

第5章 Polya计数定理

- 1、群的定义与基本性质，子群
- 2、置换群
- 3、循环、奇置换与偶置换
- 4、Burnside引理
- 5、Polya定理

5.3 Burnside引理

(2)共轭类

$$p_1=(1)(2)(3\ 4)=(2)(1)(3\ 4), \longrightarrow (1)^2(2)^1(3)^0(4)^0$$

$$p_2=(1)(2\ 3\ 4). \longrightarrow (1)^1(2)^0(3)^1(4)^0$$

$$p_3=(1\ 2)(3\ 4). \longrightarrow (1)^0(2)^2(3)^0(4)^0$$

$$p_4=(1\ 2\ 3\ 4). \longrightarrow (1)^0(2)^0(3)^0(4)^1$$

$$p_5=(1)(2)(3)(4)=(1)(2)(4)(3)=\dots \longrightarrow (1)^4(2)^0(3)^0(4)^0$$

5.3 Burnside引理

一般可把 S_n 中任意一个置换 p 分解成若干互不相交的循环乘积：

$$p = \underbrace{(a_1 a_2 \dots a_{k_1})(b_1 b_2 \dots b_{k_2}) \dots (h_1 h_2 \dots h_{k_t})}_{t \text{项}}$$

其中 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = n$.

设其中 k 阶循环出现的次数为 $c_k, k = 1, 2, \dots, n$.

k 阶循环出现 c_k 次，用 $(k)^{c_k}$ 表示。

S_n 中的置换可按分解成格式(*pattern*)

$$(1)^{c_1} (2)^{c_2} \dots (n)^{c_n}$$

的不同而分类。

5.3 Burnside引理

S_n 中 p 的循环格式 $(1)^{c_1} (2)^{c_2} \dots (n)^{c_n}$, 满足

$$\sum_{k=1}^n k c_k = n$$

S_n 中有相同格式的置换全体构成一个**共轭类**。

定理: S_n 中属于 $(1)^{c_1} (2)^{c_2} \dots (n)^{c_n}$ 共轭类的元素的

个数为
$$\frac{n!}{c_1! c_2! \dots c_n! 1^{c_1} 2^{c_2} \dots n^{c_n}}$$

5.3 Burnside引理

证： $(1)^{c_1} (2)^{c_2} \dots (n)^{c_n}$ 格式即为

$$\underbrace{\overbrace{(\cdot) \dots (\cdot)}^{1\uparrow}}_{c_1\uparrow} \underbrace{\overbrace{(\cdot \cdot) \dots (\cdot \cdot)}^{2\uparrow}}_{c_2\uparrow} \dots \underbrace{\overbrace{(\cdot \cdot \cdot \cdot) \dots (\cdot \cdot \cdot \cdot)}^{k\uparrow}}_{c_k\uparrow}$$

$[1, n]$ 的全排列共有 $n!$ 个，每个排列依顺序填入上述格式，可得属于该共轭类的一个置换，反过来，该共轭类的每个置换都可以通过这样而得到。然而由此所得的 $n!$ 个置换中有重复，重复来自：

5.3 Burnside引理

(a)由循环 $(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_2 a_3 \dots a_k a_1) = \dots = (a_k a_1 a_2 \dots a_{k-1})$ 引起的，一个 k 阶循环可重复 k 次， c_k 个 k 阶循环共重复了 k^{c_k} 次；

(b)由互不相交的 c_k 个 k 阶循环乘积的可交换性引起的。 c_k 个 k 阶循环重复了 $c_k!$ 次。

故属于 $(1)^{c_1} (2)^{c_2} \dots (n)^{c_n}$ 共轭类的元素的个数为

$$\frac{n!}{c_1! c_2! \dots c_n! 1^{c_1} 2^{c_2} \dots n^{c_n}}$$



5.3 Burnside引理

例: S_4 中 $(2)^2$ 共轭类有 $\frac{4!}{2! 2^2} = 3$ 个置换, 即

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$$

类 $\{0,2,0,0\}$:

类 $\{1,0,1,0\}$: $(1)^1(3)^1$ 共轭类有 $\frac{4!}{1! 3!} = 8$ 个置换, 即

$$(123), (124), (132), (134),$$

$$(142), (143), (234), (243).$$

类 $\{4,0,0,0\}$: $(1)^4$ 共轭类的个数: $\frac{4!}{4! 0! 0! 0! 1!} = 1 \cdot (1)(2)(3)(4)$

类 $\{0,0,0,1\}$: $(4)^1$ 共轭类的个数: $\frac{4!}{0! 0! 0! 1! 1^0 2^0 3^0 4^1} = 6$

$$(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)$$

类 $\{2,1,0,0\}$: $(1)^2(2)^1$ 共轭类的个数: 6个。 $(1)(2)(3\ 4)$,
 $(1)(3)(2\ 4), (1)(4)(2\ 3), (2)(3)(1\ 4), (2)(4)(1\ 3), (3)(4)(1\ 2).$

5.3 Burnside引理

(3) k 不动置换类

设 G 是 $[1, n]$ 上的一个置换群. $G \leq S_n$. $k \in [1, n]$, G 中使 k 保持不变的置换全体, 称为 k 不动置换类, 记做 F_k .

