第六章 鸽巢原理

6.1 鸽巢原理的形式

鸽巢原理，也叫“抽屉原理”，解决了“存在性”问题。简单形式如下：

定理 6.1.1 如果把n+1个鸽子放入n个鸽巢，那么至少有一个鸽巢中有两个或更多的鸽子.

例 （1）在13个人中至少有两个人在同一个月过生日.
（2）10双鞋中，任意取11只，至少有2只鞋是原配的一双。

6.1 鸽巢原理：利用化分集合来构造“鸽巢”

例 从1到$2n$的正整数中任取$n+1$个，则这$n+1$个数中至少有一对数，其中一个是另一个的倍数.

证： 设这$n+1$个数是 $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$

对每一个数去掉一切2的因子，直至剩下一个奇数为止．例如，$68=2\times2\times17$，则去掉2×2，只留下17．那么会得到一个由奇数组成的序列 $b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}$

1到$2n$之间只有n个奇数，故序列$\{b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}\}$中至少有两个是相同的．设$b_i=b_j=b$，则$a_i=2^p b$，$a_j=2^q b$，$\frac{a_j}{a_i}=2^{q-p}$.显然，其中一个是另一个的倍数．

可以看出，应用鸽巢原理可以巧妙的解决看似复杂的问题，关键：如何构造问题中的“鸽子”和“鸽巢”.

6.1 鸽巢原理

例 设x, y, z是三个任意的整数，则x+y, x+z及y+z中至少有一个偶数。

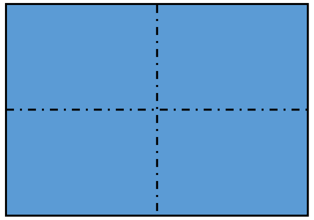
证明：设有B1，B2两个盒子分别放奇数和偶数。则三个数x，y，z至少有两个同处一个盒子，即具有相同的奇偶性。不妨设x,y放入同一个盒子，则x+y为偶数。

同理，x−y，x−z，y−z至少也有一个偶数。

6.1 鸽巢原理:利用划分图形构造“鸽巢”

例：边长为$\sqrt{2}$ 的正方形中任取5点，则至少有两个点的距离不超过1.

证：　划分4个全等的小正方形，5个点放入四个正方形中，至少有一个正方形内不少于2个点。小正方形上点对之间的距离最大为1.



6.1 鸽巢原理

例 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$是正整数序列，则至少存在一个k和 l, $1 \le k \le l \le m$，使得和$a_k + \cdots + a_l$ 是m的倍数。

证明：设 $S_h = \sum_{i=1}^{h} a_i$, $S_h \equiv r_h (\text{mod}\ m)$, $0 \le r_h \le m-1$.
$h = 1, 2, \cdots, m$.
若存在 l, $S_l \equiv 0\ (\text{mod}\ m)$，则命题成立.
否则，$1 \le r_h \le m-1$. 对所有$h = 1, 2, \cdots, m$.
由鸽巢原理，故存在 $r_{k-1} = r_l$, 即$S_{k-1} \equiv S_l$,
不妨设 $l > k-1$. 则

$$S_l - S_{k-1} = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_l \equiv 0\ (\text{mod}\ m)$$

6.1 鸽巢原理

例 设$a_1, a_2, \cdots, a_{100}$是由1和2组成的序列，已知从其任一数开始连续10个数的和不超16．即

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+9} \le 16,\quad 1 \le i \le 91$$

则至少存在一对h和k，$k > h$，使得 $a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$

证明： 设$S_h = \sum_{i=1}^{h} a_i$，$h = 1, 2, \ldots, 100$

则 $S_1 < S_2 < \ldots < S_{100}$，且 $S_{100} = (a_1 + \ldots + a_{10}) + (a_{11} + \ldots + a_{20}) + \ldots + (a_{91} + \ldots + a_{100})$

6.1 鸽巢原理

根据假定有 $S_{100} \le 10 \times 16 = 160$

作序列$S_1, S_2, \ldots, S_{100}, S_1+39, \ldots, S_{100}+39$.

共200项. 其中最大项 $S_{100}+39 \le 160+39$

由鸽巢原理，必有两项相等.

而且必是前段中某项与后段中某项相等. 设

$$S_k = S_h + 39，k>h \quad S_k - S_h = 39$$

即 $a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$

例 一名象棋大师有11周时间准备一场锦标赛，她决定每天至少下一盘棋，为了不能太累，一周中下棋的次数不能多于12盘。证明：她一定在此期间的连续若干天中恰好下棋21盘。

分析：1、题干提供的信息：一共11周

2、约束条件：

- 每周最多下12盘棋
- 每天至少下1盘棋

3、证明：连续若干天共下棋21盘

4、解题途径：构造下棋盘数的部分

证明：令b_1，b_2，$\cdots$，b_{77}分别为这11周中每天下棋的次数，并作部分和

$a_1=b_1$,

$a_2=b_1+b_2$,

$\cdots$,

$a_{77}=b_1+b_2+\cdots+b_{77}$.

