上海大学 2013～2014 学年 秋 季学期 A 试卷

成绩	

课程名：线性代数 B 参考 答案 课程号：01013010 学分：3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ________ 应试人学号 ________ 应试人所在院系 ________

题号	一	二	三	四	五
得分					

得分	评卷人

一、选择题：（每小题 2 分，5 题共 10 分）

1. 下列命题正确的是(A)

(A) 相似矩阵具有相同特征值； (B) 两个同阶矩阵如果相抵，则必相似；

(C) 设 $r(A)=n$，则 n 元线性方程组 $Ax=\mathbf{b}$ 有解； (D) 正交矩阵的行列式值必为 1.

2. 设三阶行列式 $|\alpha,\beta,\gamma|=2$，则行列式 $|\alpha+\beta,-2\beta+\gamma,\gamma-\alpha|=$ (C)

(A) 2 (B) -2 (C) -6 (D) -54 .

3. $A_{3\times1}B_{1\times3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{tr}(B_{1\times3}A_{3\times1})=$ (B)

(A) 1； (B) 2 ； (C) -3； (D) 不能确定.

4. 设 $1,2,3$ 为 3 阶方阵 A 的特征值，则 $|-A^*|=$ (D)

(A) 6； (B) -6； (C) 36； (D) -36.

5. 设 A 是 n 阶方阵，且 $A\alpha=\beta$ ，则线性方程组 $\begin{pmatrix}A&-\beta\\I&0\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\alpha\end{pmatrix}$ 有解 (B)

(A) $\begin{pmatrix}-\alpha\\1\end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$； (C) $\begin{pmatrix}-\alpha\\-1\end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix}\alpha\\-1\end{pmatrix}$.

得分	评卷人

二、填空题：（每小题 3 分，5 题共 15 分）

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则 $A^2-A-3I=\underline{A}$；

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$，且 $AB+B=I$ ，则 $B^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}}$ ；

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&3&4&1\\4&7&8&3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=\underline{2}$；

9. 设 α,β,γ 为两两正交的单位向量，则 $\alpha+2\beta-2\gamma$ 的长度为 $\underline{3}$；

10. 设 α,β 为 3 维列向量，且 $\alpha^T\beta=2$ ， $A=I-\alpha\beta^T$，则 $A^{2n}=\underline{I}$。

得分	评卷人

三、计算题：（6 题，共 62 分）

11.（8 分）计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&2\\1&1&\cdots&2&1\\\cdots&\cdots&\iddots&\cdots&\cdots\\1&2&\cdots&1&1\\2&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$ 变换 $=\begin{cases}错\ 2'\\对\ 3'+2'+3'\end{cases}$

符号错 扣1分

解 $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}2&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\iddots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&2&1\\1&1&\cdots&1&2\end{vmatrix}$ （2 分） $=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}n+1&1&\cdots&1&1\\n+1&2&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\iddots&\cdots&\cdots\\n+1&1&\cdots&2&1\\n+1&1&\cdots&1&2\end{vmatrix}$（2 分）

$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}n+1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\iddots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}$ （2 分） $=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n+1)$ （2 分）

12.（12 分）设 $A=\begin{pmatrix}B&0\\B-I&B\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}7&1\\5&2\end{pmatrix}$，且 $A-C=I$，求 C^*

解 由 $A-C=I$ 得 $C^{-1}=(A-I)^{-1}$ （2 分）

$[A-I,I]\to\begin{bmatrix}I&(B-I)^{-1}&\\I&I'&(B-I)^{-1}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}I&(B-I)^{-1}&\\&I'&-(B-I)^{-1}&(B-I)^{-1}\end{bmatrix}$

（3 分） （2 分）

又 $(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix}6&-1\\-5&1\end{pmatrix}$ （2 分 ）

所以 $C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-5&6&0&0\\-1&1&1&-1\\5&-6&-5&6\end{pmatrix}$ （1 分），又 $|C^{-1}|=1$，得 $C^*=C^{-1}$ （2 分）

13.（11 分）求下列向量组的一个极大无关组，并将其他向量表示为此极大无关组的线性组合

$\alpha_1=[1,1,2,3,1],\alpha_2=[1,2,4,2,1],\alpha_3=[1,4,8,0,1],\ \alpha_4=[3,4,8,7,3],\alpha_5=[1,3,6,2,1].$

解 $\begin{pmatrix}1&1&1&3&1\\1&2&4&4&3\\2&4&8&8&6\\3&2&0&7&2\\1&1&1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3&1\\0&1&3&1&2\\0&2&6&2&4\\0&-1&-3&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3&1\\0&1&3&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3&1\\0&1&3&1&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

