Devoir surveillé de mathématiques

Janvier 2025

Contents

Partie I

Énoncés

1. Exercice 1

1.1. Question 1

Montrer que $3^{126} + 5^{126}$ est divisible par 13.

1.2. Question 2

Quel est le reste de la division euclidienne de 1357^{2020} par 5 ?

1.3. Question 3

Montrer que la somme de 3 cubes consécutifs est divisible par 9.

1.4. Question 4

Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 - 2x + 16 \equiv 0 \pmod 5 \quad \text{et} \quad 7x \equiv 8 \pmod 9.$$

2. Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm (ou 1 grand carreau).

2.1. Question 1

On considère les deux nombres complexes z_A de module 4 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ et $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$.

a) Déterminer la forme algébrique du nombre z_A.

b) Déterminer la forme trigonométrique du nombre z_B.

c) Placer dans le plan les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.

2.2. Question 2

On considère les deux nombres complexes $z_C = -4$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

a) Calculer le module et un argument de chacun de ces deux nombres complexes.

b) Placer dans le plan complexe les points C et D d'affixes respectives z_C et z_D.

2.3. Question 3

Démontrer que le triangle BDA est rectangle.

2.4. Question 4

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Exercice 3

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

3.1. Question 1

Donner la dimension de ces deux matrices.

3.2. Question 2

Calculer, s'ils existent, les produits suivants : AB, BA, A^2, B^2.

Partie II

Corrections

1. Exercice 1

1.1. Question 1

L'astuce est de déterminer une valeur a (pas trop grande) telle que $3^a \equiv 1[13]$ et une valeur b telle que $5^b \equiv 1[13]$ car cela va nous permettre de simplifier grandement l'équation. Pour ce faire, on peut utiliser la calculatrice afin de calculer cette valeur de a. En partant de 0, on trouve:

n	0	1	2	3	4
$3^n[13]$	1	3	9	1	3
$5^n[13]$	1	5	12	8	1

On peut s'arrêter et constater que $3^3 \equiv 1[13]$ et $5^4 \equiv 1[13]$. En sachant que $126 = 42 \times 3 + 0$ et $126 = 31 \times 4 + 2$, on peut simplifier l'équation:

$$3^{126} + 5^{126} \equiv 3^{42\times 3} + 5^{31\times 4} + 2 \equiv (3^3)^{42} + (5^4)^{31} \times 5^2 \equiv 1^{42} + 1^{31} \times 5^2 \equiv 25 + 1 \equiv 0[13]$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque: Il est inutile d'utiliser le fait que $3^0 \equiv 1[13]$ ou $5^0 \equiv 1[13]$ (dans le tableau) car $126 = 0 \times$ (n'importe quel nombre) $+ 126$ donc on reviendrait à la même chose.

1.2. Question 2

Appliquons la même méthode qu'à la question 1:

n	0	1	2	3	4
$1357^n[5]$	1	2	4	3	1

On trouve donc que $1357^4 \equiv 1[5]$. On alors que, puisque $2020 = 505 \times 4$:

$$1357^{2020} \equiv (1357^4)^{505} \equiv 1^{505} \equiv 1[5]$$

Donc le reste de la division euclidienne de 1357^{2020} par 5 est 1.

Remarque: La phrase de conclusion est toujours importante lorsqu'on a un exercice de ce genre. Par exemple, si on trouve à la fin $3 \equiv -1[2]$, il ne faut pas dire que le reste est -1 mais bien 1 car le reste ne peut pas être négatif.

1.3. Question 3

Posons n un entier relatif. Nous devons montrer que $N = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 0[9]$. Nous allons procéder par disjonction de cas en faisant prendre à n toutes ses valeurs modulo 9:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$N[9]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Détaillons le calcul pour $n \equiv 1[9]$:

$$N \equiv (1-1)^3 + 1^3 + (1+1)^3 \equiv 1 + 8 \equiv 9 \equiv 0[9]$$

Puisque dans tous les cas, $N \equiv 0[9]$, nous avons bien montré que la somme de trois cubes est toujours divisible par 9.

Remarque: Ici, on aurait aussi pu poser $N = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$. Cependant, bien que dans notre cas c'était simplie, il vaut mieux tenter de simplifier au maximum pour faciliter les calculs.

1.4. Question 4

Pour résoudre les équations, procédons avec des tableaux par disjonction des cas pour chaque équation.

- Résolution de $x^2 - 2x + 16 \equiv 0 \pmod 5$**

x	0	1	2	3	4
$x^2 - 2x + 16 \pmod 5$	$16 \equiv 1$	$15 \equiv 0$	$14 \equiv 4$	$13 \equiv 3$	$12 \equiv 2$

La seule solution est donc $x \equiv 1 \pmod 5$. L'ensemble solution est $x \in \{n, n = 5k+1, k \in \mathbb{Z}\}$.

- Résolution de $7x \equiv 8 \pmod 9$**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$7x \pmod 9$	0	7	5	3	1	8	6	4	2

Ainsi, la seule solution est $x \equiv 5 \pmod 9$. L'ensemble solution est $x \in \{n, n = 9k+5, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Exercice 2

2.1. Question 1

Pour cet exercice, il est nécessaire de maîtriser la notion de forme algébrique et forme trigonométrique d'un nombre complexe.