根据题意，有$b_i\geqslant 1(1\leqslant i\leqslant 77)$,且$b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{i+6}\leqslant 12(1\leqslant i\leqslant 71)$,

所以有：$1\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{77}\leqslant 12\times 11=132$

构造数列：$\{a_1,a_2,\cdots,a_{77},a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21\}$,

取值范围：$[1,132+21=153]$，共有154项，由鸽舍定理知，其中必有两项相等。

由于$a_1,a_2,\cdots$，a_{77}这77项互不相等，所以：$a_1+21,a_2+21,\cdots,$ $a_{77}+21$这77项也互不相等，所以一定存在$1\leqslant i<j\leqslant 77$，使得 $a_j=a_i+21$.

因此，　$21= a_j-a_i$

$=(b_1+b_2+\cdots+b_i+b_{i+1}+\cdots+b_j)-(b_1+b_2+\cdots+b_i)$

$= b_{i+1}+b_{i+2}+\cdots+b_j$.

这说明从第$i+1$天到第j天这连续$j-i$天中，她刚好下了21盘棋。

例 设$a_1, a_2, \ldots, a_m$满足条件：

（1）$a_i \geq 1, i = 1,2, \ldots, m$;

（2）$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots a_{i+n} \leq p, i = 0,1,2\ldots, n(m-1)$

的正整数序列。若要一定存在正整数h,k，$h \leq k$, 使得$a_h + a_{h+1} + \ldots a_k = q$，试推出m,n,p,q应满足的关系式。

6.1 一般的鸽巢原理

定理 6.1.2 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正整数. 如果把$a_1+a_2+\cdots+a_n-n+1$个鸽子住入n个鸽巢，那么或者第一个鸽巢至少住入a_1个鸽子，或者第二个鸽巢至少住入a_2个鸽子，……，或者第n个鸽巢至少住入a_n个鸽子。

证明 （反证法）设将$a_1+a_2+\cdots+a_n-n+1$个鸽子住入n个鸽巢中. 如果对于每个$i=1,2,\cdots,n$，第i个鸽巢都不能住入a_i个或更多的鸽子，那么所有鸽巢中的鸽子总数不超过

$$(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)=a_1+a_2+\cdots+a_n-n$$

比原鸽子数少1.

因此，必存在某个i，使得第i个鸽巢至少含有a_i个鸽子.

6.1 鸽巢原理

在定理6.1.2中，如果令$a_i = 2(i = 1,2,\ldots,n)$，就是定理6.1.1。
如果$a_i = m(i = 1,2,\ldots,n)$，则变成了：

推论 1 若把$n(\mathrm{m}-1)+1$个鸽子住入n个鸽巢，那么至少有一个鸽巢中有m个鸽子住入.

推论 2 若将m个鸽子放入n个鸽巢中，则至少有一个鸽巢中有不少于 $\left\lfloor\frac{\mathrm{m}-1}{n}\right\rfloor+1$ 只鸽子.

推论 3 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$是n个整数，而且$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} > r-1$则$a_1,a_2,\ldots,a_n$中至少有一个数不小于$r$.

例 将集合{1,2,⋯,16}任意拆分成3部分，则其中必有一个部分，有x,y,z,满足 x+y = z.

证明：设A_1,A_2,A_3是这样的集合，

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = N,\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

根据鸽舍原理，一定存在某个A_i，使得A_i元素的个数不小于 $[\frac{16-1}{3}]+1 = 6$

不妨设A1={a1,a2,a3,a4,a5,a6}，并假定a1<a2<a3<a4<a5<a6.

令b_1 = a2-a1, b2=a3-a1, b3=a4-a1, b4=a5-a1, b5=a6-a1

则 $1<b_1<b_2<b_3<\ldots<b_5<16$

若存在某个 $b_i \in A_1$，则结论成立。

否则若 b_i 都不属于A1，则 $b_i \in A_2$或者A_3

根据鸽巢原理，设A2至少包含[(5－1)／2]+1＝3个元素，设为 b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}

- 令 $A_2=\{b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \ldots.\}$ 。再令 $c_1=b_{i2}-b_{i1}, c_2=b_{i3}-b_{i1}$ ，且 $1<c_1<c_2<16$
- 若存在 $c_i \in A_2$ ， 则得证。
- 否则如果 $c_1, c_2 \notin A_2$，则一定 $c_1, c_2 \in A_3$
- 否则，1＜c2－c1＜16， $c_2-c_1 \notin \bigcup_{i=1}^{3} A_3$，矛盾。

6.1 鸽巢原理

定理6.1.3 （Erdos-Szekeres,1935）

试证：有mn+1不同实数构成的数列：$a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$，中必有一个$(m+1)$项的递增子序列或$(n+1)$的递减子序列.

