《微积分 1》练习题（理工大类）

班级____________ 学号____________ 姓名____________ 得分____________

本套练习题共 20 题，满分 100 分；内容涵盖函数与极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用等。

一、单项选择题（共 6 题；每题 5 分，共 30 分）

1. 设对任意的 x，总有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)-g(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (　　).

A. 存在且等于零　B. 存在但不一定为零　C. 一定不存在　D. 不一定存在

2. 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$，则 $k=$(　　).

A. 1　B. 2　C. -1　D. -2

3. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是(　　).

A. 3　B. 2　C. 1　D. 0

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则(　　).

A. 对任意 x，$f'(x)>0$　B. 对任意 x，$f'(-x)\le0$

C. 函数 $f(-x)$ 单调增加　D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，则(　　).

A. 当 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

B. 当 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

6. 下列曲线中有斜渐近线的是(　　).

A. $y=x+\sin x$　B. $y=x^2+\sin x$

C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　D. $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

二、填空题（共 10 题；每题 3 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$，则复合函数 $f[f(x)]$ 的间断点个数为__________.

2. 当 $x\to0$ 时，$(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\ln(1+x)$ 与 $\arctan(x^k(1+x^2))$ 是同阶无穷小，则 $k=$___________.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2023\ln(1+x)}{2024\mathrm{e}^x+2022\sin x}=$___________.

4. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=$___________.

5. 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(6x)+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{6+f(x)}{x^2}\right)=$___________.

6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x^2y)+y+x^2=1$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$___________.

7. 设 $y=\dfrac{x}{2x^2-3x+1}$，求 $y^{(2023)}(0)=$___________.

8. 函数 $f(x)=x^5-5x$ 的单调递减开区间为___________.

9. 曲线 $y=\sqrt{4x^2-3x+7}-2x$ 的渐近线的条数为____________.

10. 函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+\pi$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值为____________.

三、综合题（共 4 题；每题 10 分，共 40 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若存在数列 $x_n\in[a,b]$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，求证：存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=A$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

4. 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 试证：

(1) 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

(2) 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$