线性代数是非题解

请尊重著作权人的著作权，本资料仅作学习资料使用，不得作商业用途

关注上大数学在线公众号

题 1. 行列式 D 为零，则行列式必有两行成比例

【答案】 错

【内容】 行列式及其性质

【性质】 **行列式两行(列)成比例，行列式值为零. 反之未必成立.**

【示例】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$，但任意两行都不成比例.

【必须知晓的结论】

(1)行列式 D 值为零，其行向量组线性相关、列向量组线性相关；

(2) 设 n 阶行列式 D 对应的矩阵为 A，如果 $D=0$, 则 $r(A)<n$.

(3) 设 A 是 n 阶方阵，n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是$|A|=0$.

【备注】 当行列式阶数为 2 时，如果行列式值为 0，则其两行成比例。这相当于两个向量线性相关或者在几何中相当于两个向量平行，其对应坐标成比例.、

【读书笔记】

题 2： 行列式两行成比例，则行列式值为零

关注上大数学在线公众号

【答案】对

【内容】行列式及其性质

【性质】行列式两行(列)成比例，行列式值为零. 反之未必成立.

【示例】$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

【必须知晓的结论】

(1) 行列式 D 两行(列)相等，行列式值为零，反之未必成立；

(2) 行列式行(列)向量组线性相关，则行列式值为零；

(3) 设 A 是 n 阶方阵，则$|A|=0$ 充分必要条件是 $r(A)<n$.

【备注】利用行列式两行成比例可以简化行列式计算，例如 3 阶行列式

$$|\alpha, 2\alpha+\beta, \gamma| = |\alpha, 2\alpha, \gamma| + |\alpha, \beta, \gamma| = |\alpha, \beta, \gamma|.$$

如果$|\alpha, \beta, \gamma| = 1$，则$|\alpha, 2\alpha+\beta, \gamma| = |\alpha, \beta, \gamma| = 1$.

【读书笔记】

题 3 .若 n 阶行列式 D 每行元素之和均为零，则 D 等于零

【答案】对

【内容】行列式运算、性质

【性质】行列式某行(列)元素为零，行列式值为零.

【示例】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

【解答】将行列式所有列加到第 1 列，则第 1 列元素都为零，所以行列式值为零.

【必须知晓的结论】行列式有 3 条基本运算性质

(1)两行(列) 对调行列式值变号；

(2)行列式某行(列)乘上数 k，行列式值扩大 k 倍;

注：在这个性质中允许 k=0，它与矩阵对应的初等变换要求不同，在矩阵初等变换中要求所乘数非零；其次通常是反用该性质，即行列式某行(列)有公因数 k，则 k 可以提取到行列式号外面.

(3) 行列式 D 某行(列)k 倍加到另外一行(列)，行列式值不变.

【备注】行列式运算性质起到简化行列式计算作用，通过行列式运算性质将行列式某行(列)化简为只有一个非零元素，然后降阶以计算行列式的值.

【读书笔记】

题 4. A、B 同阶方阵，则 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$

【答案】 错

【内容】 行列式及其性质

【性质】 (行列式分解性质)行列式某行(列)每个元素都可表示为两个元素之和，则行列式为两个行列式和，即(用 3 阶矩阵作示例)

$$|\alpha,\gamma+\beta,\delta|=|\alpha,\gamma,\delta|+|\alpha,\beta,\delta|$$

例如 $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ a+2 & b+4 & c+6\\ a & b & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ a & b & c\\ a & b & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ a & b & c\end{vmatrix}=0+0=0.$$

【解答】 题目结论错误的理解行列式分解性质，并不存在 $|\mathrm{A}+\mathrm{B}|=|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|$ 的性质，除非 A、B 阶数为 1.

【反例】

$$\begin{vmatrix}1+2 & 1+3\\ 1+0 & 1+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5\text{，但}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4\text{，有}$$

$$5=\begin{vmatrix}1+2 & 1+3\\ 1+0 & 1+2\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4.$$

【必须知晓的结论】

(1) 行列式 D 两行(列)相等，行列式值为零，反之未必成立；

(2) 行列式两行(列)成比例，行列式值为零. 反之未必成立.