证1 li:以 a_i 为首选取最长的递增子序列，设其长度为l_i，从而得序列

$L = \{ l_1, l_2, \ldots, l_{mn+1} \}$.

若存在 $l_k \geq m+1$，则结论成立.

6.1 鸽巢原理

否则所有的 $l_i \in [1, m]$,其中必有 $[\frac{m+1-1}{m}]+1=n+1$

个相等，于是设

$$l_{i_1}=l_{i_2}=\cdots=l_{i_n}=l_{i_{n+1}}$$

不妨设 $i_1<i_2<\cdots<i_{n+1}$,

应有 $a_{i_1}>a_{i_2}>\cdots>a_{i_{n+1}}$,

即有一长度为$n+1$的减子列.

例 设$A=(a_{ij})$是一个（m+1）行和$m\binom{m+1}{2}+1$列的矩阵，A上任意分布m个不同的实数。

试证：至少存在不同的两行和相异的两列，使得它们交汇点的4个实数相等，即有$i_1, i_2, i_3, i_4,$使得$a_{i_1j_1}=a_{i_1j_2}=a_{i_2j_1}=a_{i_2j_2}$

6.1 鸽巢原理

例 一个抽屉里由20件衬衫，其中4件蓝色，7件灰色，9件红色.从中随意取出至少多少件，才能保证有4件是同色的？保证5，6，7，8，9件同色呢？

解：由鸽巢原理：n个鸽巢，(m-1)n+1只鸽子，则至少存在一个鸽巢，使得该鸽巢中至少有m只鸽子。

(1) 这时n=3，m=4，于是

$$(m-1)n+1 = 10$$

即随意抽取10件能保证有4件是同色的。

(2) 不能直接用鸽巢原理。考虑最坏情形，在所抽取的衬衫中有4件是蓝的。

这时n=2，m=5，应抽取

$$4+(m-1)n+1 = 13$$

即随意抽取13件能保证有5件是同色的。

(3) 同样假设在所抽取的衬衫中有4件是蓝的。

这时n=2，m=6，应抽取

$$4+(m-1)n+1 = 15$$

即随意抽取15件能保证有6件是同色的。

6.2 Ramsey数

6.2.1 Ramsey问题与Ramsey数

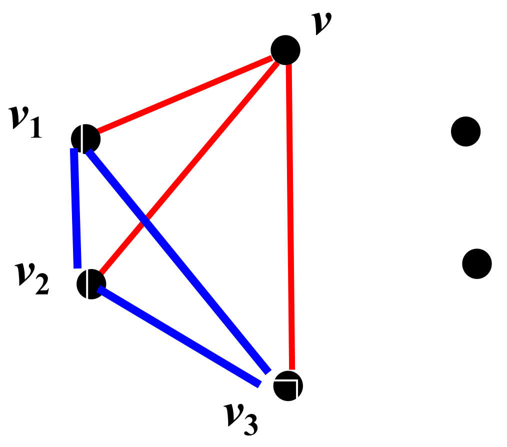
1928年, 年仅24岁的英国杰出数学家Ramsey发表了著名论文《论形式逻辑中的一个问题》, 在这篇论文中, 提出并证明了关于集合论的一个重大研究成果, 现称为Ramsey定理.

Ramsey问题可以看成是鸽巢原理的推广.

Ramsey数

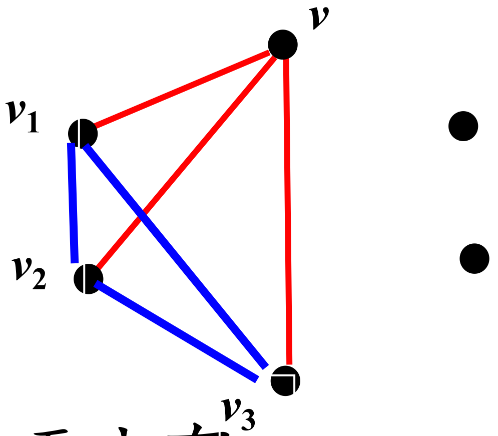
提法一　6 个人中至少存在 3 人相互认识或者相互不认识 .(美国数学月刊)

- 每个人用一个顶点表示，若两个人互相认识，则对相应的两个顶点之间的边着红色，若两个人互相不认识，则对相应的两个顶点之间的边着蓝色。这样问题就转化为：



Ramsey数

提法二：给定一个6个顶点的完全图K_6，用红、蓝两色对其边任意着色，那么或者存在一个红色边三角形，或者存在一个蓝色边三角形。



证： 选定K_6的一个顶点v，顶点v有5条边，由鸽巢原理知，至少有

$$\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$$

条同色边，设为红色。设这三条边的另一个端点分别为 v_1,v_2,v_3。若v_1,v_2,v_3之间有一条红色边，则已得到一个红色边三角形，否则，则得到一个蓝色边三角形。

