# 上海大学 2013～2014 学年冬季学期试卷(A 卷)

| 成绩 | |
|---|---|

课程名： 线性代数 课程号： 01014104 学分： 3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ________ 应试人学号________ 应试人所在院系________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 一. 单项选择题(每题 2 分, 5 题共 10 分)

1. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 $n$ 阶矩阵，下列关系正确的是 （ ）

A. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$　　B. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$

C. $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$　　D. 若 $|\mathbf{AB}|=0$，则 $|\mathbf{A}|=0$ 或 $|\mathbf{B}|=0$

2. 设3阶行列式 $|\alpha,\beta,\gamma|=-1$，则行列式 $|\alpha-\beta,2\beta-\gamma,\alpha-3\gamma|=$ （ ）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 0

3. $n$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是 （ ）

A. $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵　　B. $\mathbf{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量

C. $\mathbf{A}$ 有 $n$ 个不同特征值　　D. $\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵

4. 有关线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，以下判断正确的是 （ ）

A. $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解　　B. $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解

C. $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解　　D. $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 无解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解

5. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，则 （ ）

A. 当 $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　B. 当 $m=n$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$

C. 当 $r(\mathbf{A})=n$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　D. 当 $r(\mathbf{A})=m$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 二. 填空题(每题 2 分, 8 题共 16 分)

6. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{CA}$，则 $\mathbf{B}$ 一定是________阶矩阵；

7. 若 4 阶行列式的第 1 行元素依次为 $1,2,3,4$，第 2 行元素的代数余子式依次为 $x,2,x,1$，那么 $x=$________；

8. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $(\mathbf{A}^{-1})^*=$________；

9. 设 $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 是三元非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的三个不同的解，若 $r(\mathbf{A})=2$，$\vec{\eta}_1=(3,2,1)^T$，$\vec{\eta}_2-2\vec{\eta}_3=(-2,0,1)^T$，则 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的通解为________；

10. 设设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\1&3&1&1\\&&3&7\\&&1&5\end{pmatrix}$，则 $|(\mathbf{A}-I)^*|$________；

11. 设 $\mathbf{A}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&2\\&-2&1\\&&3\end{pmatrix}$ 相似，则 $|\mathbf{A}-\mathbf{A}^{-1}+2I|=$________；

12. 设二阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 1 和 2，且 $(0,1)^T$ 和 $(1,1)^T$ 分别为对应的特征向量，则 $\mathbf{A}^n=$________；

13. 设 $\mathbf{A}$，$P$ 是 3 阶矩阵，且 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，如果

$$\mathbf{A}(\alpha_1)=\alpha_1,\mathbf{A}(\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2,\mathbf{A}(\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

则 $P^{-1}\mathbf{A}P=$________.

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 三. 计算题(6 题共 62 分)

14. (6 分) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

解:

15. (8 分) 计算 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & n & \cdots & 1 \end{vmatrix}$。

解:

16. (12 分) 已知 $(A+2I)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1}=-2XA^{-1}+I$，求 A 和 X。

解:

17. （12 分）确定 $c$ 的值，使向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,4,-2,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,0,7)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,c,2,1)^T$ 线性相关，

同时求其一个极大线性无关组，并将其他向量表示为极大线性无关组的线性组合。

解：

18. （12 分）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\\alpha&1&3&\beta\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，已知 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系含两个解，问 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是否有解？若无解请说明理由，若有解则求出其所有解。

解：

19. （12 分）求出正交变换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3$ 化为标准形。

解：

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 四. 证明题(每题 6 分, 2 题共 12 分)

20. 设 $\mathbf{A}$ 是 $n$ 阶方阵，且满足 $r(\mathbf{A})=1$，试证明必存在 $n$ 维列向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，使 $\mathbf{A}=\mathbf{u}\mathbf{v}^T$。

证明：

21. 设 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是方阵 $\mathbf{A}$ 的不同特征值，$\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于 $\lambda_1$ 的线性无关特征向量，$\mathbf{x}_3$ 和 $\mathbf{x}_4$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于 $\lambda_2$ 的线性无关特征向量。试证明 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4$ 线性无关。

证明：