线性代数单元练习三（向量）

一、单项选择题

1．设n阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，$AB=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$，记向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，III：$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$．如果向量组 III
线性相关，则(　　　　)

(A) 向量组 I 线性相关　　　　(B) 向量组 II 线性相关
(C) 向量组 I 与 II 都线性相关　　(D) 向量组 I 与 II 至少有一个线性相关

2． $m\times n$矩阵A，$m>3$，$n>3$，$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$，则必有(　　　　)

(A) 若A的前3列线性无关，则B的前三列线性无关
(B) 若A的前3行线性无关，则B的前三行线性无关
(C) 若A的左上角三阶行列式不为零，则B的左上角的三阶行列式也不为零
(D) 以上说法都不对

3．设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为 n 维向量，下列结论<u>不正确</u>的是（　　　　）

(A) 若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$
则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

4．已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$及$\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_s(\beta\neq 0)$均线性相关，则(　　　　)

(A) β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$唯一线性表示

(B) 有某个i使α_i可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta$唯一线性表示

(C) α_s可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表示

(D) β不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示

5．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的向量，则下列各组中线性无关的是（　　　　）

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$　　　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$

6．设n维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m<n)$线性无关,则$n$维列向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关的充要条件为(　　　　)

(A) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示

(B) 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示

(C) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价

(D) 矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$等价

7．设向量组(I) a_1,a_2,a_3；(II)a_1,a_2,a_3,a_4；(III)a_1,a_2,a_3,a_5；(IV) a_1,a_2,a_3,a_4+a_5，且$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$，$r(\mathrm{III})=4$，则$r(\mathrm{I}V)=$（　　　）

(A) 2　　　(B) 3　　　(C) 4　　　(D) 5

8．设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，但不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，若向量组(II)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则$\alpha_m$（　　　）

（A）既不能由（I）线性表示，也不能由（II）线性表示
（B）不能由（I）线性表示，但可由（II）线性表示
（C）可由（I）线性表示，也可由（II）线性表示
（D）可由（I）线性表示，但不可由（II）线性表示

9.n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充分条件是（　　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中不含零向量

（B）$s\le n$

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意两个向量的分量不成比例

（D）某向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，且表示式唯一

10.设$a_1=\left(a_1,a_2,a_3\right)^{\mathrm{T}},a_2=\left(b_1,b_2,b_3\right)^{\mathrm{T}},a_3=\left(c_1,c_2,c_3\right)^{\mathrm{T}}$，则三条直线

$a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2,3,\text{其中}a_i^2+b_i^2\ne0)$交于一点的充要条件是（　　　）

（A）a_1,a_2,a_3线性相关

（B）a_1,a_2,a_3线性无关

（C）$r(a_1,a_2,a_3)=r(a_1,a_2)$

（D）a_1,a_2,a_3线性相关，a_1,a_2线性无关

二、填空题

1．已知$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=k$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma)=k+1$，则向量组的秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta,\gamma)=$__________.

2．已知$m\times n$矩阵A的秩为3，且A的行向量组线性无关，则$m=$______

3．设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T, a<0$；E 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $A=E-\alpha\alpha^T$， $B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$，其中 A 的逆矩阵为 B，则 a=________ .

4．下列叙述正确的有______________

① 若向量组的秩相等，则此向量组等价.

② 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，则必 $s<t$.

③ 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则矩阵 A 与 B 的行向量等价.

④ n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分条件是 $s\le n$.

5．向量组 $a_1=(2,2,7)^{\mathrm{T}}, a_2=(3,-1,2)^{\mathrm{T}}, a_3=(1,5,12)^{\mathrm{T}}$ 线性____________

6．已知向量组 a_1,a_2,a_3 的秩为3，则向量组 a_1,a_2-a_3 的秩为 ___________

7． 设 $\beta=(0,k,k^2)^{\mathrm{T}}$ 能由 $\alpha_1=(1+k,1,1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(1,1+k,1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_3=(1,1,1+k)^{\mathrm{T}}$ 唯一线性表出，则 k 满足____

8．已知秩为 3 的向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 可由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示，则向量组

β_1,β_2,β_3 必线性____________

三、计算题

1．设有向量组（I）： $\alpha_1=(1,0,2)^T$， $\alpha_2=(1,1,3)^T$， $\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$ 和向量组

（II）： $\beta_1=(1,2,a+3)^T$， $\beta_2=(2,1,a+6)^T$， $\beta_3=(2,1,a+4)^T$.

试问：当 a 为何值时，向量组（I）与（II）等价？当 a 为何值时，向量组（I）与（II）不等价？

2．(1) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均是三维列向量，且 α_1,α_2 线性无关， β_1,β_2 线性无关，证明:存在非零向量 ξ，使得 ξ 既可由 α_1,α_2 线性表出，又可由 β_1,β_2 线性表出.

(2) 当 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}-3\\-4\\3\end{pmatrix}$ 时，求所有既可由 α_1,α_2 线性表出，又可由 β_1,β_2 线性表出的向量.

