因为是球对称的球体，所以其线元应该是Schwarzschild的

$$\mathrm{d}s^2 = -(1-\frac{2m(r)}{r})c^2\mathrm{d}t^2 + (1-\frac{2m}{r})^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) \tag{1}$$

使用与时间轴正交的超曲面，直接取后面的空间部分。这样一个实际上这个球体的物理的体积应该是

$$\begin{aligned} V(R,M) &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m(r,M,R)}{r}}} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi & (2)\\ &= 4\pi^2 \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m(r)}{r}}} r^2\mathrm{d}r & (3) \end{aligned}$$

其中$m(r,M)$是质量分布函数，M是球体总质量，R是球体的半径，这个半径是指的在Schwarzschild度规中的坐标值。

用一个特殊的均匀分布

$$m(r) = \frac{4/3\pi r^3}{4/3\pi R^3} = (\frac{r}{R})^3 M \tag{4}$$

可以对体积积分进行简化

$$V = 4\pi^2 \int \frac{1}{\sqrt{1-2M\frac{r^2}{R^3}}} r^2\mathrm{d}r \tag{5}$$

最后球体的密度可以通过$\rho = M/V$来计算。

密度随R或者M变的曲线可以绘制出了。

下图是球体的半径R一定的时候，密度随着质量M的变化曲线。

现在可以看到，随着质量增加，密度先是增加，后来减小，有一个峰值。也就是说，如果现在有个区域半径为1，我们不停的往里面添加尘埃，并且使其分布满足上面提到的特定的均匀质量分布，这样这个尘埃团的密度先增加，直到质量达到0.427的时候，密度达到最大值0.816，之后密度反而开始减小，最后直到形成黑洞前，密度减小到$2/\pi$。图中可以看到，在$M=0.5$的地方，斜率可能是负无穷。经过计算得知，这个猜想是正确的。也就是说，如果趋势不变，在$M = 0.5$这个点，球体的密度将垂直降到0！很奇怪。

进一步想，密度降下来，按照古旧的观点来看，只能是体积减小了，因为我们一直往其中添加物质。从体积的表达式中也可以看出来。那么形成黑洞的时候，体积确实变成了无穷大？

这点有点奇怪。如果体积变成了无穷大，那么很多定律都变得不合理。我们是否可以把部分效应转移到质量上去而使得体积不出现奇性么？甚至体积变为零最好了。因为这样就可以跟Hollowgraph吻合起来了。

密度的表达式写完整应该是这样的：

$$\rho(M,R) = \frac{-2R\sqrt{M(-2MR^2+R^3)}+\sqrt{2}R^3\arcsin(\sqrt{2\frac{M}{R}})}{8(\frac{M}{R})^{3/2}} \tag{6}$$

