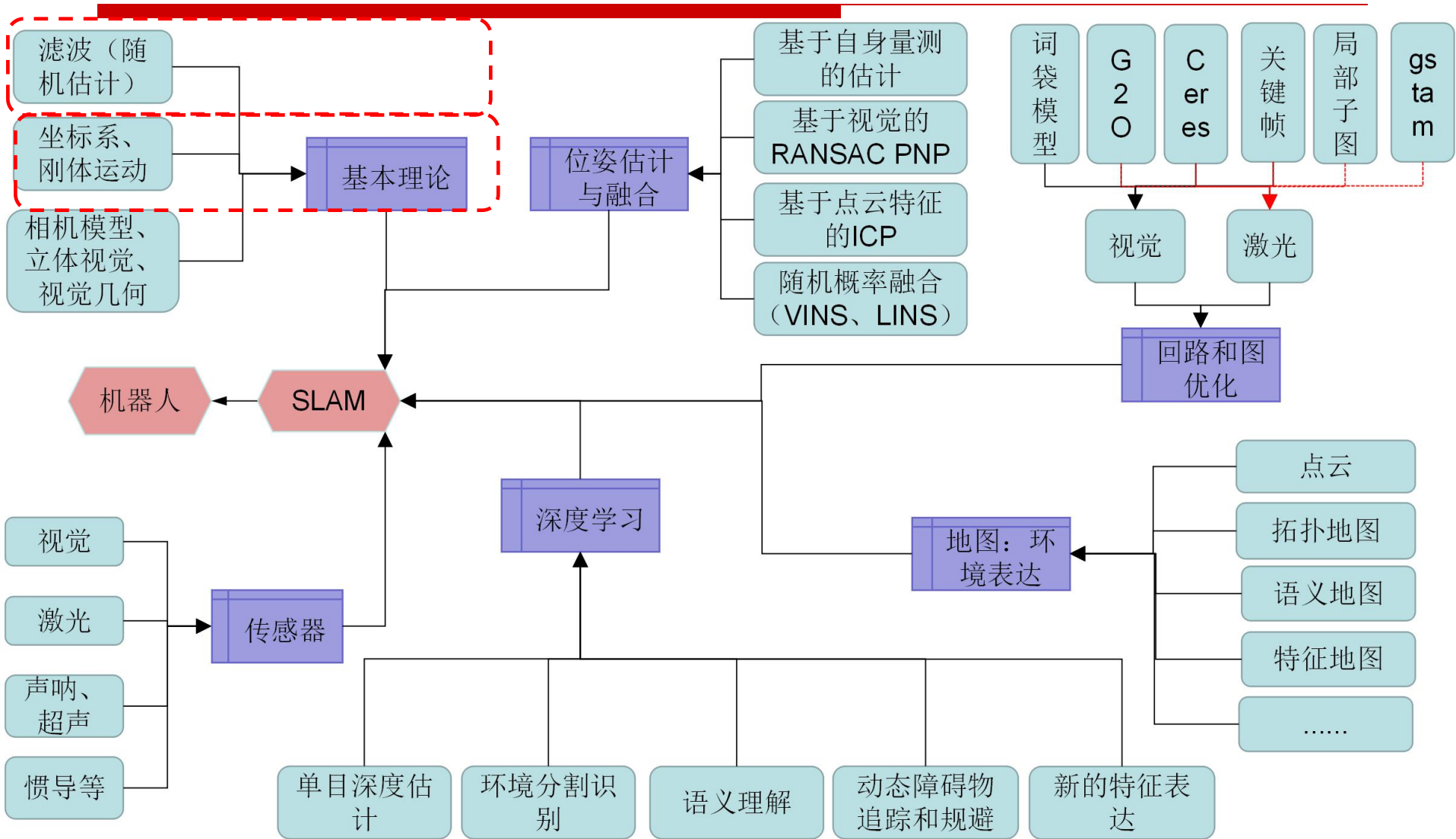
第三讲：

SLAM基本理论二：从贝叶斯开始学滤波器

主讲：杨亮

GitHub链接：<https://github.com/EricLYang/courseRepo>

总结



提纲

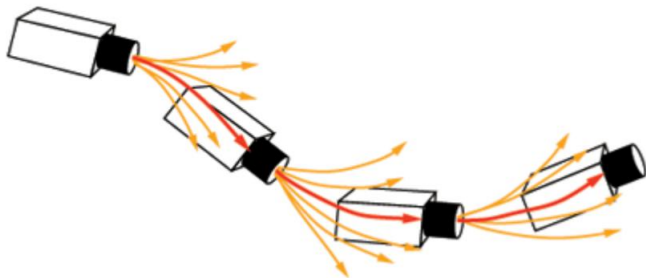
- 随机状态和估计
- 卡尔曼滤波器
- 扩展卡尔曼滤波器和SLAM
- 粒子滤波器和SLAM
- 实例：基于卡尔曼滤波器的SLAM实例

为什么讲滤波器

1

MonoSLAM: Real-Time Single Camera SLAM

Andrew J. Davison, Ian D. Reid, *Member, IEEE*, Nicholas D. Molton, and
Olivier Stasse, *Member, IEEE*



匀速运动假设：速度、角速度

$$\mathbf{f}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{C_{k+1}}^W \\ \mathbf{q}_{C_{k+1}}^W \\ \mathbf{v}_{C_{k+1}}^W \\ \omega_{C_{k+1}}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{C_k}^W + \left(\mathbf{v}_{C_k}^W + \mathbf{V}^W \right) \Delta t \\ \mathbf{q}_{C_k}^W \times \mathbf{q} \left(\left(\omega_{C_k}^C + \Omega^C \right) \Delta t \right) \\ \mathbf{v}_{C_k}^W + \mathbf{V}^W \\ \omega_{C_k}^C + \Omega^C \end{pmatrix}$$

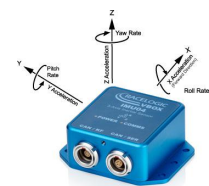
位置 = 位置 + 速度 * 时间
方向 = 方向 + 角速度 * 时间
速度 = 速度 + 噪声
角速度 = 角速度 + 噪声

为什么讲滤波器

2

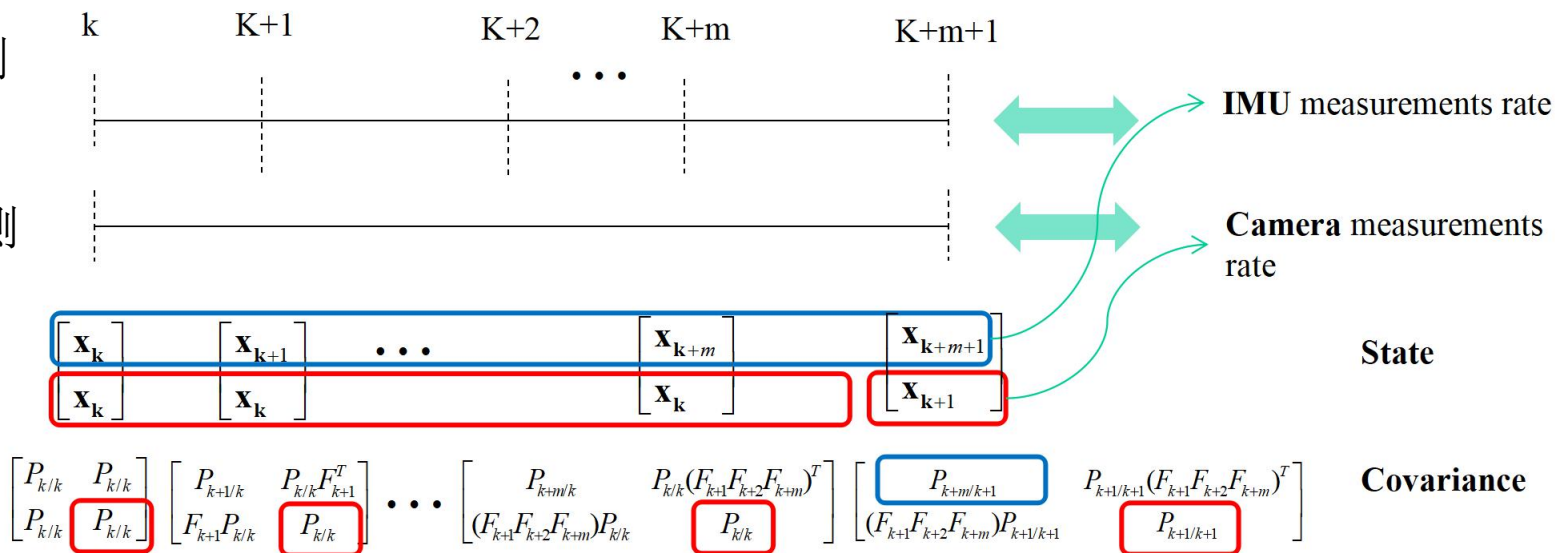
A Multi-State Constraint Kalman Filter for Vision-aided Inertial Navigation

