复习课例题

矩阵

1.矩阵乘法运算

例0.0.1. 设A, B, C为n阶矩阵, 问下列命题是否成立?
(1) 如果$AB = AC$, 且$A \neq \mathbf{0}$, 则$B = C$;
(2) 如果$A^2 = \mathbf{0}$, 则$A = \mathbf{0}$;
(3) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
(4) $(AB)^2 = A^2B^2$;
(5) $(AB)^T = A^TB^T$.

解 (1) 不成立. 矩阵乘法不满足消去律. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

但显然$B \neq C$.

(2) 不成立. 例如$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$, 有$A^2 = \mathbf{0}$.

注 对于非零方阵A, 如果自然数k, 使得$A^k = \mathbf{0}$, 则称A为幂零矩阵. 矩阵$(\mathbf{0}, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$为幂零矩阵.

(3) 不成立. 事实上, 根据矩阵运算律, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, 因此$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$充分必要条件是$AB = BA$.

(4) 不成立. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则有$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 而$A^2B^2 = \mathbf{0}$.

注意当$AB = BA$时, 有$(AB)^2 = A^2B^2$, 反之未必成立.

(5) 不成立. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

有

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^TB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

事实上$(AB)^T=B^TA^T$.

注 $(AB)^T=A^TB^T$充分必要条件是$AB=BA$.

例0.0.2. 已知n维列向量α满足$\alpha^T\alpha=1$. 设$A=I+\alpha\alpha^T, B=I-\dfrac{1}{2}\alpha\alpha^T$, 求证$AB=BA=I$.

证 设$C=\alpha\alpha^T$, 有A,B为C的矩阵多项式, 所以$AB=BA$. 由$\alpha^T\alpha=1$有

$$C^2=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=\alpha\alpha^T.$$

因此

$$AB=(I+C)(I-\frac{1}{2}C)=I+C-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}C^2=I+C-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}C=I.$$

注 n维行向量左乘n维列向量为1阶矩阵, 简记为对应的数. 而n维列向量左乘n维行向量为$n\times n$阶矩阵. 两者并不相等, 学习者应引起注意.

2.矩阵的幂运算

设A为方阵, 有时需要计算A^k. 常用方法有

(1) 运用乘法结合律;

(2) 运用数学归纳法;

(3) 利用分块矩阵;

(4) 利用矩阵对角化(参见第五章内容).

例0.0.3. 计算$(ABC)^n$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

解 经过计算有$AC=CA=I$, 即$C=A^{-1}$. 由于

$$\begin{aligned}(ABA^{-1})^n&=\overbrace{(ABA^{-1})(ABA^{-1})\cdots(ABA^{-1})}^{n}\\&=AB(A^{-1}A)B(A^{-1}A)\cdots B(A^{-1}A)BC=AB^nA^{-1}\\&=\begin{cases}AA^{-1} & n=2k;\\ ABA^{-1} & n=2k+1.\end{cases}\\&=\begin{cases}I, & n=2k;\\ \begin{pmatrix}1&-2&2\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}, & n=2k+1\end{cases}\end{aligned}$$

注 如果n阶方阵A,B满足$P^{-1}AP$, 则称A与B相似. 矩阵相似关系是矩阵三大关系“相抵、合同、相似”之一, 是研究矩阵结构的重要方法. 利用相似可以计算复杂矩阵的幂. 如果$f(x)$是x的多项式, 则有

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP).$$

例0.0.4. 已知$\alpha = (1,2,1), A = \alpha^T\alpha$, 计算$A^n$.

解 因为$\alpha\alpha^T = 6$, 且

$$A^2 = \alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha = 6\alpha\alpha^T = 6A.$$

进一步得$A^3 = A^2A = 6A^2 = 6^2A$, 可猜测$A^n = 6^{n-1}A$. 采用数学归纳法证明此式.

当$n = 1$时, 结论成立. 假设$n \geq 2$时, $A^{n-1} = 6^{n-2}A$, 则

$$A^n = A^{n-1}A = 6^{n-2}A \cdot A = 6^{n-2}A^2 = 6^{n-1}A.$$

所以有

$$A^n = 6^{n-1}A = 6^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

例0.0.5. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算$A^n$.

解 方法一 设$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 注意到

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3 = \mathbf{0},$$

且$JI = IJ$, 则有

$$A^n = (I + \lambda J)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i I^{n-i}(\lambda J)^i = I + \lambda C_n^1 J + \lambda^2 C_n^2 J^2,$$

由此得

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\lambda & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \\ 0 & 1 & n\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

方法二 数学归纳法. 首先对$n=2,3,4$进行计算寻找规律. 有

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2\lambda&\lambda^2\\0&1&2\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1&3\lambda&3\lambda^2\\0&1&3\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}, A^4=\begin{pmatrix}1&4\lambda&6\lambda^2\\0&1&4\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由此猜测

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n\lambda&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2\\0&1&n\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

当$n=2$ 结论成立, 假设$n-1$结论成立, 即

$$A^{n-1}=\begin{pmatrix}1&(n-1)\lambda&\frac{(n-2)(n-1)}{2}\lambda^2\\0&1&(n-1)\lambda\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则

$$A^n=A\cdot A^{n-1}=\begin{pmatrix}1&\lambda&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&(n-1)\lambda&\frac{(n-2)(n-1)}{2}\lambda^2\\0&1&(n-1)\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&n\lambda&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2\\0&1&n\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

故得结论.

注 本例中解法一, 是针对特殊结构的矩阵$A=B+C$, 且$BC=CB$. 由此利用二项式展开式起到化简运算.

3.逆阵计算

设A为n阶可逆矩阵, 计算A^{-1}方法有

(1) 运用初等行变换化$(A|I)$为行最简阵$(I|A^{-1})$;

(2) 运用分块矩阵性质;

(3) 运用分块矩阵初等变换方法;

(4) 利用矩阵特殊结构;

(5) 运用伴随矩阵方法(参见第二章内容).

注 当矩阵阶数较大时, 伴随矩阵方法运算量大, 一般不采用此法求逆阵.

例0.0.6. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

解 法一 初等变换

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&2&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1,r_4-r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2-r_3,r_3-r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&-1&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&2&-1\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right).$$

所以$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&0\\-1&1&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$.

法二 分块矩阵初等变换方法 设$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}B&C&I&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&B&\mathbf{0}&I\end{pmatrix}\xrightarrow{B^{-1}r_1,B^{-1}r_2}\begin{pmatrix}I&B^{-1}C&B^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&I&\mathbf{0}&B^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-B^{-1}Cr_2}\begin{pmatrix}I&\mathbf{0}&B^{-1}&-B^{-1}CB^{-1}\\\mathbf{0}&I&\mathbf{0}&B^{-1}\end{pmatrix}.$$

由于$B^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, 得$-B^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

所以$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&0\\-1&1&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$.

例0.0.7. 设$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&-1\\4&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&A_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&A_2\\A_3&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$, 且$A_1, A_2, A_3$可逆. 求$A^{-1}, B^{-1}$.

解 $B_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, 则$A=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B_1\\ 4 & \mathbf{0}\end{pmatrix}$. 因此有$A^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & 4^{-1}\\ B_1^{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$, 而$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, 得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

同法可得

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^{-1}\\ A_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_2^{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

注 本例利用分块矩阵的性质计算逆阵.

例0.0.8. 设$B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3B & B\\ B & -3B\end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$

解 经过计算$B^2=10I$, 且

$$A^2=\begin{pmatrix}10B^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 10B^2\end{pmatrix}.$$

得$A^2=100I$,故$A^{-1}=\dfrac{1}{100}A$.

例0.0.9. 已知n阶方阵A满足

$$A^2-2A-3I=\mathbf{0}. \tag{0.0.1}$$

(1) 求$A^{-1}, (A-3I)^{-1}$;

(2) A^2-A+nI(n 是整数)什么时候可逆, 如果可逆, 求其逆.

分析 此类问题通过拼凑与因式分解方法对表达进行变形. 题目预先假设A为已知矩阵, 所求逆阵需表示为A的多项式.

解 (1) 由式(0.0.1)知$A(A-2I)=3I$, 得$A[\frac{1}{3}(A-2I)]=I$. 由此得

$$A^{-1}=\frac{1}{3}(A-2I).$$

由式(0.0.1)有

$$A^2-2A-6I=-3I,$$

等式左边因式分解得$(A-3I)(A+2I)=-3I$, 由此得

$$(A-3I)^{-1}=-\frac{1}{3}(A+2I).$$

(2) 由式(0.0.1)有

$$A^2 - A + nI = A + (n+3)I.$$

又由式(0.0.1)得

$$A^2 - 2A - (n+3)(n+5)I = -(n+2)(n+6)I.$$

情况一 $n \neq -2, -6$

$$(A + (n+3)I)[-\frac{1}{(n+2)(n+6)}(A - (n+5)I)] = I,$$

故

$$(A^2 - A + nI)^{-1} = (A + (n+3)I)^{-1} = -\frac{1}{(n+2)(n+6)}(A - (n+5)I).$$

情况二 $n = -2$, 且$A - 3I \neq \mathbf{0}$

由$A^2 - A + nI = A + (n+3)I = A + I$, 又由式(0.0.1)有

$$(A + I)(A - 3I) = \mathbf{0}, \tag{0.0.2}$$

如果$A + I$可逆, 由上式推出$A - 3I = \mathbf{0}$, 矛盾. 故此时$A^2 - A + nI = A + I$不可逆.

情况三 $n = -2$, 且$A - 3I = \mathbf{0}$

根据条件有$A^2 - A + nI = A + I = 4I$可逆, 且

$$(A^2 - A + nI)^{-1} = (A + I)^{-1} = \frac{1}{4}I.$$

同理可得

当$n = -6$, 且$A + I \neq \mathbf{0}$, $A^2 - A + nI = A - 3I$不可逆;

当$n = -6$, 且$A + I = \mathbf{0}$, $A^2 - A + nI = A - 3I = -4I$可逆, 且

$$(A^2 - A + nI)^{-1} = (A - 3I)^{-1} = -\frac{1}{4}I.$$

5.矩阵方程求解

含有未知矩阵的等式称为矩阵方程. 一般通过对矩阵方程变形处理, 将其转化为计算

$$X = A^{-1}B,\ X = BA^{-1},\ X = A^{-1}BC^{-1}.$$

例0.0.10. 设n阶矩阵A, B满足$A + B = AB$, 且

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

求A.