定理5.3.2 置换群 G 的 k 不动置换类 F_k 是 G 的一个子群.

封闭性: $k \xrightarrow{P_1} k \xrightarrow{P_2} k, k \xrightarrow{P_1 P_2} k$.

结合性: 自然。

单位元: G 的单位元属于 F_k .

逆元: $P \in F_k, k \xrightarrow{P} k, k \xrightarrow{P^{-1}} k$ 于是, $P^{-1} \in F_k$

$\therefore F_k \leq G$.

5.3 Burnside引理

定理5.3.3 设 G 是 $[1, n]$ 上的一个置换群, Ei 是 $[1, n]$ 在 G 的作用下包含 i 的等价类, Fi 是 i 不动置换类。则有

$$|Ei||Fi|=|G|, i=1,2,\dots,n$$

证明: 假设 $|Ei|=l$,不妨设 $Ei=\{a_1, \dots, a_l\}$.

$\exists i \in Ei, \exists p_k \in G$, 使得 $i \xrightarrow{p_k} a_k, k=1,2,\dots,l$.

构造 $G_k = Fi p_k = \{p | p_j \circ p_k, p_j \in Fi\}$, 则

$\forall p \in G_k, i \xrightarrow{p} a_k, G_{i_1} \cap G_{i_2} = \emptyset, i_1 \neq i_2$

$\therefore \bigcup_{k=1}^l G_k$ 包含于 G 。

5.3 Burnside引理

$$(2) \forall p \in G, \exists a_k \in E_i, i \xrightarrow{p} a_k,$$

$$\exists p_k, i \xrightarrow{p_k} a_k, \therefore \exists p_k^{-1}, a_k \xrightarrow{p_k^{-1}} i,$$

$$\therefore i \xrightarrow{p \circ p_k^{-1}} i, \therefore p \circ p_k^{-1} \in F_i, \therefore p \in F_i p_k = G_k,$$

$$\therefore G \text{ 包含于 } \bigcup_{k=1}^l G_k$$

$$G = F_i \cdot p_1 \bigcup F_i \cdot p_2 \bigcup \dots \bigcup F_i \cdot p_l$$

$$\begin{aligned} |G| &= |F_i \cdot p_1| + |F_i \cdot p_2| + \dots + |F_i \cdot p_l| \\ &= |F_i| + |F_i| + \dots + |F_i| = l|F_i| = |E_i| \cdot |F_i| \end{aligned}$$

5.3 Burnside引理

定理5.3.4 设 $G = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}, (G, \circ)$ 是 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 上的置换群，则在该群的作用下， N 可分拆成

$$l = \frac{1}{|G|} (c_1(p_1) + c_1(p_2) + \dots + c_1(p_m))$$

个不同的等价类。 $c_1(p_i)$ 表示置换 p_i 中 1 阶循环的个数， $i=1, 2, \dots, m$ 。

5.3 Burnside引理

例： $G=\{e,(12),(34),(12)(34)\}$.

$c_1(p_1)=4, c_1(p_2)=2, c_1(p_3)=2, c_1(p_4)=0$.

$l=[4+2+2+0]/4=2$. 以列表分析：

$S_{jk} \backslash k$ p_j	1 2 3 4	$c_1(p_j)$	
$(1)(2)(3)(4)$	1 1 1 1	4	$(1)^4$
$(12)(3)(4)$	0 0 1 1	2	$(1)^2(2)^1$
$(1)(2)(34)$	1 1 0 0	2	$(1)^2(2)^1$
$(12)(34)$	0 0 0 0	0	$(2)^2$
$ F_k \rightarrow$	2 2 2 2	8	

$$S_{jk} = \begin{cases} 1, & k^{p_j} = k, \\ 0, & k^{p_j} \neq k. \end{cases}$$

5.3 Burnside引理

一般而言，与上表相仿，有如下表格，其中

$$S_{jk} = \begin{cases} 1, & k^{p_j} = k, \\ 0, & k^{p_j} \neq k. \end{cases}$$

$\begin{matrix} S_{jk} \\ p_j \end{matrix} \backslash k$	1	2	...	n	$c_1(p_j)$
p_1	S_{11}	S_{12}	...	S_{1n}	$c_1(p_1)$
p_2	S_{21}	S_{22}	...	S_{2n}	$c_1(p_2)$
...	
p_g	S_{g1}	S_{g2}	...	S_{gn}	$c_1(p_g)$
$ F_k $	$ F_1 $	$ F_2 $...	$ F_n $	$\sum_{k=1}^n F_k = \sum_{j=1}^g c_1(p_j).$