Anastasios I. Mourikis and Stergios I. Roumeliotis



预测

观测



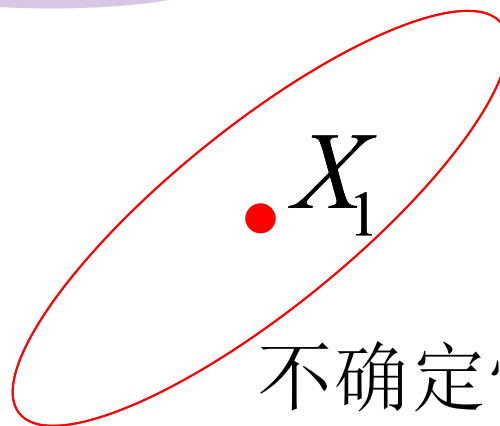
随机状态和估计

为什么讲这个



状态 $X_1 = (x, y, z)$

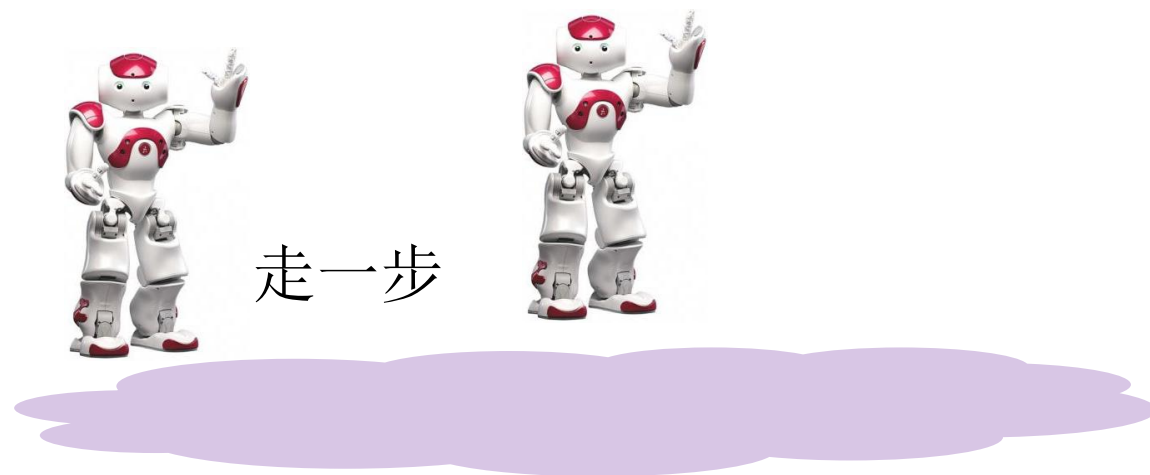
不确定性: $\delta(x, y, z)$



不确定性区域

随机状态和估计

为什么讲这个



状态 $X_1 = (x, y, z)$

平移 $t = (x_t, y_t, z_t)$

状态 $X_2 = X_1 + t$

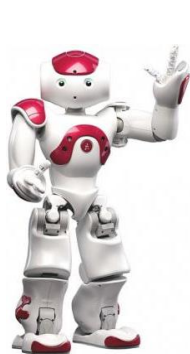
不确定性: $\delta(x, y, z)$

平移误差:
 $\delta(x_t, y_t, z_t)$

不确定性: $\delta + \delta_t$

随机状态和估计

为什么讲这个

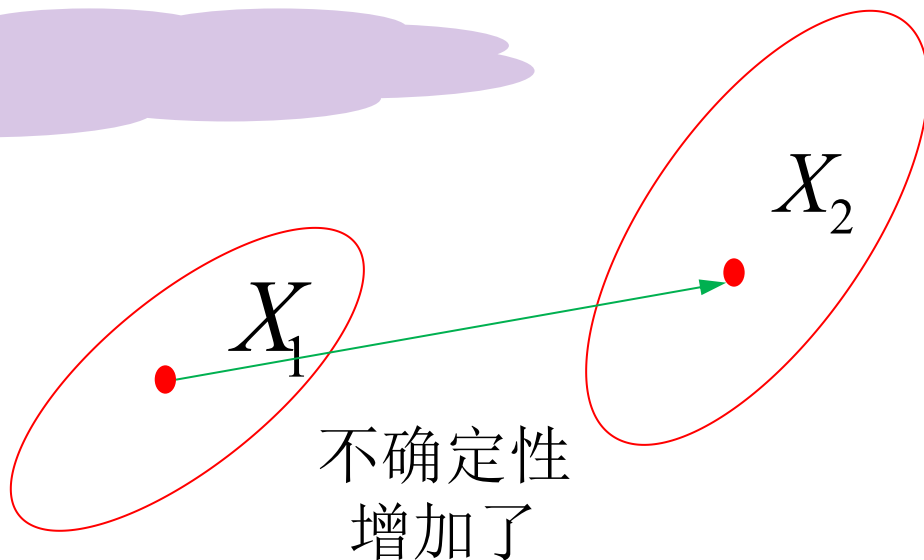


走一步



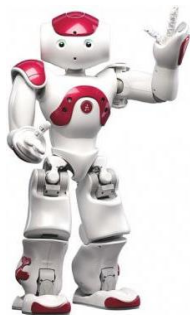
状态 $X_2 = X_1 + t$

不确定性: $\delta + \delta_t$



随机状态和估计

为什么讲这个



诶，传感器
有反馈了，
获取观测



状态 $X_2 = X_1 + t$

$Z_2 = (x_z, y_z, z_z) = HX_2$

不确定性: $\delta + \delta_t$



观测不确定性:

$\delta(x_z, y_z, z_z)$

随机状态和估计

为什么讲这个

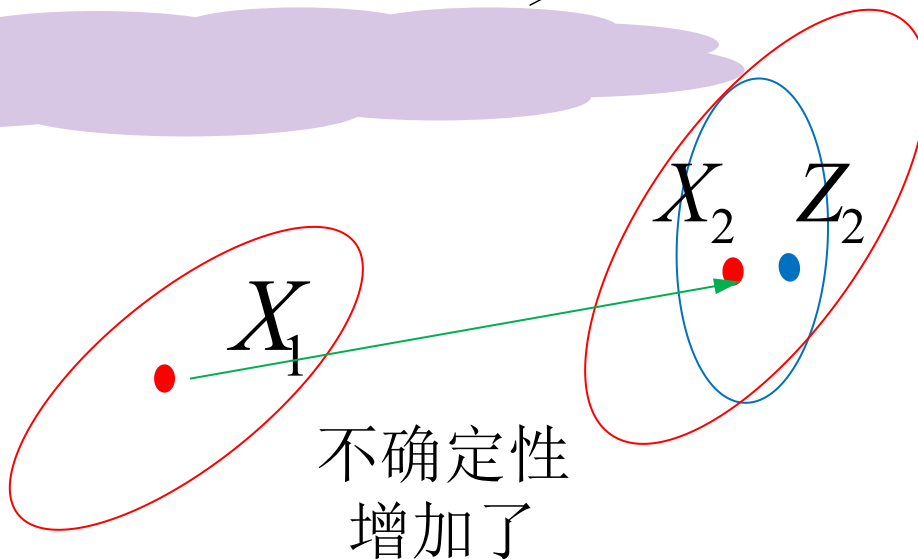


诶，传感器
有反馈了，
获取观测



问题：

1. 预测的误差如何累计
2. 融合如何进行



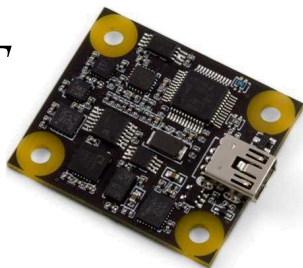
随机状态和估计

随机过程（stochastic process）：

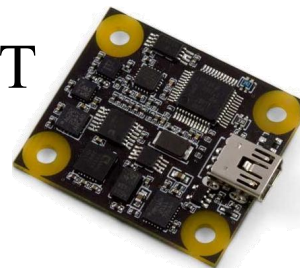
随机过程 = 时间 + 不确定性（方差、标准差）：概率

加速度的变化：

时间 T



时间 $T + \Delta T$



$$\dot{a} = \Delta a(\text{期望}) + \delta(a)$$

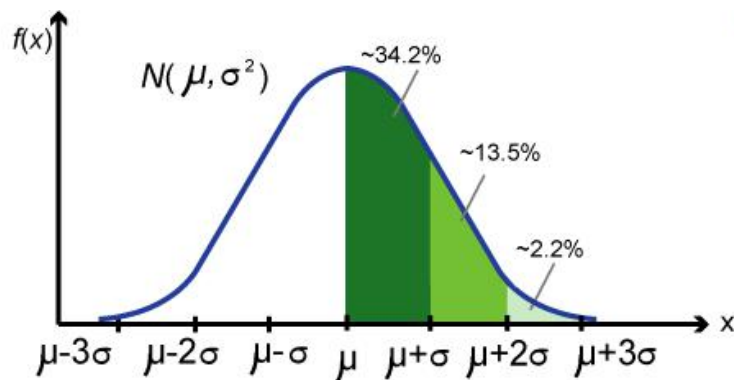
随时间变化----->随机过程

随机状态和估计

a 随机变量-----> 随机状态（多维）

$$F(a') = P(\{a : A(a) \leq a'\}) = P(A \leq a')$$

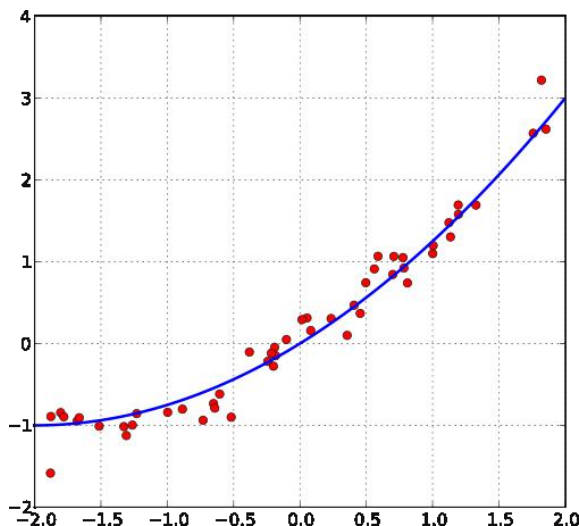
例如：正态分布



$$F(+\infty) = \int^{+\infty} p(t)dt = 1 \quad \text{面积等于1}$$

单调递增

随机状态和估计



你怎么理解曲线拟合的???

均值函数: $m_X(t) = EX(t), t \in T$

方差函数: $D_X(t) = DX(t)$

相关函数: $R_X(s, t) = EX(s)X(t)$

协方差函数: $C_X(s, t) = R_X(s, t) - m_X(s)m_X(t)$

相关系数函数: $\rho(s, t) = \frac{Cov_X(X_s, X_t)}{\sqrt{D_X(s)D_X(t)}}$

互协方差函数: $C_{X,Y}(s, t) = E(X(s) - EX(s))(Y(t) - EY(t))$

随机状态和估计

概率讲什么？：研究随机事件的数学统计特性

$$P(X)$$

条件概率：我们有初始位置 B ,还有 $P(B)$ ，我们前面讲过，我们有控制量：

$$P(X | B)$$



$$P(X) = P(X | B)P(B)$$

假设，已经走了 n 步，前面有 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ：

$$P(X) = P(X | X_1, X_2, \dots, X_n, B)P(B)P(X_1)P(\dots)P(X_n)$$



我们有观测 Z 了，这个时候，我们有 $P(Z)$ (因为地图存在)：

$$P(Z | X)$$

随机状态和估计

概率讲什么？：研究随机事件的数学统计特性

$P(X)$ 我们的目的：估计状态

$P(X) = P(X | B)P(B)$ 控制量给了我们---->预测

$P(Z | X, B)$ 我们在预测的同时---->预测

滤波器研究的问题核心

$$P(X | Z, B) = \frac{P(Z | X, B)P(X | B)}{P(Z | B)}$$

$P(\text{当前状态} | \text{观测, 控制})$

贝叶斯

提纲

- 随机状态和估计
- 卡尔曼滤波器
- 扩展卡尔曼滤波器和SLAM
- 粒子滤波器和SLAM
- 实例：基于卡尔曼滤波器的SLAM实例

卡尔曼滤波器

$$P(X) = P(X | B)P(B)$$

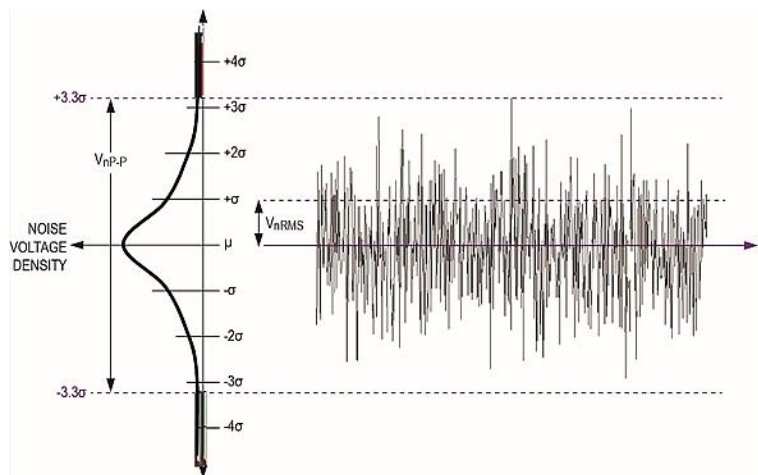
控制量给了我们---->预测

$$P(Z | X, B)$$

我们在预测的同时---->观测

大胆的假设：量测的噪声是高斯白噪声，
也就是均值为0

噪声 $\Rightarrow N(0, \delta)$



卡尔曼滤波器

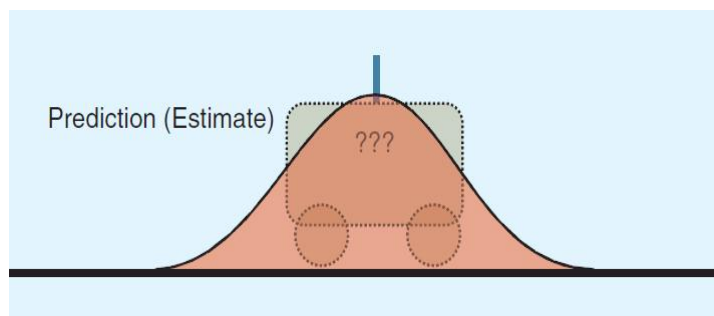
$$P(X) = P(X | B)P(B)$$



X = 期望 + 不确定性

控制量给了我们---->预测

Probability density functions(PDF)



$$y_p(x, \mathbf{x}_p, \delta_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_p^2}} e^{-\frac{(x-x_p)^2}{2\delta_p^2}}$$

基于运动模型来预测：1) 匀速假设；2) 控制 $P(x)$

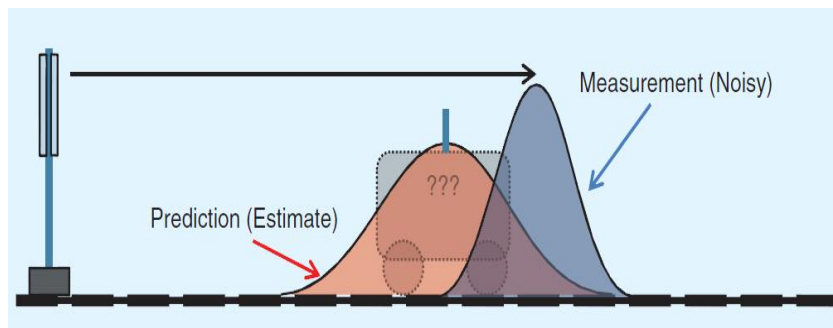
卡尔曼滤波器

$$P(Z | X, B)$$

我们在预测的同时---->观测



$Z = \text{期望} + \text{不确定性}: Z = HX$



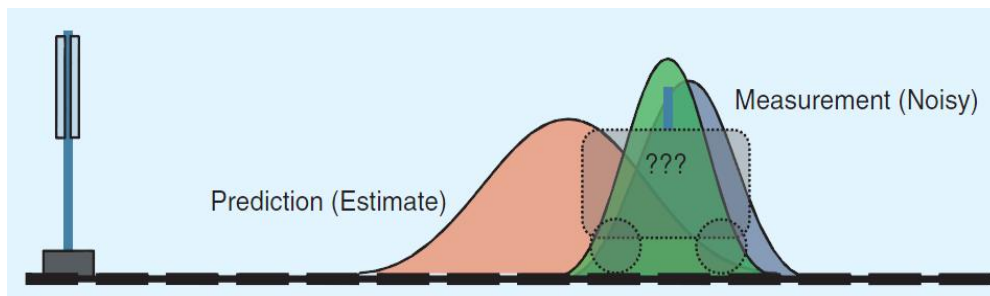
$$y_m(x, x_m, \delta_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_m^2}} e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\delta_m^2}}$$