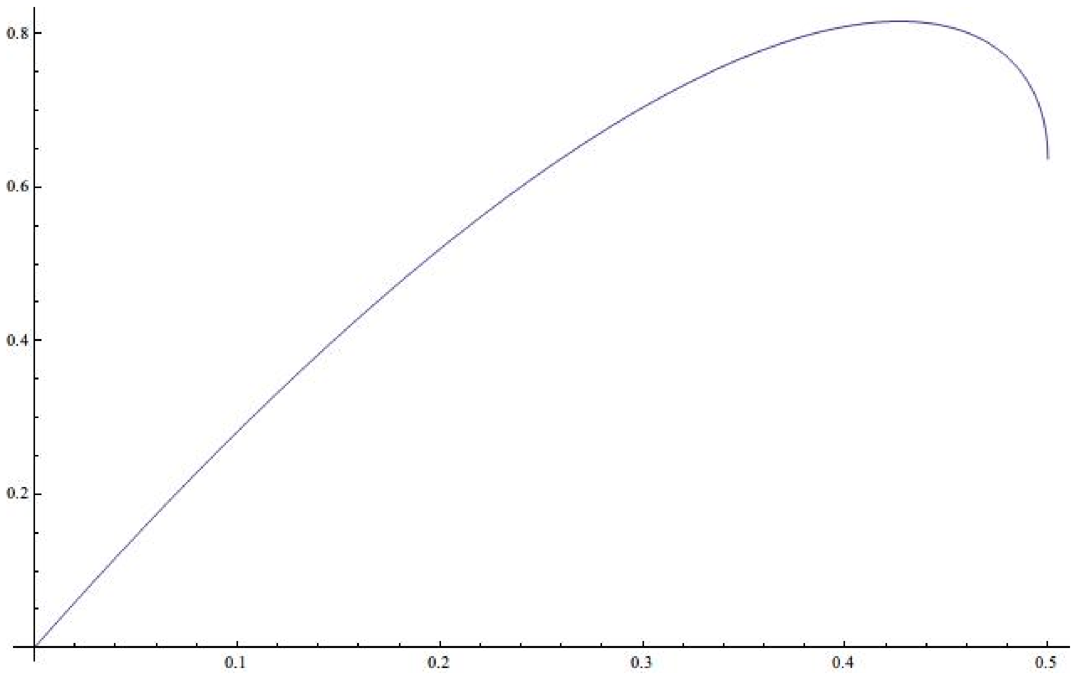

Figure 1: 球体半径为1，密度随质量的变化。

这里面的M是引力质量，因为这个质量要用来对时空的度规产生影响，从而顺便改变体积积分。这个是很麻烦的，因为改动之后还有保持质量、密度和体积的表达式的自洽性。如果引力理论不是像Einstein那样使用等效原理，而是对质量这个概念作了手脚，比如引力质量换成场的耦合系数之类，就可以实现引力质量随着引力场强增加而减小的效果。具体如何实现，可以拿Scalar Tensor理论来看看。不过改动强引力场的部分会对宇宙学造成比较大的影响，因为一般要求早期宇宙的引力理论不要与Einstein的差别太大，至少造成的可观测效果不要有太大偏离。

下图是球体的质量M一定的时候，密度随着半径R的变化曲线。

用来补足上面的分析。现有一个质量为1的尘埃球，当R从3开始越来越小的时候，密度先变大后变小。峰值出现在$R = 2.062$的地方，最大密度为$\rho = 0.178$。当$R = 2$时，密度为$\rho = 2/\pi$。如果半径小于2，就会成为黑洞了。与上面的讨论质量的情况吻合。