3. 设列向量 $\alpha_1=(1,0,0,3)^T,\alpha_2=(1,1,-1,2)^T,\alpha_3=(1,2,a-3,1)^T,\alpha_4=(1,2,-2,a)^T$ 及 $\beta=(0,1,b,-1)^T$

(1) a,b 为何值时， β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合。

(2) a,b 为何值时， β 可由表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表出？写出表达式。

(3) a,b 为何值时， β 可由表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，且表达式不唯一，并求出表达式。

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, β 为 4 维非零列向量，$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是

$(-1,1,0,2)^T+k(1,-1,2,0)^T$，其中 k 为任意实数.

(1) 问 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

(2) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, β 的一个极大无关组.

5．设向量组 a_1,a_2 及 β_1,β_2,β_3 满足 $\begin{cases}\beta_1=c_{11}a_1+c_{12}a_2\\ \beta_2=c_{21}a_1+c_{22}a_2\\ \beta_3=c_{31}a_1+c_{32}a_2\end{cases}$ 判定 β_1,β_2,β_3 的线性相关性。

6．举例说明下列各命题是错误的。

（1）若向量组α_1，α_2，… ，α_m是线性相关的，则α_1可由α_2，α_3，… ，α_m线性表示。

（2）若向量组$\alpha_1+\beta_1$ ，$\alpha_2+\beta_2$，…，$\alpha_m+\beta_m$线性相关，则α_1，α_2，… ，α_m线性相关，β_1，β_2，…，β_m亦线性相关。

（3）若α_1，α_2，… ，α_m线性相关，β_1，β_2，…，β_m亦线性相关，则$\alpha_1+\beta_1$ ，$\alpha_2+\beta_2$，…，$\alpha_m+\beta_m$也线性相关。

（4）若α_1，α_2，… ，α_m线性无关，则α_1，α_2，… ，α_{m+1}也线性无关。

三、 证明题

1. n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，$P$为$n$阶方阵，证明：$P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n$线性无关的充分必要条件是$P$可逆。

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$都是$n$维向量，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是任一$n$维向量均可有$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出。

3. 已知向量组a_1,a_2,a_3线性相关，向量组a_1,a_2,a_4线性无关，证明：向量a_3可由向量a_1,a_2唯一线性表出.

4. 在秩为r的n阶方阵A中任取s行作一新矩阵B，证明：$r(B)\ge r+s-n.$

5．设n维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，试证：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是

D=$\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix}\neq 0$，其中$\alpha_i^T$表示列向量$\alpha_i$的转置。

6．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$是满秩的，证明：直线$\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$与直线$\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$相交于一点.

答案与提示：

一、选择题

1．D　2. A　3. B　4. B　5. C

6. D　7. C　8. B　9. D　10. D

二、填空题

1．$k+1$　2. 3　3. -1　4. 注意③可以考虑只有零解

5. 相关　6. 2　7. $\neq 0$，-3；　8. 无关

三、计算题

1．当$a \neq -1$时，向量组（I）与（II）等价. 当 a=-1 时，向量组（I）与（II）不等价.

2. 四个三维向量$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$必线性相关，故知存在不全为零的$k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$$

成立，即 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2$$

成立，其中k_1,k_2不全为零，（否则，由$-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2=0$，可推出$\lambda_1=\lambda_2=0$，这和$k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2$不全为零的矛盾）.

令 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2\neq 0$，

则ξ即为所求.

由（1）知，$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2$，

得 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0.$$

将上式齐次方程组的系数矩阵化成阶梯形矩阵，得方程通解为$(k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2)=k(1,0,-5,-3)^T$，所求向量为

$$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2=\begin{bmatrix}k\\3k\\4k\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

3. （1）$\boldsymbol{a}=1$且$\boldsymbol{b}\neq -1$时，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出；

（2）$\boldsymbol{a}\neq 1$时，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$唯一线性表出，即

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+2}{\boldsymbol{a}-1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-3}{\boldsymbol{a}-1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{\boldsymbol{b}+1}{\boldsymbol{a}-1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4。$$

（3）$\boldsymbol{a}=1$ 且 $\boldsymbol{b}=-1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，且表达式不唯一。

$$\boldsymbol{\beta}=(-1+\boldsymbol{t}_1+\boldsymbol{t}_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2\boldsymbol{t}_1-2\boldsymbol{t}_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2\in\boldsymbol{R}。$$

4. [解] 由已知，齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系为$(1,-1,2,0)^T$，所以，A 的秩为 3.

(1) β 不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, β 的一个极大无关组.

5．线性相关

6．略

四、证明题

1．提示：由$\left[\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_n\right]=\boldsymbol{P}\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\right]$知，

$$\left|\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_n\right|=\left|\boldsymbol{P}\right|\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\right|$$

2. 略

3. 利用向量的线性相关与线性表出的关系。

4. 提示： 不妨取A的前s行得B，则

$$B=\begin{bmatrix}e_1^{\mathrm{T}}\\\vdots\\e_s^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}A，故 r(B)\geq r(A)+r\begin{bmatrix}e_1^{\mathrm{T}}\\\vdots\\e_s^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}-n=r+s-n$$

5. 提示：$\boldsymbol{D}=\left|\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{bmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\right|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|^2$，$\boldsymbol{D}\neq 0$ 与 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$ 等价.

6．略