《线性代数 D》强化训练题三

一、填空题

1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$__________.

2. 设 A 为三阶方阵, 且 $|A|=2$, 则 $|3A^{-1}-2A^{*}|=$__________.

3. 已知向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$; B: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩分别为 r_1, r_2, 并且 A 中每一个向量都可由 B 线性表示, 则 r_1 与 r_2 的关系是__________.

4. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 2, 4,$ 又设 $B=A^2-2A$, 则 B 的特征值是________.

5. 当 k 的取值范围为__________时, 二次型 $f=3x_1^2+(k-3)x_2^2+(k-5)x_3^2$ 正定.

二、单项选择题

1. 下列 $n\,(n>2)$ 阶行列式的值必为零的有(　　)

   A. 行列式主对角线上的元素全为零

   B. 行列式的次对角线上的元素全为零

   C. 行列式零元素的个数多于 n 个

   D. 行列式非零元素的个数小于 n 个

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, $C\sim E_n$, $B=AC$. 若 $R(A)=r$, $R(B)=r_1$, 则一定有(　　)

   A. $r>r_1$　　B. $r<r_1$　　C. $r=r_1$　　D. r 与 r_1 的关系由 C 确定

3. 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系, 则有(　　)

   A. $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关

   B. $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性相关

   C. $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 的线性组合都是非齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解

   D. $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 的线性组合都是齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解

4. n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是(　　)

A. A 有 n 个互不相同的特征值　　B. A 有 n 个非零的特征值

C. $|A| \neq 0$　　D. A 有 n 个线性无关的特征向量

5. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} kx + z = 0 \\ 2x + ky + z = 1 \\ kx - 2y + z = 1 \end{cases}$ 有唯一解，则(　　)

A. $k \neq 0$　　B. $k \neq -1$　　C. $k \neq 2$　　D. $k \neq -2$

三、计算题

1. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$，求元素 a, b 的代数余子式的值.

2. 计算行列式的值

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

求 (1) AB; (2) $|AB|$; (3) B^{-1}; (4) 满足 $BX = A$ 的矩阵 X.

4. 问 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=-5 \\ x_1+3x_2-x_3=\lambda \\ -7x_1-11x_2+9x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 有解，无解，有解时求全部解.

四、简答题

1. 设 A, B 均为 n 阶对称阵，问 AB 是否也是对称阵？你能否给出 AB 也是对称阵的充要条件.

2. 问空间 R^3 中的平面 $2x-3y+z=0$ 是否构成 R^3 中的子空间？若是，求该子空间的基与维数，若不是，则说出理由.

五、已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3 \quad (a>0)$ 可通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

1. 写出二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3 \ (a>0)$ 的矩阵 A 和标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$ 的矩阵 B;

2. 由 A 与 B 的关系求 A 的特征值和参数 a 的值;

3. 求正交变换矩阵 P.

六、证明题

1. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性空间 V 的一个基，设

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+7\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 V 的一个基，并求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

2. 设 n 阶非零矩阵 A_1, A_2 满足 $A_i^2=A_i \ (i=1,2)$，且 $A_2A_1=O$,

(1) 证明：$A_i \ (i=1,2)$ 的特征值 λ 不是 0 就是 1.

(2) 证明：A_1 属于 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 就是 A_2 属于 $\lambda=0$ 的特征向量.

(3) $\boldsymbol{x}_i$ 分别是 A_i 属于 $\lambda=1$ 的特征向量 $(i=1,2)$，证明 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 线性无关.