【备注】 行列式分解性质可以简化行列式计算，例如 3 阶行列式

$$|\alpha,2\alpha+\beta,\gamma|=|\alpha,2\alpha,\gamma|+|\alpha,\beta,\gamma|=|\alpha,\beta,\gamma|.$$

如果 $|\alpha,\beta,\gamma|=1$，则 $|\alpha,2\alpha+\beta,\gamma|=|\alpha,\beta,\gamma|=1$.

【读书笔记】

题 5.A 为 n 阶方阵，k 为复数，则$|kA|=k|A|$

【答案】错

【内容】矩阵与行列式关系、矩阵数乘运算.

【性质】设 A 为 n 阶方阵，k 为复数，则$|kA|=k^n|A|$.

【示例】

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},kA=\begin{pmatrix}2&2k\\3k&4k\end{pmatrix}，有$$

$$\begin{vmatrix}2k&2k\\3k&4k\end{vmatrix}=8k^2-6k^2=2k^2,k\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2k,$$

所以当 a 不等于时$|aA|$与 a $|A|$不相等.

【解答】题目结论将行列式性质“行列式某行(列)乘上数 k，行列式值扩大 k 倍”与矩阵和行列式关系性质“$|kA|=k^n|A|$”混淆. 学习者应引起注意.

一个数 k 乘矩阵 A 表示 A 中每个元素都要乘上 k，因此$|kA|$中每行都有公因数，利用行列式性质有$|kA|=k^n|A|$.

【必须知晓的结论】

设 A，B 为 n 阶矩阵，k 为数，则

(1) $|AB|=|A|\cdot|B|$；

(2) $|kA|=k^n|A|$；

(3) $|A^T|=|A|$.

【读书笔记】

题 6..在 n 阶行列式中，若行列式中不为零的元素的个数小于 n，则此行列式的值等于零.

【答案】 正确

【内容】 行列式定义

【解答】 按照行列式通项公式定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

表达式意指表示所有可能的取自不同的行和不同的列的 n 个元素乘积的代数和.

由于行列式中不为零的元素个数小于 n, 于是至少有一行元素全为零. 根据上述定义，知行列式值为零.

【示例】

对于 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，有 $|A|=0$，行列式中非零元素只有一个元素不为零.

【必须知晓的知识】 关于行列式定义有两种，一种是通项公式定义, 一种是递归定义. 在通项公式定义中，需要注意如下几点：

(1) n 级排列的总数是 $n!$个，故展开式中共有 $n!$项；

(2) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

(3) 每项前的符号取决于 n 个元素列下标所组成排列的奇偶性.

一些特例：

$n=1$ $\quad |a_{11}|=a_{11}$ (一阶行列式即为该数本身)；

$n=2$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2}(-1)^{\tau(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$；

$$n=3 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{333}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

【读书笔记】

题 7. (1)行列式值为零，则行列式列向量组线性相关；(2)行列式值为零，则行列式行向量组线性相关.

【答案】正确

【内容】行列式、向量组线性相关与线性无关

【性质】设 A 为 n 阶方阵，如果 $|A|=0$，则 A 的行(列)向量组线性相关.

【示例】

$$\text{对于 } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a+2 & b+4 & c+6 \\ a & b & c \end{pmatrix}\text{，有 } |A|=0\text{，此时}$$

$$(a+2,b+4,c+6)=(a,b,c)+2(1,2,3).$$

即 A 的行向量组线性相关.

【必须知晓的结论】

设 A 为矩阵 $m\times n$ 矩阵,

(1) $r(\mathrm{A})<n$ 充分必要条件是 A 的列向量组线性相关；

(2) $r(\mathrm{A})<m$ 充分必要条件是 A 的行向量组线性相关.

(3)当 A 为 n 阶方阵时，$|A|=0$ 充分必要为 $r(A)<n$.

(4)矩阵 A 的行秩=矩阵 A 的列秩=矩阵 A 的秩.

