上海大学 2009 ～ 2010 学年春季学期试卷

成绩	

课程名： 线性代数（A） 课程号： 01014009 学分： 3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号______________应试人所在院系______________

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. 填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

1． 排列 $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$ 的逆序数为______________。

2．4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ______________。

3． 若 4 阶行列式的第 1 行元素依次为 $1,2,3,4$，第 2 行元素的代数余子式依次为 $x,2,x,1$，那么 $x=$ ________________。

4． 设 A 和 B 都是 n 阶方阵，且 $|A|\neq 0$。若 $AB-A=E$，则 $A^{-1}=$ ______________。

5． 设 A 为 n 阶方阵，若 $R(A)<n-1$，则 $R(A^*)=$ ____________。

6． 若 A 是秩为1的 3 阶方阵， $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $AB=O$，则 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的通解为 ________________________。

7． 当 $a=$ ________时，向量 $(-3,4,a,1)$ 与向量 $(-1,3,2,5)$ 正交。

8． 可逆方阵 A 有特征值 λ，则 $A^{-1}+2E$ 有特征值____________。

9． 如果 A 为 n 阶正交矩阵，而且 $|A|=1$，则 $|A^T+A^*|=$ ___________。

10． 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$，如果 A 正定，则 t 的取值范围是____________。

二. 单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。在每小题的四个选项中仅有一个正确，请将正确的选项编号填在括号内）

1． 设 A 和 B 都是 n 阶可逆矩阵，下列错误的是 ……………………………………（ ）

A. $(A+B)^T=A^T+B^T$；　　B. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$；

C. $|AB|=|BA|$；　　D. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$。

草　稿　纸

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A| = 0$，则 A 中 ……………………………………（ ）

A. 任意一列向量是其余列向量的线性组合； B. 必有一列元素全为零；

C. 必有一列向量是其余列向量的线性组合； D. 必有两列元素对应成比例。

3. 设 0 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征值，则 $a =$ ……………………………………（ ）

A. 3； B. 1； C. 0； D. -1。

4. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 ……………………………………………………（ ）

A. A 与 B 都相似于同一个对角阵； B. A 与 B 有相同的特征多项式和特征向量；

C. A 与 B 有相同的特征值和特征向量； D. A 与 B 有相同的特征多项式和特征值。

5. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，$A\vec{x} = \vec{b}$ 是非齐次线性方程组，以下判断正确的是 ………（ ）

A. $A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解，则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解； B. $A\vec{x} = \vec{0}$ 有非零解，则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解；

C. $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解，则 $A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解； D. $A\vec{x} = \vec{b}$ 无解，则 $A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解。

三. 行列式计算（本大题共 2 题，每小题 8 分，共 16 分）

1. $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解：

2. $D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$

解：

草 稿 纸

四.（12 分） 已知$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，且$A^{-1}XA=A^{-1}X+E$，求$A$和$X$。

解：

五.（14 分） 讨论当a,b分别取何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=b\\ x_2+(3-a)x_3+3x_4=2\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$

无解、有唯一解和有无穷多解，并在有无穷多解的情形下求该方程组的通解。

解：

草　稿　纸

六．（15 分） 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

（1）**（4 分）** 求与二次型对应的实对称矩阵 A；

（2）**（11 分）** 用正交变换将二次型化为标准形。

解：

七．证明题（8 分） 设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ 是列向量组，若 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ 线性无关，$\vec{a}_3, \vec{a}_4$ 也线性无关，且内积 $[\vec{a}_i, \vec{a}_j] = 0 \quad (i = 1, 2;\ j = 3, 4)$，试证明 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ 一定线性无关。

证明：

草 稿 纸