解 由$A+B=AB$, 即$A+B-AB=\mathbf{0}$, 得

$$(A-I)-(A-I)B=-I,$$

有$(A-I)(B-I)=I$, 所以$A-I$ 可逆, 且$A-I=(B-I)^{-1}$, 即

$$A=I+(B-I)^{-1}.$$

而

$$(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-2\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

得

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&-2\\0&-1&2\end{pmatrix}.$$

例0.0.11. 设$A=\begin{pmatrix}6&3&0\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&-1\end{pmatrix}$, 求$X$使$AX=2X+B$.

解 由$AX=2X+B$得$(A-2I)X=B$, 有$X=(A-2I)^{-1}B$.

方法一 先计算$(A-2I)^{-1}$, 由于$A-2I$为准对角矩阵, 设$C=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}$,得

$$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}C&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}C^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&-1\end{pmatrix}.$$

根据计算有$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&1\end{pmatrix}$. 故

$$X=(A-2I)^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\-1&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-1\\7&2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

方法二 直接利用初等行变换计算$(A-2I)^{-1}B$.

$$(A-2I|B)=\begin{pmatrix}4&3&0&1&2\\1&1&0&2&1\\0&0&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&2&1\\4&3&0&1&2\\0&0&-1&1&-1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2-4r_1,-r_2,-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&2&1\\0&1&0&7&2\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-1\\0&1&0&7&2\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

所以$X=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 7 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

例0.0.12. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 矩阵X, 满足$8X=-A^*X+2A^{-1}B$, 其中A^*是A的伴随矩阵, 求矩阵X .

解 在$8X=-A^*X+2A^{-1}B$ 两边左乘A, 得$8AX=-AA^*X+2B$, 由$AA^*=|A|I$, 有$8AX=-|A|X+2B$, 根据行列式计算有$|A|=-4$, 从而

$$X=\frac{1}{2}(2A-I)^{-1}B.$$

注意到

$$\frac{1}{3}(2A-I)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

为正交矩阵, 得

$$X=\frac{1}{2}[3\cdot\frac{1}{3}(2A-I)]^{-1}B=\frac{1}{6}[\frac{1}{3}(2A-I)]^TB.$$

有

$$X=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

注 本题没有直接计算逆阵, 而是利用正交矩阵的性质:正交阵的转置等于其逆阵, 这样减少了计算量.

6.矩阵秩的计算

具体矩阵秩的计算最简答方法是通过初等变换将矩阵化为行阶梯矩阵, 利用行阶梯阵秩等于非零行行数性质得到原有矩阵的秩.

例0.0.13. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 0\\ 4 & 3 & -10 & 10 & -1\\ 3 & 2 & a+1 & 7 & -1\\ 1 & -1 & -6 & -1 & b\end{pmatrix}$ 的秩.

解 将A化为行阶梯阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 0\\ 4 & 3 & -10 & 10 & -1\\ 3 & 2 & a+1 & 7 & -1\\ 1 & -1 & -6 & -1 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1\\ 0 & -1 & a+7 & -2 & -1\\ 0 & -2 & -4 & -4 & b\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a+9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}.$$

当$a=-9$ 且$b=-2$时, $r(A)=2$;

当$a=-9$ 且$b\neq-2$时, $r(A)=3$;

当$a\neq-9$ 且$b=-2$时, $r(A)=3$;

当$a\neq-9$ 且$b\neq-2$时, $r(A)=4$.

例0.0.14. *讨论矩阵A, AA^T的秩, 其中*

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ & \cdots & \cdots & \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}.$$

解 记

$$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \beta=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n),$$

可得

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ & \cdots & \cdots & \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)=\alpha\beta.$$

当$\alpha=\mathbf{0}$ 或 $\beta=\mathbf{0}$时, $A=\mathbf{0}, AA^T=\mathbf{0}$, 所以$r(A)=r(AA^T)=0$.

当$\alpha\neq\mathbf{0}$, $\beta\neq\mathbf{0}$时, $A\neq\mathbf{0}$, 且$1\leq r(A)\leq r(\alpha), r(\beta)\leq 1$. 所以$r(A)=1$.

如果$\beta\beta^T=\sum_{i=1}^n b_i^2$(记为$k$) $\neq 0$, 则$AA^T=k\alpha\alpha^T\neq\mathbf{0}$, 且有$r(AA^T)=1$;

如果$\beta\beta^T=\sum_{i=1}^n b_i^2=0$, 则$AA^T=\mathbf{0}$ 且有$r(AA^T)=0$.

注 当β为实向量时, 如果$\beta\neq\mathbf{0}$, 则$\beta\beta^T=\sum_{i=1}^n b_i^2\neq 0$. 但当$\beta$为复向量时, $\beta\beta^T$可能为0, 例如

$\beta=(1,\sqrt{-1})$, 则$\beta\beta^T=1+(-1)=0$.

7.证明题

例0.0.15. *设$A, B, A+B$为可逆矩阵, 求证$A^{-1}+B^{-1}$可逆.*

解 对矩阵$A^{-1}+B^{-1}$变形, 有

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(I+AB^{-1})=A^{-1}(B+A)B^{-1},$$

由条件$A^{-1},B^{-1},A+B$可逆, 而可逆矩阵的乘积为可逆矩阵, 所以$A^{-1}+B^{-1}$可逆.

注 本例采用的方法称为"和化积"方法：把矩阵和式表达式转化为矩阵乘积表达式.

例0.0.16. 设A是n阶方阵, 且$A^2-A-2I=\mathbf{0}$, 求证$r(A-2I)+r(A+I)=n$.

证 方法一 由$A^2-A-2I=\mathbf{0}$, 得

$$(A-2I)(A+I)=\mathbf{0},$$

由此得

$$r(A-I)+r(A+I)\le n.$$

又因为

$$r(A+I)+r(A-2I)\ge r(A+I+2I-A)=r(3I)=n.$$

所以 $r(A+I)+r(A-2I)=n$.

方法二

$$\begin{pmatrix} A+I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A-2I \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} A+I & \mathbf{0} \\ A+I & A-2I \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{pmatrix} A+I & \mathbf{0} \\ 3I & A-2I \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-\frac{1}{3}(A+I)r_2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{3}(A-2I)(A+I) \\ 3I & A-2I \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{3}(A-2I)c_1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3I & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中用到$(A-2I)(A+I)=\mathbf{0}$. 根据等价矩阵具有相同秩得

$$r(A-2I)+r(A+I)=r\begin{pmatrix} A+I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A-2I \end{pmatrix}=n.$$

例0.0.17. 设A是$(n\ge 2)$阶方阵, A^*是A的伴随阵. 证明:

(1) $r(A^*)=n$的充要条件是$r(A)=n$;

(2) $r(A^*)=1$的充要条件是$r(A)=n-1$;

(3) $r(A^*)=0$的充要条件是$r(A)<n-1$.

证 (1) 由于$|A^*|=|A|^{n-1}$, 因此A可逆的充分必要条件是A^*可逆. 而A可逆的充分必要条件是$r(A)=n$, 由此可证得结论.

(2), (3) 在A不可逆时有$AA^*=|A|I=\mathbf{0}$, 所以

$$r(A)+r(A^*)\le n.$$

当$r(A) = n-1$时, A存在$n-1$阶非零子式, 由此有$A^* \neq \mathbf{0}$, 得$1 \leq r(A^*) \leq n - r(A) = 1$, 所以此时有$r(A^*) = 1$;

当$r(A) < n-1$时, A所有$n-1$阶子式都为零, 由此有$A^* = \mathbf{0}$, 得$r(A^*) = 0$.

由此得证(2), (3).

例0.0.18. *设A为$m \times n$矩阵, b为m维列向量. 若对任意的非零的n维列向量x, 恒有$Ax = b$, 求证$A = \mathbf{0}, b = \mathbf{0}$.*

证 一方面, $A(e_1 + e_2) = b$; 另一方面,

$$A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 = b + b = 2b.$$

于是$2b = b$. 从而$b = \mathbf{0}$. 又$Ae_i = \alpha_i = \mathbf{0}$, α_i为A的第i列, $i = 1, \cdots, n$. 故$A = \mathbf{0}$.

例0.0.19. *设$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 则$A$为反对称矩阵的充要条件为对任意的实$n$维列向量$x$, 恒有*

$$x^T Ax = 0.$$

证 先证必要性. 对任一实n维列向量x, 因$-x^T Ax$是一阶方阵, 故$(-x^T Ax)^T = -x^T Ax$. 从而由$A^T = -A$得

$$x^T Ax = x^T(-A)^T x = -(x^T Ax)^T = -x^T Ax.$$

于是$2x^T Ax = 0$, 即$x^T Ax = 0$.

再证充分性. 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$, 若对任意的实n维列向量x, 有$x^T Ax = 0$, 则

$$a_{ii} = {e_i}^T Ae_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

令$x = e_i + e_j$, 则

$$\begin{aligned} x^T Ax &= (e_i^T + e_j^T)A(e_i + e_j) \\ &= a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} \\ &= a_{ij} + a_{ji} = 0, \end{aligned}$$

故$a_{ij} = -a_{ji}$. 于是A为反对称阵.

例0.0.20. *设A是方阵, 且$A^2 - 2A = 4I$.*

(1) 求证A可逆, 并求A^{-1};

(2) 求证$A - 3I$ 可逆, 并求$(A - 3I)^{-1}$.

证 (1) 由$A^2-2A=4I$, 得

$$(\frac{1}{4}(A-2I))A=A(\frac{1}{4}(A-2I))=I,$$

所以A可逆, 且$A^{-1}=\frac{1}{4}(A-2I)$.

