成绩	

上海大学 2017～2018 学年 冬 季学期试卷

课程名：线性代数 A 卷 参考答案 课程号：01014104 学分：3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号 ____________ 应试人所在院系 ____________

题号	一	二	三	四
得分	15	15	58	12

得分	评卷人

一、填空题：（每小题 3 分，5 题共 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}A&\\&A\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3&&\\1&-2&&\\&&-1&3\\&&1&-2\end{pmatrix}$；

2. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\6&5&4\\7&7&a\end{pmatrix}$ 行向量组线性相关，则 $a=\underline{7}$；

3. 设三阶行列式 $|\alpha,\beta,\gamma|=1$，则 $|\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha|=\underline{2}$；

4. 设向量组 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为 3 维列向量组，则 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 线性<u>相关</u>；

5. 设 3 阶实矩阵 A 特征值为 1、2、3，则 $|A^*|=\underline{36}$.

得分	评卷人

二、选择题：（每小题 3 分，5 题共 15 分）

6. 设 A,B 是 3 阶方阵，则 A,B 相抵充分必要条件是（ C ）

(A) A,B 相似　　(B) A,B 合同

(C) 存在 3 阶可逆矩阵 P,Q 使得 $PAQ=B$　　(D) $A=B$

7. 3 阶实矩阵 A,B 相似的充分必要条件是（ A ）

(A) 存在实可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$　　(B) A,B 有相同的特征值

(C) A,B 行列式相等　　(D) A,B 有相同的特征值多项式

8. 设 A 为 n 阶实矩阵，则 A 可逆的充分必要条件是（B）.

(A) A 与单位矩阵相似　　(B) A 与单位矩阵相抵；

(C) A 与单位矩阵合同　　(D) A 有 n 个线性无关特征向量.

9. n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是（ D ）.

(A) $r(A)=n$　　(B) $r(A)<n$　　(C) $r(A)\neq r(A,b)$　　(D) $r(A)=r(A,b)$

10. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，则下列结论不正确的是（ A ）.

(A) A 不可以对角化　　(B) A 的不同特征值下的特征向量正交

(C) A 有 n 个线性无关特征向量　　(D) A 与单位矩阵相似

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

得分	评卷人

三、计算题：（本大题 6 题，共 58 分）

11. (10 分) 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & a & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & a & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & a \end{vmatrix}$。

解 将 D 的后 $n-1$ 列加到第 1 列，有

$$D=\begin{vmatrix} a+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ a+2(n-1) & a & 2 & \cdots & 2 \\ a+2(n-1) & 2 & a & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & a \end{vmatrix}$$ (4 分)，从第二行开始每一行减第一行，得

$$=\begin{vmatrix} a+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-2 \end{vmatrix}$$ (4 分) $=(a+2(n-1))(a-2)^{n-1}$ (2 分)

$=2$

12. (10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，且 $AX=2X+I$，求 X.

解 由 $AX=2X+I$ 有 $X=(A-2I)^{-1}$ （4 分）

因为 $A-2I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ （2 分）

由于 $(A-2I)^2=4I$，得 $(A-2I)^{-1}=\frac{1}{4}(A-2I)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ （4 分）

注 其他方法按照对应分值给分

13. (9 分) 已知 $A=\begin{pmatrix} -2 & 9 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，计算 $(A-I)^2,(A-I)^3,A^n(n>3)$.

解 $(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （2 分）

$(A-I)^3=0$ （2 分）

所以 $A^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(A-I)^iI^{n-i}=I+C_n^1(A-I)+C_n^2(A-I)^2$， （3 分）

$$=\begin{pmatrix} 1-3n & 9n & \frac{n(3n+7)}{2} \\ -n & 1+3n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ （2 分）

14. (8 分)设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&2&4\\3&1&2&4&5\\5&3&4&8&13\\1&3&2&a&11\end{pmatrix}$，求 A 列向量组一个极大无关组.

