上海大学 2014～2015 学年冬季学期试卷 A 卷

成绩	

课程名：线性代数 参考 答案 课程号：01014104 学分：3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号 ____________ 应试人所在院系 ____________

题号	一	二	三	四
得分				

得分	评卷人

一、选择题：（每题 2 分，5 题共 10 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，则 $AA^T=$（ B ）

(A) 0　(B) $5I$　(C) I　(D) $-I$

2. 设 A 为三阶方阵，且 $|A|=-1$，则 $|AA^*-I|=$（ D ）

(A) -2　(B) 8　(C) 2　(D) -8

3. 设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 m 维向量组，下列结论不正确的是（ C ）

(A) 如果向量组 A 线性相关，则 $r(A)<n$；

(B) 如果向量组 A 线性无关，则 $r(A)=n$；

(C) 如果向量组 A 线性相关，则 $n>m$；

(D) 如果向量组 A 线性无关，则 $n\le m$。

4. 设矩阵 A 与 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 相似，则（ A ）

(A) 矩阵 A 一定与对角矩阵相似　(B) 矩阵 A 一定不与对角矩阵相似

(C) $(A-I)(A-2I)(A-3I)\neq 0$　(D) 以上结论都不正确

5. 设 $n(n>1)$ 元非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=b$ 有 n 个线性无关解，则（ C ）

(A) $r(A)=n$　(B) $r(A)\ge n$　(C) $r(A)=1$　(D) $r(A)=0$

得分	评卷人

二、填空题：（每题 3 分，6 题共 18 分）

6. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，且 $(A-kI)^3=\mathbf{0}$，则 $k=$ 3；

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^*-A^{-1}=$ **0**；

8. 如果向量组 $(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)$ 的秩为 2，则 $a=$ -2；

9. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则其非零特征值为 3；

$\alpha\alpha^T$

10. 如果矩阵 A 为 $n(n>1)$ 阶实反对称矩阵，$\alpha=(1,1,\cdots,1)$ 为 n 维行向量，则 $\alpha(A+I)\alpha^T=$ n；

11. 设 $A_{3\times1}B_{1\times3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，则 $B_{1\times3}A_{3\times1}=$ (-2). **注 11 题写-2 也正确**

得分	评卷人

三、计算题：（6 题，共 60 分）

12．（6 分）设行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 的第一行代数余子式分别为 $A_{11},A_{12},A_{13},A_{14}$，计算 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$。

解　根据题意有

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6$$

17 - 6 - 3 - 2

2 分　　2 分　　2 分

13.（7 分）计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_i \neq 0 (i=0,1,2,\cdots,n)$.

D_{n+1}　$a_{n-1}!+a_n D_n$

$=a_{n-1}!+a_n(a_{n-2}!+D_{n-1})$

解 将第 1 行依次减去第 i 行的 $\frac{1}{a_i}$ 倍 $(i=1,2,\cdots,n)$，有

3 +　2　+　2 .

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n$$

4 分　　3 分

14．（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，而且 $AX=A+I$，求 X。

A+I　2′

$(A\ A+I)_2 \xrightarrow[2']{行} (I\ \vdots\ \ )$ 2′

解 因为 $|A|=1$，所以 A 可逆　2′　　2 分

由 $AX=A+I$，有 $X=I+A^{-1}$　$(\underbrace{X=A^{-1}(A+I)})$　　$X=$　2′　　2 分

而 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 1 & 3 & 2 & & 1 & \\ 2 & 5 & 4 & & & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$　$(A\vdots I)_2 \xrightarrow{行} (I\ \vdots\ A^{-1})$ 2′　　4 分

于是 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　$|A|=1$　1′　　1 分

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$　1′

得 $X=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　$A^*=$　3′　　1 分

15.（12 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ 的秩为 2，求

(1)（6 分）求 a；

(2)（6 分）求 A 的列向量组的一个极大线性无关组，且将其他列向量用此极大线性无关组线性表示。

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & a-4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 6-4a \end{pmatrix}$

