【笔记】3Blue1Brown 线性代数的本质

00 – 序言

对于这个科目而言，你能做的是形成正确的**几何直观**

01 – 向量究竟是什么

> 引入一些数作为坐标是一种鲁莽的行为。——赫尔曼 · 外尔

1. 三种看待向量的观点

物理专业的学生	空间中的箭头（长度和方向）
计算机专业的学生	有序的数字列表
数学家	任何东西（以上两个观点的碰撞）

2. 思考向量的特定方式

线性代数围绕两种基本运算：**向量加法**和**向量数乘**

	物理观点	列表观点
向量的加法	运动	对应项相加
向量的数乘	缩放（标量的作用就是缩放）	分量与标量相乘

02 – 线性组合 张成的空间与基

eg. $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 3\hat{i} + (-2)\hat{j}$

基向量： $\hat{i}, \hat{j}$ 被称作**基向量**，是**缩放的对象**

$a\vec{v} + b\vec{w}$

线性组合：两个数乘向量的和被称为这两个向量的**线性组合**

$\{a\vec{v} + b\vec{w} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

张成的空间：所有可以表示为给定向量**线性组合**的向量的**集合**被称为给定向量**张成的空间**

二维

给定的二维向量	张成的空间
一般的两个二维向量	所有二维向量的集合
两个共线的向量	一条直线上的向量的集合
两个零向量	一个点

三维

给定的向量	张成的空间
一般的两个向量	过原点的平面
三个向量，第三个落在前两个所张成的平面上	平面
一般的三个向量	空间中所有的三维向量（平面的扫动）

线性相关：有多个向量，可以移除之一而不减小张成的空间，称它们是**线性相关**的

反之，所有向量都给张成的空间增加新的维度，

$$\vec{u} \neq a\vec{c} + b\vec{w}$$

称它们是**线性无关**的

向量空间的一组基（严格定义）：**向量空间的一组基**是张成该空间的一个**线性无关**的向量集

03 – 矩阵与线性变换

1.“**变换**”本质上是“**函数**”的一种花哨的说法（向量输入和向量输出）；“**变换**”暗示用“**运动**”的观点思考

2. **线性变换**：①**任意**直线→直线②原点不变（保持网格线平行且等距分布的变换）
3. 用数值描述线性变换，考虑 $\hat{i}, \hat{j}$ 的变换，可以确定任意向量的变换；一个二维线性变换仅由四个数字完全确定，即基向量的变换

4.2×2 矩阵，列理解为两个特殊向量，即变换后的 $\hat{i}, \hat{j}$

eg. 变换 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，则 $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \to 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -3 \end{bmatrix}$

一般， $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，则 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$

5. 定义矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

04 – 矩阵乘法与线性变换复合

1. **旋转**与**剪切**的“复合变换”

eg.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

其中 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 为旋转矩阵， $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为剪切矩阵， $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 为复合矩阵