基于观测来获取状态

$$P(Z | x)$$

卡尔曼滤波器

有估计也有观测：
融合



$$y(x, \overset{\text{预测}}{\boxed{x_p, \delta_p}}, \overset{\text{观测}}{\boxed{x_m, \delta_m}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_p^2}} e^{-\frac{(x-x_p)^2}{2\delta_p^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_m^2}} e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\delta_m^2}}$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\delta_m^2\delta_p^2}} e^{-\frac{(r-u_m)^2}{2\delta_m^2} - \frac{(r-u_p)^2}{2\delta_p^2}}$$

卡尔曼滤波器

假设融合之后的概率分布：

$$y_f(x, x_f, \delta_f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_f^2}} e^{-\frac{(x-x_f)^2}{2\delta_f^2}}$$

展开前一项：

$$x_f = x_p + \frac{\delta_p^2(x_m - x_p)}{\delta_p^2 + \delta_m^2} \quad \delta_f^2 = \delta_p^2 - \frac{\delta_p^4}{\delta_p^2 + \delta_m^2}$$

不要忘了，测量值是从观测来的 $Z = HX: \delta_z = H\delta_m$

卡尔曼
增益

$$K = H\delta_p^2 / (H^2\delta_p^2 + \delta_m^2)$$

和谁有
关??

卡尔曼滤波器

$$x_f = x_p + \frac{\delta_p^2 (x_m - x_p)}{\delta_p^2 + \delta_m^2} \quad \delta_f^2 = \delta_p^2 - \frac{\delta_p^4}{\delta_p^2 + \delta_m^2}$$

卡尔曼
增益

$$K = H\delta_p^2 / (H^2\delta_p^2 + \delta_Z^2)$$

卡尔曼滤波器：融合

$$x_f = x_p + K(x_m - Hx_p)$$

$$\delta_f^2 = \delta_p^2 - KH\delta_p^2$$

卡尔曼滤波器

$$K = H\delta_p^2 / (H^2\delta_p^2 + \delta_Z^2)$$

$$x_f = x_p + K(x_m - Hx_p) \quad \delta_f^2 = \delta_p^2 - KH\delta_p^2$$

Predict [\[edit\]](#)

Predicted (*a priori*) state estimate

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$$

Predicted (*a priori*) estimate covariance

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$$

Update [\[edit\]](#)

Innovation or measurement pre-fit residual

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

Innovation (or pre-fit residual) covariance

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T$$

Optimal Kalman gain

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$$

Updated (*a posteriori*) state estimate

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$$

Updated (*a posteriori*) estimate covariance

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}$$

Measurement post-fit residual

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k|k} = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$$

提纲

- 随机状态和估计
- 卡尔曼滤波器
- 扩展卡尔曼滤波器和SLAM
- 粒子滤波器和SLAM
- 实例：基于卡尔曼滤波器的SLAM实例

扩展卡尔曼滤波器和SLAM

1

MonoSLAM: Real-Time Single Camera SLAM

Andrew J. Davison, Ian D. Reid, *Member, IEEE*, Nicholas D. Molton, and
Olivier Stasse, *Member, IEEE*

匀速运动假设：速度、角速度

$$\mathbf{f}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{C_{k+1}}^W \\ \mathbf{q}_{C_{k+1}}^W \\ \mathbf{v}_{C_{k+1}}^W \\ \omega_{C_{k+1}}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{C_k}^W + (\mathbf{v}_{C_k}^W + \mathbf{V}^W) \Delta t \\ \mathbf{q}_{C_k}^W \times \mathbf{q}((\omega_{C_k}^C + \Omega^C) \Delta t) \\ \mathbf{v}_{C_k}^W + \mathbf{V}^W \\ \omega_{C_k}^C + \Omega^C \end{pmatrix}$$

位置 = 位置 + 速度 * 时间
方向 = 方向 + 角速度 * 时间
速度 = 速度 + 噪声
角速度 = 角速度 + 噪声

地图特征位置

$$\mathbf{h}^C = \mathbf{h}_\rho^C = \mathbf{R}^{CW} \left(\rho_i \left(\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \mathbf{r}^{WC} \right) + \mathbf{m}(\theta_i, \phi_i) \right)$$

非线性

扩展卡尔曼滤波器和SLAM

2

A Multi-State Constraint Kalman Filter for Vision-aided Inertial Navigation

Anastasios I. Mourikis and Stergios I. Roumeliotis

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\text{IMU}} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}_I^T & \tilde{\mathbf{b}}_g^T & {}^G \tilde{\mathbf{v}}_I^T & \tilde{\mathbf{b}}_a^T & {}^G \tilde{\mathbf{p}}_I^T \end{bmatrix}^T$$

$${}^I_G \dot{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\omega}}) {}^I_G \hat{\mathbf{q}}, \quad \dot{\hat{\mathbf{b}}}_g = \mathbf{0}_{3 \times 1},$$

$${}^G \dot{\hat{\mathbf{v}}}_I = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{q}}}^T \hat{\mathbf{a}} - 2[\boldsymbol{\omega}_G \times] {}^G \hat{\mathbf{v}}_I - [\boldsymbol{\omega}_G \times]^2 {}^G \hat{\mathbf{p}}_I + {}^G \mathbf{g}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_a = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad {}^G \dot{\hat{\mathbf{p}}}_I = {}^G \hat{\mathbf{v}}_I$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{\text{IMU}} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{X}}_{\text{IMU}} + \mathbf{G} \mathbf{n}_{\text{IMU}}$$

部分非线性-----观测非线性

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{q}}}^T [\hat{\mathbf{a}} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -2[\boldsymbol{\omega}_G \times] & -\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{q}}}^T & -[\boldsymbol{\omega}_G \times]^2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{q}}}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

扩展卡尔曼滤波器和SLAM

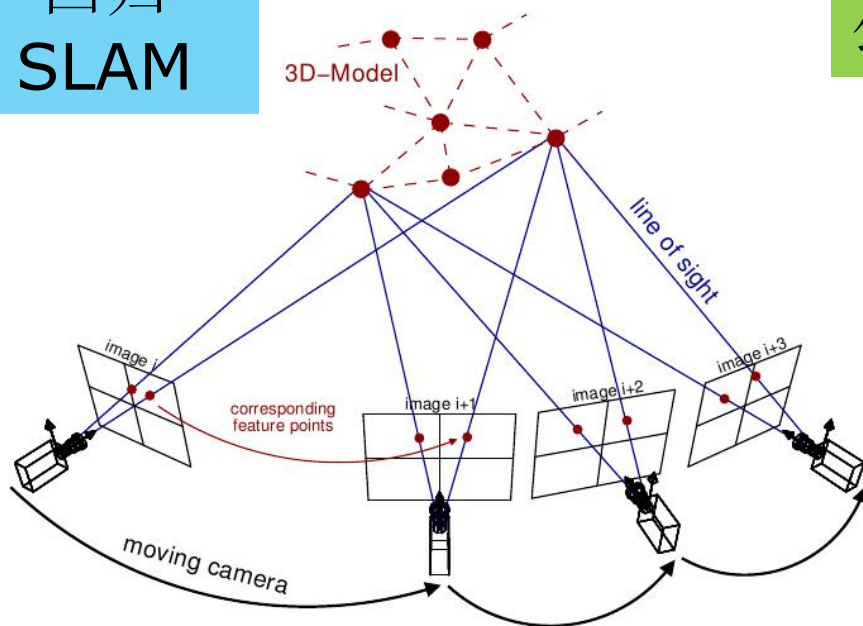
线性:

KF

非线性或者部分非线性: EKF

回归
SLAM

匀速运动假设: 速度、角速度



位置 = 位置 + 速度 * 时间

方向 = 方向 + 角速度 * 时间

速度 = 速度 + 噪声

角速度 = 角速度 + 噪声

扩展卡尔曼滤波器和SLAM

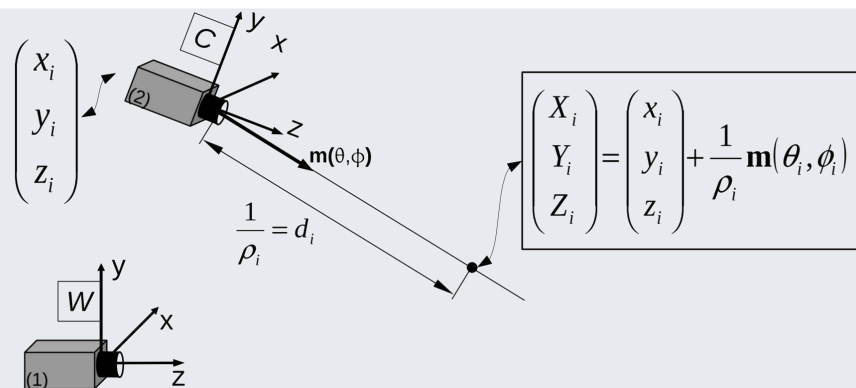
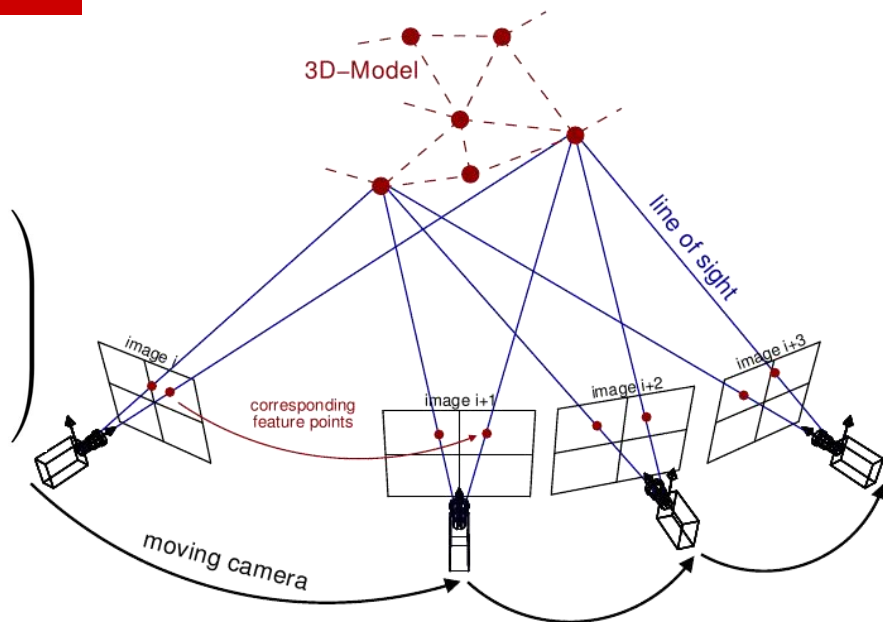
匀速运动假设：速度、角速度

预测：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{C_{k+1}}^W \\ \mathbf{q}_{C_{k+1}}^W \\ \mathbf{v}_{C_{k+1}}^W \\ \omega_{C_{k+1}}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{C_k}^W + (\mathbf{v}_{C_k}^W + \mathbf{V}^W) \Delta t \\ \mathbf{q}_{C_k}^W \times \mathbf{q}((\omega_{C_k}^C + \Omega^C) \Delta t) \\ \mathbf{v}_{C_k}^W + \mathbf{V}^W \\ \omega_{C_k}^C + \Omega^C \end{pmatrix}$$

观测预测

$$\mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 - f k_u \frac{h_{Lx}^R}{h_{Lz}^R} \\ v_0 - f k_v \frac{h_{Ly}^R}{h_{Lz}^R} \end{pmatrix}$$

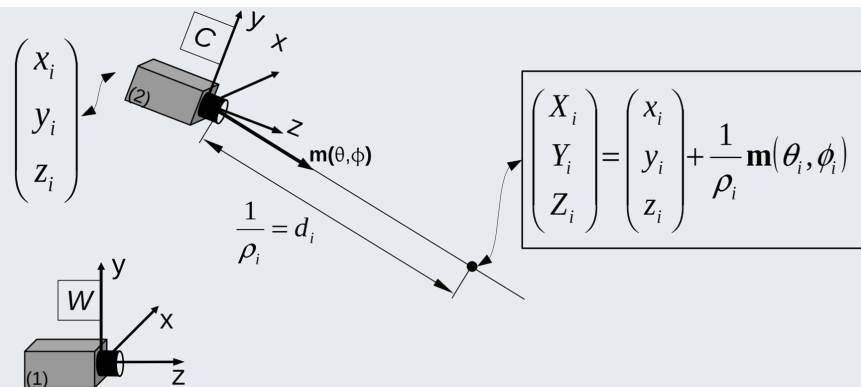


扩展卡尔曼滤波器和SLAM

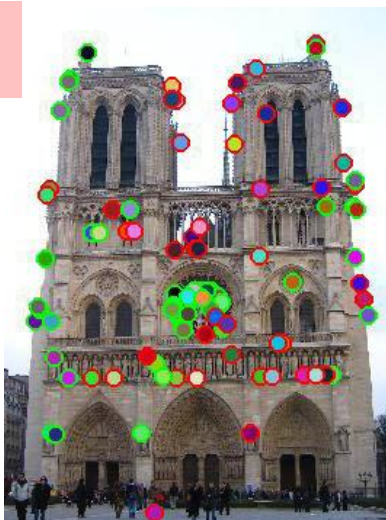
匀速运动假设：速度、角速度

预测：

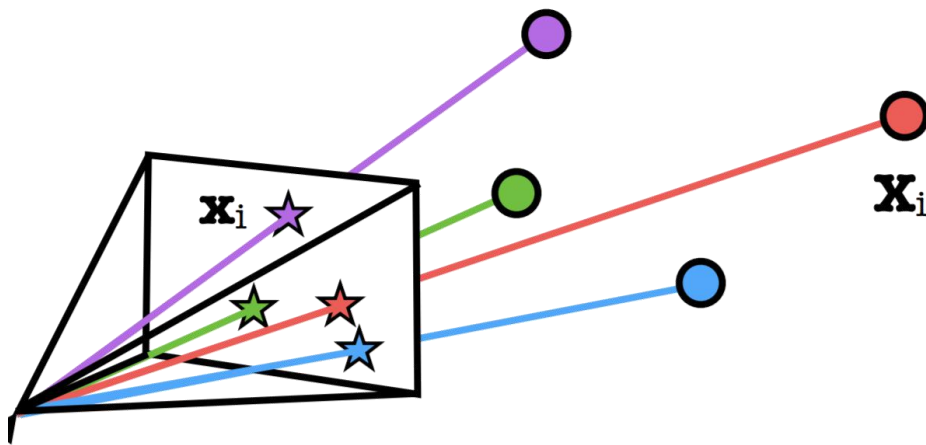
$$\mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 - f k_u \frac{h_{Lx}^R}{h_{Lz}^R} \\ v_0 - f k_v \frac{h_{Ly}^R}{h_{Lz}^R} \end{pmatrix}$$



观测：



$$[u_m, v_m]$$



提纲

- 随机状态和估计
- 卡尔曼滤波器
- 扩展卡尔曼滤波器和SLAM
- 粒子滤波器和SLAM
- 实例：基于卡尔曼滤波器的SLAM实例

为什么粒子滤波器？

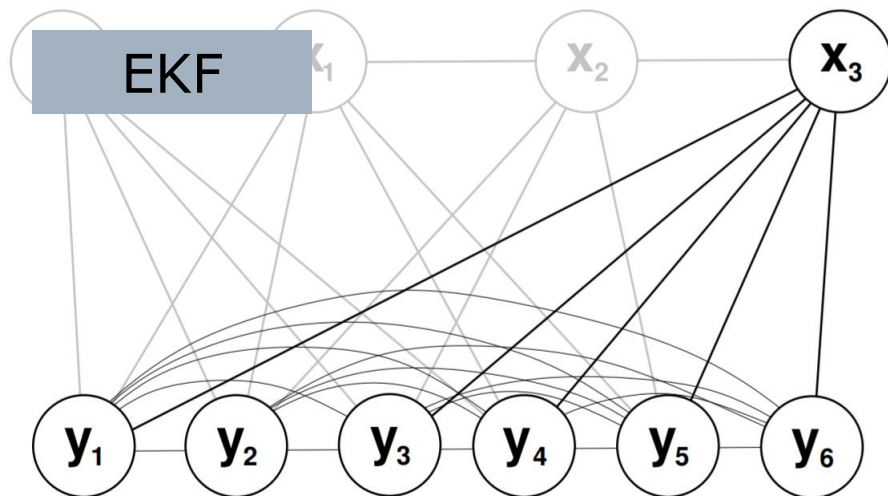
EKF-SLAM:

$$x_t = \left(\underbrace{x, y, \theta}_{\text{robot's pose}}, \underbrace{m_{1,x}, m_{1,y}, \dots, m_{n,x}, m_{n,y}}_{\text{landmark 1} \quad \text{landmark n}} \right)^T$$