【备注】对于方阵 A，通过其行列式是否为零可以判别矩阵的行(列)向量组的线性相关性，反之亦然. 对于 $m\times n$ 矩阵，需要通过矩阵 A 的秩来确定行(列)向量组的线性相关性.

一般通过行初等变换方法计算 $m\times n$ 矩阵 A 的秩：**将 A 化为行阶梯阵 B，则 B 的非零行行数为 A 的秩**.

【读书笔记】

题 8.设 A,B 为 n 阶方阵，则 $AB=BA$.

【答案】错

【内容】矩阵运算、矩阵运算律.

【性质】矩阵乘法在有意义前提下满足结合律、分配律.

【解答】矩阵乘法一般不满足交换律、消去律，例如

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}，有$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=BA,$$

所以交换律不成立.

【必须知晓的结论】矩阵乘法满足结合律、分配律.

【备注】对于矩阵 A、B, 只有**当 A 的列数与 B 的行数相等时**，AB 才有意义. 其次即使 AB 有意义，BA 也未必有意义. 例如 A 是 3×4 矩阵，B 为 4×4 矩阵，则 AB 有意义，但 BA 无意义.

【拓广】虽然矩阵乘法不满足交换律，但**对矩阵 A 而言，存在无穷多矩阵与 A 交换**. 例如任意 n 阶方阵与 n 阶单位矩阵交换. 再比如对任意方阵 A 而言，A 的多项式矩阵都与 A 交换.

【读书笔记】

题 9. (1)设矩阵 A 满足 A^2=A，则 A=0 或 A 为单位矩阵；

(2)设矩阵 A、B 满足 AB=0，则 A、B 中必有一个矩阵为零矩阵；

(3)矩阵乘法不满足左、右消去律.

关注上大数学在线公众号

【答案】(1)错、(2)错、(3)对

【内容】矩阵运算、矩阵运算律.

【性质】矩阵乘法在有意义前提下满足结合律、分配律.

【解答】矩阵乘法一般不满足消去律、交换律，例如

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}，有$$

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}，但 A\neq\mathbf{0},B\neq\mathbf{0}.$$

又如：$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, 有 $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，但 A 是非零矩阵.

所以消去律不成立.

【必须知晓的结论】矩阵乘法满足结合律、分配律.

【备注】矩阵乘法与数的乘法具有很大区别：

(1)数的乘法满足交换律，但矩阵乘法不满足交换律；

(2) 数的乘法满足消去律，即当 a 非零时，如果 $ab=ac$，则 $b=c$. 但矩阵乘法不满足消去律，即当 A 为非零矩阵时，如果 $AB=AC$，未必有 $B=C$.

(3)当矩阵 A 可逆时，如果 $AB=AC$，则 $B=C$. 因此与数乘法相类比，非零数相当于可逆矩阵.

【读书笔记】

题 10. (1)两个交换的同阶对称矩阵乘积仍然是对称矩阵;

(2)两个同阶对称矩阵乘积仍然是对称矩阵.

【答案】(1)对、(2)错

【内容】矩阵运算、对称矩阵.

【解答】设矩阵 A、B 为同阶对称矩阵，则

$$(AB)' = B'A' = BA$$

而 AB 为对称充要条件是

$$(AB)' = AB$$

于是有 AB=BA，即 AB 为对称充要条件是 AB=BA. 由此知(1)正确，(2)错误.

【反例】对于两个同阶对称矩阵 A、B，一般不存在 AB=BA，例如

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}，\text{有 } AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=BA.$$

【必须知晓的结论】矩阵乘法满足结合律、分配律. 但不满足交换律、消去律.

【读书笔记】

题 11. 两个同阶反称矩阵乘积仍然是反称矩阵.

【答案】错

【内容】矩阵运算、反称矩阵.

【解答】设矩阵 A、B 为同阶反称矩阵，则

$$(AB)'=B'A'=(-B)(-A)=BA.$$

而 AB 为反称矩阵充要条件是

$$(AB)'=-AB$$

于是有 $AB=-BA$，但是此结论未必成立(反例见下)，所以原命题错误.

