补充题解 - 《经典》- 第 9 章动态规划初步

习题 9-7 Locker, Tianjin 2012, UVa1631

记初始数字序列为S[0,N)，目标序列为T[0,N)

每次转动可以选择选择相邻的1到3个。那么从左到右决策每一位时同时考虑相关的3位，具体来说设$D(i,d_0,d_1,d_2)$为$[i,N)$区间的每一位还未考虑，(i, i+1, i+2)三位上的数字分别是d_0,d_1,d_2，还需要的最少转动次数。

则状态转移方法如下:

1. $i=N-1$时，$D=min((d_0-T_{N-1}+10) \mod 10, (T_{N-1}-d_0+10) \mod 10)$，其实就是看看把$d_0$转动到$T_{N-1}$的上下两个方向哪种转动次数更小。
2. $d_0=T_i$时，$D=D(i+1,d_1,d_2,S_{i+3})$。
3. 考虑往T上转k = $(T_i-d_0+10) \mod 10$次，则i+1, i+2位往上转的次数k_1,k_2就是满足$k\ge k_1\ge k_2\ge 0$的所有情况，针对每种情况$D(i,d_0,d_1,d_2)=min(D(i,d_0,d_1,d_2),k+D(i+1,up(d_1,k_1),up(d_2,k_2)))$。其中up(a,b)表示数字a朝上转b得到的数字：$(a+b) \mod 10$。
4. T往下转k的情况同理。

则所求结果就是：$D(0,S_0,S_1,S_2)$。

习题 9- 22 俄罗斯 套 娃（ Matryoshka, ACM/ ICPC World Finals 2013, UVa1579）

桌上 有 n（ n ≤ 500） 个 套 娃 排成 一行， 你的 任务 是把 它们 套 成 若干个 套 娃 组， 使得 每个 套 娃 组 内 的 套 娃 编号 恰好 是 从 1 开始 的 连续 编号。 操作 规则 如下： 只能 把 小的 套在 大的 里面， 大小 相等 的 套 娃 相互 不能 套。 每次 只能 把 两个 相邻 的 套 娃 组 合并 成 一个 套 娃 组。 一旦 有 两个 套 娃 属于 同一个 组， 它们 永远 都 属于 同一个 组（ 只有 与 相邻 组 合并 的 过程 中会 临时 拆散） 。 执行 合并 操作 的 前后， 所有 套 娃 都是 关闭 的。 为了 合并 两个 套 娃 组， 你 需要 交替 地 把 一些 套 娃 打开、 重新 套 起来、 关闭。 例如， 为了 合并[1, 2, 6] 和[4]， 需要 打开 套 娃 6 和 4； 为了 合并[1, 2, 5] 和[3, 4]， 需要 打开 套 娃 5, 4, 3（ 只有 先 打开 4 才能 打开 3） 。 要求 打开/ 关闭 的 总 次数 最少。 无解 输出 impossible。 例如，“ 1 2 3 2 4 1 3” 需要 打开 7 次。

【分析】

如果问题有解，最终完成之后，一定是把整个区间切割成多个子区间，然后分别套成套娃组。每个子区间一定是由1~L的前L个正整数组成，我们称这样的区间是OK的，其中L是区间的长度。所以不难想到如下的状态转移方程：

$$D_i = min\{D_j + S_{i,j}\}, [i, j)\text{是}OK\text{的}。$$

其中D_i表示将[i,n)区间套成套娃组所需的最小次数，所求结果就是D_0，边界条件是$D_n = 0$。初始所有$D_i = \infty$

下面考虑$S_{i,j}$，$S_{i,j}$表示将[i,j)区间套成一组所需要的最小次数。[i,j)区间不一定是OK的。下面我们来考虑计算$S_{i,j}, i < j$。

不难想到其状态转移方程，$S_{i,j} = min\{S_{i,k} + S_{k,j} + C_{i,k,j}\}, i < k < j$。其中$C_{i,k,j}$表示将[i,k)和[k,j)两个区间各自形成的套娃组，打开重新套起来形成一个新的套娃组所需要的操作次数。

怎么求$C_{i,k,j}$呢，举例来说，考虑[1,2,5], [3,4]这两个子区间，3,4,5三个都是要打开然后再关上的，那么不难总结出一般规律，考虑同在一个子区间中的最小的a个数字，则操作次数为$C_{i,k,j} = i - j - a$。

具体来说，每个区间是否OK可以提前预处理出来，时间复杂度为$O(n^2)$。计算$S_{i,j}$的复杂度为$O((i-j)^2)$。总体的时间复杂度为$O(n^3)$。