状态的方差矩阵（置信）：

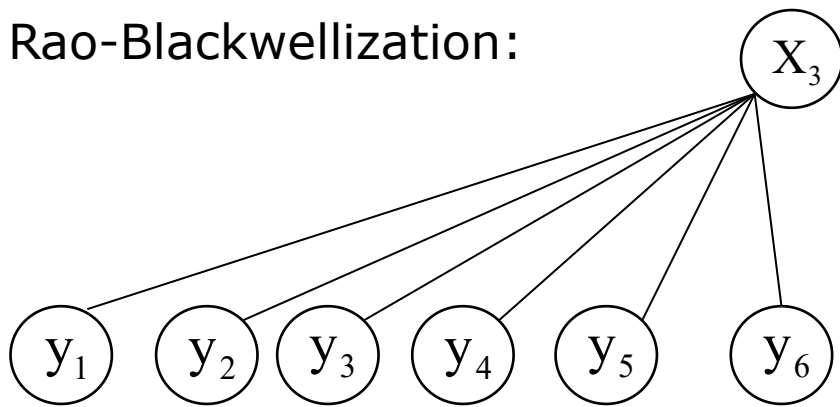
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ m_{1,x} \\ m_{1,y} \\ \vdots \\ m_{n,x} \\ m_{n,y} \end{pmatrix}}_{\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{x\theta} & \sigma_{xm_{1,x}} & \sigma_{xm_{1,y}} & \dots & \sigma_{xm_{n,x}} & \sigma_{xm_{n,y}} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{y\theta} & \sigma_{ym_{1,x}} & \sigma_{ym_{1,y}} & \dots & \sigma_{ym_{n,x}} & \sigma_{ym_{n,y}} \\ \sigma_{\theta x} & \sigma_{\theta y} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta m_{1,x}} & \sigma_{\theta m_{1,y}} & \dots & \sigma_{\theta m_{n,x}} & \sigma_{\theta m_{n,y}} \\ \sigma_{m_{1,x}x} & \sigma_{m_{1,x}y} & \sigma_{\theta} & \sigma_{m_{1,x}m_{1,x}} & \sigma_{m_{1,x}m_{1,y}} & \dots & \sigma_{m_{1,x}m_{n,x}} & \sigma_{m_{1,x}m_{n,y}} \\ \sigma_{m_{1,y}x} & \sigma_{m_{1,y}y} & \sigma_{\theta} & \sigma_{m_{1,y}m_{1,x}} & \sigma_{m_{1,y}m_{1,y}} & \dots & \sigma_{m_{1,y}m_{n,x}} & \sigma_{m_{1,y}m_{n,y}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m_{n,x}x} & \sigma_{m_{n,x}y} & \sigma_{\theta} & \sigma_{m_{n,x}m_{1,x}} & \sigma_{m_{n,x}m_{1,y}} & \dots & \sigma_{m_{n,x}m_{n,x}} & \sigma_{m_{n,x}m_{n,y}} \\ \sigma_{m_{n,y}x} & \sigma_{m_{n,y}y} & \sigma_{\theta} & \sigma_{m_{n,y}m_{1,x}} & \sigma_{m_{n,y}m_{1,y}} & \dots & \sigma_{m_{n,y}m_{n,x}} & \sigma_{m_{n,y}m_{n,y}} \end{pmatrix}}_{\Sigma}$$

粒子滤波器



来个假设：
每个标志点都是相互独立

Rao-Blackwellization:

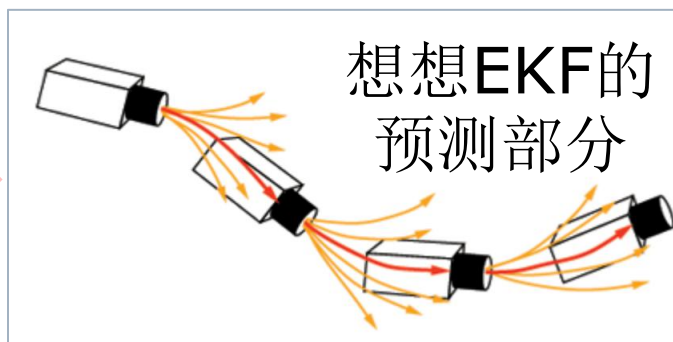
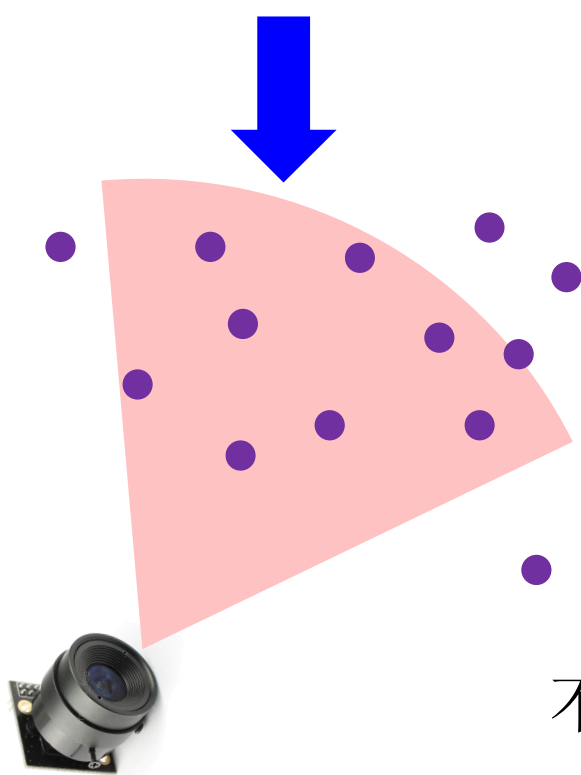


$$P(y_{1:M} | x_{0:t}, z_{1:t}) \\ = \prod_{i=1}^M p(y_i | x_{0:t}, z_{1:t})$$

粒子滤波器作用

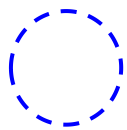
$$p(x_{1:t}, m \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) =$$

$$p(m \mid x_{1:t}, z_{1:t}) p(x_{1:t} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1})$$



不要联合状态，直接用估计 $x_t = (x, y, \theta)$

粒子滤波器

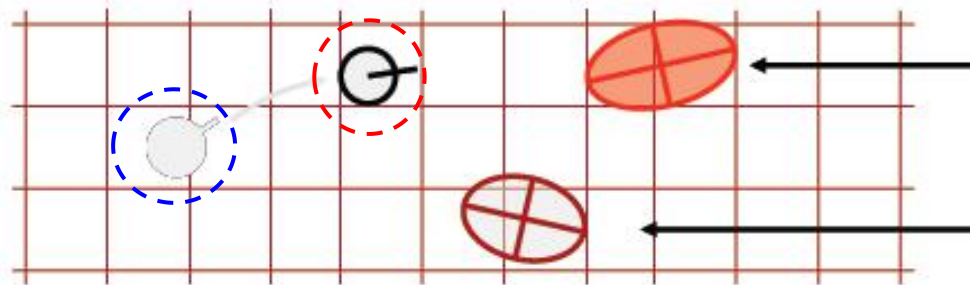


起始撒点



运动模型 (预测部分)