5.3 Burnside引理

设在 G 作用下, $[1, n]$ 分成 l 个等价类。

$$[1, n] = E_1 + E_2 + \dots + E_l.$$

若 i, j 同属一个等价类, 则 $E_i = E_j, |E_i| = |E_j|$

因 $|E_i||F_i| = |G|$, 故 $|F_i| = |F_j|$. 所以

$$\sum_{k=1}^n |F_k| = \sum_{i=1}^l \sum_{k \in E_i} |F_k| = \sum_{i=1}^l |E_i| |F_i| = l |G|$$

$$l = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^n |F_k| = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^g c_1(p_j)$$

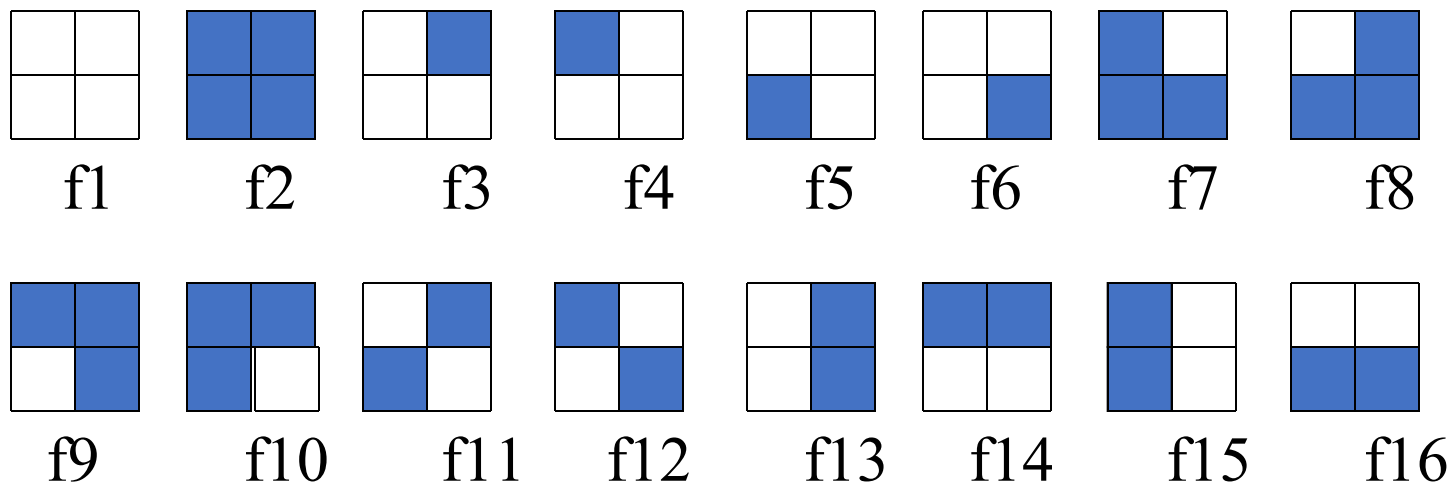
5.3 Burnside引理

例：一正方形分成4格，2着色，有多少种方案？

图象：看上去不同的图形。

方案：经过转动相同的图象算同一方案。

图象数总是大于方案数。



5.3 Burnside引理

- $N=\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{16}\}$ —图像集合。
- 置换群: $G=\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.
- 不动: $p_1=(1)(2)\dots(16)$
- 逆时针转 90° : $p_2=(1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)$
 $(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$
- 顺时针转 90° : $p_3=(1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)$
 $(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$
- 转 180° : $p_4=(1)(2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)$
 $(11)(12)(13\ 15)(14\ 16)$
- $(16+2+2+4)/4=6$ (种方案)

- **Burnside 引理的前提**：要列出各种涂色方案，方可利用置换的性质将方案分为不同的等价类进行计数。
- **不足**：当被染色的对象的个数 n 或颜色数 m 较大时，问题就变得非常复杂，且工作量很大
- **原因**：因为首先各种染色方案共有 m^n 个，一个个枚举出来是比较困难的；其次还要找出在各种置换下互相等价的方案可能更加困难

- Polya问题描述:

设有 n 个对象，今用 m 种颜色对其染色，其中每个对象任涂一种颜色，问有多少种不同的染色方案？其中，对 n 个对象作某一置换，若其中一种染色方案变为另一种方案，则认为该两个方案是相同的，或者说是等价的。

- 问题描述（从集合与置换角度）：
- S 是有 n 个元素的集合， Q 是 S 上的置换群， C 是 m 种颜色的集合，用 C 中的颜色对 S 中的元素染色，对每个元素任选一色染之，共有多少种不等价的方案。
- 等价方案的定义：
- 两种方案称为等价，是指存在 $q \in Q$ ，将 S 中元素的一种染色方案变为另一种方案。