(2) 由$A^2-2A=4I$, 得$A^2-2A-3I=I$. 所以

$$(A-3I)(A+I)=(A+I)(A-3I)=I,$$

于是$A-3I$可逆, 且$(A-3I)^{-1}=A+I$.

行列式

1.行列式的计算

例0.0.21. 已知4阶行列式D中第三列元素依次为-1, 2, 0, 1, 它们的余子式依次为5, 3, -7, 4, 求D的值.

解 可得

$$\begin{aligned}D=&(-1)\times(-1)^{1+3}\times 5+2\times(-1)^{2+3}\times 3\\&+0\times(-1)^{3+3}\times(-7)+1\times(-1)^{4+3}\times 4\\=&-5-6+0-4=-15.\end{aligned}$$

例0.0.22. 设A为3阶矩阵, 且$|A|=-2$, 令$A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, 其中a_j $(j=1,\ 2,\ 3)$为A的列向量. 求

(1) $|a_1,\ 2a_2,\ a_3|$;

(2) $|a_3-2a_1,\ 3a_2,\ a_1|$.

解 (1) 由行列式性质2.2.3得

$$|a_1,\ 2a_2,\ a_3|=2\,|a_1,\ a_2,\ a_3|=2\times(-2)=-4;$$

(2) 由行列式性质2.2.5、性质2.2.3得

$$\begin{aligned}|a_3-2a_1,\ 3a_2,\ a_1|&=|a_3,\ 3a_2,\ a_1|+|-2a_1,\ 3a_2,\ a_1|\\&=3\,|a_3,\ a_2,\ a_1|+(-2)\times 3\,|a_1,\ a_2,\ a_1|.\end{aligned}$$

再由性质2.2.2以及推论2.2.2得

$$|a_3-2a_1,\ 3a_2,\ a_1|=-3\,|a_1,\ a_2,\ a_3|-6\times 0=6.$$

例0.0.23. 计算$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

解 利用行列式的性质, 将D化为上三角行列式来计算.

第一行各元素乘以1加到第四行相应元素上, 得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{1}{3}r_3} -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\times(-1)\times 12\times(-2) = -48.$$

例0.0.24. 计算$n+1$阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

其中$a_i\neq 0\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

解 依次考虑消法变换$r_1-\frac{1}{a_1}r_2,\cdots,r_1-\frac{1}{a_n}r_{n+1}$, 得

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

例0.0.25. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 将D_n按第1列展开, 得

$$\begin{aligned} D_n &= x \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1} \\ &\quad + y \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ y & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= x \cdot x^{n-1} + y \cdot (-1)^{n+1} \cdot y^{n-1} \\ &= x^n + (-1)^{n+1} y^n. \end{aligned}$$

例0.0.26. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 将行列式D_n的第$2,3,\cdots,n$列分别加到第1列, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix}_n=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix}_n$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}_n=(-1)^{n-1}(n-1).$$

例0.0.27. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2\end{vmatrix}.$$

解 将行列式D_n"加边", 将其升阶为$n+1$阶行列式, 即

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ 0 & a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2\end{vmatrix}_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=1+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

例0.0.28. 计算n阶三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_n .$$

解 将D_n按第一列展开, 得

$$\begin{aligned} D_n = 2\cdot(-1)^{1+1} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} \\ +(-1)\cdot(-1)^{2+1} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} \\ = 2D_{n-1} + & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} . \end{aligned}$$

等式右边的$n-1$阶行列式再按第一行展开, 有

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-2}.$$

于是

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}\ (n=3,\ 4,\ \cdots), \tag{0.0.3}$$

其中$D_1 = 2,\ D_2 = 3.$

由(0.0.3)得

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = D_{n-2} - D_{n-3} = \cdots = D_2 - D_1 = 1,$$

故$D_n = n+1.$

注 对于一般的三对角行列式, 都可以用行列式的展开式建立类似的递推关系计算.

例0.0.29. 范德蒙*(Vandermonde)*行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j),$$

其中$n \ge 2$, 连乘积号是满足$1 \le j < i \le n$的所有因子$(x_i - x_j)$的乘积.

例0.0.30. 设A, B分别为k阶和m阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & C \\ \boldsymbol{0} & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \boldsymbol{0} \\ D & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|\,.$$

2.关于代数余子式

例0.0.31. 已知

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

求$A_{41}+A_{42}+A_{43}$和$A_{44}+A_{45}$, 其中$A_{4j}\ (j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$为元素$a_{4j}$的代数余子式.

解 由(**??**)式可得

$$\begin{cases} A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=27, \\ 2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}+A_{45}=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} A_{41}+A_{42}+A_{43}+2(A_{44}+A_{45})=27, \\ 2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+A_{44}+A_{45}=0, \end{cases}$$

由此解得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,\ \ A_{44}+A_{45}=18.$$

3.证明题

例0.0.32. 设A是n阶方阵, A^*是A的伴随矩阵. 证明$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证 因为$AA^*=|A|\,I$, 所以

$$|A|\,|A^*|=\det(|A|\,I)=|A|^n\,.$$

若$|A|\neq 0$, 则$|A^*|=|A|^{n-1}$, 结论成立;

若$|A|=0$, 此时$AA^*=0$. 现用反证法证$|A^*|=0$. 假设$|A^*|\neq 0$, 则A^*可逆, 由

$$(AA^*)(A^*)^{-1}=\mathbf{0}(A^*)^{-1}=\mathbf{0}$$

得$A=\mathbf{0}$, 故$A^*=0$, 矛盾. 所以$|A^*|=0$, 且$|A^*|=|A|^{n-1}$.

综上可得

$$|A^*|=|A|^{n-1}\,.$$

向量

0.0.1 判断一个向量是否由一组向量线性表示

方法一

判断向量β是否由一组向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示,

(1) 令$\beta=x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m$;

(2) 把向量方程转化为线性方程组, 若方程组无解, 则向量β不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示. 若方程组有解, 则向量β能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.

方法二

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta\in F^n, A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$,

$$\begin{pmatrix}A,\beta\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} & d_1\\ & \vdots\\ B & d_r\\ & \vdots\\ & d_m\end{pmatrix},$$

其中B为如下形式,

$$B=\begin{pmatrix}1\cdots 0 & C_{1,r+1} & \cdots & C_{1m}\\ \vdots \quad\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0\cdots 1 & C_{r,r+1} & \cdots & C_{rm}\\ 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots \quad\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=(\beta_1,\cdots,\beta_m).$$

$$\gamma=(d_1,\cdots,d_m)^T.$$

易见,γ由$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示$\Longleftrightarrow\gamma$由$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表示$\Longleftrightarrow d_{r+1}=\cdots=d_m=0$. 此时,

$$\gamma=d_1\beta_1+\cdots+d_r\beta_r.$$

因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$与$\beta_1,\cdots,\beta_m,\gamma$有相同的线性关系,故

$$\beta=d_1\alpha_1+\cdots+d_r\alpha_r.$$

例0.0.33. 判断向量β能否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?其中

$$\alpha_1=(1,0,-1,1),\ \alpha_2=(2,1,-2,0),$$

$$\alpha_3=(-2,-1,0,1),\ \beta=(0,-1,2,1),$$

解　方法一 设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 则

$$\begin{cases}k_1+2k_2-2k_3=0\\ k_2-k_3=-1\\ -k_1-2k_2=2\\ k_1+k_3=1\end{cases}$$

对增广矩阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&-1&-1\\-1&-2&0&2\\1&0&1&1\end{pmatrix},$$

施行初等行变换

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&-1&-1\\0&0&-2&2\\0&-2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&-1&-1\\0&0&-2&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

得唯一解$k_1=2,k_2=-2,k_3=-1$, 即β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示, 且

$$\beta=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3.$$

方法二 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$为列作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&-1&-1\\-1&-2&0&2\\1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

对A施行初等行变换

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&-1&-1\\0&0&-2&2\\0&-2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&-1&-1\\0&0&-2&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是

$$\beta=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3.$$

例0.0.34. 已知向量组

$$\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\ \alpha_2=(2,7,1,3)^T,$$

$$\alpha_3=(0,1,-1,a)^T,\ \beta=(3,10,b,4)^T,$$

(1) a,b取何值时, 向量β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？

(2) a,b取何值时, 向量β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？并写出此表达式.

解 设$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$, 则

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 3 \\ 4k_1 + 7k_2 + k_3 = 10 \\ k_2 - k_3 = b \\ 2k_1 + 3k_2 + ak_3 = 4 \end{cases}$$

对增广矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix},$$

施行初等行变换

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}.$$

当$b \neq 2$时, $r(A) \neq r(\tilde{A})$, 可知方程组无解, 即向量β不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

当$b = 2, a \neq 1$时,

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = r(\tilde{A}) = 3$, 可知方程组有唯一解, 即向量β能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一线性表示, 表达式为

$$\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

当$b = 2, a = 1$时,

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3$, 可知方程组有无穷多解

$$\begin{cases} k_1 = -2k - 1 \\ k_2 = k + 2 \\ k_3 = k \end{cases},$$

故向量β能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 表达式为

$$\beta = (-2k-1)\alpha_1 + (k+2)\alpha_2 + k\alpha_3 (k\text{任取}).$$

例0.0.35. 设向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}(m \geq 3)$线性相关, 向量组$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关, 试讨论

(1) 向量α_1能否由$\alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示?

(2) 向量α_m能否由$\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示?

解 (1) 因为向量组$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关, 故向量组$\alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$也线性无关, 而向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性相关, 所以向量$\alpha_1$能由$\alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示.

(2) 如果向量α_m能由$\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示, 又由(1)知向量$\alpha_1$能由$\alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示, 由此可得向量$\alpha_m$能由$\alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示, 从而向量组$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关, 这与已知矛盾. 所以向量$\alpha_m$不能由$\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示.

