上海大学 2011 ～ 2012 秋季学期试卷解答及评分标准(A 卷)

课程名： 线性代数（B） 课程号： 01013010 学分： 3

一、填空题：（本大题含 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

(提示：请在每小题的空格中填上正确答案。错填或不填均无分。)

1. 设 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 为相互正交的单位向量，则内积 $\left[3\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right]=$ ___2___；

2. 若三阶行列式的第 1 列元素依次为 $1,2,3$，第 2 列元素的余子式依次为 $1,2,x$，则 $x=$ ___1___；

3. 由三维列向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 构成矩阵 $\mathbf{A}=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ 和 $\mathbf{B}=2(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma}+\vec{\alpha})$，若行列式 $|\mathbf{A}|=1$，则行列式 $|\mathbf{B}|=$ ___16___；

4. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{O}$，则 $(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}=$ ___$\mathbf{A}-3\mathbf{E}$___；

5. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\1&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{B}\end{pmatrix}^{-1}=$ ___$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\2&0&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$___；

6. 当 $x=$ ___3___ 时，矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 的秩达到最小；

7. 设 2 是可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，那么 ___$\frac{1}{2}$___ 是矩阵 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}^{-1}-3\mathbf{E}$ 的一个特征值；

8. 设 $\mathbf{A}$ 是三阶正交阵，则行列式 $\left||\mathbf{A}|\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^*\right|=$ ___8___；

9. 设 $\mathbf{A}$ 的秩为 2，$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 是三元非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解，若 $\vec{\eta}_1=(2,1,2)^T$ 以及 $\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=(1,0,1)^T$，那么 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ ___$c(3,2,3)^T+(2,1,2)^T$___；

10. 设二阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 1 和 2，且 $(0,1)^T$ 和 $(1,1)^T$ 分别为对应的特征向量，则 $\mathbf{A}^n=$ ___$\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n-1&1\end{pmatrix}$___。

二、单项选择题：（本大题含 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

(提示：在每小题列出的备选项中只有一个符合题目要求，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。)

1. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则 （ B ）

   A. $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$　　B. $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|$

   C. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$　　D. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$

2. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，则 （ D ）

   A. 当 $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　B. 当 $m=n$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$

   C. 当 $r(\mathbf{A})=m$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　D. 当 $r(\mathbf{A})=n$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$

3. 设非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 存在无穷多个解，则 （ C ）

   A. $\mathbf{A}$ 的行向量组线性相关　　B. $\mathbf{A}$ 的行向量组线性无关

   C. $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关　　D. $\mathbf{A}$ 的列向量组线性无关

4. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶的正交阵，则下列结论错误的是 （ A ）

   A. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 为正交阵　　B. $\mathbf{AB}$ 为正交阵

   C. $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ 为正交阵　　D. 当 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|<0$ 时，$|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|=0$

5. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相似，则下列结论错误的是 （ C ）

   A. $\mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{B}^T$ 也相似　　B. $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 有相同的特征值

   C. $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都相似于相同的对角阵　　D. $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

三、（本大题 8 分） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}-a & a & b & b\\ a & -a & b & b\\ b & b & -a & a\\ b & b & a & -a\end{vmatrix}$

解： $D=\begin{vmatrix}2b & 2b & 2b & 2b\\ a & -a & b & b\\ b & b & -a & a\\ b & b & a & -a\end{vmatrix}=2b\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & -a & b & b\\ b & b & -a & a\\ b & b & a & -a\end{vmatrix}=2b\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & -a & b & b\\ 0 & 0 & -(a+b) & a-b\\ 0 & 0 & a-b & -(a+b)\end{vmatrix}$ 2+1+1 分

$=2b\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & -a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-(a+b) & a-b\\ a-b & -(a+b)\end{vmatrix}=2b\cdot(-2a)[(a+b)^2-(a-b)^2]=-16a^2b^2$ 2+1+1 分

四、（本大题 10 分） 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}-\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，若 $\mathbf{X}$ 满足矩阵方程 $(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$，试求 $\mathbf{X}$ （其中矩阵 $\mathbf{C}$ 可逆，$\mathbf{E}$ 是单位矩阵）。

解： 在矩阵方程两端左乘 $\mathbf{C}$，得 $(\mathbf{B}-\mathbf{C})\mathbf{X}=\mathbf{A}$，所以 $\mathbf{X}=(\mathbf{B}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{A}$， 2+2 分