- 用Burnside引理：首先要考虑所有的染色方案构成一集合

$$C^S = \{f \mid f : S \xrightarrow{\text{映射}} C\} \quad (|C^S| = m^n)$$

- 再按照 C^S 上的置换 $p \in G$ ，将各种方案分为不同等价类。这样做是很困难的，尤其是 m^n 种染色方案不易描绘出来。

- 重新考虑问题:

首先, 映射 $f: S \rightarrow C$, 规定了 S 中诸元素的一种染色方案, 将 $a \in S$ 染上颜色 $f(a) \in C$ 。所有 f 构成集合 C^S , $|C^S| = |C|^{|S|} = m^n$ 。

- 实际上有两种置换群, G 与 Q , Q 作用在集合 S 上, G 作用在方案集 C^S 上。
- 两个群之间有内在联系: 对应于 $q \in Q$, 相应地在 C^S 上诱导出一个置换 $p \in G$, 且有

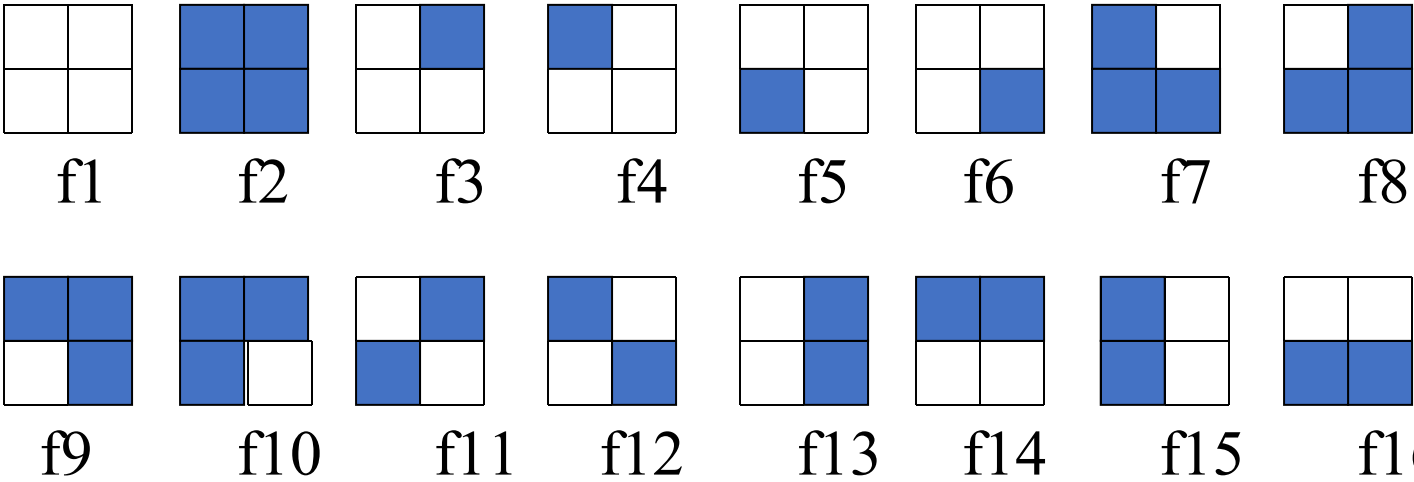
$$c_1(p) = m^{c(q)}$$

$c(q)$ 为置换 q 中不相交循环的个数。

特例， $n=4$ ， $m=2$ 仍用黑白两色染四个小正方形， 被染色的对象集 $S=\{1, 2, 3, 4\}$ ， 颜色集 $C=\{\text{黑}, \text{白}\}$ ， 方案集 $C^S=\{ \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_{16}\}$ 。

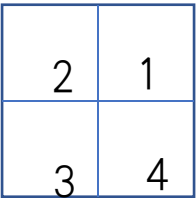
这里， $Q=\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ， 是针对 S 的置换集（绕大的正方形中心逆时针旋转）：

Q:
$$\begin{cases} q_1 = (1)(2)(3)(4), & \text{旋转}0^\circ \\ q_2 = (1234), & \text{旋转}90^\circ \\ q_3 = (13)(24), & \text{旋转}180^\circ \\ q_4 = (4321), & \text{旋转}270^\circ \end{cases}$$



而对应于 C^S 上的置换集为： $G=\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

G:
$$\begin{cases} p_1 = (f_1)(f_2)\cdots(f_{16}) \\ p_2 = (f_1)(f_2)(f_3f_4f_5f_6)(f_7f_8f_9f_{10}) \\ \qquad \qquad \qquad (f_{11}f_{12})(f_{13}f_{14}f_{15}f_{16}) \\ p_3 = (f_1)(f_2)(f_3f_5)(f_4f_6)(f_7f_9)(f_8f_{10}) \\ \qquad \qquad \qquad (f_{11})(f_{12})(f_{13}f_{15})(f_{14}f_{16}) \\ p_4 = (f_1)(f_2)(f_6f_5f_4f_3)(f_{10}f_9f_8f_7) \\ \qquad \qquad \qquad (f_{11}f_{12})(f_{16}f_{15}f_{14}f_{13}) \end{cases}$$