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

两个矩阵相乘有着几何意义，也就是**两个线性变换相继作用**

2. 矩阵的乘法

eg.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

Where does $\hat{i}$ go?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

类似地， $\hat{j}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

一般，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

3. 矩阵乘法交换律不成立

$$M_1 M_2 \neq M_2 M_1$$

4. 矩阵乘法结合律成立

$$(AB)C = A(BC)$$

附注 1 – 三维空间中的线性变换

05 – 行列式

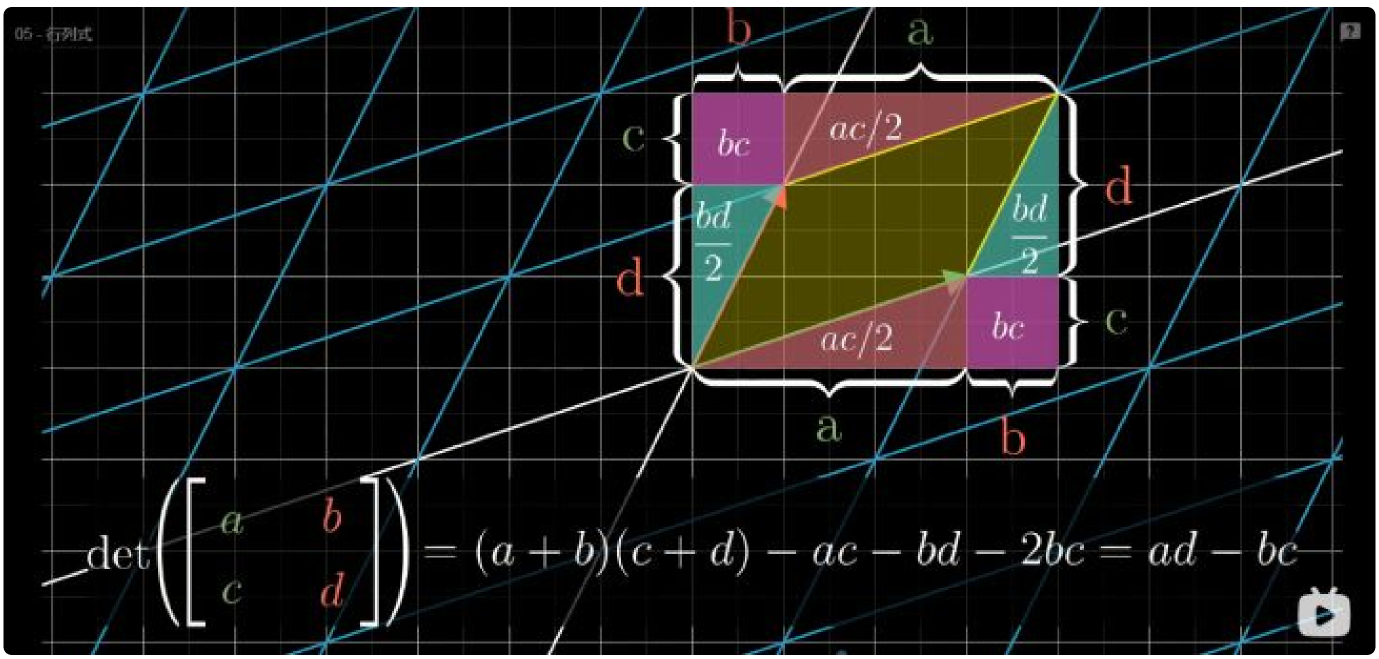
1. 行列式

行列式：线性变换**改变面积的比例**（由于网格线平行等距，对任意图形缩放比例相等）被称为这个变换的**行列式**

eg. $\det\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}\right)=6$

2. 行列式的正负与平面的取向有关；行列式为负，空间被翻转；三维翻转，右手系变为左手系
3. 行列式的计算

$$\det\left(\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right)=ad-bc$$



$$\det\left(\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{bmatrix}\right)=a\det\left(\begin{bmatrix}e & f\\h & i\end{bmatrix}\right)-b\det\left(\begin{bmatrix}d & f\\g & i\end{bmatrix}\right)+c\det\left(\begin{bmatrix}d & e\\g & h\end{bmatrix}\right)$$

06 – 逆矩阵、列空间与零空间

1. 线性方程组与向量方程

eg.

$$\begin{aligned}2x+5y+3z&=-3\\4x+0y+8z&=0\\1x+3y+0z&=2\end{aligned}\quad(1)\rightarrow\begin{bmatrix}2&5&3\\4&0&8\\1&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\\2\end{bmatrix}$$

$A\vec{x}=\vec{v}$ 其中 A 为系数矩阵， $\vec{x}$ 为包含未知数的向量， $\vec{v}$ 为常数向量

2. 几何解释

A 代表一种线性变换，向量方程意义是找到 $\vec{x}$ 经过变换后与 $\vec{v}$ 重合

3. 方程求解

当 $\det(A)\neq 0$ ， $\vec{x},\vec{v}$ 一一对应； $\vec{v}$ 经过逆变换得 $\vec{x}$

A 的逆记为 A^{-1}

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}A\vec{x}&=\vec{v}\\A^{-1}A\vec{x}&=A^{-1}\vec{v}\\\therefore\vec{x}&=A^{-1}\vec{v}\end{aligned}$$

当 $det(A)=0$ ，没有逆变换（不能“解压缩”）；**可能有解**

4. 列空间

列空间：所有可能的输出向量 $A\vec{v}$ 构成的集合被称为 A 的**列空间**

列空间就是**矩阵的列所张成的空间**

5. 秩

秩：**秩是列空间的维数**，代表着变换后空间的维数

eg. 对于 2×2 的矩阵，它的秩最大为 2

满秩：秩达到最大值时，意味着秩与列数相等，称之为**满秩**

6. 零空间（核）

零向量一定在列空间中（线性变换必须**保证原点不变**）

对一个满秩变换，唯一能在变换后落在原点的就是零向量

对一个非满秩变换，会有一系列向量变换后成为零向量

零空间（核）：**变换后落在原点**的向量的**集合**，被称为矩阵的**零空间**或**核**

对线性方程组 $A\vec{x}=\vec{v}$ ，当 $\vec{v}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 时，零空间给出的就是这个向量方程的**所有解**