0.0.2 向量组等价的问题

设$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$和$\gamma_1, \cdots, \gamma_t$是$F^n$中的两个向量组,并且

$$\bar{A} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_t),\ A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m),\ r(A) = r,$$

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{行}} \bar{B} = \left(B, \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \right).$$

其中B为如下形式,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \cdots 0 & C_{1,r+1} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots \quad\ \ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 1 & C_{r,r+1} & \cdots & C_{rm} \\ 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots \quad\ \ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (\beta_1, \cdots, \beta_m).$$

$C \in F^{r \times t}, D \in F^{(n-r) \times t}$,并且可令

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (\eta_1, \cdots, \eta_t).$$

因为$\bar{A},\bar{B}$的列向量有相同的线性关系,所以$\gamma_1,\cdots,\gamma_t$由可向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示$\Longleftrightarrow$ $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 可由向量组$\beta_1,\cdots\beta_r$线性表示当且仅当$\Longleftrightarrow D=0$. 此时,

$$(\eta_1,\cdots,\eta_t)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)C,$$

因而

$$(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)C.$$

类似地, 可判断$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$能否由$\gamma_1,\cdots,\gamma_t$线性表出.

例0.0.36. 判断R^3中的以下向量组是否等价:

$$\alpha_1=(1,2,3),\ \alpha_2=(1,0,2),$$

$$\beta_1=(3,4,8),\ \beta_2=(2,2,5),\ \beta_3=(0,2,1).$$

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&2&0\\2&0&4&2&2\\3&2&8&5&1\end{pmatrix},$$

对A施行一系列初等行变换

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_3=\alpha_1-\alpha_2.$$

类似地,以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2$为列作矩阵

$$M=\begin{pmatrix}3&2&0&1&1\\4&2&2&2&0\\8&5&1&3&2\end{pmatrix}.$$

对M作一系列初等行变换

$$M\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&1&-3&-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而

$$\alpha_1=\beta_1-\beta_2,\ \alpha_2=-\beta_1+2\beta_2,$$

于是α_1,α_2与β_1,β_2,β_3等价.

例0.0.37. 设

$$\begin{cases} \beta_1 = \qquad\quad \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \\ \beta_2 = \alpha_1 \qquad\quad + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \end{cases}$$

证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$等价

证 由已知可得

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

令

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

由于

$$|K| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n(n-1) \neq 0, (n > 1)$$

故K可逆, 从而

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)K^{-1}$$

即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$可由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$线性表出, 所以$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$等价.

0.0.3 向量组线性关系的判定问题

方法一利用定义

方法二利用秩

方法三利用行列式

方法四利用相关性的其他性质

例0.0.38. 判断下列向量组的相关性:
$\alpha_1=(2,-1,3,1)^T,\alpha_2=(4,-2,5,4)^T,\alpha_3=(2,-1,4,-1)^T$;

解 **方法一**(利用定义) 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\mathbf{0}$, 则

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3=0 \\ -x_1-2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+4x_3=0 \\ x_1+4x_2-x_3=0 \end{cases}$$

对系数矩阵施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因$r(A)=2<3$, 故方程组有非零解

$$\begin{cases} x_1=-3k \\ x_2=k \qquad (k\text{任取}), \\ x_3=k \end{cases}$$

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

方法二(利用秩) 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列作矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

对A施行初等行变换

$$A\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(A)=2<3$, 所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

例0.0.39. 设$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(1,3,t)^T$

(1) t为何值时, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关?

(2) t为何值时, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关?

(3) 当向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关时, 将$\alpha_3$表示为$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合.

解 **方法一**(利用定义) 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\mathbf{0}$, 则

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ x_1+3x_2+tx_3=0 \end{cases}$$

对系数矩阵施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & t-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}.$$

当$t\neq 5$时, $r(A)=3$, 方程组只有零解, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

当$t=5$时, $r(A)=2<3$, 方程组有非零解, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 此时

$$A\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=k \\ x_2=-2k \quad (k\text{任取}). \\ x_3=k \end{cases}$$

令$k=1$, 得$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=\mathbf{0}$, 故$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

方法二(利用秩) 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列作矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}$$

对A施行初等行变换

$$A\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & t-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}.$$

当$t \neq 5$时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(A) = 3$, 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

当$t = 5$时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(A) = 2 < 3$, 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, 此时

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

方法三(利用行列式) 直接计算$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$构成矩阵的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = t - 5.$$

当$t \neq 5$时, 方程组只有零解, 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

当$t = 5$时, 方程组有非零解, 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, (3)的讨论同解法一.

例0.0.40. 设A是4×3矩阵, B是3×3矩阵, 且有$AB = \mathbf{0}$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

判断B的列向量组的线性相关性.

解 由$AB = \mathbf{0}$可知$r(A) + r(B) \leq A$的列数$= 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以$r(A) = 2$, 则$r(B) \leq 3 - 2 = 1$, 故B的三个列向量一定是线性相关的.

0.0.4 向量组线性关系的证明问题

例0.0.41. 已知A是三阶矩阵, $\alpha_1 \neq \mathbf{0}, \alpha_2, \alpha_3$是3维向量, 满足$A\alpha_1 = \alpha_1$, $A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 证明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关

解 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \tag{0.0.4}$$

左乘A, 得

$$x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_3A\alpha_3 = \mathbf{0},$$

由已知条件得

$$x_1\alpha_1 + x_2(\alpha_1 + \alpha_2) + x_3(\alpha_2 + \alpha_3) = \mathbf{0} \tag{0.0.5}$$

(0.0.5) − (0.0.4)得

$$x_2\alpha_1 + x_3\alpha_2 = \mathbf{0} \tag{0.0.6}$$

左乘A, 代入已知条件得

$$x_2\alpha_1 + x_3(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathbf{0} \tag{0.0.7}$$

(0.0.7) − (0.0.6)得$x_3\alpha_1 = \mathbf{0}$, 因为$\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 则必有$x_3 = 0$, 代入(0.0.6)及(0.0.4)可得$x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

例0.0.42. *已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 证明$\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$也线性无关.*

证 由题设知,

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

因表出矩阵的行列式为$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, 所以$r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$, 即$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

注 此题也可用定义证, 但上述方法更简单.

例0.0.43. *设A是$n \times m$矩阵$(n < m)$, B是$m \times n$矩阵, I是n阶单位矩阵, 已知$AB = I$, 证明B的列向量组线性无关.*

证 因为$n < m$, 所以$r(B) \leq \min\{n, m\} = n$, 又因为$r(B) \geq r(AB) = r(I) = n$, 所以$r(B) = n$, 即$B$的行向量组线性无关.

例0.0.44. *证明β可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表示,则表示法唯一的充要条件是$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关.*

证 充分性. 若

$$\beta = d_1\alpha_1 + \cdots + d_r\alpha_r = t_1\alpha_1 + \cdots + t_r\alpha_r,$$

故有

$$(d_1 - t_1)\alpha_1 + \cdots + (d_r - t_r)\alpha_r = \mathbf{0}.$$

因为$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 所以必有$d_i - t_i = 0, i = 1, \cdots, r$, 即$d_i = t_i, i = 1, \cdots, r$. 所以$\beta$由$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表示的表示法唯一.

必要性.(反证法)

假设$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关, 即存在不全为零的数$k_1, \cdots, k_r$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \mathbf{0},$$

又由β可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表示, 即

$$\beta = d_1\alpha_1 + \cdots + d_r\alpha_r,$$

可得

$$\beta = \beta + \mathbf{0} = (d_1 + k_1)\alpha_1 + \cdots + (d_r + k_r)\alpha_r,$$

因为$k_1, \cdots, k_s$是不全为零的数, 所以存在i使得$d_i \neq d_i + k_i$. 由此可得β由$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表示的表示法不唯一, 矛盾. 所以$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

0.0.5 求向量组的秩及极大线性无关组的问题

求向量组的极大无关组并用之表示其余向量方法

设$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in F^n$, $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, 且$r(A) = r$. 则$A$可经初等行变换及列的换法变换化为如下的标准形:

$$B = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & C_{1,r+1} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & C_{r,r+1} & \cdots & C_{rm} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (\beta_1, \cdots, \beta_m).$$

即

$$A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \xrightarrow{\text{行}} B = (\beta_1, \cdots, \beta_m).$$

故$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$与$\beta_1, \cdots, \beta_m$有相同的线性关系.

若$r=m$, 则$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关, 因而$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关; 若$r<m$, 则可知,$\beta_1,\cdots,\beta_r$为$\beta_1,\cdots,\beta_m$的极大无关组, 并且

$$\beta_{r+j}=C_{1,r+j}\beta_1+\cdots+C_{r,r+j}\beta_r,\ j=1,\cdots,m-r.$$

因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\cdots,\beta_m$有相同的线性关系, 故$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的极大无关组, $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=r$并且

$$\alpha_{r+j}=C_{1,r+j}\alpha_1+\cdots+C_{r,r+j}\alpha_r,\ j=1,\cdots,m-r.$$

例0.0.45. 已知向量组

$$\alpha_1=(1,0,-1,1),\ \alpha_2=(2,1,-2,0),$$

$$\alpha_3=(-2,-1,0,1),\ \alpha_4=(0,-1,2,1)$$

(1) 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩;

(2) 求该向量组的一个极大无关组,并用之表示其余向量.

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&-1&-1\\-1&-2&0&2\\1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

对A施行初等行变换

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&-1&-1\\0&0&-2&2\\0&-2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&-1&-1\\0&0&-2&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$就是所求的一个极大无关组, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$, 并且

$$\alpha_4=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3.$$

例0.0.46. 已知向量组

$$\alpha_1=(a,1,1)^T,\ \alpha_2=(1,a,1)^T,\ \alpha_3=(1,1,a)^T,$$

求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩;

解 方法一(利用矩阵的初等变换) 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列作矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

对A施行初等行变换

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) \end{pmatrix}.$$

当$a\neq 1$且$a\neq -2$时, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(A)=3$.

当$a=1$时, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(A)=1$,

当$a=-2$时, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(A)=2$.