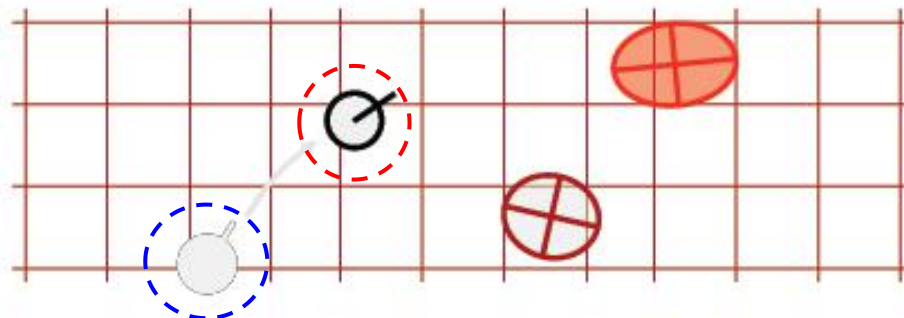
Particle #1



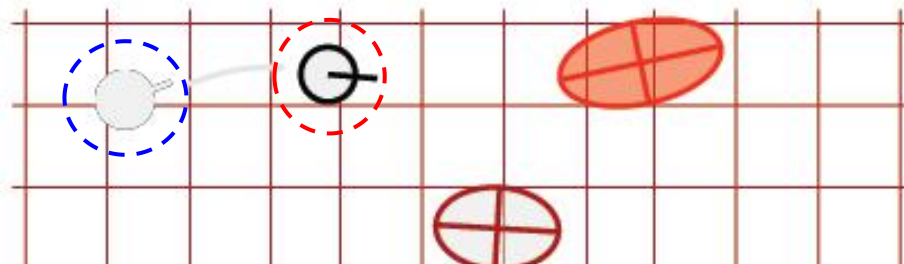
Landmark 1
2x2 EKF

Landmark 2
2x2 EKF

Particle #2



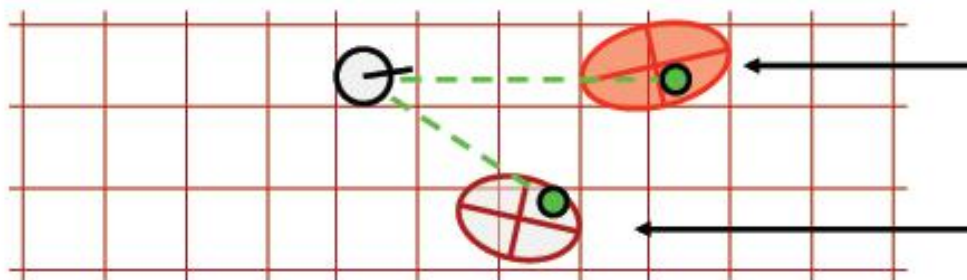
Particle #3



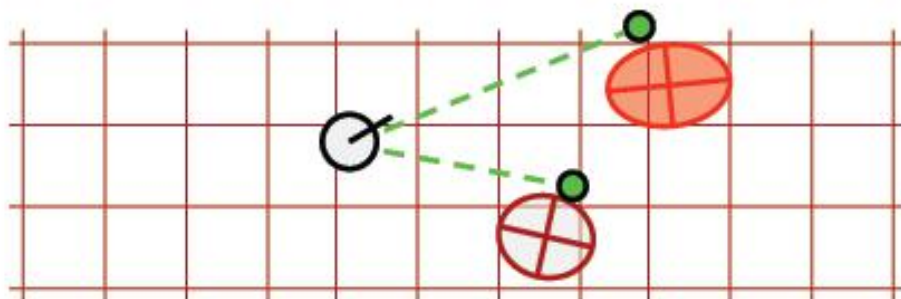
粒子滤波器

获取观测：

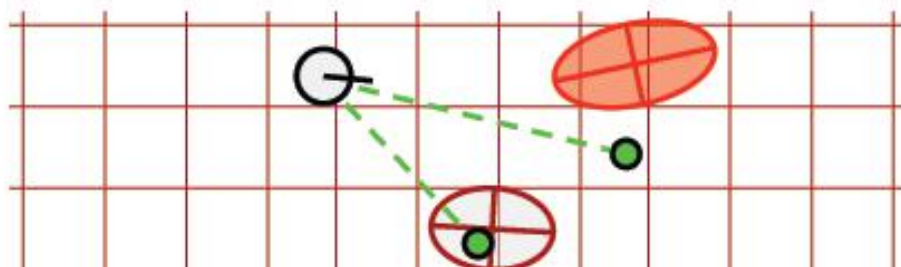
Particle #1



Particle #2

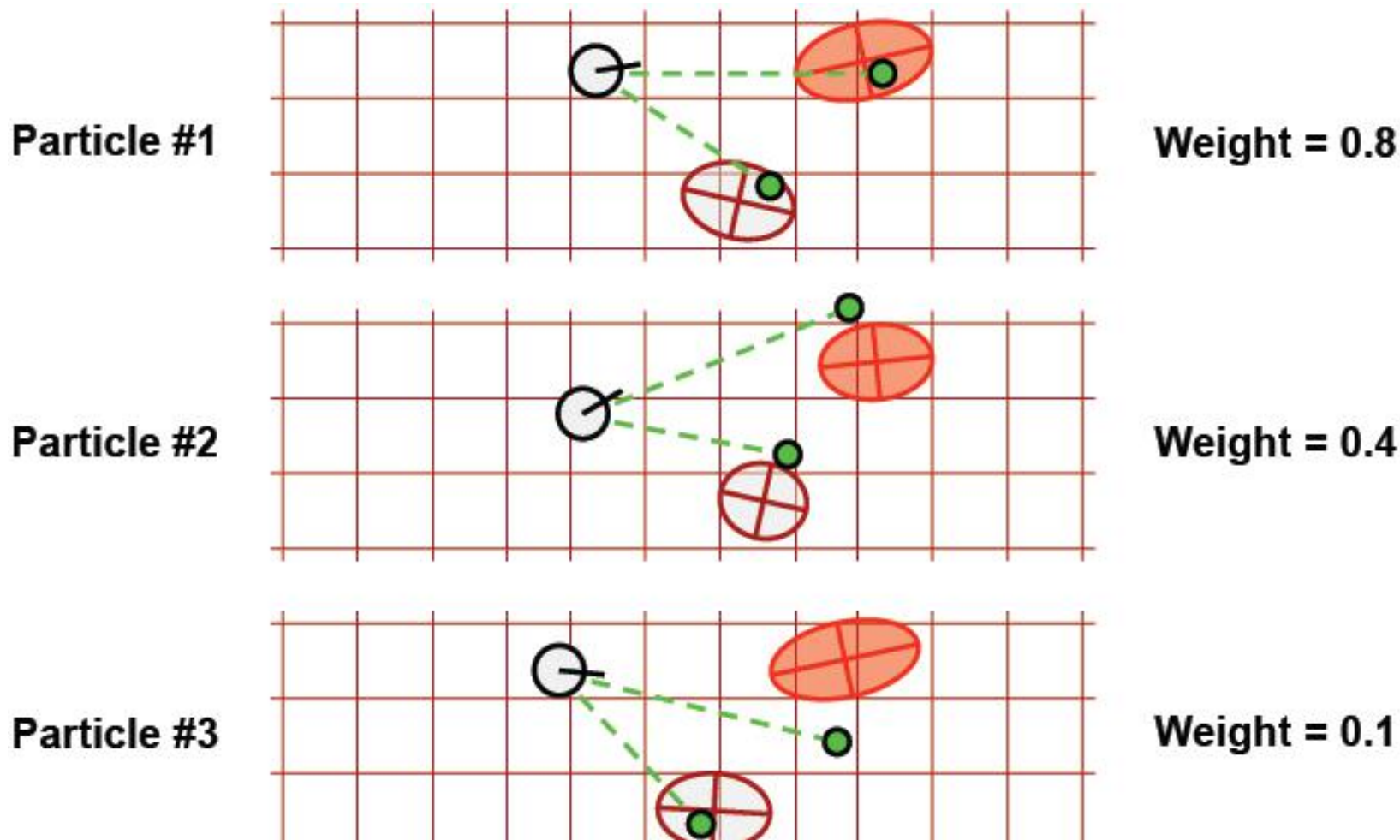


Particle #3

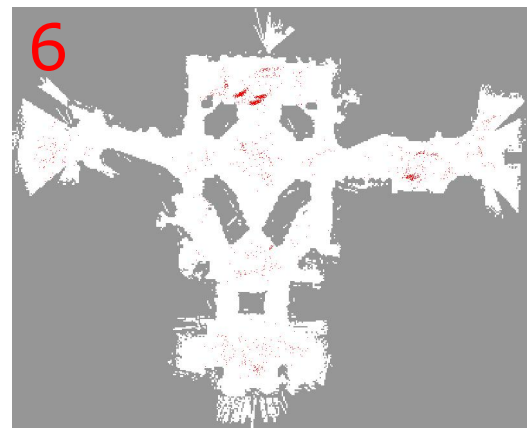
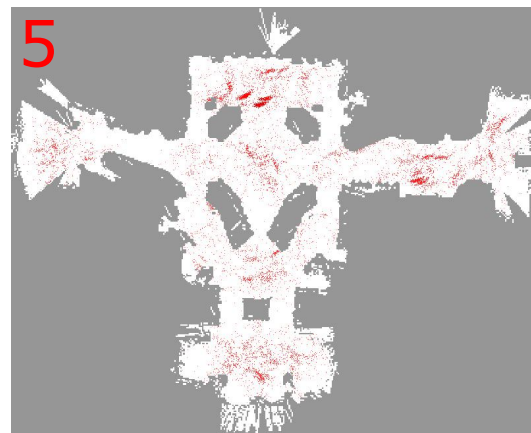