7. 总结

以上就是从集合角度理解线性方程组的一个高水平概述

每个方程组都有一个线性变换与之联系

当逆变换存在时，可用逆变换求解方程组

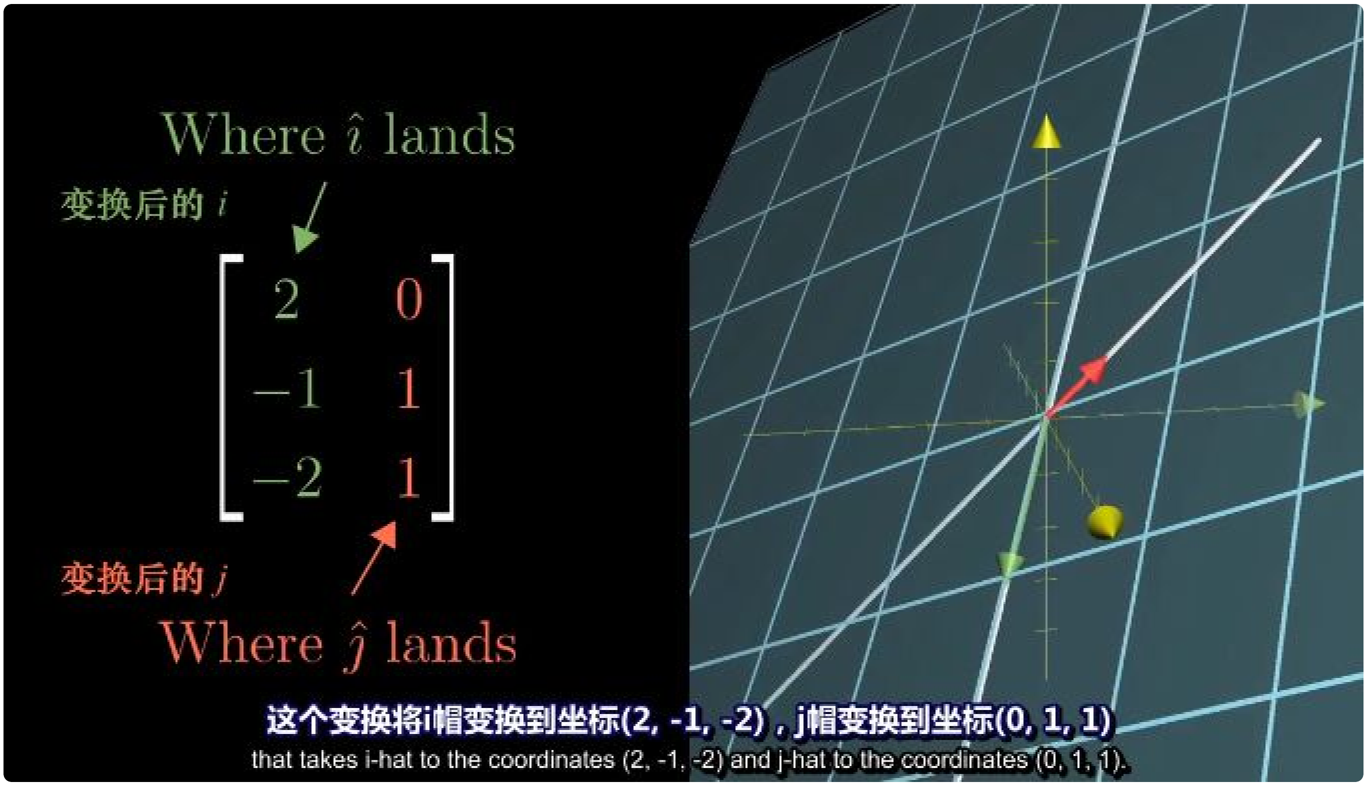
否则，列空间的概念让我们清楚什么时候存在解

零空间的概念有助于理解所有可能的解的集合是什么样的

附注 2 – 非方阵

1. 非方阵的几何含义

eg. $\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\\-2&1\end{bmatrix}$ 这个变换将 $\hat{i}$ 变换到坐标 $(2,-1,-2)$ ， $\hat{j}$ 变换到坐标 $(0,1,1)$