(2分) ~~(2分)~~ ~~(2分)~~(3分) （1 分）

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&4\\0&1&3&0&3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1\\0&1&3&0&3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

（1 分） （1 分）

$\underset{(2分)}{A}\xrightarrow{行}(3分)\longrightarrow$ 行阶梯 (2分)

所以极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ （2 分）

且 $\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_4$ （2 分）

法二: A (2分) $C=A-I$ (2分)

$(C\vdots I)_{2分}\longrightarrow_{3分}\longrightarrow(I\vdots C^{-1})_{2分}$

$C^*=|C|C^{-1}$ (2分)

法三: A (2分) $C=A-I$ (2分)

$C^*=(A_{ji})$ (2分)

A_{ij} 3分+3分

$A^{-1}\begin{cases}谱 & 2' \\ 对 & 2'+2'\end{cases}$

14.（12 分）求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - ax_2 - 2x_3 - 2x_4 = -a, \\ x_1 + (a-3)x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

若有无穷多解，用其特解与对应齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

解 增广矩阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-1\\2&-a&-2&-2&-a\\1&a-3&-2&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-1\\0&2-a&0&0&2-a\\0&a-2&-1&2&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-1\\0&2-a&0&0&2-a\\0&0&1&-2&a-5\end{pmatrix}=B$$

（2分） （2 分） 行阶梯 （3分）

当 $a=2$ 时，有

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-2&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&-3&-4\\0&0&1&-2&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ （3分） ~~（1 分）~~

线性方程组通解为

$x = k_1(1,1,0,0)^T + k_2(3,0,2,1)^T + (-4,0,-3,0)^T$ ~~（3 分）~~

当 $a \neq 2$ 时，有

$$B\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-3&a-5\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-2&a-5\end{pmatrix}$$ （2分） ~~（2 分）~~

线性方程组通解为

$x = k_1(3,0,2,1)^T + (a-5,1,a-5,0)^T$ 通解向量形式不够已扣1分 ~~（2 分）~~

15.（8 分）设 A 为 3 阶矩阵，且三维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。如果

$$A\alpha_1=\alpha_2, A\alpha_2=\alpha_3, A\alpha_3=0$$

计算 A^3+I 的特征值 。 $A\alpha_3=\vec{0} \Rightarrow$ 0是A的特征值（2分）

法一，解 由 $A\alpha_1=\alpha_2, A\alpha_2=\alpha_3, A\alpha_3=0$，得

$$A^3\alpha_1=0, A^3\alpha_2=0, A^3\alpha_3=0 \quad （2 分+1 分+1 分）$$

所以 $A^3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0$ ，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，得 $A^3=0$（~~1~~分）（1分）

得 $A^3+I=I$，有 A^3+I 的特征值为 1，1，1（2 分）

法三：A的特征值为 0，0，0 且 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关是A的特征向量 ∴ A^3+I的特征值为1,1,1（1分）
（时不写扣1分）

16.（12 分）$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 使得 $P^T(A^{-1}+I)P$ 为对角矩阵。 特征值、特征向量 3+3 正交化 2′ （谱分解）

解 A 的特征值为 4,1,1 （3 分）

当 $\lambda=4$ 时，有特征向量 $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ （2 分）

当 $\lambda=1$ 时，有特征向量 $\alpha_2=(1,-1,0)^T, \alpha_3=(1,0,-1)^T$ （2 分）

单位正交化为 $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$ （2 分）

设 $Q=(\alpha_1,\beta_2,\beta_3)$ ，有 $Q^TAQ=\mathrm{diag}(4,1,1)$ （2 分）

由此有 $Q(A^{-1}+I)Q^T=\mathrm{diag}(\frac{5}{4},2,2)$，即取 $P=Q^T$ （1 分）

得分	评卷人

四、证明题：（2 题，每题 6 分共 12 分）

17.（6 分）设 A 为 $n\,(n>1)$ 阶可逆矩阵,求证 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证 首先有 $A^*A=|A|I$ （2 分）

因为 A 可逆，得 $A^*=|A|A^{-1}$ （2 分）

得 $|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$ （2 分）

18. （6 分）设 A,B 分别为 $n\times n, n\times m$ 矩阵，且 $AB=B, r(B)=n$，求证 $A=I$.

证 因为 $AB=B$，所以 $(A-I)B=0$ （2 分）

得 $r(A-I)+r(B)\leq n$ （2 分）

根据 $r(B)=n$，得 $r(A-I)=0$ ，有 $A-I=0$ ，即 $A=I$ （2 分）

法二：λ，$A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq\vec{0}$（1分） $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 1′
$k_1\alpha_2+k_2\alpha_3=\lambda k_1\alpha_1+\lambda k_2\alpha_2+\lambda k_3\alpha_3$（2分）