线性代数单元练习二（矩阵）

一、单项选择题

1．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$为 3 阶方阵，若$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵的秩为 1，则必有(　　)

A．$a=b$ 或 $a+2b=0$　　B．$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

C．$a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　D．$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

2. 已知$Q=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$,$P\neq O$是三阶方阵，且$PQ=O$，则(　　)

A. $t=6$时，$r(P)=1$　　B. $t=6$时，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{P})=2$

C. $t\neq 6$时，$r(P)=1$　　D. $t\neq 6$时，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{P})=2$

3．A为n阶方阵，满足$A^2=E$，则(　　)

A. $|A|=1$　　B. A的特征值全为1

C. $A^*=A$　　D. $A-E,A+E$不同时可逆

4．设$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}_1^5\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^4$为(　　)

A. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 5a_{11}+a_{31} & 5a_{12}+a_{32} & 5a_{13}+a_{33} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 5(a_{12}+a_{32}) & 5(a_{11}+a_{31}) & 5(a_{13}+a_{33}) \end{bmatrix}$

5．设A为$m\times n$阵，B为$n\times m$阵，则当$m>n$时，方阵AB的秩（　　）

A．大于m　　B．等于m　　C．小于m　　D．不小于m

6．设A,B均为n阶可逆阵，则$\left|-2\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T & \\ & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}\right|$为(　　)

A．$(-2)^{\boldsymbol{n}}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}$　　B．$-2|\boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{B}|$　　C．$-2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{-1}|$　　D．$(-2)^{2\boldsymbol{n}}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}$

7. 设A，B为n阶方阵,且$r(A)=r(B)$,则(　　　)

A. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$　　　　B. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$

C. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$　　　　D. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$

8. 设A，B均为n阶矩阵,满足$AB=O$，若$r(A)=n-1$，则(　　　)

A. $r(B)=1$　　B. $r(B)<1$　　C. $r(B)\le 1$　　D. $r(B)\ge 1$

9. 设A，B为n阶可逆矩阵，则(　　　)

A. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$　　　　B. $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

C. $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$必可逆　　　　D. $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$必不可逆

10. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&2\\-1&0&-2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$,则(　　　)

A. $|A|=|B|$　　　　B. 存在三阶可逆阵C，使$C^TAC=B$

C. 存在三阶可逆阵P，使$P^{-1}AP=B$　D. 存在三阶可逆阵P，使$PAQ=B$

二、填空题

1．设$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$均为三阶矩阵，$\boldsymbol{E}$是三阶单位矩阵. 已知$\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$,则

$(A-E)^{-1}=$ ____________.

2．设α为3维列向量，α^T是α的转置. 若$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则$\alpha^T\alpha=$_____ .

3．设三阶方阵$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$满足$A^2B-A-B=E$，其中$\boldsymbol{E}$为三阶单位矩阵，若$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，则$|\boldsymbol{B}|=$______.

4．设$\alpha=(1,-1,2),\ \beta=(-1,1,1)$，$A=E+\alpha^T\beta$，则$A^n=$______________.

5．已知$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^3$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$________

6．设$\boldsymbol{A}$是4×3矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}t&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，且R($\boldsymbol{A}$)=2，R($\boldsymbol{AB}$-$\boldsymbol{A}$)=1，则$\boldsymbol{t}=$____ .

7．设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵,$\boldsymbol{B}$为$n\times m$矩阵,且$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$,则$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{AB})=$________

8．已知$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$，则$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1}=$____________

9.设 A 为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=$__________

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$B=(E-A^*)^{-1}(E+A^*)$，则$|B-E|=$______________.

11. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&-2&0\\4&1&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位阵，则$\left|(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^T)(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\right|=$________

12. 设 A 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$__________

三、计算题

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^n$ 及 $\boldsymbol{A}^*$。

2．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&2&0\\2&1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&0&4\\0&-1&5\end{bmatrix}$，且有 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$。

3. 已知 A 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$

4. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&\boldsymbol{k}&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=2,\boldsymbol{r}(\boldsymbol{AB})=1$，试求 $Ax=\boldsymbol{0}$ 的通解。

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\beta}&\boldsymbol{\alpha}_{nn}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶可逆阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $(n-1)\times1$ 矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是 $1\times(n-1)$ 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_{nn}$ 为数，

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$。

（1） 证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆

（2） 求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix}E&O\\-\alpha^TA*&|A|\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&b\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$*时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵。

（1） 计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$;

（2） 证明：矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\alpha A^{-1}\alpha\neq b$.