方法二 (利用行列式) 直接计算$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成矩阵的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2.$$

当$a\neq 1$且$a\neq -2$时, $|A|\neq 0$, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$

当$a=1$时, $|A|=0$且

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

显然A的所有2阶子式均为0, 故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$,

当$a=-2$时, $|A|=0$且

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

因A中有2阶子式

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0,$$

故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$.

例0.0.47. *设4维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,若方程组$Ax=\mathbf{0}$的通解为$x=k(1,0,1,0)^T$, 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组.*

解 因为方程组$Ax=\mathbf{0}$的通解为$x=k(1,0,1,0)^T$, 所以$r(A)=4-1=3$, 即向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组包含3个向量.

又因$A(1,0,1,0)^T=0$, 即$(\alpha_1\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)(1,0,1,0)^T=0$, 所以$\alpha_1+\alpha_3=\mathbf{0}$, 即$\alpha_1$与$\alpha_3$线性相关. 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组中必不能同时含有$\alpha_1$和$\alpha_3$, 只能是$\alpha_1$,$\alpha_2$,$\alpha_4$或$\alpha_2$, α_3, α_4.

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_4\alpha_4=\mathbf{0}$, 即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+0\alpha_3+k_4\alpha_4=\mathbf{0}$$

所以$(k_1,k_2,0,k_4)^T$是$Ax=\mathbf{0}$的解向量, 于是存在常数c, 使得

$$(k_1,k_2,0,k_4)^T=c(1,0,1,0)^T$$

可得$c=0$, 即$k_1=k_2=k_4=0$. 所以α_1,α_2,α_4线性无关是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组.

同理可证α_2, α_3, α_4也是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组.

例0.0.48. *已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$,$\cdots$, $\beta_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n$, $\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$, 求$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的秩及一个极大线性无关组.*

解 由题设知,

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关, 所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$与$A$的列向量组有相同的线性关系. 又$|A|=1+(-1)^{n-1}$, 此时

(1) 当n为奇数时, $|A|\neq 0$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关, 其秩为$n$, 其自身是向量组的极大无关组.

(2) 当n为偶数时, $|A|=0$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性相关, 所以$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)<n$, 因$A$的前$n-1$列线性无关, 所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}$线性无关, 从而有$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\geq n-1$, 因此可得$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的秩为$n-1$, 极大无关组为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}$.

例0.0.49. *设$\alpha_1=(a,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,1+a,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,2+a,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,3+a)^T$. 问$a$为何值时, 向量组$\alpha_1,\alpha_2$, α_3,α_4线性相关, 并在此时求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组.*

解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关的充分必要条件是$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$, 而

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3+a \end{vmatrix}=(a-1)^3(a+9).$$

于是, 当$a=1$或$a=-9$时, 向量组线性无关.

当$a=1$时, α_1是极大无关组.

当$a=-9$时, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组.

0.0.6 向量组极大无关组及秩的证明问题

例0.0.50. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4, 证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为4.

解 因$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4$, 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)\geq 3$. 如果$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=3$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性相关, 即得$\alpha_5-\alpha_4$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出. 由$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$知$\alpha_4$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 于是$\alpha_5$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 这与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4矛盾, 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为4.

例0.0.51. 设向量组$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$; $(\mathrm{II}):\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$;(III):$\alpha_1$, α_2, $\cdots$, α_s, β_1, β_2, $\cdots$, β_t的秩分别为r_1,r_2,r_3, 证明

$$\max(r_1,r_2)\leq r_3\leq r_1+r_2$$

证 显然$\max(r_1,r_2)\leq r_3$, 下证$r_3\leq r_1+r_2$.

不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$分别是$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与(II): β_1, β_2, $\cdots$, β_t 的极大无关组, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$与$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$与$(\mathrm{II}):\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$等价, 从而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$ 与(III): α_1, α_2, $\cdots$, α_s, β_1, β_2, $\cdots$, β_t等价, 所以

$$r_3=r(\mathrm{III})\leq r_1+r_2.$$

0.0.7 有关内积、夹角、正交的问题

例0.0.52. 在欧氏空间$\mathbf{R}^4$中, 已知$\alpha=(1,-2,-1,3)$与$\beta=(3,-1,-2,-1)$, 求α与β的夹角.

解 由于$(\alpha,\beta)=3+2+2-3=4$,$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{15}$,$|\beta|=\sqrt{(\beta,\beta)}=\sqrt{15}$, 故

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}=\arccos\frac{4}{15}.$$

例0.0.53. 在欧氏空间$\mathbf{R}^3$中, 已知$\alpha=(1,1,1)$与$\beta=(1,1,0)$, 求与α,β都正交的向量.

解 设$\xi=(x_1,x_2,x_3)$是与α,β都正交的向量, 则有$(\xi,\alpha)=0,(\xi,\beta)=0$, 即

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2=0\end{cases}.$$

解此方程组

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

得解

$$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_2=x_2\quad(x_2\text{任取}).\\x_3=0\end{cases}$$

故$\xi=k(-1,1,0)$, 所以与α,β都正交的向量为$k(-1,1,0)$.

例0.0.54. 设α,β 是欧氏空间中的任意向量, 证明

$$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2|\alpha|^2+2|\beta|^2$$

证 由内积性质得

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2&=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)+(\alpha-\beta,\alpha-\beta)\\&=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\&=2(\alpha,\alpha)+2(\beta,\beta)=2|\alpha|^2+2|\beta|^2\end{aligned}$$

例0.0.55. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$是$\mathbf{R}^n$中线性无关的向量组, 且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$与$\beta_1,\beta_2$正交, 证明$\beta_1,\beta_2$线性相关.

证 方法一 由于$n+1$个n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta_1,\beta_2$线性相关, 即存在一组不全为零的数$k_1,\cdots,k_{n-1},l_1,l_2$使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+l_1\beta_1+l_2\beta_2=\mathbf{0}$$

又$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$线性无关, 因此$l_1, l_2$必不全为零.

上式分别与β_1, β_2作内积, 得

$$k_1(\alpha_1, \beta_1) + \cdots + k_{n-1}(\alpha_{n-1}, \beta_1) + l_1(\beta_1, \beta_1) + l_2(\beta_2, \beta_1) = \mathbf{0},$$

$$k_1(\alpha_1, \beta_2) + \cdots + k_{n-1}(\alpha_{n-1}, \beta_2) + l_1(\beta_1, \beta_2) + l_2(\beta_2, \beta_2) = \mathbf{0},$$

由题设知,

$$l_1(\beta_1, \beta_1) + l_2(\beta_2, \beta_1) = \mathbf{0},\ l_1(\beta_1, \beta_2) + l_2(\beta_2, \beta_2) = \mathbf{0},$$

即

$$(l_1\beta_1 + l_2\beta_2, \beta_1) = \mathbf{0},\ (l_1\beta_1 + l_2\beta_2, \beta_2) = \mathbf{0},$$

从而有

$$(l_1\beta_1 + l_2\beta_2, l_1\beta_1 + l_2\beta_2) = \mathbf{0},$$

由此得$l_1\beta_1 + l_2\beta_2 = \mathbf{0}$, 而$l_1, l_2$不全为零, 所以$\beta_1, \beta_2$线性相关.

方法二 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T \end{pmatrix}$$

是$n-1 \times n$矩阵, 由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$线性无关, 知$r(A) = n-1$, 所以线性方程组$Ax = \mathbf{0}$的解空间的维数为1.

因向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$与$\beta_1, \beta_2$正交, 故$\beta_1, \beta_2$是$Ax = \mathbf{0}$的解, 于是$\beta_1, \beta_2$线性相关.

0.0.8 有关标准正交基的问题

例0.0.56. *求齐次线性方程组$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$的解空间的一个标准正交基.*

解 解此方程组有

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases},$$

故方程组通解为

$$\mathbf{x} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

方法一 先求一个基, 再用施密特正交化方法正交化单位化.

$\beta_1=\alpha_1=(1,-1,0,0)^T$,

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{2}(1,1,2,0)^T$,

$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\dfrac{1}{3}(1,1,-1,3)^T$.

(2)单位化:

$\gamma_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0,0)^T$,

$\gamma_2=\dfrac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2,0)^T$,

$\gamma_3=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(1,1,-1,3)^T$.

方法二 先取一些正交解, 由此扩充出解空间的正交基. 取$\beta_1=\alpha_1$, 令

$$\beta_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

因β_2是方程组的解且与β_1正交, 故有

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0\\ \qquad\qquad\quad x_1-x_2=0\end{cases}$$

解得通解为

$$\mathbf{x}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

取

$$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$\beta_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

因β_3是方程组的解且与$\beta_1,,\beta_2$正交, 故有

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2=0 \\ -x_3+x_4=0 \end{cases}$$

解得通解为

$$\mathbf{x}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

取

$$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

即β_1,β_2,β_3为解空间的正交基. 再单位化

$\gamma_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0,0)^T,$

$\gamma_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,0,-1,1)^T,$

$\gamma_3=\dfrac{1}{2}(1,1,1,1)^T.$

0.0.9 有关正交矩阵

例0.0.57. 已知

$$A=\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & \frac{6}{7} & c \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & d \end{pmatrix}$$

为正交矩阵, 求a,b,c,d的值.

解 由于A是正交阵, 则A的行(列)向量组是R^3的标准正交基, 故有

$$\begin{cases} a^2+(-\frac{3}{7})^2+(\frac{2}{7})^2=1 \\ (-\frac{3}{7})^2+(\frac{2}{7})^2+d^2=1 \\ (-\frac{3}{7})a+(-\frac{3}{7})(\frac{2}{7})+(\frac{2}{7})d=0 \end{cases}$$

由此可得$a=-\frac{6}{7},d=-\frac{6}{7}$.

由列向量的正交性可得

$$\begin{cases}(-\frac{6}{7})\times(-\frac{3}{7})+\frac{6}{7}b+(-\frac{3}{7})\times\frac{2}{7}=0\\ (-\frac{3}{7})\times\frac{2}{7}+\frac{6}{7}c+\frac{2}{7}\times(-\frac{6}{7})=0\end{cases}$$

解出$b=-\frac{2}{7}, c=\frac{3}{7}$.

