线性代数单元练习一（行列式）

一、单项选择题

1．设 A 为 3 阶方阵，数 $\lambda=-2$, $|A|=3$，则 $|\lambda A|=$（　　）

A．24　　B．-24　　C．6　　D．-6

2．设 A,B 均为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，则必有（　　）

A．$|A+B|=|A|+|B|$　　B．$AB=BA$

C．$|AB|=|BA|$　　D．$(A+B)^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$

3．设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=5$，则 $|(3A^{-1})^T|=$（　　）

A．$\dfrac{3}{5^n}$　　B．$\dfrac{5}{3^n}$　　C．$\dfrac{3^n}{5}$　　D．$\dfrac{5^n}{3}$

4．设 n 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|_n$，A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则下列各式中

正确的是（　　）

A．$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=0$　　B．$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=0$　　C．$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=D$　　D．$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i2}=D$

5．设方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=1\\x_1-5x_2-x_3=b\\2x_1+2x_2+x_3=2\end{cases}$ 有无穷多组解，则必有（　　）

A．$b=1$　　B．$b=-1$　　C．$b=2$　　D．$b=-2$

6．设 $D=\begin{vmatrix}1&0&2&3\\-1&1&2&0\\1&2&1&1\\-1&2&5&4\end{vmatrix}$，则 $A_{41}+2A_{42}+A_{43}+A_{44}=$ （　　），其中 A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

二、填空题

1．已知 α,β,γ 为三维列向量，行列式 $|4\gamma-\alpha,\beta-2\gamma,2\alpha|=40$，则行列式

$|\alpha,\beta,\gamma|=$__________.

2．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$都是4维列向量，且4阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta|=a$，

$|\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=b$，则4阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\gamma|$_______

3．设A为3阶方阵,A^*为伴随矩阵,$|A|=\dfrac{1}{8}$,则$\left|(\dfrac{1}{3}A)^{-1}-8A^*\right|=$___________

4．若行列式的每一行（或每一列）元素之和全为零，则行列式的值等于_________

5．设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$ 如果$|A|=1$，那么 $|B|$ = _______.

6．设A为n阶实矩阵，且$A^T=A^{-1}$，$|A|<0$，则行列式 $|A+E|=$__________

7. 设n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ b & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则$2n$阶行列式$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=$_______________

8．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的列分块矩阵为$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$a,b$是数，若$\alpha_3=a\alpha_2+b\alpha_3$则行列式$|\boldsymbol{A}|=$____________

三、计算题

1．计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a+5 & 0 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & a+9 & 0 & 0 \\ 0 & a+7 & 0 & a+8 & 0 \\ a+3 & 0 & 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix}, \qquad D_n=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

2．计算n阶行列式

$$(1)\, D_n=\begin{vmatrix} 9 & 5 & & & \\ 4 & 9 & 5 & & \\ & 4 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 9 & 5 \\ & & & 4 & 9 \end{vmatrix}; \qquad (2)\ \ D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & n-2 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

3. 设$f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 4 & x & 2 & 3 \\ 3 & 4 & x & 2 \\ 2 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$，求$f(1),f''(1)$.

4.设$D=\begin{vmatrix}0&a&a&a\\b&0&a&a\\b&b&0&a\\b&b&b&0\end{vmatrix}$, A_{ij}是D中元素a_{ij}的代数余子式，求$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$.

三、 证明题

1. 证明: $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$

2. 设$D_3=\left|a_{ij}+x_j\right|, A=(a_{ij})_{3\times3}$,证明: $D_3=|A|+\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}x_jA_{ij}$, A_{ij}是元素a_{ij}的代数余子式.

3. 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证：这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0$.

4. 设A是可逆矩阵， A_{ij}是D中元素a_{ij}的代数余子式，证明:

$$\begin{vmatrix}A_{22}&A_{23}&\cdots&A_{2n}\\A_{32}&A_{33}&\cdots&A_{3n}\\&\cdots&\cdots&\\A_{n2}&A_{n3}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}|A|^{n-2}$$

5.设n阶矩阵A的每行元素之和等于零，每列元素之和等于零, 证明: A的每个代数余子式相等.

答案与提示:

一、1. B 2. C 3. C 4. C 5. A 6. A

二、1. -5 2. $a-b$ 3. 5 4. 0 5. 2 6. 0 7. $(a^2-b^2)^n$ 8. 0

三、1.

$$D=(a+9)\begin{vmatrix}a+1&a+2\\a+3&a+4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a+5&a+6\\a+7&a+8\end{vmatrix}=4(a+9)$$

$$(-b)^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i-b)$$

2. (1) $5^{n+1}-4^{n+1}$ (2) $(-1)^{n-1}x^{n-2}$

3. $(1)-160;$ (2) 12

4. $-a^3$

四、1. 利用 vandermonder 行列式和展开定理.

2. 利用行列式性质和展开定理.

3. 证明:(必要性)由l_1,l_2,l_3交于一点得方程组$\begin{cases} ax+2by+3c=0 \\ bx+2cy+3a=0 \\ cx+2ay+3b=0 \end{cases}$有解,故

$$R(A)=R(\overline{A})\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}=0\Rightarrow (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}=0$$

由于$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}[(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2]\neq 0$,所以$a+b+c=0$

充分性:$a+b+c=0\Rightarrow b=-(a+c)$,所以

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=2[ac-(a+c)^2]=-[a^2+c^2+(a-c)^2]\neq 0$$

$\Rightarrow R(A)=R(\overline{A})=2$,因此方程组$\begin{cases} ax+2by+3c=0 \\ bx+2cy+3a=0 \\ cx+2ay+3b=0 \end{cases}$有唯一解,即$l_1,l_2,l_3$交于一点.

4. 利用行列式乘法规则

5. 先证明$A_{ij}=A_{i1}$,再证明$A_{i1}=A_{11}$.