《线性代数 D》强化训练题一解答

一、填空题

1. -2;　　2. $B-E$;　　3. 6;　　4. 6;　　5. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

二、选择题

1. D;　　2. B;　　3. C;　　4. D;　　5. B.

三、计算题

1. 计算行列式的值

(1) $D=\begin{vmatrix}1&2&-2&3\\-1&-2&4&-2\\0&1&2&-1\\2&3&-3&10\end{vmatrix}$

解：$D=\begin{vmatrix}1&2&-2&3\\0&0&2&1\\0&1&2&-1\\0&-1&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&1\\1&2&-1\\-1&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&1\\1&2&-1\\0&3&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3.$

(2) $D_n=\begin{vmatrix}a+b&ab&0&0&\cdots&0&0\\1&a+b&ab&0&\cdots&0&0\\0&1&a+b&ab&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&a+b&ab\\0&0&0&0&\cdots&1&a+b\end{vmatrix}$

解：按第一行展开，得

$$D_n=(a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$-ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2},$$

由于 $D_1=a+b,\quad D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2$，故由上面的递推公式可得

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n,$$

于是

$$D_n=aD_{n-1}+b^n=a^2D_{n-2}+ab^{n-1}+b^n=\cdots=a^{n-1}D_1+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$$

$$=\begin{cases} (n+1)a^n, & a=b, \\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a\neq b. \end{cases}$$

2. 设矩阵 A, B 满足 $A^*BA = 2BA - 8E$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， A^* 是 A 的伴随矩阵，求 B.

解：$|A| = -2$， A 可逆，则 $|A|A^{-1}BA = 2BA - 8E$， $-2A^{-1}BA = 2BA - 8E$，

$A^{-1}BA + BA = 4E$， $BA + ABA = 4A$， $B + AB = 4E$， $(E+A)B = 4E$，

$$B = 4(E+A)^{-1} = 4\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

四、解答题

1. 请叙述向量组线性无关的三种判别方法.

解：略.

2. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ 的秩和一个最大线性无关组.

解：$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

秩为 $R = 3$. 最大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$.

五、当b为何值时，下列方程组无解、有惟一解、有无穷多解，并在无穷多解的情况下求其通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4=b \\ 3x_1+5x_2+x_3+7x_4=5 \end{cases}$$

解：增广矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & b \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

从上述矩阵可以看出:

(1) 当$b\neq 3$，则$r(A)=2<r(B)=3$, 故方程组无解.

(2) 当$b=3$时，$r(A)=r(B)=2<n=4$, 非齐次线性方程组有无穷多解，此时它所对应的齐次线性方程组的解空间的维数等于$n-r=4-2=2$，即基础解系由两个解向量构成.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

齐次线性方程组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

非齐次线性方程组的特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$,

非齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}$, 其中 k_1, k_2 为任意实数.

(3) 本题没有惟一解的情况出现.

六、求一正交变换把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

化为标准形, 并判定该二次型是否是正定的.

解: $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$,

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(4-\lambda)(\lambda-9)=0;$$

$\lambda_1=0, \lambda_2=4, \lambda_3=9.$

$\lambda_1=0$ 时, $A-0E=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$, 由 $(A-0E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 解得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$,

单位化 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$,

$\lambda_2=4$ 时, $A-4E=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\3&-3&-1\end{pmatrix}$, 由 $(A-4E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 解得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

单位化 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$\lambda_3=9$ 时，$A-9E=\begin{pmatrix}-4&-1&3\\-1&-4&-3\\3&-3&-6\end{pmatrix}$，由 $(A-9E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

单位化 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

3个特征值各异，所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 两两正交，故正交变换矩阵为

$$P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}，正交变换为\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

标准形为 $f=4y_2^2+9y_3^2$.

不正定.

七、证明题

1. 已知 A 是正交阵，证明 A^* 也是正交阵.

证：因为 A 是正交阵，所以 $AA^T=E$，则有 $A^{-1}=A^T$，$|A|^2=1$.

故 $A^*(A^*)^T=(|A|A^{-1})(|A|A^{-1})^T=(|A|A^T)(|A|A^T)^T=|A|^2A^TA=E$.

所以 A^* 也是正交阵.

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$线性无关，且$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，证明向量组$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$也线性无关.

证：设$k_1(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathbf{0}$,

代入$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$并整理得

$$(k_2+k_3+\cdots+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_3+\cdots+k_m)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_1+k_2+\cdots+k_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$线性无关得方程组

$$\begin{cases} k_2+k_3+\cdots+k_{m-1}+k_m=0 \\ k_1+k_3+\cdots+k_{m-1}+k_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1+k_2+\cdots+k_{m-2}+k_{m-1}=0 \end{cases},$$

其系数行列式为

$$D_m=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{m-1}(m-1)\neq 0,$$

所以方程组只有零解，则$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.