例0.0.58. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为正交矩阵, 则
(1) 当$|A|=-1$时, $a_{ij}=A_{ij}$;
(2) 当$|A|=1$时, $a_{ij}=-A_{ij}$, 其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式.

证 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为正交矩阵, 则有

$$A^{-1}=A^T=(a_{ji})_{n\times n},$$

又

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=(\frac{1}{|A|}A_{ji})_{n\times n},$$

其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式. 所以有
(1) 当$|A|=1$时, $a_{ij}=A_{ij}$;
(2) 当$|A|=-1$时, $a_{ij}=-A_{ij}$.

例0.0.59. 设$\mathbf{x}$为R^n中单位列向量, $A=I-2\mathbf{x}\mathbf{x}^T$, 证明$A$为对称正交阵.

证 $\mathbf{x}$为R^n中单位向量, 即$\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1$.

$$A^T=(I-2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)^T=I-2\mathbf{x}\mathbf{x}^T=A$$

$$A^TA=(I-2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)^T(I-2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)=I-4\mathbf{x}\mathbf{x}^T+4\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T=I$$

故A为对称正交阵.

例0.0.60. 设A是正交阵, 且$|A|=-1$, 求$|A+I|$

解 因$|A|=-1$,故-1是A的特征值，所以特征多项式$|-I-A|=0$.

线性方程组

0.0.10 有关解的判定

例0.0.61. 证明线性方程组$\begin{cases} x_2 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_1 = a_3 \end{cases}$ 有解的充分必要条件为$a_1+a_2+a_3=0$.

解 将方程组化成矩阵形式$Ax=b$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

对方程组对应的增广矩阵(A,b)作初等行变换将其化为阶梯形:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & a_2 \\ -1 & 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_1+a_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_2+a_1+a_3 \end{pmatrix}$$

故方程组有解$\Leftrightarrow r(A)=r(A,b) \Leftrightarrow a_1+a_2+a_3=0$.

例0.0.62. 设A是一个$m\times n$矩阵, 求证存在非零的$n\times s$矩阵B,使得$AB=0$的充要条件是$r(A)<n$.

证 必要性. 用反证法. 若$r(A)=n$,则$Ax=0$只有零解, 这与已知矛盾, 所以$r(A)<n$.

充分性. 因为$r(A)<n$,故$Ax=0$有非零解x_0, 设

$$x_0 = (x_1, \cdots, x_n)^T \neq 0.$$

取

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

则$B\neq 0$且$AB=0$.

例0.0.63. 设A为$n\times n$矩阵, 求证方程组$Ax=b$有唯一解的充要条件是方程组$A^*x=d$有唯一解, 并在此时求其解.

证 必要性. 设$Ax=b$有唯一解, 则$|A|\neq 0$, 而

$$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0,$$

故由Cramer法则知, 方程组$A^*x=d$有唯一解

$$X=(A^*)^{-1}d.$$

充分性. 设$A^*x=d$ 有唯一解, 则$|A^*|\neq 0$, 即$r(A^*)=n$, 从而$r(A)=n$, 于是$|A|\neq 0$, 所以由Cramer法则, 方程组$Ax=b$有唯一解

$$X=A^{-1}b.$$

例0.0.64. 设整系数线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\quad i=1,\cdots,n \tag{3.1.3}$$

对任意的$b_1,\cdots,b_n$均有整数解, 证明其系数行列式必为± 1.

证 令$A=(a_{ij})_{n\times n}$, 取(3.1.3)的右端依次为单位矩阵的各列, 所得的解依次为α_1, $\cdots$, α_n. 令

$$D=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),$$

则$AD=I$, 并且A,D均为整数矩阵, 故

$$|A||D|=1.$$

但$|A|$与$|D|$均为整数, 所以$|A|=1$或-1.

0.0.11 有关基础解系

例0.0.65. 求下面齐次线性方程组的基础解系

$$\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0,\\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0. \end{cases}$$

解 法一 令

$$C=\left(A^T \vdots I\right),$$

其中A是方程组的系数矩阵, I是阶数等于A的列数的单位矩阵. 对C进行初等行变换化为行阶梯形, 则

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 8 & -9 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -14 & \vdots & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$\alpha_1=\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2},1,0\right)^T, \quad \alpha_2=(-1,-2,0,1)^T$$

即为所求的一个基础解系.

法二 对系数矩阵A作初等行变换化为行最简形

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1+\frac{3}{2}x_3+x_4=0 \\ x_2-\frac{7}{2}x_3+2x_4=0 \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} x_1=-\frac{3}{2}x_3-x_4 \\ x_2=\frac{7}{2}x_3-2x_4 \end{cases}$$

取自由变量$x_3=c_1, x_4=c_2$, 得通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}c_1-c_2 \\ \frac{7}{2}c_1-2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

方程组的一个基础解系为

$$\alpha_1=\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2},1,0\right)^T,\quad \alpha_2=(-1,-2,0,1)^T$$

法三 由法二解得

$$\begin{cases} x_1=-\frac{3}{2}x_3-x_4 \\ x_2=\frac{7}{2}x_3-2x_4 \end{cases}$$

取

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得方程组的一个基础解系

$$\alpha_1=\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2},1,0\right)^T,\quad \alpha_2=(-1,-2,0,1)^T$$

我们也可以取x_3,x_4的另一组线性无关的值

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

得到方程组的另一个基础解系

$$\alpha_1=(-4,5,2,1)^T,\quad \alpha_2=(-2,9,2,-1)^T$$

例0.0.66. 设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的秩为n, 求齐次线性方程组$Bx=\mathbf{0}$的一个基础解系, 其中$B=(a_{ij})_{r\times n}$ $(r<n)$是A的前r行构成的矩阵, x为n维列向量.

解 由$r(A)=n$知A的行向量组线性无关, 所以$r(B)=r$. 令W为$Bx=\mathbf{0}$的解空间, 则$\dim W=n-r$. 令A_{ij}为A中元素a_{ij}的代数余子式, 由$r(A)=n$知$r(A^*)=n$, 即A^*的行（列）向量组线性无关. 因

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0,\quad i=1,2,\cdots,r;j=r+1,\cdots,n,$$

故

$$\begin{cases} \eta_{r+1}=(A_{r+1,1},\cdots,A_{r+1,n})^T, \\ \cdots\cdots \\ \eta_n=(A_{n,1},\cdots,A_{nn})^T \end{cases}$$

构成$Bx=\mathbf{0}$的一个基础解系.

例0.0.67. 设$0 \neq b \in R^{m\times 1}$, $A \in R^{m\times n}$且$r(A) = r$, 若$\beta_1, \cdots, \beta_{n-r+1}$为$Ax = b$的解向量组的一个极大线性无关组, 则

$$\beta_2 - \beta_1, \beta_3 - \beta_1, \cdots, \beta_{n-r+1} - \beta_1$$

为其导出组的基础解系.

证 显然, $\beta_2 - \beta_1, \beta_3 - \beta_1, \cdots, \beta_{n-r+1} - \beta_1$为$Ax = b$的导出组的解向量. 若

$$\sum_{i=2}^{n-r+1} k_i(\beta_i - \beta_1) = 0,$$

则

$$-\sum_{i=2}^{n-r+1} k_i\beta_1 + \sum_{i=2}^{n-r+1} k_i\beta_i = 0,$$

故

$$k_i = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots, n-r+1).$$

又$Ax = b$的导出组的系数矩阵A的秩为r, 故$\beta_2 - \beta_1, \beta_3 - \beta_1, \cdots, \beta_{n-r+1} - \beta_1$是其基础解系.

0.0.12 齐次线性方程组的求解

线性方程组的求解方法

方法一:用高斯消元法

方法二:用简便方法

方法三:用解的结构

方法四:用Cramer法则

方法五:用逆矩阵

例0.0.68. 求解下面齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 & = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 & = 0 \end{cases}.$$

解 **法一**(用简便方法) 令

$$C = \left(A^T \vdots I \right),$$

其中A是方程组的系数矩阵, I是阶数等于A的列数的单位矩阵. 对C进行初等行变换化为行阶梯形, 则

$$C=\left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

于是方程组的基础解系为

$$\alpha_1=(-2,1,0,0)^T, \quad \alpha_2=(1,0,0,1)^T$$

通解为$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, k_1,k_2为任意常数.

法二(用高斯消元法) 对系数矩阵A作初等行变换化为行最简形

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4 \\ x_2=x_2 \\ x_3=0 \\ x_4=x_4 \end{cases}$$

故方程组的通解为$x=k_1(-2,1,0,0)^T+k_2(1,0,0,1)^T$, k_1,k_2为任意常数.

例0.0.69. 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$, 求齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的通解

解 法一(用高斯消元法) 对系数矩阵施行初等行变换化为行最简形,即

$$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \cdots & 2-n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = x_3+2x_4+\cdots+(n-2)x_n \\ x_2 = -2x_3-3x_4-\cdots-(n-1)x_n \\ x_3 = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

故通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_{n-2}\begin{pmatrix}n-2\\1-n\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

法二(用Cramer法则) 显然A的2阶子式$\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$, 则

$$\begin{cases}x_1+2x_2=-3x_3-4x_4+\cdots-nx_n\\2x_1+3x_2=-4x_3-5x_4-\cdots-(n+1)x_n\end{cases}$$

由Cramer法则得

$$\begin{cases}x_1=-\begin{vmatrix}-3x_3-4x_4+\cdots-nx_n&2\\-4x_3-5x_4-\cdots-(n+1)x_n&3\end{vmatrix}\\ \\ x_2=-\begin{vmatrix}1&-3x_3-4x_4+\cdots-nx_n\\2&-4x_3-5x_4-\cdots-(n+1)x_n\end{vmatrix}\end{cases}$$

取

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

即可得到方程组的基础解系:

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\eta_{n-2}=\begin{pmatrix}n-2\\1-n\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

所以方程组的通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_{n-2} \begin{pmatrix} n-2 \\ 1-n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例0.0.70. 已知$A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$, 求方程组$Ax = \mathbf{0}$的通解.