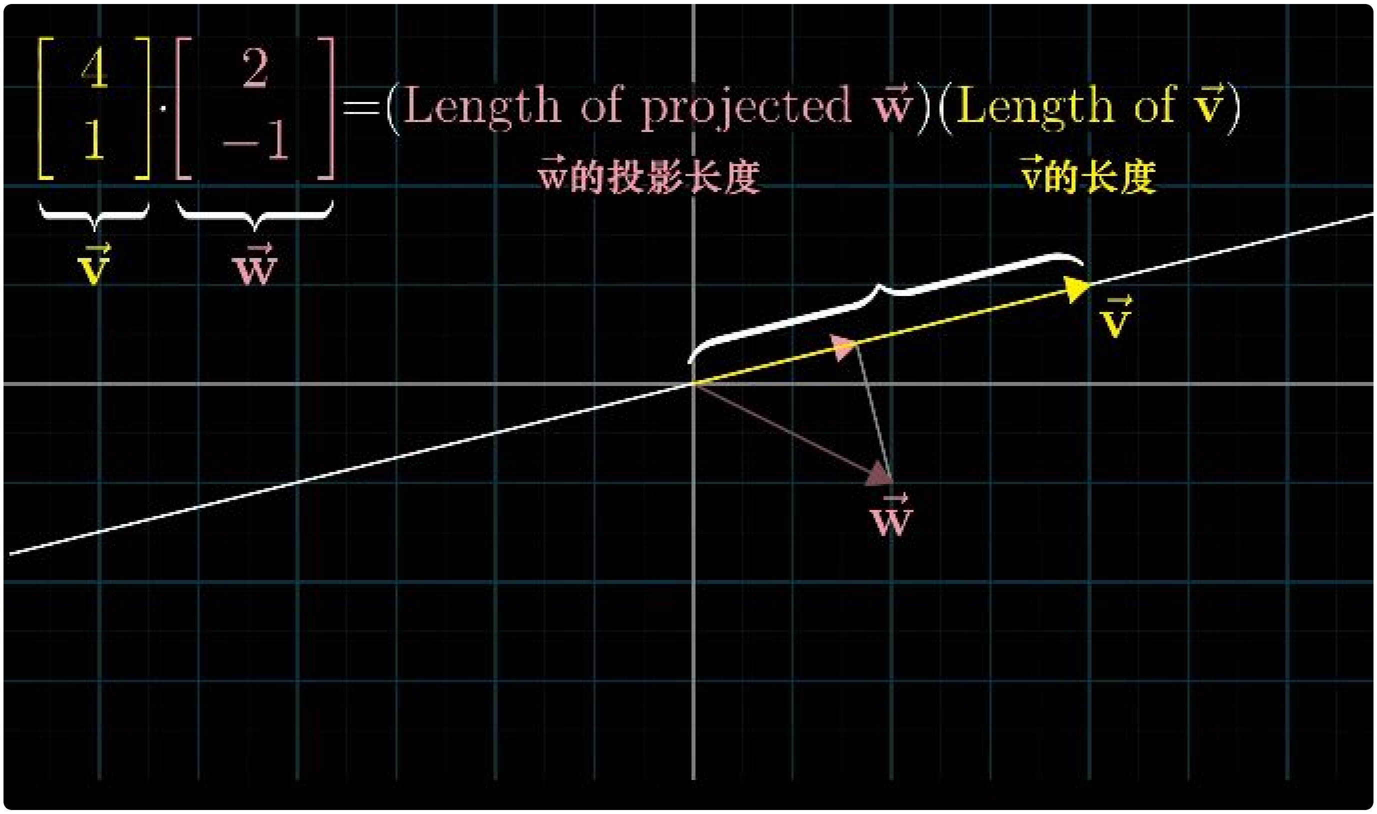
这个变换是**满秩**的；是二维向三维的映射

07 – 点积与对偶性

> 卡尔文：你知道吗，我觉得数学不是一门科学，而是一种宗教。
> 霍布斯：一种宗教?
> 卡尔文：是啊。这些公式就像奇迹一般。你取出两个数，把它们相加时，他们神奇地成为了一个全新的数！没人能说清这到底是怎么发生的。你要么完全相信，要么完全不信。