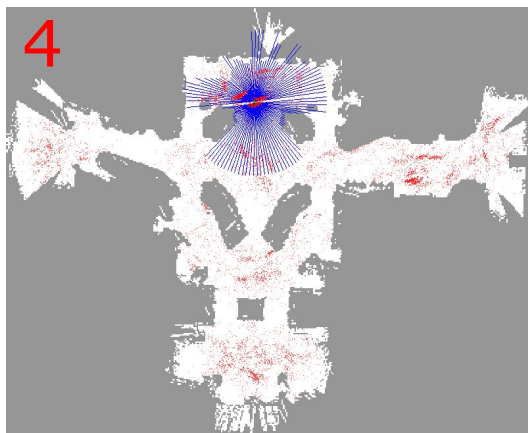
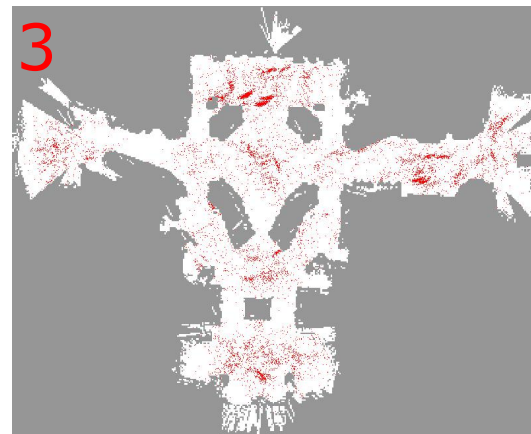
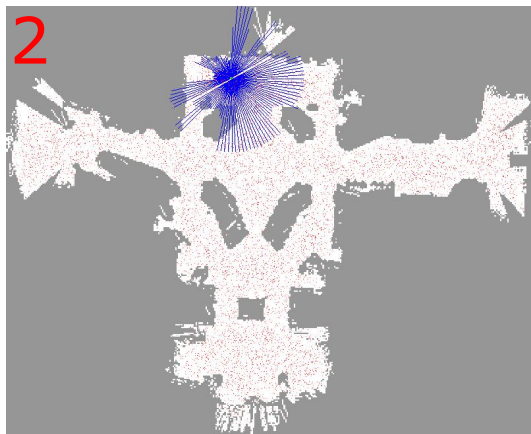
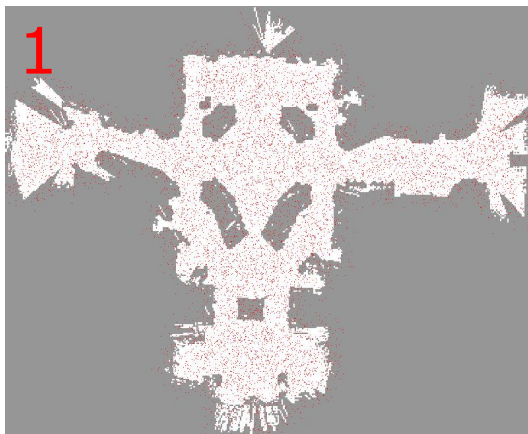


粒子滤波器

基于观测更新权重，进而更新每个标志的不确定性：

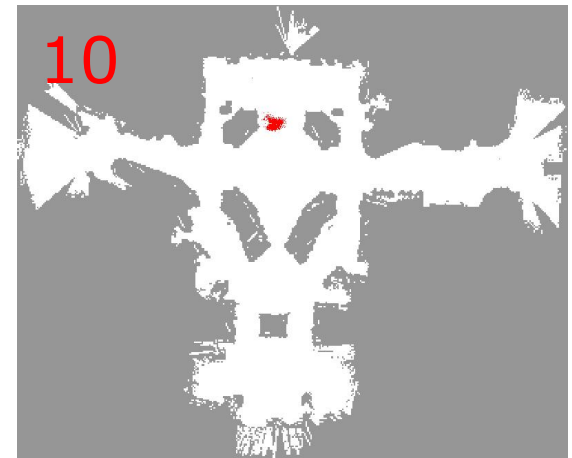
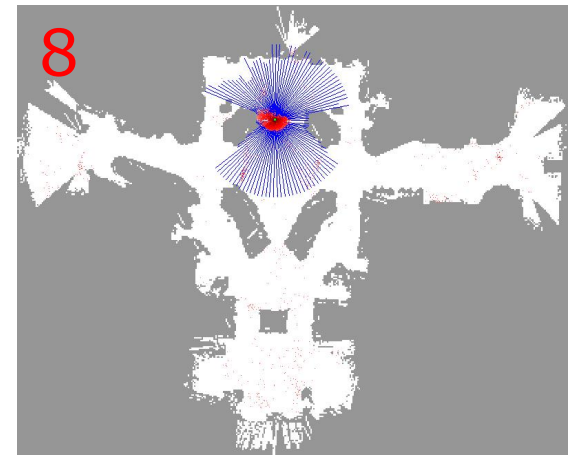


粒子滤波器



粒子滤波器

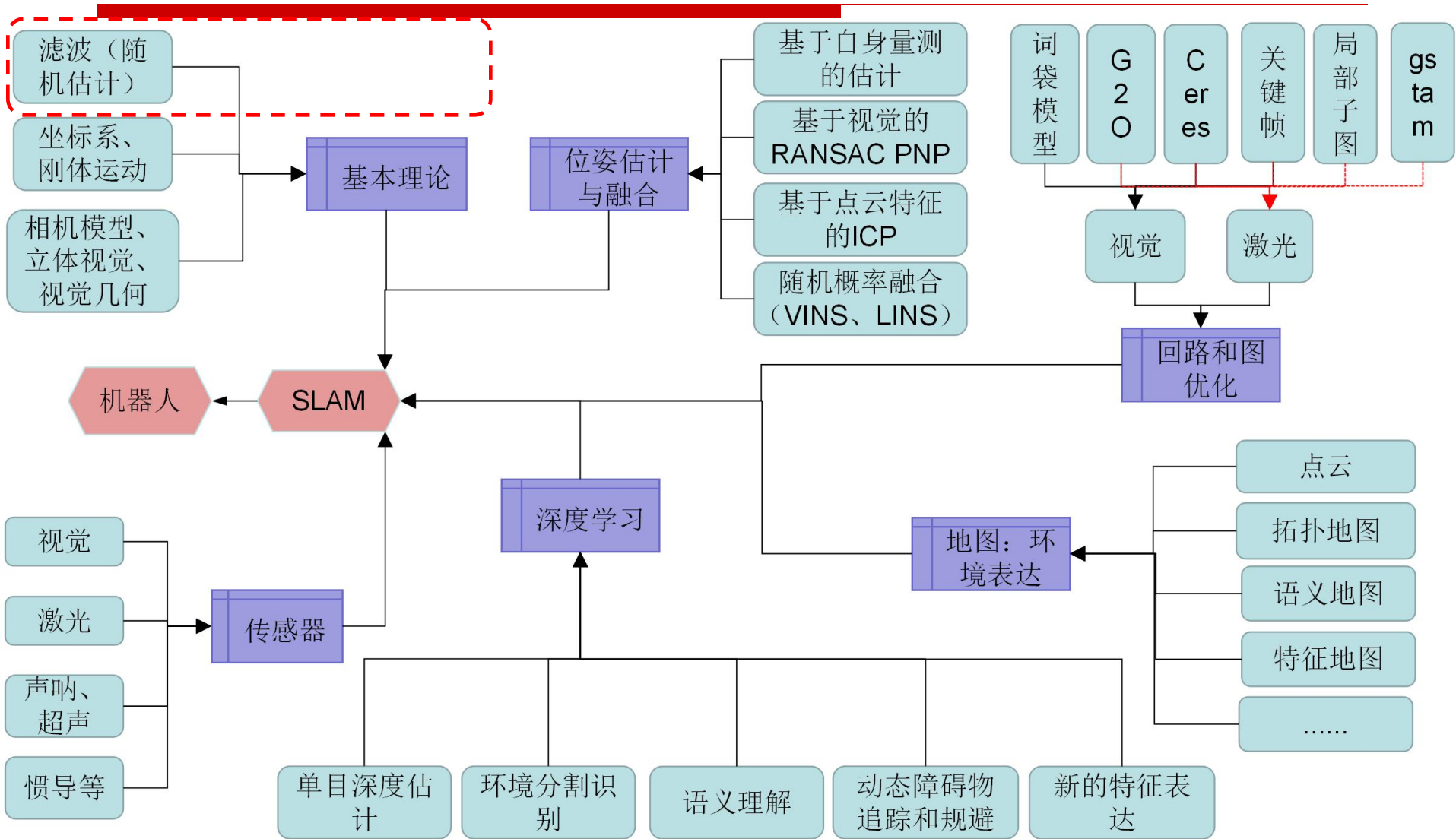
运动模型：预测
观测：更新



提纲

- 随机状态和估计
- 卡尔曼滤波器
- 扩展卡尔曼滤波器和SLAM
- 粒子滤波器和SLAM
- 实例：基于卡尔曼滤波器的SLAM实例

总结



Q&A