解 对方程组的系数矩阵施行初等行变换化为行最简形

$$A \to \begin{pmatrix} -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = x_n \\ x_2 = x_n \\ x_3 = x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

故通解为

$$x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

其中k是任意常数.

例0.0.71. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases} \tag{0.0.8}$$

的系数矩阵为$A = (a_{ij})_{(n-1)\times n}$, M_i是A划去第i列剩下的$(n-1)\times(n-1)$矩阵的行列式. 求证

(1) $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$是(0.0.8)的一个解;

(2) 若$r(A) = n-1$, 则(3.2.6)的解都是$(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$的倍数.

证 (1)易知

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = a_{11}M_1 - a_{12}M_2 + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_n.$$

又

$$a_{k1}M_1 - a_{k2}M_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{kn}M_n = 0, \text{‘}k = 2, \cdots, n-1.$$

这就说明

$$(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$$

是(0.0.8)的一个解.

(2) 若$r(A) = n-1$,则(0.0.8)的基础解系含一个线性无关的解向量. 又

$$\beta = (M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$$

是(0.0.8)的解向量且非零. 事实上, 由$r(A) = n-1$知, A中至少有一个$n-1$阶子式不为零, 故β是(0.0.8)的一个基础解系, 从而(0.0.8)的解空间为$L(\beta)$, 即(0.0.8)的解都是β的倍数.

0.0.13 非齐次线性方程组的求解

例0.0.72. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

解 法一(用简便方法) 令

$$C=\begin{pmatrix} A^T & I_n \\ -b^T & 0 \end{pmatrix},$$

其中A是方程组的系数矩阵, b是常数列向量. 对C进行初等行变换(最后一行只作前面行的倍数加到改行的变换), 则

$$C=\left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -18 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 5 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

于是可得

$$E=(0,0,0)^T,\ U=(2,-1,0,0)^T,\ \eta_1=(8,-6,1,0)^T,\ \eta_2=(-7,5,0,1)^T,$$

故由定理**??**可知, 题设方程组有解, 并且通解为

$$x=U+k_1\eta_1+k_2\eta_2,$$

其中k_1,k_2为任意数.

法二(用高斯消元法) 对增广矩阵(A,b)作初等行变换得

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -8 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

所以通解为

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中c_1, c_2为任意常数.

例0.0.73. 问a, b为何值时线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并求有无穷多解时的通解.

解 法一 (用简便求法)令

$$C = \begin{pmatrix} A^T & I_n \\ -b^T & 0 \end{pmatrix},$$

其中A是方程组的系数矩阵, b是常数列向量. 对C进行初等行变换(最后一行只作前面行的倍数加到改行的变换), 则

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a-3 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & a & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -b & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \vdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 1 & -2 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -b & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G$$

由此可知:

(1)当$a \neq 1$时, $r(A) = r(A^T) = r\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} = r(A, b) = 4$, 有唯一解;

(2)当$a=1$时,

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \vdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -2 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -b & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_5+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \vdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -2 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -b-1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而当$a=1,b=-1$时, $r(A)=r(A^T)=r\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}=r(A,b)=2<4$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$x=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当$a=1,b\neq-1$时, 方程组无解.

法二 (用高斯消元法)将方程组化为矩阵形式$Ax=b$得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

对增广矩阵(A,b)作初等行变换得

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & \vdots & b \\ 3 & 2 & 1 & a & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+3r_1,r_3+r_2,r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知:

(1)当$a\neq1$时, $r(A)=4$, 有唯一解;

(2)当$a=1,b\neq-1$时, $2=r(A)\neq r(A,b)=3$, 方程组无解.

(3)当$a=1,b=-1$时, $r(A)=r((A,b))=2<4$, 有无穷多解, 此时

$$(A,b)\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \qquad , \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1\,, \end{cases}$$

取自由变量$x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 得通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 1 \\ -2c_1 - 2c_2 + 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例0.0.74. *设$A = (a_{ij})_{3\times 3}$为正交阵, 且$a_{ij} = A_{ij}, a_{22} = -1$, 求$Ax = (0, -1, 0)^T$的解.*

解 因A为正交阵, 故$AA^T = I$, $|A| = \pm 1$. 由$a_{ij} = A_{ij}$知

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = a_{21}^2 + 1 + a_{23}^2 \geq 1 \end{aligned}$$

得$|A| = 1, a_{21} = a_{23} = 0$.

因A为正交阵, 故A可逆且$A^{-1} = A^T$, 所以$Ax = (0, -1, 0)^T$有唯一解

$$x = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{21} \\ -a_{22} \\ -a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

例0.0.75. *设$A \in R^{m\times n}$, $m \geq n$, 若方程组$Ax = b$有唯一解, 证明A^TA可逆且唯一解为$x = (A^TA)^{-1}A^Tb$.*

证 因方程组$Ax = b$有唯一解, 故有$r(A) = n$, 所以$r(A^TA) = n$, 即A^TA可逆, 则有

$$(A^TA)^{-1}A^Tb = A^{-1}(A^T)^{-1}A^Tb = A^{-1}b,$$

因此

$$A((A^TA)^{-1}A^T) = b,$$

所以唯一解为$x = (A^TA)^{-1}A^Tb$.

例0.0.76. *设4×3矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 且$Ax = \beta$的通解为$x = k\xi + \xi_0$, 其中$\xi = (1, 2, -1)^T$, $\xi_0 = (2, 1, -2)^T$, 若$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_3)$, 求$By = \alpha_1 - \alpha_2$的解.*

解 由条件知ξ是$Ax=\mathbf{0}$的基础解系且$\begin{cases} A\xi \ = \mathbf{0} \\ A\xi_0 = \beta \end{cases}$, 所以$r(A)=3-1=2$, 且

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3 \ = \mathbf{0} \\ 2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 = \beta \end{cases}.$$

于是$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2), B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)$, 从而可知$\alpha_1,\alpha_2$线性无关, 是$A,B$的列向量组的极大无关组, 且有$r(B)=r(A)=2$.

法一 因$r(B)=r(A)=2$, 所以$By=\alpha_1-\alpha_2$的基础解系含$4-2=2$个向量. 由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\alpha_1-\alpha_2$$

观察知,

$$\eta_0=(1,-1,0,0)^T$$

是$By=\alpha_1-\alpha_2$的解,

$$\eta_1=(-1,-2,1,0)^T,\eta_2=(-1,1,0,1)^T$$

是$By=\alpha_1-\alpha_2$的导出组的基础解系, 所以$By=\alpha_1-\alpha_2$的通解是

$$y=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2,$$

其中k_1,k_2为任意常数.

法二 设$y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$,

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

因α_1,α_2线性无关, 则

$$\begin{aligned} & By=\alpha_1-\alpha_2 \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故有

$$\begin{cases} y_1 = -y_3 - y_4 + 1 \\ y_2 = -2y_3 + y_4 - 1 \\ y_3 = y_3 \\ y_4 = y_4 \end{cases}$$

从而得通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中k_1, k_2是任意常数.

例0.0.77. *设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$是非齐次线性方程组$Ax = b$的$s$个解, $k_1, k_2, \cdots, k_s$为实数. 证明:*

(1) 当$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1$时, $x_0 = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$是$Ax = b$的解;

(2) 当$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 0$时, $x_1 = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$是$Ax = 0$的解.

解 设$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$, 则有

$$Ax = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \cdots + k_sA\eta_s = (k_1 + k_2 + \cdots + k_s)b,$$

从而有

(1)当$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1$时, $x_0 = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$满足$Ax_0 = b$, 即$x_0$为$Ax = b$的解;

(2)当$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 0$时, $x_1 = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$满足$Ax_1 = 0$, 即$x_1$为$Ax = 0$的解.

例0.0.78. *设$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$是三元非齐次线性方程组$Ax = \beta$的解, $r(A) = 1$且$\gamma_1 + \gamma_2 = (1, 0, 0)^T, \gamma_2 + \gamma_3 = (1, 1, 0)^T, \gamma_1 + \gamma_3 = (1, 1, 1)^T$, 求方程组$Ax = \beta$的通解.*

解 (用解的结构)由$r(A) = 1$知, 导出组$Ax = 0$的基础解析所含的解向量的个数为2. 又

$$\eta_1 = (\gamma_1 + \gamma_3) - (\gamma_2 + \gamma_3) = \gamma_1 - \gamma_2 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\eta_2 = (\gamma_2 + \gamma_3) - (\gamma_2 + \gamma_1) = \gamma_3 - \gamma_1 = (0, 1, 0)^T,$$

是导出组$xA = 0$的两个解向量, 且线性无关, 故η_1, η_2是导出组的一个基础解系, 又由0.0.77知

$$\eta_0 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T$$

是$Ax=\beta$的一个特解, 因此$Ax=\beta$的通解为

$$\eta=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2,$$

其中k_1,k_2为任意常数.

0.0.14 有关方程组的公共解、同解

例0.0.79. *设x为n维列向量, 试证明线性方程组$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$有公共非零解的充要条件是$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<n$.*

解 方程组$Ax=0$与$Bx=0$有公共非零解$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$有非零解, 而$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$有非零解当且仅当系数矩阵的秩小于未知量个数$n$, 即$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<n$.

例0.0.80. *设有两个4元齐次线性方程组*

$$(I)\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases};(II)\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

(1) *求线性方程组(I)的基础解系;*

(2) *试问方程组(I)和(II)是否有非零的公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解.*

解 (1) 方程组(I)的系数矩阵A作初等行变换, 有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

得$r(A)=2$, 令x_3,x_4为自由变量, 可得基础解系为$\xi_1=(0,0,1,0)^T,\xi_2=(-1,1,0,1)^T$.