La forme algébrique d'un nombre complexe est $z = a + ib$ où a, b sont des réels

La forme trigonométrique d'un nombre complexe se fait dans un système de coordonnées polaires (un cercle avec un angle). On note θ l'argument et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ le module du complexe. On a alors $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$

a) On sait que le module z_A est 4 et son argument est $\frac{\pi}{3}$. Ainsi, sa forme algébrique est:

$$z_A = |z_A|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2 + 2i\sqrt{3}}$$

b) On sait que $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$. On peut d'abord calculer son module $|z_B| = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$. Il faut maintenant calculer l'argument de z_B, c'est le plus compliqué car il faut avoir une bonne représentation du cercle trigonométrique en tête (ou sur un papier) afin de ne pas se tromper. On peut se représenter ces valeurs sous la forme d'un système

$$\left|\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\Re(z_B)}{|z_B|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\Im(z_B)}{|z_B|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Afin de résoudre ce système, il faut regarder dans le cercle trigonométrique (Voir l'annexe 1). On observe sur l'absisse (horizontale) que $\cos\theta = \frac{1}{2}$ veut dire que $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Cependant en regardant l'ordonnée (verticale), puisque $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors la bonne solution est $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Remarque: Normalement, il faudrait rajouter $[2\pi]$ pour signifier qu'il y a une infinité de valeurs possible de θ. Cependant, lorsqu'on calcule la forme trigonométrique, il faut mettre la valeur la plus simple donc juste $-\frac{\pi}{3}$ ici.

Ainsi, on peut donner la forme trigonométrique:

$$z_B = |z_B|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta) = \boxed{4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

c) Voir l'Annexe 2

Pour placer ces points, il faut tracer un cercle de rayon $|z_A| = |z_B|$ puis mesurer les angles pour mettre le point sur le cercle au niveau de cet angle.

2.2. Question 2

a) Calculons d'abord les modules:

$$|z_C| = \sqrt{(-4)^2} = 4 \qquad \text{et} \qquad |z_D| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Calculons ensuite leurs arguments:

Pour z_C:

$$\left| \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\Re(z_C)}{|z_C|} = \dfrac{-4}{4} = -1 \\ \sin\theta = \dfrac{\Im(z_C)}{|z_C|} = -\dfrac{0}{4} = 0 \end{array} \right\} \text{On trouve } \theta = \pi[2\pi]$$

Pour z_D:

$$\left| \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\Re(z_D)}{|z_D|} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\Im(z_D)}{|z_D|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \text{On trouve } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

b) Voir l'Annexe 2

2.3. Question 3

Afin de prouver que le triangle BDA est rectangle, on peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. En regardant sur le plan complexe de l'Annexe 2, on remarque que le triangle semble rectangle en D. Nous devons donc montrer que:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \qquad (1)$$

La difficulté est de calculer les longueurs de ces segments. Il faut remarquer que faire la différence de deux complexes nous donne **le vecteur déplacement permettant de passer de l'un à l'autre** (c'est comme calculer la distance entre deux points dans un espace à deux dimensions normales). Nous avons alors trois valeurs à calculer :

- Pour le segment AB :

$$\begin{aligned} z_B - z_A &= (2 - 2i\sqrt{3}) - (2 + 2i\sqrt{3}) \\ &= -4i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La norme au carré est donnée par :

$$|z_B - z_A|^2 = |-4i\sqrt{3}|^2 = (-4\sqrt{3})^2 = 48.$$

- Pour le segment AD :

$$\begin{aligned} z_D - z_A &= (-1 + i\sqrt{3}) - (2 + 2i\sqrt{3}) \\ &= -3 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La norme au carré est donnée par :

$$|z_D - z_A|^2 = |-3 - i\sqrt{3}|^2 = (-3)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12.$$

- Pour le segment DB :

$$\begin{aligned} z_B - z_D &= (2 - 2i\sqrt{3}) - (-1 + i\sqrt{3}) \\ &= 3 - 3i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La norme au carré est donnée par :

$$|z_B - z_D|^2 = |3 - 3i\sqrt{3}|^2 = (3)^2 + (-3\sqrt{3})^2 = 9 + 27 = 36.$$

Il suffit ensuite de vérifier si l'égalité (1) est bien respectée:
D'une part :

$$|z_D - z_A|^2 + |z_B - z_D|^2 = 12 + 36 = 48.$$

D'autre part :

$$|z_B - z_A|^2 = 48.$$

L'égalité est vérifiée, donc le triangle BDA est bien rectangle.

2.4. Question 4

Pour prouver que le triangle ABC est équilatéral, il faut comparer les valeurs AB, AC, BC.