$c(q_i)$ 与 $c_1(p_i)$ 的对应关系:

$$c(q_1) = 4 \longleftrightarrow c_1(p_1) = 16 = 2^4$$

$$c(q_2) = 1 \longleftrightarrow c_1(p_2) = 2 = 2^1$$

$$c(q_3) = 2 \longleftrightarrow c_1(p_3) = 4 = 2^2$$

$$c(q_4) = 1 \longleftrightarrow c_1(p_4) = 2 = 2^1$$

内在原因: 若将置换 q_i 的每一个轮换因子中的点染以同一种颜色, 所得各种染法正是图案集 C^S 中那些在 p_i 作用下不变的方案。

定理5.4.1 设 $G = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ 是作用于 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 上的一个置换群，假定用 K 中颜色对 N 中的元素着色，并用 $c(q_i)$ 表示置换 q_i 的不交循环个数，则着色后的不同方案数为：

$$l = \frac{1}{|G|} (K^{c(q_1)} + K^{c(q_2)} + \dots + K^{c(q_m)}).$$

5.4 Pólya计数定理

$$\overline{P_1}=(a)(b)(c)(d), P_1=(1)(2)\dots(16)$$

$$\overline{P_2}=(abcd), P_2=(1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$$

$$\overline{P_3}=(dcba), P_3=(1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$$

$$\overline{P_4}=(ac)(bd), P_4=(1)(2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)(11)(12)(13\ 15)(14\ 16)$$

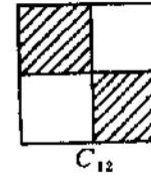
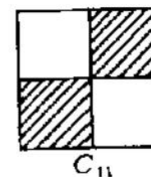
$$C(\overline{P_1})=4, C_1(P_1)=16=2^{C(\overline{P_1})}$$

$$C(\overline{P_2})=1, C_1(P_2)=2=2^{C(\overline{P_2})}$$

$$C(\overline{P_3})=1, C_1(P_3)=2=2^{C(\overline{P_3})}$$

$$C(\overline{P_4})=2, C_1(P_4)=4=2^{C(\overline{P_4})}$$

b	a
c	d



举例

例 等边三角形的3个顶点用红，蓝，绿3着色，
有多少种方案？

解：保持不变的变换群包括沿中心旋转0，120，
240度和沿三条中线的翻转，即

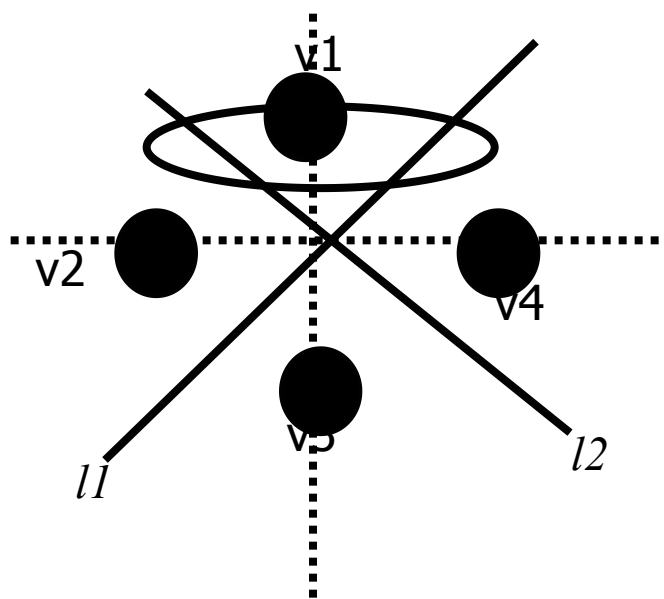
$$G = \{(1)(2)(3), (123), (321), (1)(23), (2)(13), (3)(12)\}$$

故不同的方案数为

$$L = \frac{1}{6}(3^3 + 3 + 3 + 3^2 + 3^2 + 3^2) = 10$$

- **例** 现有形状相同的蓝、白、黑珠子各若干颗，数量不限。假定用它们串成四珠手链，问有多少种方案？

解： 对象集合： $N = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.