(2) 关于公共解有下列三种求法:

法一 把两个方程组联立起来直接求解, 对新方程组的系数矩阵$\overline{A}$作初等变换, 有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由$4-r(\overline{A})=4-3=1$, 从而得新方程的基础解系为$\xi=(-1,1,2,1)^T$, 从而方程组(I)和(II)的全部非零的公共解为$k(-1,1,2,1)^T$(k为任意非零常数).

法二 通过分析方程组(I)和(II)各自的通解, 寻找公共解. 类似(1)的方法可求得方程组(II)的基础解系为

$$\eta_1 = (0,1,1,0)^T, \eta_2 = (-1,-1,0,1)^T$$

则$k_1\xi_1 + k_2\xi_2$和$l_1\eta_1 + l_2\eta_2$分别为方程组(I)和(II)的通解. 令其相等, 即有$k_1(0,0,1,0)^T + k_2(-1,1,0,1)^T$和$l_1(0,1,1,0)^T + l_2(-1,-1,0,1)^T$ 由此得

$$(-k_2, k_2, k_1, k_2)^T = (-l_2, l_1 - l_2, l_1, l_2)^T$$

比较得

$$k_1 = l_1 = 2k_2 = 2l_2$$

故非零公共解为

$$2k_2(0,0,1,0)^T + k_2(-1,1,0,1)^T = k_2(-1,1,2,1)^T,$$

其中k_2为任意非零常数.

法三 把方程组(I)的通解代入方程组(II)中, 在满足方程组(II)的前提下寻求k_1, k_2应满足的关系式, 从而求出全部公共解.

由于$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = (-k_2, k_2, k_1, k_2)^T$, 若它是方程组(II)的解, 应满足(II)的方程, 故

$$\begin{cases} -k_2 - k_2 + k_1 = 0 \\ k_2 - k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

解出$k_1 = 2k_2$, 从而求出公共解为$k_2(-1,1,2,1)^T$. 故非零公共解为$k(-1,1,2,1)^T$ 其中k为任意非零常数.

例0.0.81. *设齐次线性方程组$Ax = \mathbf{0}$和$Bx = \mathbf{0}$,其中A, B分别为$s \times n$和$m \times n$矩阵, 则*

(1) *若$Ax = \mathbf{0}$的解都是$Bx = \mathbf{0}$的解,则$r(A) \geqslant r(B)$;*

(2) *若$Ax = \mathbf{0}$与$Bx = \mathbf{0}$同解, 则$r(A) = r(B)$;*

(3) *若$Ax = \mathbf{0}$的解都是$Bx = \mathbf{0}$的解, 并且$r(A) = r(B)$,则$Ax = \mathbf{0}$与$Bx = \mathbf{0}$同解.*

证 设W_1与W_2分别为$Ax = \mathbf{0}$和$Bx = \mathbf{0}$的解空间, 则

$$\dim W_1 = n - r(A), \dim W_2 = n - r(B). \tag{0.0.9}$$

(1) 由假设知$W_1 \subseteq W_2$,则$\dim W_1 \leqslant \dim W_2$. 由式(0.0.9)可得$r(A) \geqslant r(B)$.

(2) 由于$W_1 = W_2$,则由式(0.0.9)即得$r(A) = r(B)$.

(3) 由于$W_1 \subseteq W_2$, 又由式(0.0.9)可知$\dim W_1 = \dim W_2$, 从而$W_1 = W_2$, 即$Ax = 0$与$Bx = 0$同解.

例0.0.82. 设A为$n\times n$实矩阵, 证明: $r(A)=r(A^TA)=r(AA^T)$.

证 (1) 只需证齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$与$A^TAx=0$同解. 显然, $Ax=0$的解必为$A^TAx=0$的解.

设x_0为$A^TAx=\mathbf{0}$的任意一个实解, 则$x_0^TA^TAx_0=0$, 即

$$(Ax_0)^T(Ax_0)=0. \tag{0.0.10}$$

由于A为n阶实方阵, 故Ax_0为n维实向量, 从而由(0.0.10)式成立得$Ax_0=0$. 这就说明$A^TAx=0$的解必为$Ax=0$的解. 综上, 于是有$r(A)=r(A^TA)$, 故有$r(A^T)=r((A^T)^TA^T)=r(AA^T)$, 所以$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$.

矩阵的相似与相合

1.特征值

1. 已知三阶方阵A的特征值为$1,2,3$, 求A^{-1}, $A^2+2A+3I$的特征值.

解 A^{-1}的特征值为: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$,

$A^2+2A+3I$的特征值:$1+2+3,2^2+2\times 2+3,3^2+2\times 3+3$,即$6,11,18$.

2.相似对角化

例0.0.83. 求一个正交矩阵P, 使P^TAP为对角矩阵, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

解 由

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5),$$

得A的特征值$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对$\lambda_1=-1$, 求$(-I-A)x=\mathbf{0}$ 的一个基础解系$\xi_1=(1,2,2)^T$, 单位化后得$\eta_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^T$.

对$\lambda_2=2$, 求$(2I-A)x=\mathbf{0}$的一个基础解系$\xi_2=(-2,-1,2)^T$, 单位化后得$\eta_2=\frac{1}{3}(-2,-1,2)^T$.

对$\lambda_3=5$, 求$(5I-A)x=\mathbf{0}$的一个基础解系$\xi_3=(2,-2,1)^T$, 单位化后得$\eta_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^T$.

令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix},$$

则

$$P^TAP=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}.$$

例0.0.84. 已知$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$,求$A^{10}$.

解 由

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

得A的特征值为$\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=1$.

对$\lambda_1=4$, 求$(4I-A)x=\mathbf{0}$的一个基础解系$\xi_1=(1,1,-1)^T$, 单位化后得$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$.

对$\lambda_2=\lambda_3=1$, 求$(I-A)x=\mathbf{0}$的一个基础解系$\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,1)^T$. 将$\alpha_2,\alpha_3$单位正交化得$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$. 令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

得

$$A=P\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^T.$$

所以

$$A^{10}=P\begin{pmatrix}4^{10}&&\\&1^{10}&\\&&1^{10}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^T.$$

例0.0.85. 已知$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$,求一个正交矩阵$Q$，使$Q^TA^{-1}Q$为对角矩阵,

解 由

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5),$$

得A的特征值$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对$\lambda_1=-1$，求$(-I-A)x=\mathbf{0}$ 的一个基础解系$\xi_1=(1,2,2)^T$，单位化后得$\eta_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^T$.

对$\lambda_2=2$，求$(2I-A)x=\mathbf{0}$的一个基础解系$\xi_2=(-2,-1,2)^T$，单位化后得$\eta_2=\frac{1}{3}(-2,-1,2)^T$.

对$\lambda_3=5$，求$(5I-A)x=\mathbf{0}$的一个基础解系$\xi_3=(2,-2,1)^T$，单位化后得$\eta_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^T$.

令

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix},$$

则

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}.$$

所以

$$Q^TA^{-1}Q=Q^{-1}A^{-1}Q=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

例0.0.86. 已知$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$,求$A^{10}$.

解 由

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

得A的特征值为$\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=1$.

对$\lambda_1 = 4$, 求$(4I-A)x=\mathbf{0}$的一个基础解系$\xi_1 = (1,1,-1)^T$, 单位化后得$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$.

对$\lambda_2=\lambda_3=1$, 求$(I-A)x=\mathbf{0}$的一个基础解系$\alpha_2=(-1,1,0)^T, \alpha_3=(1,0,1)^T$. 将$\alpha_2,\alpha_3$单位正交化得$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$. 令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

得

$$A=P\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^T.$$

所以

$$A^{10}=P\begin{pmatrix} 4^{10} & & \\ & 1^{10} & \\ & & 1^{10} \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^T.$$

3. 设三阶方阵A满足$Aa_i=ia_i(i=1,2,3)$, 且$a_1=(1,2,2)^T$, $a_2=(2,-2,1)^T$, $a_3=(-2,-1,2)^T$, 求矩阵A.

解 三阶方阵A满足$Aa_i=ia_i(i=1,2,3)$,所以A的特征值为:$1,2,3$,对应的特征向量为$a_1=(1,2,2)^T$, $a_2=(2,-2,1)^T$, $a_3=(-2,-1,2)^T$.

令$P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. 所以

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. 设三阶实对称矩阵A的特征值为$6,3,3$, 对应特征值6的特征向量为$\xi_1=(1,1,1)^T$, 求矩阵A.

解 设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$是特征值3的特征向量, 故与ξ_1正交, 即$x_1+x_2+x_3=0$. 得基础解系$\xi_2=(-1,1,0)^T$, $\xi_3=(-1,-1,2)^T$.

A的特征值为:$6,3,3$,对应的特征向量分别为$\xi_1=(1,1,1)^T$, $\xi_2=(-1,1,0)^T$, $\xi_3=(-1,-1,2)^T$. 正交化单位化得$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$, $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T$.

令$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, $P^{-1}=P^T$, 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}$. 所以

$$A=P\begin{pmatrix}6 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}6 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

4．已知$A\sim B$, 求x,y的值, 其中

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & x\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & -2 & y\end{pmatrix}.$$

解

$$|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$$

即

$$(\lambda-3)[\lambda^2-(x+1)\lambda+x-1]=(\lambda-3)[\lambda^2-(y+4)\lambda+4y+8)$$

, 所以$x+1=y+4, x-1=4y+8$,得$x=1, y=-2$.

1. 设3 阶矩阵A的特征值为$1,-1,2$, 求$|A^*+3A-2I|$.

2．设n阶矩阵A满足$A^2=A$, 证明

(1) A的特征值只能是1或0;

(2) $A+I$可逆.

3. 设λ_1,λ_2是n阶矩阵A的两个不同的特征值, ξ_1,ξ_2分别是A的属于λ_1,λ_2的特征向量, 证明$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量.

4. 设A为n阶正交矩阵, 则

(1) A的特征值的模为1;

(2) 当A有实特征值时, 其实特征值只能是1或-1.

(3) 当$|A|=-1$时, -1是A的特征值;

(4) 当$|A|=1$且n为奇数时, 1是A的特征值.