

Задача о погоне - вариант 53

Леаду Жислен НКНбд-01-19¹

16 февраля, 2022, Москва, Россия

¹Российский Университет Дружбы Народов

Цель работы

Цель лабораторной работы

Дана задача: На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раз больше скорости браконьерской лодки. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку. Нам необходимо разобраться в том, как решить эту задачу, написать код для решения диф.уравнений, которые лягут в основу решения, после чего необходимо будет смоделировать математическую модель, с помощью которой можно будет наглядно определить оптимальный путь береговой охраны.

Задание к лабораторной работе

1. Теоретически выделить необходимые сведения из задачи и сопутствующих источников.
2. Вывести диф.уравнения для двух случаев (когда скорость катера больше скорости лодки в n раз и наоборот).
3. Написать код программы.
4. Построить траектории движения.
5. Определить по графикам наиболее выгодный путь.

Процесс выполнения лабораторной работы

- Для того, чтобы начать составлять уравнение необходимо определить важные параметры, а именно:
место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения - будет приниматься за $t_0 = 0$, $X_0 = 0$
место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки - будет приниматься за $X_0 = k$.

Теоретический материал :

- Чтобы найти расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса (x), необходимо составить простое уравнение: пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $x - k$ (или $x + k$). Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2 , задачу будем решать для двух случаев:

1. $x_1 = \frac{k}{n+1}$, при $\theta = 0$

2. $x_2 = \frac{k}{n-1}$, при $\theta = -\pi$

Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $v_t = r \frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $v_t = \sqrt{n^2 v_r^2 - v^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна v , то тангенциальную скорость находим из уравнения $v_t = \sqrt{n^2 v^2 - v^2}$. Следовательно, $v_r = v \sqrt{n^2 - 1}$. Тогда получаем $r \frac{d\theta}{dt} = v \sqrt{n^2 - 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{k}{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{k}{n-1} \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2-1}}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Уточним условия задачи: На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 12.2 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4.1 раза больше скорости браконьерской лодки

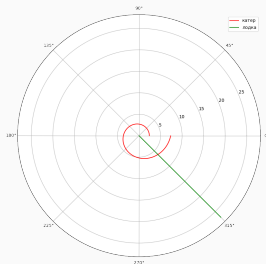


Figure 1: траектории для случая 1

точка пересечения катера и лодки

$$\begin{cases} \theta = 315 \\ r = 6.19 \end{cases}$$

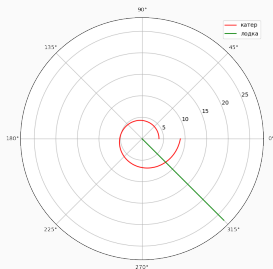


Figure 2: траектории для случая 2

точка пересечения катера и лодки

$$\begin{cases} \theta = 315 \\ r = 7.74 \end{cases}$$

Выводы по проделанной работе

Мы рассмотрели задачу о погоне катера за лодкой, научились применять ранее изученные дисциплины, написали код программы, который позволяет проанализировать смоделированные ситуации. Сделали вывод с помощью моделей.