1. 标准观点

eg. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$



2. 为什么点积与顺序无关

如果 $\vec{v}, \vec{w}$ 的长度恰好相同，可以利用**对称性**（ $\vec{w}$ 向 $\vec{v}$ 上的投影等于 $\vec{v}$ 向 $\vec{w}$ 上的投影）

如果它们的长度不同，例如 $2\vec{v}, \vec{w}$

当 $\vec{w}$ 向 $2\vec{v}$ 上投影， $\vec{w}$ 的投影长度不变， $(2\vec{v}) \cdot \vec{w} = 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$

当 $2\vec{v}$ 向 $\vec{w}$ 上投影， $2\vec{v}$ 的投影长度变为两倍， $(2\vec{v}) \cdot \vec{w} = 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$

即使对称性被破坏，两种理解下，缩放向量对点积结果的影响是相同的

3. 点积和投影的联系：**对偶性**

多维空间到一维空间（数轴）的线性变换

eg. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$ 为变换（看作**倾倒的向量**）， $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ 为向量

设一数轴的单位向量为 $\hat{u}$

$\hat{i}$ 向 $\hat{u}$ 所在直线的投影与 $\hat{u}$ 向 x 轴投影**完全对称**

对 $\hat{j}$ 同理

$\therefore$ 二维空间向该数轴的线性变换为 $\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u_x \cdot x + u_y \cdot y$ （矩阵向量乘积）

$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u_x \cdot x + u_y \cdot y$ （点积）

若 $\vec{u}$ 为非单位向量，结合对称性被破坏时的**顺序无关**，同理可得

08 第一部分 - 叉积的标准介绍

1. 二维叉积

$\vec{v} \times \vec{w}$ **数值**为它们所张成的**平行四边形的面积**，“**正负**”由**右手定则**决定；用**行列式**计算

eg. $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{v} \times \vec{w} = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = -3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -5$

两个向量所成平行四边形的面积为 5，且因为 $\vec{v}$ 在 $\vec{w}$ 的左侧，结果为负

此外， $\vec{v}, \vec{w}$ 越接近垂直，面积越大； $(a\vec{v}) \times \vec{w} = a(\vec{v} \times \vec{w})$

2. 真正的叉积

真正的叉积是通过两个三维向量生成一个新的三维向量

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{p}$$

$\vec{p}$ 长度为平行四边形的面积，方向于平行四边形所在的面垂直，遵循右手定则

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right)$$

08 第二部分 – 以线性变换的眼光看叉积

1. 回顾

对偶性的思想在于，一个空间到数轴的线性变换与空间中唯一一个向量对应，也就是说**应用线性变换与向量点乘等价**

这样的向量被称为这个变换的**对偶向量**

2. 三维空间到数轴的特定线性变换

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right)$$

这个函数的几何意义是，对于任一输入的向量 (x, y, z) ，输出由它和 $\vec{v}, \vec{w}$ 确定的**平行六面体体积**（有正负）

这个函数是**线性的**，因而可以写成矩阵乘法

又因为应用这个变换和与对偶向量点乘等价，所以

$$\vec{p} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$p_1 \cdot x + p_2 \cdot y + p_3 \cdot z = x(v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) + y(v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) + z(v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ p_2 &= v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ p_3 &= v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

比较 $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \hat{i}(v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) + \hat{j}(v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) + \hat{k}(v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1)$

3. 什么样的 $\vec{p}$ 满足条件

$p \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 的几何解释是把其他向量向 $\vec{p}$ 投影的长度与 $\vec{p}$ 的长度相乘

平行六面体的体积

= 平行四边形的面积乘 (x, y, z) 垂直于 $\vec{v}, \vec{w}$ 的分量

= 垂直于 $\vec{v}, \vec{w}$ 且长度为平行四边形面积的向量与 (x, y, z) 点乘

点积为正的情况会与 $(x, y, z), \vec{v}, \vec{w}$ 满足右手定则的情况吻合

这就是**叉积的计算**与**几何解释**有关联的根本原因

3. 总结

首先，定义一个三维空间到数轴的线性变换

然后，考虑这个变换的对偶向量

①应用这个变换和与对偶向量点乘等价

②从几何角度思考，这个对偶向量必然与 $\vec{v}, \vec{w}$ 垂直，长度等于两个向量张成的平四面积

09 – 基变换

1. 坐标系和基向量

坐标系：发生在向量与一组数之间的任意一种转化，都被称为一个**坐标系**

其中两个特殊的向量 $\hat{i}, \hat{j}$ 被称为这个坐标系的**基向量**

2. 讨论使用另一组基向量的思想

将基向量理解为“**语言**”