解

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&1&2&4\\0&-2&-1&-2&-7\\0&-2&-1&-2&-7\\0&2&1&a-2&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2&4\\0&2&1&2&7\\0&0&0&a-4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（2 分）　　（2 分）

当 $a\neq4$ 时，有 $\begin{pmatrix}1&1&1&2&4\\0&2&1&2&7\\0&0&0&a-4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2&4\\0&2&1&2&7\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$　（2 分）

所以列极大无关组可以取第 1、2、4 列;　（1 分）

当 $a=4$ 时，列极大无关组可以取第 1、2 列　（1 分）

15. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&4&3\\2&3&5&0\end{pmatrix}$，$b=(1,2,a)^T$，求解线性方程组 $Ax=b$.

解 因为

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&1\\1&3&4&3&2\\2&3&5&0&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&1\\0&1&1&2&1\\0&-1&-1&-2&a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&1\\0&1&1&2&1\\0&0&0&0&a-1\end{array}\right)$$　（4 分）

如果 $a\neq1$，则 $r(A)=2<r(A,b)=3$，此时方程组无解;　（2 分）

当 $a=1$，$(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&-2&-1\\0&1&1&2&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$　（2 分）

所以 $Ax=0$ 通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$　（1 分）

$Ax=b$ 通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$　（1 分）

16. (11 分)设 a,b,c 为常数，且 $a<0$，如果矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&a\\3&1&4\\b&0&c\end{pmatrix}$ 的行列式 $|A|=-16$，$tr(A)=4$。

求相似变换矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解 因为 $tr(A)=4$，所以 $1+1+c=4$，得 $c=2$　　(2 分)

又 $-16=\begin{vmatrix}1&3&a\\3&1&4\\b&0&2\end{vmatrix}=-16+b(12-a)$，由 $a<0$，解得 $b=0$　　(2 分)

由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3&-a\\-3&\lambda-1&-4\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+2)$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4,\lambda_3=2$。　　(3 分)

当 $\lambda_1=-2$ 时，解 $(-2I-A)X=0$，得基础解系 $\xi_1=(1,-1,0)^T$；　　(1 分)

当 $\lambda_2=2$ 时，解 $(2I-A)X=0$，得基础解系 $\xi_2=(a+12,4+3a,-8)^T$；　　(1 分)

当 $\lambda_3=4$ 时，解 $(4I-A)X=0$，得基础解系 $\xi_3=(1,1,0)^T$；　　(1 分)

记

$$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}1&a+12&1\\-1&4+3a&1\\0&-8&0\end{bmatrix},\ \Lambda=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix},$$

则

$P^{-1}AP=\Lambda$。　　(1 分)

得分	评卷人

四、证明题：（2 题，每题 6 分共 12 分）

17.(6 分) 设 n 阶实矩阵 A 满足 $A^2=A$，求证 $r(A)+r(A-I)=n$。

证 因为 $A^2=A$，所以 $A(A-I)=0$　　（1 分）

得 $r(A)+r(A-I)\le n$　　(2 分)

又 $r(A)+r(A-I)\ge r(A-(A-I))=r(I)=n$　　(2 分)

所以 $r(A)+r(A-I)=n$　　(1 分)

18.(6 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维线性无关列向量，A 为 3 阶方阵，且

$$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3,$$

求证 A 可以对角化.

证 设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，由条件知 P 为可逆矩阵，　　(2 分)

且有 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$　　(2 分)

得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$　　(1 分)

知 A 有 3 个不同特征值 1、2、3，于是 3 阶矩阵 A 可以对角化　　(1 分)

$A\alpha_1=\alpha_1$ ∴ 1是A的特征值. 1′

$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=2(\alpha_1+\alpha_2)$ ∴ 2是A的特征值 2′

$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1+(\alpha_1+2\alpha_2)+\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ ∴ 3是A的特征值 2′