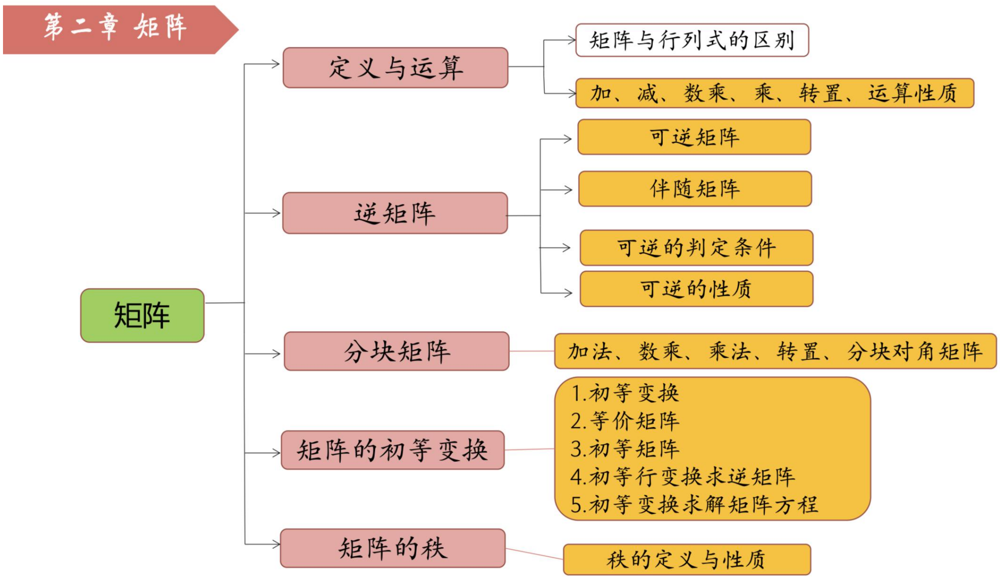
【微微老师】+【官方笔记精讲四】+【线性代数】

注：上课使用「官方笔记（打印）」即可。红色字体为重点记忆。

线性代数考试题型：单选+填空+计算+证明题

第二章 矩阵

框架图



分块矩阵

1. 分块矩阵的加法

1.1 分块矩阵

对于行数和列数较高的矩阵，为了表示方便和运算简洁，常用一些贯穿于矩阵的横线和纵线把矩阵分割成若干小块，每个小块叫做矩阵的子块，以子块为元素的形式上的矩阵叫做分块矩阵，例如，设：

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&2&-1\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&-6&4\\\hline 0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{array}\right),\quad A_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_3,\quad A_{12}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\\-6&4\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_{2\times3}\text{，}\quad A_{22}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2E_2\text{，}$$

则 A 的一个分块矩阵为：$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_3&A_{12}\\O&2E_2\end{pmatrix}$.

1.2 分块矩阵的加法

把 $m\times n$ 矩阵 A 和 B 作同样的分块：

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{r1}&A_{r2}&\cdots&A_{rs}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1t}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{st}\end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{is}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{sj}$ 的行数，则：

$$A+B=C=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1t}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{r1}&C_{r2}&\cdots&C_{rt}\end{pmatrix},$$

其中 $\boxed{C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{is}B_{sj}}$（$i=1,2,\cdots,r$，$j=1,2,\cdots,t$）.

2. 数乘分块矩阵

数 k 与分块矩阵 $A=\left(A_{ij}\right)_{r\times s}$ 的乘积为 $\boxed{kA}$.

3. 分块矩阵的转置

分块矩阵转置时，不但看做元素的子块要转置，而且每个子块是一个子矩阵，它内部也要转置，这一现象不妨称为“内外一起转”.

