上海大学 2013～2014 学年春季学期试卷(A 卷)

成绩	

课程名： 线性代数 课程号：01014104 学分： 3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ________ 应试人学号________ 应试人所在院系________

题号	一	二	三	四
得分				

一、单项选择题：（每小题 2 分，6 题共 12 分）

1. 已知$|\vec{\alpha}|=1,|\vec{\beta}|=2$, 且$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$正交，则$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=$ （　　）

A. 1　　B. 3　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3}$

2. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆方阵，则 （　　）

A. $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|$　　B. $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$

C. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$　　D. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$

3. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 都是 n 阶方阵，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，则 （　　）

A. $\mathbf{A}\neq 0$ 时 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　B. $|\mathbf{A}|\neq 0$ 时 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$

C. $\mathbf{A}=0$ 时 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　D. $|\mathbf{A}|=0$ 时 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$

4. 若向量组 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 线性相关，则 （　　）

A. 其中必有一个零向量　　B. 其中必有两个向量成比例

C. 其中至少有一个向量可由其他向量线性表示　　D. 其中的任一向量可由其他向量线性表示

5. 设 $R(\mathbf{A})=r<n$，则对于 n 元方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}$ 和 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})$，结论成立的是 （　　）

A. 这两个方程组都有无穷多解　　B. $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系包含 r 个解向量

C. $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的解的线性组合是 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的解　　D. $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}$ 的解的线性组合是 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}$ 的解

6. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{I}_m$，则 （　　）

A. $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=m$　　B. $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=n$

C. $\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n$　　D. 以上选项都不正确

二、填空题：（每小题 3 分，6 题共 18 分）

7. 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -2 & x\\ 5 & -4 & 1\end{vmatrix}$，则其元素 x 的代数余子式的值为________；

8. 由三维列向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 构成矩阵 $\mathbf{A}=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ 和 $\mathbf{B}=3(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma}+\vec{\alpha})$，若行列式 $|\mathbf{A}|=1$，则行列式 $|\mathbf{B}|=$________；

9. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}\mathbf{A} & 0\\ 0 & \mathbf{B}\end{pmatrix}^{-1}=$________；

10. 若 $\mathbf{A}$ 是秩为1的3阶方阵，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & t\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，且 $\mathbf{AB}=0$，则 $t=$________；

11. 设 $\mathbf{A}$ 的秩为 2，$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 是三元非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解，若 $\vec{\eta}_1=(0,1,0)^T$ 以及 $\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=(1,0,1)^T$，那么 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$________；

12. 若 n 阶方阵 $\mathbf{A}\neq 0$，且 $\mathbf{A}^2=0$，则 $|\mathbf{A}-\mathbf{I}|=$________。

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

三、计算题：（6 题 共 64 分）

13. **（6 分）** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解：

14. **（8 分）** 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$。

解：

15. **（12 分）** 求解矩阵方程 $3\mathbf{A}^{*}\mathbf{X}\mathbf{A}=16\mathbf{X}\mathbf{A}+\mathbf{I}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。

解：

16. （12 分）设向量组 $(1,4,a)^T,(1,3,1)^T,(1,5\ 3)^T,(1,-1,b)^T$ 的秩为 2，试确定 a 和 b，以及它的一个极大线性无关组，并将其他向量用此极大线性无关组线性表示。

解：

17. （12 分）对于线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=3 \\ x_1+(a-2)x_2-2x_3=0 \end{cases}$，试讨论 a 为何值时，该方程组无解、有唯一解和有无穷多解，并在无穷多解时求它的通解。

解：

18.（**14 分**）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

（**1**）.（**4 分**）求与二次型对应的实对称矩阵 $\mathbf{A}$；

（**2**）.（**10 分**）用正交变换将二次型化为标准形。

解：

四、证明题：（共 6 分）

19. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵， 试证明若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相似，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 必相合。

证明：