6.2 Ramsey数问题

- **命题 1** 对6个顶点的完全图任意进行红、蓝两边着色，都至少存在一个同色三角形.
- **命题 2** 对10个顶点的完全图K_{10}任意进行红、蓝两边着色，或者存在一个红色K_4，或者存在一个蓝色K_3.
- **命题 3** 对9个顶点的完全图K_9任意进行红、蓝两边着色，或者存在一个红色K_4，或者存在一个蓝色K_3.

6.2 Ramsey数问题

对上面的几个命题进行归纳，可以得出如下定义：

- **定义** 对于任意给定的两个正整数p和q，如果存在最小的正整数$r(p,q)$使得当$N \geq r(p,q)$时，对K_N任意进行红、蓝两边着色，K_N中均有红色K_p，或蓝色K_q，则$r(p,q)$称为Ramsey数.

定理 6.2.1 对任意正整数p，q，有

（1）$r(p,q) = r(q,p)$；

（2）$r(1,q) = r(p,1) = 1$；

(3) $r(p,2)=p$, $r(2,q)=q$.

6.2 Ramsey数问题

定理 6.2.2 **对任意正整数p≥2，q≥2，有**

$$r(p,q)\le r(p-1,q)+r(p,q-1).$$

证：令$N=r(p-1,q)+r(p,q-1)$,
对K_N进行任意红、蓝两边着色，只需证KN上或者存在红色Kp，或者有白色的Kq即可。

设x是K_N的一个顶点,在K_N中与x相关联的边共有$r(p-1,q)+r(p,q-1)-1$条,这些边要么为红色,要么为蓝色.

由鸽巢原理知,与x相关联的这些边中,要么至少有$r(p-1,q)$条红色的边,要么有至少$r(p,q-1)$条蓝色的边.

6.2 Ramsey数问题

（1）这些边中有$r(p-1,q)$条红边. 则在以这些红边相关联的$r(p-1,q)$个顶点构成的完全图$K_{r(p-1,q)}$中,必有一红色K_{p-1}或蓝色K_q. 若有红色K_{p-1}，则它加上顶点x以及x与K_{p-1}之间的红边，即构成一个红色Kp；否则，就有一个蓝色K_q.

（2）这些边中有$r(p,q-1)$条蓝边. 在以这些蓝边与x相关联的$r(p,q-1)$个顶点构成的完全图$K_{r(p,q-1)}$中，必有一个红色K_p或一个蓝色K_{q-1}，若有蓝色K_{q-1}，则它加上顶点x以及x与K_{q-1}之间的蓝边，即构成一个蓝色K_q；否则，就有一个红色K_a.

综合（1）、（2），知$r(p,q)\leq N$.

Ramsey数

定理 4 对任意正整数 $a \ge 2, b \ge 2$， 有

$$R(a,b) \le \binom{a+b-2}{a-1} = \frac{(a+b-2)!}{(a-1)!(b-1)!}$$

证: 对a+b用归纳法。

当$a+b=4$时，定理显然成立。

假设对一切满足 $4 \le a+b < m+n$ 的a, b，定理成立，那么有

Ramsey数

$$R(m,n) \le R(m-1,n) + R(m,n-1)$$

$$\le \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

这就归纳地证明了定理。

Ramsey数的推广

- 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为正整数，对N个顶点的完全图 K_N 中的边用 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ k种颜色进行着色，则 K_N 中或有 c_1 颜色的 K_{a_1}, 或有 c_2 颜色的 K_{a_2},…，或有 c_k 颜色的 K_{a_k}，满足上述性质的N的最小值记为 $R(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 。

Ramsey数的推广

定理5 对任意正整数$a_1,a_2,\cdots,a_k$，有

$$R(a_1,a_2,\cdots,a_k)\le R(a_1,R(a_2,\cdots,a_k))$$

证: 设$N=R(a_1,R(a_2,\cdots,a_k))$, 对 K_N 中的边用 $c_1,\cdots,c_k$ 染色，并将 c_1 看作是红色, 将 $c_2,\cdots,c_k$ 看作是蓝色, 则或有一个红色 K_{a_1} ,或者有蓝色的 $K_{R(a_2,\cdots,a_k)}$, 在蓝色的 $K_{R(a_2,\cdots,a_k)}$ 中, 其边是用 $c_2,\cdots,c_k$ 染色的, 故 $K_{R(a_2,\cdots,a_k)}$ 中或有色 c_2 的 K_{a_2} , … , 或有色 c_k 的 K_{a_k} 。