由于 $(\mathbf{B}-\mathbf{C}\vdots\mathbf{A})=\left(\begin{array}{cccc:cc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{cccc:cc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$，故 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 4+2 分

五、（本大题 12 分） 求向量组 $\vec{a}_1=(1,1,2,3)^T$，$\vec{a}_2=(1,-1,1,1)^T$，$\vec{a}_3=(1,3,3,5)^T$，$\vec{a}_4=(4,-2,5,6)^T$ 的秩和它的一个极大无关组，并将其它向量用此极大无关组线性表示。

解： 对下列矩阵进行初等行变换：

$\mathbf{A}=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 5 & 6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & -2 & 2 & -6\\ 0 & -1 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 2 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 2+2 分

故向量组的秩 $r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=2$，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 构成了它的一个极大无关组， 2+2 分

继续初等行变换可进一步得到 $\mathbf{A}$ 的行最简形 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

从而 $\begin{cases}\vec{\alpha}_3=2\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\\ \vec{\alpha}_4=\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2\end{cases}$ 2+2 分

六、（本大题 12 分） 试讨论 k 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 无解、有惟一解或有无穷多解，并在有无穷多解的情况下求出其通解。

解： $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & k-2 & 0 \\ 0 & 1-2k & 1-k & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-k/2 & 0 \\ 0 & 0 & k(3/2-k) & k \end{pmatrix}$ 2+2+2 分

当 $k = \dfrac{3}{2}$ 时，$2 = r(\mathbf{A}) \neq r(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$，方程组无解 1 分

当 $k \neq \dfrac{3}{2}$ 且 $k \neq 0$ 时，$r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$，方程组有惟一解 1 分

当 $k = 0$ 时，$r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 < 3$，方程组有无穷多解 1 分

此时 $\tilde{\mathbf{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 分

七、（本大题 10 分） 设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ 经过一正交变换化为标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$，试确定参数 a 以及所用的正交变换。

解： 二次型矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2 分

在正交变换下二次型标准形的系数 $0,1,2$ 是 $\mathbf{A}$ 的三个特征值 2 分

故 $|\mathbf{A}| = 0$，又直接计算得 $|\mathbf{A}| = -a^2$，$\Rightarrow$ 参数 $a = 0$ 1 分

依次求 $(\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$, $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$, $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$ 的非零解

得到 $\mathbf{A}$ 相应于特征值 $0,1,2$ 的特征向量 $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 分

故所述正交变换为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，其中正交阵 $\mathbf{P} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\xi}_3 \right)$ 2 分

八、（本大题 8 分） 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_t$ 线性无关，$\vec{\beta}$ 是非零向量且满足 $[\vec{\beta}, \vec{\alpha}_i] = 0$ $(i = 1, \cdots, t)$，试证明向量组 $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \cdots + \vec{\alpha}_t + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_t$ 线性无关。

证明： 考虑 $k_0(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \cdots + \vec{\alpha}_t + \vec{\beta}) + k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + k_t\vec{\alpha}_t = \vec{0}$ （*） 1 分

即 $k_0\vec{\beta} + (k_0 + k_1)\vec{\alpha}_1 + (k_0 + k_2)\vec{\alpha}_2 + \cdots + (k_0 + k_t)\vec{\alpha}_t = \vec{0}$ （**） 1 分

将 $\vec{\beta}$ 与（**）两端内积，利用 $[\vec{\beta}, \vec{\alpha}_i] = 0$ $(i = 1, \cdots, t)$ $\Rightarrow$ $k_0 \|\vec{\beta}\|^2 = 0$ 2 分

注意到 $\vec{\beta}$ 是非零向量蕴含 $\|\vec{\beta}\| \neq 0 \Rightarrow k_0 = 0$， 1 分

（**）变为 $(k_0 + k_1)\vec{\alpha}_1 + (k_0 + k_2)\vec{\alpha}_2 + \cdots + (k_0 + k_t)\vec{\alpha}_t = \vec{0}$ 1 分

由于向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_t$ 线性无关，$\Rightarrow$ $k_0 + k_1 = k_0 + k_2 = \cdots = k_0 + k_t = 0$ 1 分

结合 $k_0 = 0 \Rightarrow k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0$

根据定义向量组 $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \cdots + \vec{\alpha}_t + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_t$ 线性无关。 1 分