2 分　　2 分

由 $r(A)=2 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$，　1′　　~~1 分~~

$A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　2′　　~~2 分~~

$a_0a_1a_2a_3$　a_2a_3

53.8
21.4
42.4

$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2$ $\alpha_3 = \frac{3}{4}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_4$

$\alpha_4 = 2\alpha_1 - \frac{5}{4}\alpha_2$ $\alpha_1 = \frac{5}{8}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_4$

可取$(1,5,2)^T,(0,8,2)^T$为极大线性无关组， 2 分

有

$$(2,6\ 3)^T = 2(1,5,2)^T - \frac{1}{2}(0,8,2)^T,\quad (2,0,\frac{3}{2})^T = 2(1,5,2)^T - \frac{5}{4}(0,8,2)^T \qquad 1+1 \text{ 分}$$

16. （13 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求$a$的值及所有公共解.

解 将方程组和方程合并，可得线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$ 2 分

其系数矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \end{pmatrix}. \qquad 4 \text{ 分}$$

~~显然，当$a\neq 1, a\neq 2$时无公共解.~~ ~~$a=1$或$a=2$ 有公共解~~ 2 分

当$a=1$时，可求得公共解为 $\xi = k(1,0,-1)^T$, k为任意常数； 3 分

当$a=2$时，可求得公共解为 $\xi = (0,1,-1)^T$. 2 分

2′ 2′ 1′

法二： $A \xrightarrow[2']{行} 行阶梯$ $a=1$

2′ 2′ 1′

法三： 当$a=1$时 公有公共解 2′ $A \xrightarrow{} 行阶 1′$ 通解 公共解 1′

$a=2$时 2′ 2′ 1′

17. （12 分）求出正交变换，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$化为标准形。

解 对应的二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2 分

令$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$ 3 分 (2+1)

得到A的特征值$\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=3$ 1 分

分别解$(A-0\mathbf{I})x=\mathbf{0}$，$(A-\mathbf{I})x=\mathbf{0}$，$(A-3\mathbf{I})x=\mathbf{0}$ 得到**A**属于λ_1，λ_2，λ_3 的

特征向量$\xi_1=(1,-1,1)^T$, $\xi_2=(-1,0,1)^T$, $\xi_3=(1,2,1)^T$, 3 分

单位化 1′

取正交阵$P=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\xi}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\xi}_2, \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\xi}_3\right)$ 1 分

在正交变换$x=Py$下，二次型标准形$f=0y_1^2+y_2^2+3y_3^2$ 1′ ~~1+1 分~~

注：标准的形式与P可以与答案形式不一样。

得分	评卷人

四、证明题：（每题 6 分，2 题共 12 分）

18.（6 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维列向量，且线性无关，如果

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=2\alpha_1+3\alpha_2+a\alpha_3$$

求证 β_1,β_2,β_3 线性无关的充分必要条件是 $a\neq 2$.

$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

证 因为 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&1&a\end{pmatrix}$ 2 分

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$无 $\Rightarrow$ $\begin{cases} =0\\ =0\\ =0\end{cases}$ 2

且 $\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&1&a\end{vmatrix}=a-2$，所以 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|(a-2)$ 2 分

$k_1=k_2=k_3=0$

$a\neq 2$

因此 β_1,β_2,β_3 线性无关的充分必要条件是 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|\neq 0\Leftrightarrow a\neq 2$ 2 分

$\Leftarrow$

19.（6 分）设 $n(n>2)$ 阶实对称矩阵 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，其中 α,β 为 n 维单位列向量，且正交。

求证 α,β 为 A 的特征向量，且 0 为 A 的特征值.

证明 对于矩阵 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，由 $|\alpha|=1,|\beta|=1,\beta^T\alpha=0$，有

$A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha|\alpha|^2+\beta\beta^T\alpha=2\alpha$，所以 α 为矩阵对应特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量；

2 分

$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta|\beta|^2=\beta$，所以 β 为矩阵对应特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量；

2 分

而矩阵 A 的秩 $r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2<n$，所以 $\lambda_3=0$ 也是矩阵的一个特征值.

2 分

$(\quad)\alpha_1+(\quad)\alpha_2+(\quad)\alpha_3=0$