【反例】对于两个同阶反称矩阵 A、B，一般不存在 $AB=-BA$，例如

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}，有\ AB=\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}=BA,$$

此时 AB 与 $-BA$ 不相等.

【必须知晓的结论】矩阵乘法满足结合律、分配律. 但不满足交换律、消去律.

【读书笔记】

关注上大数学在线公众号

题 12.方阵 *A* 可逆的充分必要条件是 *A* 的行列式非零.

【答案】对

【内容】逆矩阵、行列式.

【定理】n 阶矩阵可逆的充要条件为 $|A|$ 不等于零.

【说明】(1)对于 n 阶矩阵 A，如果存在矩阵 B 使得 $AB=BA=I$(单位矩阵)，则称矩阵 A **可逆，或非奇异阵.** 此时 B 称为 A 的**逆阵**，可以证明其唯一，因此记为 A^{−1}.

为什么要定义逆矩阵，这就如矩阵的加法运算需要定义其逆运算减法一样，在运算过程中通过互逆运算的“抵消”简化运算过程. 比如对于矩阵方程 $AX=B$，如果 A 可逆，就有

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B\text{，于是得到 }X=A^{-1}B\text{(注意不能写为 }X=BA^{-1}\text{).}$$

当然，**如果 *A* 不可逆，就不能通过上述方法计算 *X*，而是通过线性方程组理论，首先判别其是否有解，然后利用高斯消元方法计算**.

(2)对于 $m\times n$ 矩阵 A，如果 n 不等于 m，则不存在 A 是否可逆的说法，即只有方阵才有需要判别其是否可逆问题.

(3)对于低阶方阵，我们可以通过其行列式是否为零判别其是否可逆，同时在其可逆时利用伴随矩阵计算其逆阵.

【示例】设

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\text{，有}|A|=2,|B|=0,$$

所以 A 可逆，B 不可逆. 利用伴随矩阵方法得

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}.$$

【必须知晓的结论】设矩阵 A、B 可逆，且 k 非零，则

(1) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$(注意不能书写成 $A^{-1}B^{-1}$);

(2) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$;

(3) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.

【矩阵可逆的等价条件】设 A 为 n 阶方阵，则下列命题等价

(1)A 可逆；(2)A 的初等标准型为单位矩阵；(3)$r(A)=n$;(4)A 的行列式值不等于零.

【读书笔记】

题 13. n 阶可逆矩阵的秩为 n.

【答案】对

【内容】逆矩阵、矩阵秩.

【定理】n 阶矩阵可逆的充要条件为 $r(A)=n$.

【说明】(1)对于 $m\times n$ 矩阵 A，通过初等变换化为标准型

$$A\to\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中左上角矩阵为 r 阶单位矩阵. 称 r 为矩阵的秩.

(2)矩阵的秩在初等变换意义下是“不变量”，即对矩阵 A 作初等变换化为矩阵 B,则 $r(A)=r(B)$;

(3)秩在线性代数中是一个重要概念，通过它可以判别

矩阵是否可逆，向量组是否线性相关、

非齐次线性方程组是否有解、齐次线性方程组是否有非零解.

(4)对于矩阵而言其行向量组、列向量组的秩与矩阵秩相等.

(5)一般通过行初等变换方法计算 $m\times n$ 矩阵 A 的秩：**将 A 化为行阶梯阵 B，则 B 的非零行行数为 A 的秩**.

【示例】设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}，有 r(A)=2,r(B)=1,$$

所以 A 可逆，B 不可逆. 利用伴随矩阵方法得

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

【必须知晓的结论】设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则

(1) $r(A)=r(A^T)$；　　(2) $r(A)=A$ 的行向量组秩$=A$ 列向量组秩;

(3) $r(A)=A$ 的最高阶非零子式阶数.

【读书笔记】

题 14. 矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A^*可逆.

【答案】对

【内容】逆矩阵、伴随矩阵.