- Pour le segment AB, nous avions déjà calculé $AB = 4\sqrt{3}$.
- Pour le segment AC :

$$\begin{aligned} z_C - z_A &= (-4) - (2 + 2i\sqrt{3}) \\ &= -6 - 2i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La norme est donnée par :

$$|z_C - z_A| = \sqrt{(-6)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

- Pour le segment CB :

$$\begin{aligned} z_C - z_B &= (-4) - (2 - 2i\sqrt{3}) \\ &= -6 + 2i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La norme est donnée par :

$$|z_C - z_B| = \sqrt{(-6)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

On constate que $AB = AC = CB$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Exercice 3

3.1. Question 1

La matrice A est de dimension 2×3, car elle a 2 lignes et 3 colonnes.
La matrice B est de dimension 4×2, car elle a 4 lignes et 2 colonnes.

3.2. Question 2

a) Le produit AB n'est pas défini, car le nombre de colonnes de A (3) ne correspond pas au nombre de lignes de B (4).

b) Le produit BA est possible car B a le même nombre de colonnes que A a de lignes.

c) La matrice A^2 n'est pas définie car A n'a pas le même nombre de colonnes que de lignes

d) La matrice B^2 n'est pas définie car B n'a pas le même nombre de colonnes que de lignes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

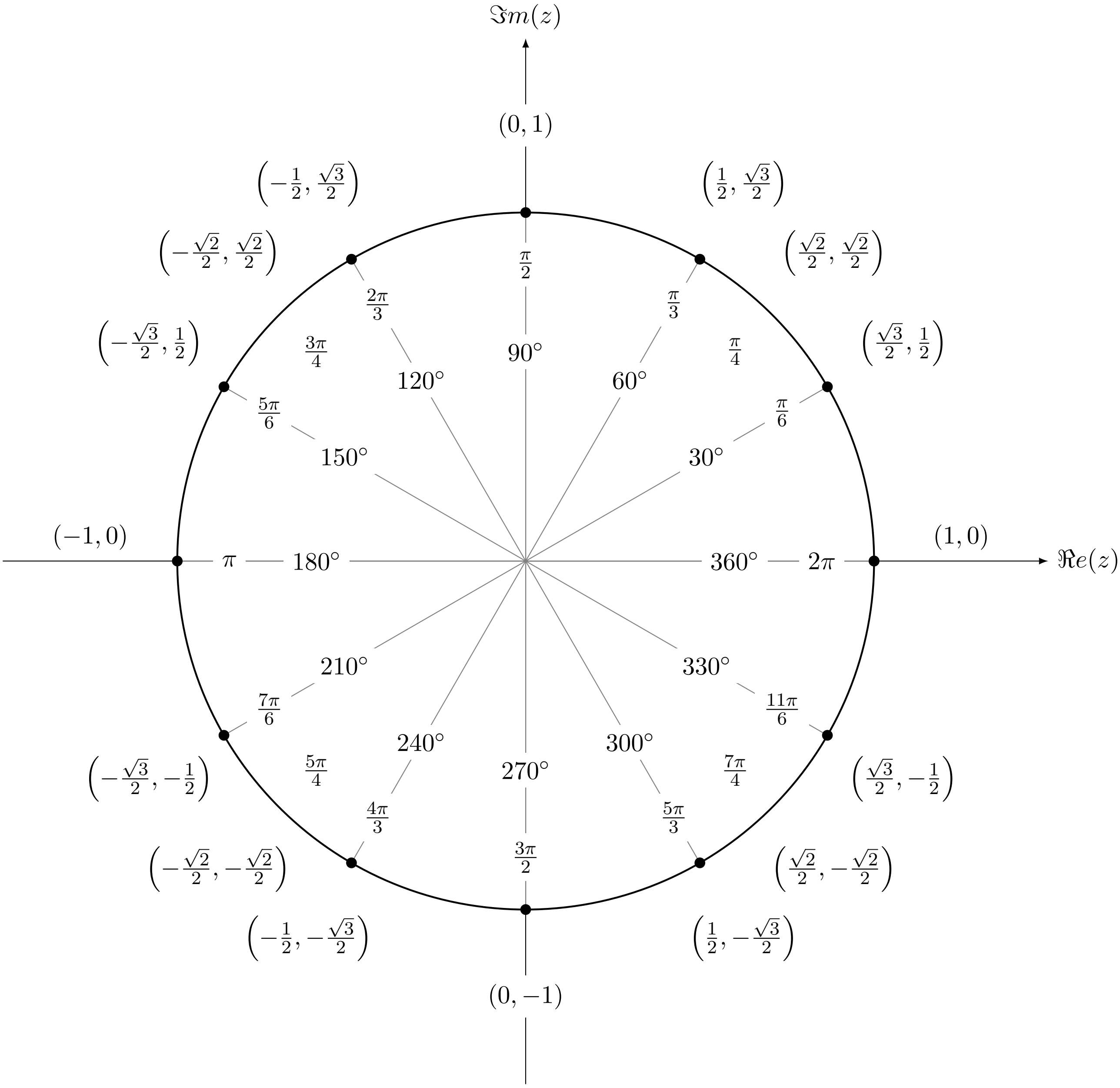
Calculons donc BA:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 21 & 24 & 27 \\ 29 & 37 & 45 \\ 44 & 61 & 78 \end{bmatrix} \end{array}$$

Partie III

Annexes

4. Annexe 1 - Cercle Trigonométrique



5. Annexe 2 - Plan complexe