绕中心点顺时针旋转0度：

$$p_1 = (v_1)(v_2)(v_3)(v_4);$$

绕中心点顺时针旋转90度： $p_2 = (v_1 v_2 v_3 v_4);$

绕中心点顺时针旋转180度： $p_3 =$

$$(v_1 v_3)(v_2 v_4);$$

绕中心点顺时针旋转270度： $p_4 = (v_4 v_3 v_2 v_1);$

绕垂直对称轴： $p_5 = (v_1)(v_3)(v_2 v_4);$

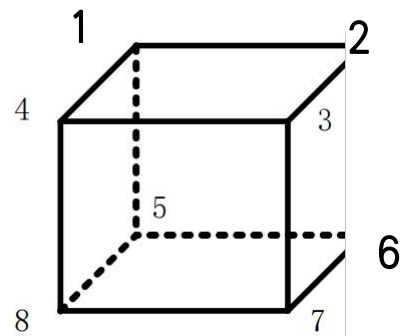
绕水平对称轴： $p_6 = (v_2)(v_4)(v_1 v_3);$

绕 l_1 ： $p_7 = (v_1 v_4)(v_2 v_3);$

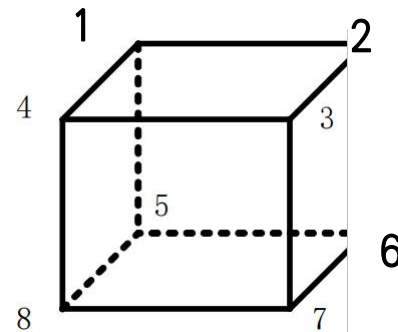
绕 l_2 ： $p_8 = (v_1 v_2)(v_3 v_4);$

- $G=\{p_1,p_2,p_3,\dots,p_8\}$, 构成一个置换群。
- $|G|=8$; $c(p_1) = 4$; $c(p_2) = 1, c(p_3)=2; c(p_4) = 1$; $c(p_5) = 3, c(p_6) = 3, c(p_7) = 2$; $c(p_8) = 2$;
根据polya定理, $l = \frac{1}{8} (3^4 + 3^1 + 3^2 + 3^1 + 3^3 + 3^3 + 3^2 + 3^2) = 21$

例：用2种颜色给正6面体的8个顶点着色，有多少方案？



例5.13 用2种颜色给正6面体的8个顶点着色, 有多少方案



解: 用顶点的置换表示:

1. 面心-面心

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3 \ 2)(5 \ 8 \ 7 \ 6)$$

■ $+90^\circ$
格式 $(4)^2$ 共3个

■ -90°

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3 \ 4)(5 \ 6 \ 7 \ 8)$$

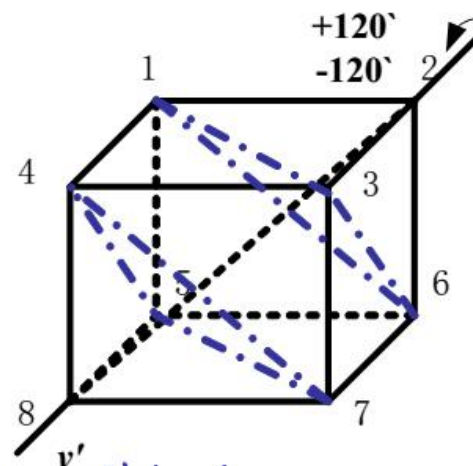
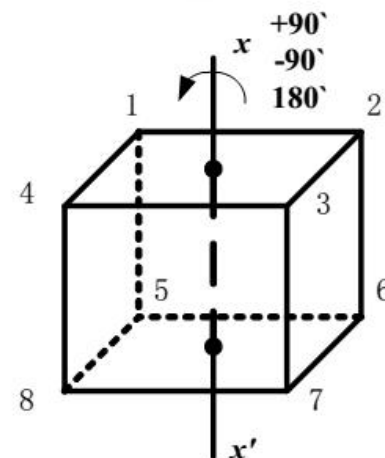
格式 $(4)^2$ 共3个

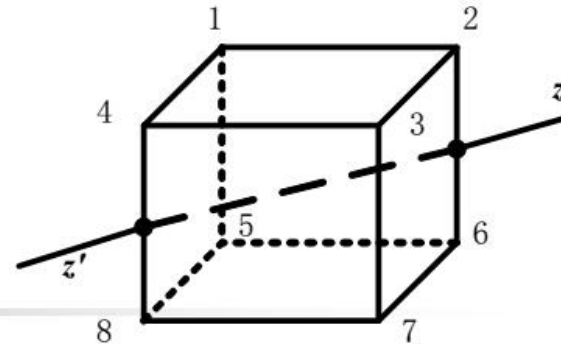
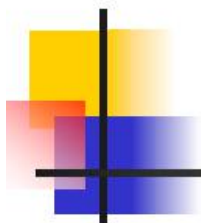
■ 180° (13) (24) (57) (68) 格式 $(2)^4$ 共3个