【定理】n 阶矩阵可逆的充要条件为$|A|$不等于零，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

【说明】(1)设 A 为 n 阶矩阵，其第 i 行、第 j 列代数余子式记为 A_{ij}. 则称

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的**伴随矩阵**，记为 A^*. 需要注意的是 A^***第 *i* 行**元素是 A 的**第 *i* 列**元素代数余子式;

(2)无论方阵 A 是否可逆，根据行列式展开定理，有

$$AA^*=A^*A=|A|I=\begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}.$$

【解答】根据

$$AA^*=A^*A=|A|I,$$

(1)当 A 可逆，则有

$$\frac{A}{|A|}A^*=A^*\frac{A}{|A|}=I,$$

于是

$$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}.$$

(2) 当 A^*可逆，如果 A 不可逆，则$|A|$=0. 于是

$$AA^*=A^*A=\mathbf{0}.$$

两边消去 A^*，得 $A=\mathbf{0}$，从而 $A^*=\mathbf{0}$，矛盾. 所以 A 可逆.

【示例】设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ 有\quad A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^*=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 A 可逆，B 不可逆.

【必须知晓的结论】设 A 为 n 阶矩阵，则

(1) $|A^*|=|A|^{n-1}$; (2) $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n; \\ 1, & r(A)=n-1; \\ 0, & r(A)<n-1. \end{cases}$

【读书笔记】

题 15. 如果同阶方阵 A、B 满足 $A+B+AB=\mathbf{0}$，则 $AB=BA$.

【答案】对

【内容】逆矩阵、矩阵运算.

【解答】设 A、B 为 n 阶矩阵，且满足 $A+B+AB=\mathbf{0}$,因此 $A+B+AB+I=I$, 得

$$(A+I)(B+I)=I\,,$$

于是

$$(B+I)(A+I)=I\,.$$

上式左边展开，得 $A+B+BA+I=I$, 于是 $A+B+AB=A+B+BA$，解得 $AB=BA$.

【必须知晓的结论】设 A、B 为 n 阶矩阵，则下列命题等价

(1) $AB=I$；　(2) $BA=I$；　(3) $AB=BA=I$.

【备注】本题难点在于通过表达式进行变换化为 $A+I$ 与 $B+I$ 互为逆阵方法解决.

【读书笔记】

题 16.矩阵 A 经过初等变换化为 B，则 $r(A)=r(B)$.

【答案】对

【内容】矩阵秩、初等变换

【说明】(1)矩阵初等变换有三种形式(以初等行变换说明)：

(*a*)交换两行(交换 i、j 两行，记为 r_i<——>r_j)；

(*b*)以数 k(k 不等于零)乘以某一行的每个元素(k 乘第 i 行,记为 $r\_i\times k$)；

(*c*)某一行每个元素乘以数 k 加到另一行对应的元素上(第 j 行乘 k 加到第 i 行上，记为 $r\_i+k\times r\_j$).

例如

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\2&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}a&b&c\\1&1&1\\2&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2}\begin{pmatrix}a&b&c\\2&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}a&b&c\\2&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

同理可定义矩阵的初等列变换，所涉及到的记号“r”换成记号“c”. 矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为矩阵的初等变换.

(2)对于 $m\times n$ 矩阵 A，通过初等变换化为标准型

$$A\to\begin{pmatrix}I_r&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},$$

其中左上角矩阵为 r 阶单位矩阵，称 r 为矩阵的秩,且矩阵 A 的标准型唯一.

(3)矩阵的秩在初等变换意义下是“不变量”，即对矩阵 A 作初等变换化为矩阵 B，则 $r(A)=r(B)$.

(4)作初等行(列)变换将矩阵 A 化为 B，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{B=PA}$.

【必须知晓的结论】设 A、B、C 为矩阵，在乘法有意义情况下，下列命题成立：

(1) $r(AB)\le r(A),r(B)$；

(2) $r(A)\le A$ 的行数、列数；

(3) 如果 A、C 可逆，则 $r(ABC)=r(A)$.