8. 已知 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,试证 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆，若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&6&-2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$。

三、 证明题

1. n 阶方阵 $\boldsymbol{C}$ 的主对角线元素之和称为方阵 $\boldsymbol{C}$ 的迹，记为 $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{C})$，即 $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{C})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{c}_{ii}$，设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{n\times m}$，$\boldsymbol{y}_{n\times 1},\boldsymbol{x}_{m\times 1}$ 为矩阵，

证明：(1) $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{BA})$； (2) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{Ayx}^{T})$。

2. 设 $A=E-\xi\xi^T$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，ξ 是 n 维非零列向量，ξ^T 是 ξ 的转置，证明：（1）$A^2=A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi=1$；（2）当 $\xi^T\xi=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不可逆。

3. 试证 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}\boldsymbol{n} & \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}\\ 1 & \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}-1\\ 0 & \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{n}-1\end{cases}$.

4. 设 α,β 是 $n\times 1$ 矩阵，$\boldsymbol{A}=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$ 证明：

（1）$r(\boldsymbol{A})\le 2$；（2）若 α,β 线性相关，则 $r(\boldsymbol{A})\le 1$

5. 证明

（1） 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2+A=O$，试证 $r(A)+r(A+E)=n$。

（2） 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，对任何 n 维向量 x，有 $Ax=0$，试证 $A=O$。

（3） 设 A 为 n 阶方阵，又 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$f(0)=0$，试证 $r(f(A))\le r(A)$。

（4） 已知 $r(A)=n-1$，试证存在常数 k 使得 $(A^*)^2=kA^*$。

（5） 设 A 为非零 n 阶方阵，证明存在一个 n 阶方阵 $B\ne O$，使得 $AB=O\Leftrightarrow |A|=0$。

答案与提示:

一、选择题

1. C 2. C 3. D 4. B 5. C 6. D 7. C 8. C 9. B 10. D

二、填空题

1. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 2. 3 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\begin{pmatrix}1-n&n&n\\n&1-n&-n\\-2n&n&1+n\end{pmatrix}$ 5. -3$\boldsymbol{A}$ 6. 2

7. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$ 8. $\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{bmatrix}$ 9. O 10. -2 11. 324 12. n

三、计算题

1. $\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^n=\begin{cases}4^{\frac{n}{2}}\boldsymbol{E},\boldsymbol{n}\text{为偶数}\\ 4^{\frac{n-1}{2}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{n}\text{为奇数}\end{cases}$；$\boldsymbol{A}^*=-4\boldsymbol{A}$。

2. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2 & 9 & -5\\ -2 & -8 & 6\\ -4 & -14 & 9\end{bmatrix}$。提示：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$

3. 提示：$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{E}-\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|})^{-1}$. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{k}=1, \boldsymbol{x}=[-1,2,1]^T \boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{t}\in \boldsymbol{R}$ 。提示：$|A|=0$求 k 值。

5. 提示：分块行初等变换，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}+\dfrac{\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta A}_{n-1}^{-1}}{\boldsymbol{a}_{nn}-\boldsymbol{\beta A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}} & -\dfrac{\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{a}_{nn}-\boldsymbol{\beta A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\\ -\dfrac{\boldsymbol{\beta A}_{n-1}^{-1}}{\boldsymbol{a}_{nn}-\boldsymbol{\beta A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}} & \dfrac{1}{\boldsymbol{a}_{nn}-\boldsymbol{\beta A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\end{bmatrix}$。

6. (1) 提示：$|B|=-|A|$。

(2) $\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}_{ij}\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{R}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{R}_{ij}$为单位阵经过$i$行，$j$行对换而成的初等矩阵。

7. (1) $\boldsymbol{PQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ -\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}^T & -\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{b}|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\end{bmatrix}$。

(2) 提示：$|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$，即$\boldsymbol{Q}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$。

8. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-(A+E)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 9 & -4\end{pmatrix}$。

四、证明题

1．提示：（1）

$$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{AB})=\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{AB})_{ii}=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{b}_{ki})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_{ki}\boldsymbol{a}_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{BA})_{kk}=\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{BA})。$$

或者说明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的非零特征值。

（2）用（1）的结论。

2. (1)提示：$\xi\xi^T\neq 0$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow(\xi^T\xi-1)\xi\xi^T=0$

(2)反证法。设$\boldsymbol{A}$可逆，由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$知$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$矛盾。

3. 4. 略

5.（1）提示：$n=r(E)\le r(-A)+r(A+E)=r(A)+r(A+E)\le n$。

（2）提示：取$x=e_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

（3）提示：$f(A)=A(a_1E+a_2A+\cdots+a_nA^{n-1})=AB$

$r(AB)\le \min(r(A),r(B))\le r(A)$。

（4）提示：$r(A)=n-1$，则$r(A^*)=1$，取$A^*=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$，则

$(A^*)^2=(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)A^*$，令$k=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$即可。

（5）提示："必要性"　$Ax=0$有非零解，则$|A|=0$；

"充分性"　$|A|=0$，则$Ax=0$有非零解α，取$B=[\alpha,0,\cdots,0]$，即可。