2. 顶点-顶点

■ $+120^\circ$ (2)(8)(136) (475) 格式 $(1)^2(3)^2$ 共4个

■ -120° (2)(8)(631) (574) 格式 $(1)^2(3)^2$ 共4个





■ 棱中-棱中

沿 zz' 转 180° (17) (35) (48) (26) 格式 $(2)^4$ 共六个

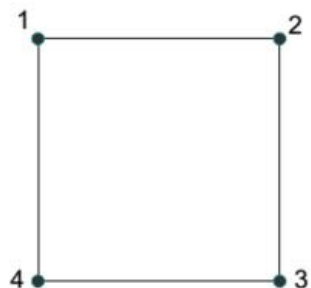


不动 (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) 格式 $(1)^8$ 共一个

■ 所以，共有 $\frac{1}{24} * (6 * 2^2 + 3 * 2^4 + 8 * 2^4 + 6 * 2^4 + 2^8) = 23$

母函数型式的Pólya定理

例5.16：有3种不同颜色的珠子，串成4颗珠子的项链，
有多少种方案？有哪些方案？



母函数型式的Pólya定理

例5.16：有3种不同颜色的珠子，串成4颗珠子的项链，
有多少种方案？有哪些方案？

■ 解：正4边形的运动群，共有8个元素

■ 绕心转 90° (1234) 格式 $(4)^1 \Rightarrow 3^1$

-90° (4321) 格式 $(4)^1 \Rightarrow 3^1$

180° (13)(24) 格式 $(2)^2 \Rightarrow 3^2$

■ 绕轴翻转 (12)(34) 格式 $(2)^2 \Rightarrow 3^2$

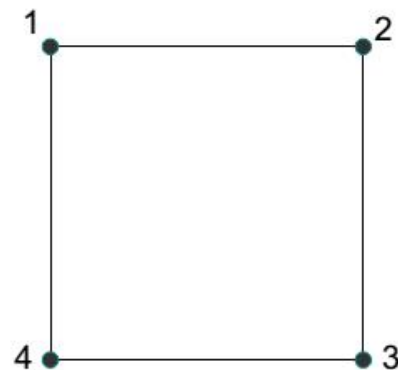
(14)(23) 格式 $(2)^2 \Rightarrow 3^2$

(1)(3)(24) 格式 $(1)^2(2) \Rightarrow 3^3$

(2)(4)(13) 格式 $(1)^2(2) \Rightarrow 3^3$

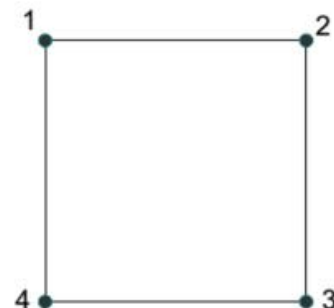
■ 不动 (1)(2)(3)(4) 格式 $(1)^4 \Rightarrow 3^4$

■ 所以方案个数为： $[2 \cdot 3^1 + 3^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3^4]/8 = 21$



母函数型式的Pólya定理

- 绕心转 90° (1234) 格式 $(4)^1$ $3^1 \Rightarrow b^4 + g^4 + r^4$
 -90° (4321) 格式 $(4)^1$ $3^1 \Rightarrow b^4 + g^4 + r^4$
 180° (13)(24) 格式 $(2)^2$ $3^2 \Rightarrow (b^2 + g^2 + r^2)^2$
- 绕轴翻转 (12)(34) 格式 $(2)^2$ $3^2 \Rightarrow (b^2 + g^2 + r^2)^2$
 (14)(23) 格式 $(2)^2$ $3^2 \Rightarrow (b^2 + g^2 + r^2)^2$
 (1)(3)(24) 格式 $(1)^2(2)$ $3^3 \Rightarrow (b + g + r)^2(b^2 + g^2 + r^2)$
 (2)(4)(13) 格式 $(1)^2(2)$ $3^3 \Rightarrow (b + g + r)^2(b^2 + g^2 + r^2)$
- 不动 (1)(2)(3)(4) 格式 $(1)^4$ $3^4 \Rightarrow (b + g + r)^4$



属于同一循环的元素涂同一种颜色



可以得到一个关于 b, g, r 的多项式，多项式的展开项即为具体的方案数

$$\begin{aligned} P(b, g, r) &= [2(b^4 + g^4 + r^4) + 3(b^2 + g^2 + r^2)^2 + \\ &\quad 2(b + g + r)^2(b^2 + g^2 + r^2) + (b + g + r)^4] / 8 \\ &= b^4 + g^4 + r^4 + b^3g + b^3r + bg^3 + br^3 + g^3r + gr^3 + 2b^2g^2 + 2b^2r^2 \\ &\quad + 2g^2r^2 + 2b^2gr + 2bg^2r + 2bgr^2 \end{aligned}$$

- 上面的多项式共有21个不同的项，所以共有21种方案。

每个方案可用多项式中的项表示如：

b^4 表示4颗珠子全部用蓝色；

bg^2r 表示一颗珠子用蓝色，二颗用绿色，一颗用红色...

