《线性代数 D》强化训练题一

一、填空题

1. 当 $t=$______时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(4,6,2t)$ 线性相关.

2. A，B 都是 n 阶方阵，且 $|A|\neq 0$，$AB-A=E$，则 $A^{-1}=$__________.

3. 设 A 为三阶方阵，且 $|A+2E|=0$, $|A-3E|=0$, $|A+E|=0$, 则 $|A|=$_______.

4. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似，则 $y=$__________.

5. 二阶实对称矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘构成一个线性空间，它的一个基为__________.

二、选择题

1. A 是三阶方阵且 $|A|=2$, 则 $\left|(3A^*)^{-1}A\right|=$(　　　).

A. $3^3\times 2^3$　　B. $\dfrac{2^3}{3^3}$　　C. $\dfrac{1}{2^3\times 3^3}$　　D. $\dfrac{1}{2\times 3^3}$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是(　　　).

A. 线性无关的

B. 线性相关的

C. 线性相关与线性无关都有可能且与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的线性相关性有关

D. 线性相关与线性无关都有可能且与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的线性相关性无关

3. 若 n 阶方阵 A 与 B 相似，则(　　　).

A. A 与 B 有相同的特征值和特征向量

B. A 与 B 有相同的特征多项式和特征向量

C. A 与 B 有相同的特征多项式和特征值

D. A 与 B 都可相似于同一个对角阵

4. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，则方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 有无穷解的充要条件是(　　).

A. A 的行向量组线性无关　　B. A 的列向量组线性无关

C. A 的行向量组线性相关　　D. A 的列向量组线性相关

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一单位向量，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，则内积 $[\boldsymbol{\alpha}+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\boldsymbol{\beta},\ 2\boldsymbol{\alpha}]$ 的值是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

三、计算题

1. 计算行列式的值

(1) $$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

2. 设矩阵 A, B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，求 B.

四、解答题

1. 请叙述向量组线性无关的三种判别方法.

2. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\5\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\6\\7\end{pmatrix}$的秩和一个最大线性无关组.

五、当b为何值时，下列方程组无解、有惟一解、有无穷多解，并在无穷多解的情况下求其通解.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_2-x_3+2x_4=1,\\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4=b,\\ 3x_1+5x_2+x_3+7x_4=5.\end{cases}$$

六、求一正交变换把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

化为标准形，并判定该二次型是否是正定的.

七、证明题

1. 已知A是正交阵，证明A^*也是正交阵.

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m>1)$线性无关，且$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，证明向量组$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$也线性无关.