如何在不同坐标系之间转化?

eg. 我看 Jenny 的基向量 $\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \vec{b_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

对于同一个向量，我看是 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，Jenny 看是 $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ （不同的语言描述同一个向量）

Jenny 用 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 表示一个向量，在我们的坐标系如何描述？（如何从她的语言转化到我们的语言？）

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 从几何上，将我们的网格变换为 Jenny 的网格；从数值上，将她的语言转化为我们的语言（相反的）

把它看作我们对 Jenny 的向量的误解，也就是我们的坐标系有相同坐标的向量，变换成真正想表示的向量

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ 将 Jenny 的网格变换为我们的网格；将我们的语言转化为她的语言

Jenny 如何描述同样的空间 90° 旋转?

$\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\vec{v}$ 转化成我们的语言

$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\vec{v}$ 用我们的语言描述变换矩阵

$\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\vec{v}$ 用她的语言描述变换后的向量

表达式 $A^{-1}MA$ 暗示着一种数学上的**转移作用**，中间的矩阵代表**你所见的变换**

10 – 特征向量与特征值

1. 特征向量与特征值

满足 $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$

将等号右侧重写为某个矩阵向量乘积

$\lambda\vec{v}$ 表示 $\vec{v}$ 的每个基向量与 λ 相乘，因此可以重写为 $\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\vec{v}$

$A\vec{v}=(\lambda I)\vec{v}$

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

当且仅当矩阵代表的变换将空间**压缩到更低维度**时，才会存在满足上式的非零向量

$\therefore \det(A-\lambda I)=0$

二维线性变换不一定有特征向量，如旋转 90 度的变换

2. 特征基与对角化

如果基向量都是特征向量，eg. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

对角矩阵：除了对角元以外其他元素均为 0 的矩阵被称为**对角矩阵**

对角矩阵所有的基向量都是特征向量，矩阵的**对角元**是它们**所属的特征值**

用特征向量作为基

eg. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 取特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 作为基

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 新矩阵必然是对角的

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

特征基：一组特征向量作为基向量构成的集合被称为一组**特征基**

计算 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100}$ ，一种更容易的做法是先变换到特征基，计算 100 次幂，然后转化回标准系

> 解：
> 计算特征值和特征向量，得特征基变换矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，并求出它的逆
> $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
> 对角化，$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
> 特征基下，$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$
> 回到标准系，得 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3^{100} & 3^{100} - 2^{100} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$

并非所有矩阵都能对角化，如剪切矩阵（特征向量不能张成全空间）

取下面这个矩阵：

Take the following matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

先徒手计算它的前几次幂，如A^2, A^3等等，你发现了什么规律？你能解释为什么会出现这种规律吗？这可能会让你好奇，是不是有一种计算这个矩阵任意次幂A^n的有效方法。

Start computing its first few powers by hand: A^2, A^3, etc. What pattern do you see? Can you explain why this pattern shows up? This might make you curious to know if there's an efficient way to compute arbitrary powers of this matrix, A^n for any number n.

这个矩阵的两个特征向量如下所示

Given that two eigenvectors of this matrix are

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

试试看你能否通过以下方式计算出A^n：首先转换为特征基，在新基的表象下计算出A^n，然后转换回我们的标准基。最终得到的公式能告诉你什么？

see if you can figure out a way to compute A^n by first changing to an eigenbasis, compute the new representation of A^n in that basis, then converting back to our standard basis. What does this formula tell you?

> 解：
>
> $$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$
>
> 猜想 $A^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$ ，其中 $\{F_n\}$ 为斐波那契数列
>
> 证明（数学归纳法）：
>
> $n = 1$ 时，猜想成立；
>
> 若 $n = k$ 时成立，则
>
> $$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n-1}+F_n & F_n+F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}$$
>
> 符合猜想
>
> QED
>
> 解法（特征基）：
>
> 特征基变换矩阵 $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$ ，求出它的逆 $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5-\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{20} & -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}$
>
> 对角化， $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$