母函数形式的Pólya定理：设 $G=\{p_1, p_2, \dots, p_g\}$ 是 Ω (共有 n 个元素) 上的一个置换群， $C(p_k)$ 是置换 p_k 的循环的个数，用 M 中的颜色对 Ω 中的元素着色，着色方案数为

$$\frac{1}{|G|} \left[m^{C(p_1)} + m^{C(p_2)} + \dots + m^{C(p_g)} \right] \quad (1)$$

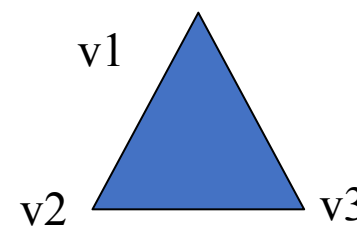
令 $c_k(p_i)$ 代表置换 p_i 的作用在 Ω 上所得的阶为 k 的循环个数

$$m^{C(p_i)} \Rightarrow (b_1 + b_2 + \dots + b_m)^{c_1(p_i)} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2)^{c_2(p_i)} \dots (b_1^n + b_2^n + \dots + b_m^n)^{c_n(p_i)}$$

将上式代入(1)可以得到polya母函数(循环指数多项式)为

$$\begin{aligned} (G) &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^g \prod_{k=1}^n s_k^{c_k(p_i)} \\ &= \frac{1}{|G|} \left[s_1^{c_1(p_1)} s_2^{c_2(p_1)} \dots s_n^{c_n(p_1)} + s_1^{c_1(p_2)} s_2^{c_2(p_2)} \dots s_n^{c_n(p_2)} \right. \\ &\quad \left. + s_1^{c_1(p_g)} s_2^{c_2(p_g)} \dots s_n^{c_n(p_g)} \right] \quad \text{其中 } s_i = (b_1^i + b_2^i + \dots + b_m^i), \quad i=1, 2, \dots \end{aligned}$$

例 对空间等边三角形的三个顶点用 b_1, b_2, b_3 三种颜色着色，试问有多少种不同方案？并给出具体方案



解: (1)对象集: $N=\{v_1, v_2, v_3\}$;
(2)全部刚体对称变换构成3阶对称群 S_3 ,
 $q_1=(v_1)(v_2)(v_3)$,
 $q_2=(v_1 v_2 v_3)$,
 $q_3=(v_3 v_2 v_1)$,
 $q_4=(v_1)(v_2 v_3)$, $q_5=(v_2)(v_1 v_3)$, $q_6=(v_3)(v_1 v_2)$.
绕中心顺时针旋转0度, 120度, 240度, 绕顶点 v_i 的轴线180度。

- 根据polya计数定理，不同方案数为：
- $l = \frac{1}{|G|} (3^{c(q_1)} + 3^{c(q_2)} + \dots + 3^{c(q_6)}) =$
 $\frac{1}{6} (3^3 + 3^1 + 3^1 + 3^2 + 3^2 + 3^2) = 10$
- 具体方案为：

$$\frac{1}{6} \left((b_1 + b_2 + b_3)^3 + 2(b_1^3 + b_2^3 + b_3^3) + 3(b_1 + b_2 + b_3)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \right)$$

$$= b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + b_1 b_2 b_3 + b_1^2 b_2 + b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2 + b_1 b_3^2 + b_2 b_3^2 + b_2^2 b_3$$

- **例** 图的计数问题。设图 $G=\{V,E\}$, $V=\{1,2,3\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3\}$. 是一个完全图 K_3 , 试用polya定理给出 K_3 上所有不同构的生成子图 $H=\{V,E_H\}$.

解: $\forall e \in E$, e 出现则染黑色, e 不出现则染白色。

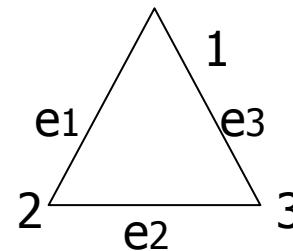
对象集合: $E=\{e_1,e_2,e_3\}$

$V=\{1,2,3\}$ 上的置换群:

$S_3=\{p_1=(1)(2)(3), p_2=(1\ 2\ 3), p_3=(3\ 2\ 1), p_4=(1)(2\ 3), p_5=(2)(1\ 3), p_6=(3)(1\ 2)\}$.

E 上的置换群:

$G=\{q_1=(e_1)(e_2)(e_3), q_2=(e_1\ e_2\ e_3), q_3=(e_3\ e_2\ e_1), q_4=(e_2)(e_1\ e_3), q_5=(e_3)(e_1\ e_2), q_6=(e_1)(e_2\ e_3), \}$



- 根据polya定理推广形式,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left((b_1 + b_2)^3 + 2(b_1^3 + b_2^3) \right. \\ & \quad \left. + 3(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2) \right) \\ & = b_1^3 + b_2^3 + b_1 b_2^2 + b_1^2 b_2 \end{aligned}$$

