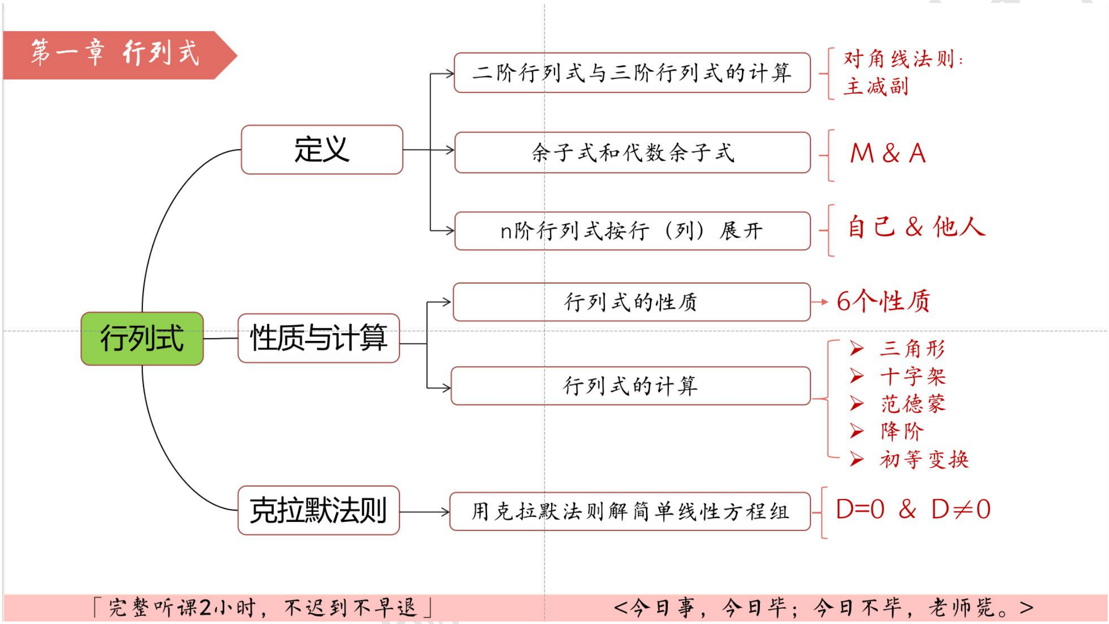
【微微老师】+【官方笔记精讲一】+【线性代数】

注：上课使用「课件（直播用）+官方笔记（打印）」即可。

线性代数考试题型：单选+填空+计算+证明题「100 分在召唤你～加油！」

第一章 行列式

框架图



第一节 行列式的定义

行列式是指一个由若干个数排列成同样的行数与列数后所得到的一个式子，它实质上表示把这些数按一定的规则进行运算，其结果为一个确定的数.

1. 二阶行列式与三阶行列式

1.1 二阶行列式

由 4 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 得到下列式子：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为一个二阶行列式，其运算规则为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1.2 三阶行列式

由 9 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 得到下列式子：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为一个三阶行列式，其运算规则为：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$ ..

1.3 行列式中元素的余子式和代数余子式的定义

设有三阶行列式 $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，对任何一个元素 a_{ij}，我们划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后的元素按原来的相对顺序组成一个二阶行列式，称它为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.例如，$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.再记 $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.例如，$A_{11} = M_{11}$，$A_{21} = -M_{21}$，$A_{31} = M_{31}$.那么，三阶行列式 D_3 定义为：$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$.

我们把它称为 D_3 按第一列的展开式，经常简写成 $D_3 = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}$.

2. n 阶行列式

一阶行列式 $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$；

n 阶行列式（n 行 n 列组成）$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}}$，其中 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.，上式为 D_n 按第一列的展开式.

第二节 行列式按行（列）展开

1. 行列式展开定理

n 阶行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积

的和，即

$$\boxed{D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \, (i = 1,2,\cdots,n)} \, ;$$

或

$$\boxed{D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \, (j = 1,2,\cdots,n)} \, .$$

前一式称为 D 按第 i 行的展开式，后一式称为 D 按第 j 列的展开式.本定理说明，行列式可以按其任意一行或按其任意一列展开来求出它的值.

2. 三角行列式的计算公式

（1）上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

（2）下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

（3）对角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

第三节 行列式的性质与计算

1. 行列式的性质

性质 1　行列式和它的转置行列式相等，即 $D = D^T$.

性质 2　用数 k 乘行列式 D 中某一行（列）的所有元素所得到的行列式等于 kD，这也就是说，行列式可以按行和列提出公因数.

性质 3　互换行列式的任意两行（列），行列式的值改变符号.

推论 1　如果行列式中有某两行（列）相同，则此行列式的值等于零.

性质 4　如果行列式中某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

性质 5　行列式可以按行（列）拆开.

性质 6　把行列式 D 的某一行（列）的所有元素都乘以同一个数以后加到另一行（列）

的对应元素上去，所得的行列式仍为 D.

定理 1　n 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|_n$ 的任意一行（列）各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.即 $\boxed{a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0(i\neq k)}$ 或 $\boxed{a_{1j}A_{1s}+a_{2j}A_{2s}+\cdots+a_{nj}A_{ns}=0(j\neq s)}$

【本节练习例题】

1.行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\3&2&1\end{vmatrix}$ 的值为________.

【答案】0

【解析】直接利用三阶行列式的运算规则，如下所示：

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\3&2&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot3+3\cdot2\cdot1-3\cdot1\cdot3-1\cdot2\cdot1-1\cdot1\cdot2=13-13=0$$

2.行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 中 a_{22} 的代数余子式为（　）.

A. $\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$　B. $-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$　C. $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$　D. $-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$

【答案】C

【解析】$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$

3.设行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$=3，则行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}+5a_{11}\\a_{21}&2a_{22}+5a_{21}\end{vmatrix}$=(　　).

A. -1　　B. -6　　C. 6　　D. 15

【答案】C

【解析】$\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}+5a_{11}\\a_{21}&2a_{22}+5a_{21}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}\\a_{21}&2a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&5a_{11}\\a_{21}&5a_{21}\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=2\times3=6$