4. 分块矩阵的乘法和分块矩阵求逆

4.1 分块矩阵的乘法

设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times p}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{p\times n}$，利用分块矩阵计算乘积 AB 时，应使左边矩阵 A 的列分块方式与右边矩阵 B 的行分块方式一致，然后把矩阵的子块当做元素来看待，并且相乘时，A 的各子块分别左乘 B 的对应的子块.

$$AB=C=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1t}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{r1}&C_{r2}&\cdots&C_{rt}\end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{is}B_{sj}$ （$i=1,2,\cdots,r$， $j=1,2,\cdots,t$）.

4.2 分块矩阵求逆

方阵的特殊分块矩阵主要有以下三类：（凡空白处都是零块）

（1）形如 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$ 的分块矩阵称为分块对角矩阵或准对角矩阵，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 均为方阵.

（2）两个准对角矩阵的乘积

设 A_i 与 B_i（$1\le i\le r$）是同阶方阵，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_rB_r \end{pmatrix}.$$

若对某个 $1\le i\le r$， A_i 与 B_i 不是同阶方阵，则上面的两个分块对角矩阵不能相乘.

（3）准对角矩阵的逆矩阵

若 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 都是可逆矩阵，则分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

可逆，并且 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{pmatrix}$.

矩阵的初等变换与初等方阵

1. 矩阵的初等变换

（1）初等变换

对一个矩阵A作以下三种类型的变换，称为矩阵的初等行（列）变换，统称为**初等变换**：

① 互换矩阵A中两行（列）的位置；---互换

② 用一个非零常数k乘A某一行（列）；---倍乘

③ 用一个数乘A某一行（列）以后加到另一行（列）上.---倍加

注意：矩阵的初等变换与行列式计算有本质区别，行列式计算是求值过程，用等号连接，而对矩阵作初等变换是变换过程用“$\to$”“$\sim$”连接前后矩阵.

（2）等价

若矩阵A经过若干次初等变换变为B，则称A与B等价，记为$A\cong B$.矩阵之间的等价关系有以下三种性质：

① 反身性　$A\cong A$.

② 对称性　若$A\cong B$，则$B\cong A$.

③ 传递性　若$A\cong B$，$B\cong C$，则$A\cong C$.

2. 初等方阵

2.1 初等方阵

（1）由单位方阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等方阵**.对n阶单位矩阵E施行三种初等变换得到三类n阶初等方阵：

① 交换E的第i，j两行（列）（$i\neq j$）得到的初等方阵记为P_{ij}.

② 用非零常数k乘E的第i行（列），得到的初等方阵记为$D_i(k)$（$k\neq 0$）.

③ 将E的第j行的k倍加到第i行上（或第i列的k倍加到第j列上）（$i<j$），得到的初等方阵记为$T_{ij}(k)$；将E的第i行的k倍加到第j行上(或第j列的k倍加到第i列上)（$i<j$），得到的初等方阵记为$T_{ji}(k)$.

（2）初等方阵的功能：

① $D_i(k)$左（右）乘A就是用非零数k乘A的第i行（列）.

② $T_{ij}(k)$左乘A就是把A中第j行的k倍加到第i行上.

③ $T_{ij}(k)$右乘A就是把A中第i行的k倍加到第j行上.

（3）2.2 初等变换与初等方阵的关系---左行右列

设 A 为任意一个矩阵, 在 A 的左边乘一个初等方阵相当于对 A 作同类型的初等行变换；在 A 的右边乘一个初等方阵相当于对 A 作同类型的初等列变换；初等方阵都是可逆矩阵, 若干个可逆矩阵的乘积仍然是可逆矩阵.

题目练习

1.

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $a_i \neq 0 \ (i=1,2,3,4)$，求 A^{-1}.

由于$a_i \neq 0 (i=1,2,3,4)$,故$|A| = -a_1a_2a_3a_4 \neq 0$

设$A = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$,其中$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$，$A_2 = (a_4)$,则$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$

由于$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$，$A_2^{-1} = \left(\frac{1}{a_4}\right)$

从而$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}$

2.

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 PAP^2__________.

$$PA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$PAP=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PAP^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$