《线性代数 A》强化训练题三解答

一、单项选择题

1. B;　　2. D;　　3. C;　　4. C;　　5. A.

二、填空题

6. 1;　　7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

9. $c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (不唯一);　　10. -2;　　11. $\dfrac{9}{\sqrt{26}}$;

12. $2, 8, 22$;　　13. $-\dfrac{4}{3}$;　　14. $\dfrac{1}{2}$;　　15. $a > 2$.

三、 简答题

16. 叙述n阶矩阵A与B相似的定义，并写出n阶矩阵A与对角阵相似的充分必要条件.

解： 存在n阶可逆阵P，使$P^{-1}AP = B$，称A与B相似.

n阶矩阵A与对角阵相似$\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

17. 叙述一个向量组线性无关的定义，并给出向量组线性无关的三种判别法.

解： 对$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，如果$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$只有当$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$时成立，称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

判别法: (1) 用定义;

(2) m个m维向量线性无关$\Leftrightarrow$其组成的矩阵的行列式不为零;

(3) 向量组的秩为向量个数.

等等$\cdots$

四、计算题

18. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$

解：$D \xlongequal[\substack{r_2\div 3 \\ r_4\div(-\frac{1}{7})}]{r_1+r_3} -\frac{3}{7}\begin{vmatrix} 1 & -7 & \frac{6}{5} & 4 \\ 1 & -4 & \frac{7}{5} & 5 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3\div\frac{1}{6}]{c_3\div\frac{1}{5}} -\frac{1}{70}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 6 & 4 \\ 1 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -27 & 24 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\substack{r_3-4r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} -\frac{1}{70}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{1}{70}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -7 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_3+c_1} -\frac{1}{70}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{70}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{70}\times(-2+4) = \frac{1}{35}.$

19. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 且 A 满足 $A^*X = 4A^{-1}+2E+2X$，求 X.

解：$AA^*X = 4E+2A+2AX$，$|A|X = 4E+2A+2AX$，

由$|A|=8$代入化简得：$(4E-A)X=2E+A,$

所以

$$X=(4E-A)^{-1}(2E+A).$$

$$(4E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad 2E+A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4}\\ 0 & 2 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

20. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\5\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\6\\7\end{pmatrix}$的秩和一个最大无关组，并把其他向量用最大无关组线性表示.

解：$A=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 3 & 5\\ -3 & 1 & 2 & -1\\ 5 & 2 & 1 & 6\\ 4 & 5 & 3 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$

向量组的秩$r=3$;

一个最大无关组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$.

21. 参数 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 无解、有惟一解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出方程组的通解.

解：

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4),$$

当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -\dfrac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解;

当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ -4 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

$r(\tilde{A})=3\neq r(A)=2$, 方程组无解;

当 $\lambda=1$ 时，$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$r(\tilde{A})=r(A)=2<3$, 方程组有无穷多解.

通解 $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

22. 用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$ 为标准形，并写出所用的正交变换.

解：$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\0&2-\lambda&0\\-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2=0,$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0,$

由 $A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，得对应 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

单位化 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

由 $A-0E=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，得对应 $\lambda_3=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

单位化 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

取 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 可将二次型化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2$.

五、证明题

23. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$, B 为一个3×3矩阵, 如果 $AB=O$, 求证: B 的列向量组线性相关.

证：设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $AB=(A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3)=O$,

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,

又因为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

所以 $r(A)=2$, 所以 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含1个向量,

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.