> $$A^n = M\begin{bmatrix}(\frac{1+\sqrt5}{2})^n & 0\\ 0 & (\frac{1-\sqrt5}{2})^n\end{bmatrix}M^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\left[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n-1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n-1}\right] & \frac{1}{\sqrt5}\left[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n}\right]\\ \frac{1}{\sqrt5}\left[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n}\right] & \frac{1}{\sqrt5}\left[(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n+1}\right]\end{bmatrix}$$
>
> 比较，可得 $F_n = \frac{1}{\sqrt5}\left[(\frac{1+\sqrt5}{2})^n-(\frac{1-\sqrt5}{2})^n\right]$

11 – 抽象向量空间

行列式和**特征向量**与所选坐标系无关；这二者都是暗含于空间中的性质

1. 函数实际上只是另一种向量

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ 和向量对应坐标相加相似（无数个坐标的相加）

$(2f)(x)=2f(x)$ 和向量对应坐标数乘相似

2. 函数的线性变换

函数的线性变换，这个变换接收一个函数，并把它变成另一个函数，例如求导；“**算子**”和“**变换**”是一样的

线性的严格定义：$L(\vec{v}+\vec{w})=L(\vec{v})+L(\vec{w}), L(c\vec{v})=cL(\vec{v})$ 【可加性和成比性（一阶齐次）】

一个函数变换是线性的?

eg. 求导是线性运算 $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),(af(x))'=af'(x)$

用矩阵描述求导

当前空间为全体多项式；自然地，取 $1,x,x^2,x^3,...$ 为基（基函数），$b_0(x)=1,b_1(x)=x,...$ ，基函数集是无穷大的

eg. $1x^2+3x+5\cdot 1=\begin{bmatrix}5\\3\\1\\0\\0\\\vdots\end{bmatrix}$

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\\0\\\vdots\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots\\0&0&2&0&\cdots\\0&0&0&3&\cdots\\0&0&0&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}$$

eg. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1x^3+5x^2+4x+5)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots\\0&0&2&0&\cdots\\0&0&0&3&\cdots\\0&0&0&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\5\\1\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 4\\2\cdot 5\\3\cdot 1\\0\\\vdots\end{bmatrix}$

线性代数中的概念	应用于函数时的别名
线性变换	线性算子
点积	内积
特征向量	特征函数

3. 向量空间

向量空间：这些类似向量的事物，比如箭头、一组数、函数等，它们构成的集合被称为**向量空间**

如果要让所有建立好的理论和概念适用于一个向量空间，那么它必须满足八条公理

$$\begin{aligned}
&1)\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}\\
&2)\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}\\
&3)\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}\\
&4)\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}\\
&5)a(b\vec{v})=ab(\vec{v})\\
&6)1\vec{v}=\vec{v}\\
&7)a(\vec{v}+\vec{w})=a\vec{v}+a\vec{w}\\
&8)(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}
\end{aligned} \tag{3}$$

向量的形式并不重要，只要向量相加和数乘的概念遵守以上规则即可

> “普适的代价是抽象”Abstractness is the price of generality.

12 – 克莱姆法则，几何解释

1. 尝试

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=x\nRightarrow T(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix})T(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})=x\\
\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=y\nRightarrow T(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix})T(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=y
\end{gathered}$$

正交变换： $\forall\vec{v},\vec{w},T(\vec{v})\cdot T(\vec{w})=\vec{v}\cdot\vec{w}$ ，则 T 为**正交变换**（使基向量保持单位长度且相互垂直）

2. 几何转换 克莱姆法则

二维 $SignedArea=\det\left(\begin{bmatrix}0&x\\1&y\end{bmatrix}\right)=1\times y$ （有向面积）

三维 $z=\det\left(\begin{bmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z\end{bmatrix}\right),y=\det\left(\begin{bmatrix}1&x&0\\0&y&0\\0&z&1\end{bmatrix}\right),x=\det\left(\begin{bmatrix}x&0&0\\y&1&0\\z&0&1\end{bmatrix}\right)$

应用变换后，所有面积伸缩的比例都等于给定的行列式

$$y = \frac{Area}{\det(A)}$$

三维及高维也是类似的

13 – 计算二阶矩阵特征值的妙计

1）矩阵的迹

$$tr = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\operatorname{mean}(a, d) = \operatorname{mean}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

2）（二阶）矩阵的行列式

$$det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$$

3）

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = m, \lambda_1 \lambda_2 = p \quad \text{则} \quad \lambda_1, \lambda_2 = m \pm \sqrt{m^2 - p}$$