当然，如果想比较完整的了解一下这个函数的特性，可以做出3D视图

最后，其实还有个值得思考的问题，上面这个讨论对于不同的质量分布，是不是都适合的？比如换另一种均匀质量分布的表达式？

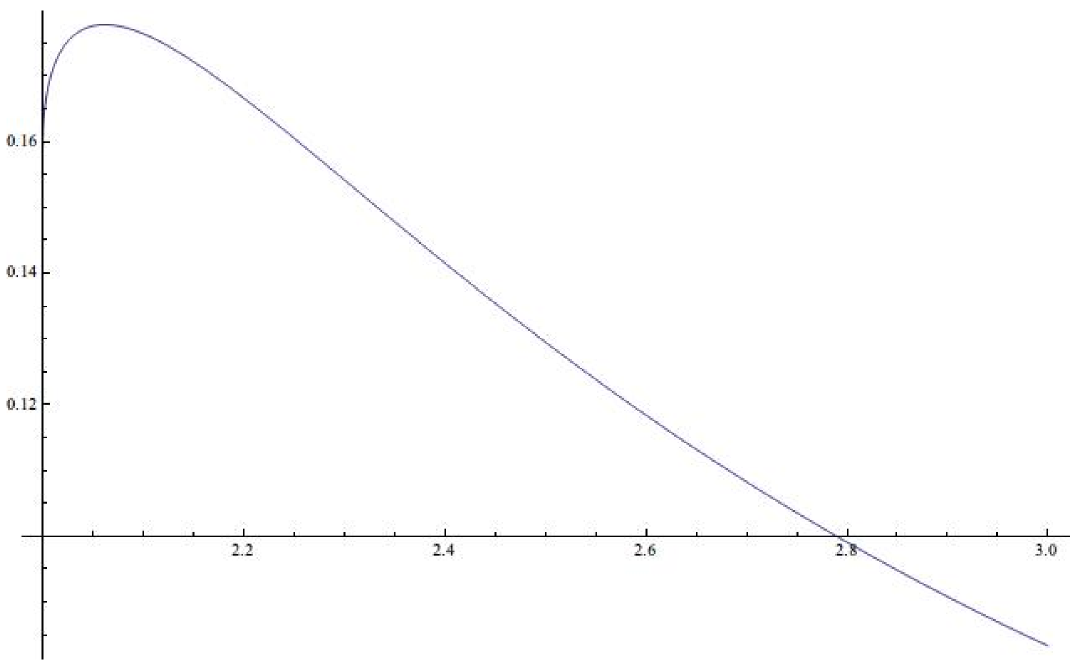

Figure 2: 球体质量为1，密度随半径的变化。

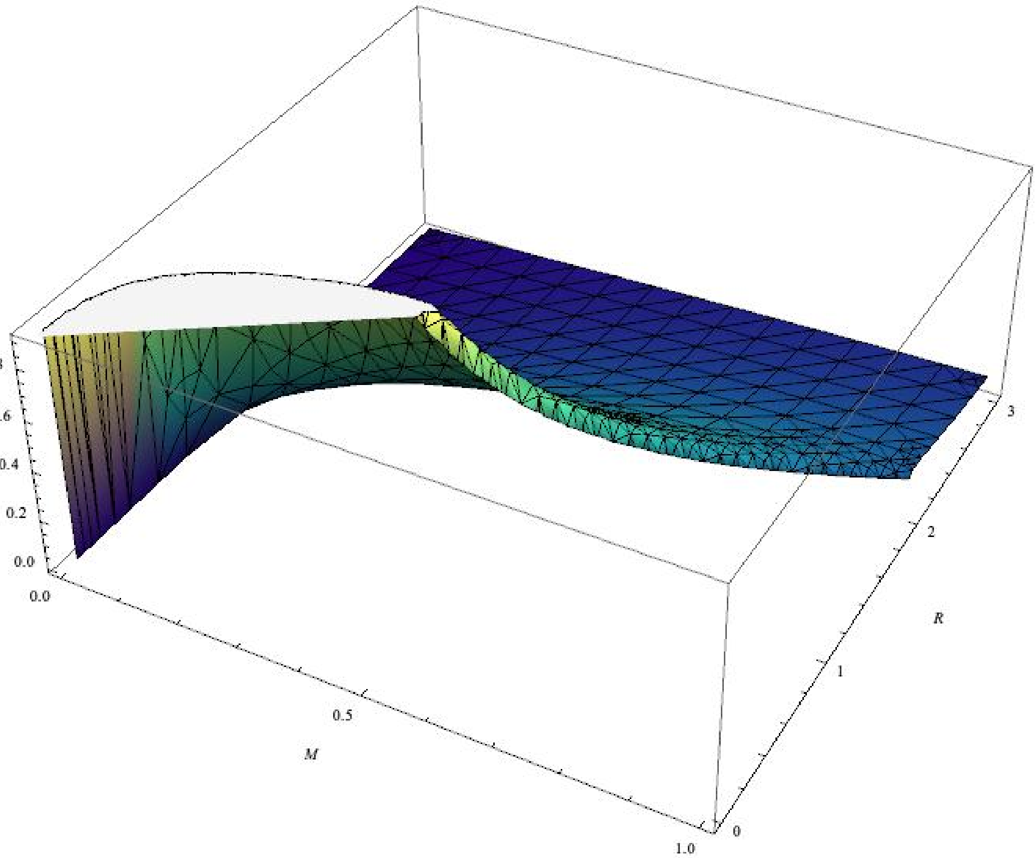

Figure 3: 球体密度随质量和半径的变化。