【读书笔记】

题 17. 从矩阵 A 中划去一行得矩阵 B，则 $r(A)=r(B)+1$.

【答案】错

【内容】矩阵秩.

【反例】设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}, B=(1,1)$$

则 $r(\mathrm{A})=r(\mathrm{B})=1$.

【必须知晓的结论】设 A、B、C 为矩阵，在乘法有意义情况下，下列命题成立：

(1) $r(AB)\le r(A),r(B)$；

(2) $r(A)\le A$ 的行数、列数；

(3)如果 A、C 可逆，则 $r(ABC)=r(A)$.

【备注】矩阵秩是刻画矩阵性质的一个重要指标，它是矩阵初等不换下的“不变量”. 通过矩阵秩可以判别矩阵是否可逆、非齐次线性方程组是否有解、齐次线性方程组是否有非零解、向量组是否线性相关.

【读书笔记】

题 18. 对向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组常数 $k_1,k_2,\cdots k_m$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}\text{，}$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

关注上大数学在线公众号

【答案】错

【内容】向量组线性相关、线性无关

【说明】设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ ($s>0$)，如果存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性相关**；否则，如果当且仅当 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为零时，上式才成立，则称向量组**线性无关**.

例如，向量组 $A:\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(2,3,4)^T$ 线性相关，这是因为

$$1\alpha_1+1\alpha_2+(-1)\alpha_3=(1,1,1)^T+(1,2,3)^T-(2,3,4)^T=(0,0,0)^T=\mathbf{0}.$$

而向量组 $B:\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T$ 线性无关，这是因为只有当 a=0,b=0 时，才有

$$a\alpha_1+b\alpha_2=\mathbf{0}.$$

在向量组线性相关定义中要求常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零. 题中未标明这一点，所以结论错误.

.**【必须知晓的结论】**

(1) 含有零向量的向量组线性相关；

(2) 如果向量组线性**相关(无关)**，则**增加(减少)部分向量**以后所得向量组线性**相关(无关)**；

(3) 如果向量组线性**无关(相关)**，则每个向量**增加(减少)相同数目坐标**以后所得向量组线性**无关(相关)**；

(4) 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ ($s\geq 2$) 线性相关的充分必要条件是：其中至少有一个向量可由其余的向量线性表出.

【备注】引入向量组的线性相关与无关概念目的之一就是刻画线性方程组解的结构. 由于线性方程组**存在“有无穷多组解”情况**，因此需要通过“适合”的语言去描述“无穷多组解”，这就导致齐次线性方程组“基础解系”概念，而基础解系需要引入线性无关定义.

【读书笔记】

题 19. (1)如果向量组线性相关(向量个数大于 2)，

则存在其中两个向量组成的向量组线性相关;

(2) 向量组线性无的充要条件是其中任意两个向量组成的向量组线性无关.

【答案】(1)错、(2)错

【内容】向量组线性相关、线性无关

【反例】设 $\boldsymbol{a}$=(1,2,3), $\boldsymbol{b}$=(1,2,1), $\boldsymbol{c}$=(2,4,4)，则有 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关. 但不存在两个向量线性相关. 即 a,b; a,c; b,c 线性无关.

【必须知晓的结论】

(1) 如果两个向量线性相关，则其坐标对应成比例；

(2) n+1 个 n 维向量组线性相关.

【读书笔记】

题 20.. n+1 个 n 维向量组线性相关.

【答案】对

【内容】向量组线性相关、线性无关；向量组表示

【性质】如果 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)<m$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关

【证明】设

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

则任意向量 $a=(a_1,a_2,\cdots a_n)$ 满足

$$a=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots a_n\varepsilon_n.$$

根据向量组秩关系，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n+1}$ 为 n 维向量组，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n+1}$ 可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示，于是

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n+1})\le r(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=n<n+1.$$

得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n+1}$ 线性相关.

【必须知晓的结论】

(1) 对于任意向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$，有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)\le m$；

(2) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 表示，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$；

(3) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 等价，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$，反之未必成立.

【读书笔记】