上海大学 2010～2011 学年 秋 季学期试卷

课程名：线性代数（D） 课程号：01014061 学分：4

一． 填空题(每小题 3 分，满分 30 分)

1．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 且|A|=1，则

$B=|(2\alpha_1-\alpha_3,\alpha_2,\alpha_3)|=$ __2__ 。

2．已知向量α、β正交，$\|\alpha\|=3$，$\|\beta\|=4$, 则$\|\alpha-\beta\|=$ __5__ 。

3．已知$D=\begin{vmatrix}-1 & x & x^2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$，则 D 中 x 的系数是 __−4__ 。

4． A 是 3 阶方阵，$|A|=-2$，则 $|(|2A|A)|=$ __2^{13}__ 。

5．$A=\begin{pmatrix}a & 2b\\ 3b & a\end{pmatrix}$, 有一个特征值为 1, 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, 则 a= __1__ , b=0 。

6． 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, 则$(A^*)^{-1}=$ __$\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & 0 & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$__ 。

7． R^4的子空间$V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$的维数为 __3__ ，

一组基为 __$(1,\ -1,\ 0,\ 0),(1,\ 0,\ -1,\ 0),(1,\ 0,\ 0,\ -1)$（答案不唯一）__ 。

8． $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & x & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}$相似于对角阵$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $x=$ __5__ 。

二、（10 分）已知$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，AB=A+3B，求矩阵 B。

解：由 AB=A+3B，可得$(A-3E)B=A$。 ……………..2 分

又$A-3E=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，是可逆矩阵，故$B=(A-3E)^{-1}A$。 ………………4 分

$(A-3E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，故$B=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & 0\\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$。 …………………………4 分

三、（10 分）计算行列式的值$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ -1 & -2 & 4 & -2\\ 5 & 3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 3 & 10\end{vmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ -1 & -2 & 4 & -2\\ 5 & 3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 3 & 10\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1,r_3-5r_1,r_4-2r_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -7 & 12 & -14\\ 0 & -7 & 7 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ -7 & 12 & -14\\ -7 & 7 & 4\end{vmatrix}=287$$

（4 分） （4 分） （2 分）

四、(10 分) 设向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2=(2,3,4,5)^T$，$\alpha_3=(3,4,5,6)^T$，$\alpha_4=(4,5,6,7)^T$。

求由该向量组生成的向量空间 $L=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数及一组基，并求其余向量在这组基下的坐标。

解：$A=\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1,r_3-r_1,r_4-r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2-r_1,r_3-2r_2,r_4-3r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$。 ……4 分

故该向量组生成的向量空间 $L=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 2， ……2 分

基为 α_1,α_2。 ……2 分

$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$， $\alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2$。 ……2 分

五．（10 分） 设 V 是次数不超过 3 的实多项式全体构成的实数域上的线性空间。$A:1,x,x^2,x^3$ 和 $B:1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ 是 V 的两组基。

（1）求基 A 到基 B 的过渡矩阵；

（2）求 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，使得 $f(x)$ 在这两组基下的坐标相同。

解：(1) 设基 A 到基 B 的过渡矩阵为 C，则由

$\left(1,\ \ 1+x,\ \ 1+x+x^2,\ \ 1+x+x^2+x^3\right)=\left(1,\ \ x,\ \ x^2,\ \ x^3\right)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ …………3 分

可得 $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$。 ……………………2 分

（2） 由 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，可知 $f(x)$ 在基A下的坐标为 $\left(a,\ \ b,\ \ c,\ \ d\right)'$。

……………………1分

则 $f(x)$ 在这两组基下的坐标相同的充要条件是 $C\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$。 ……………2分

这时，$b=c=d=0$，即 $f(x)=a$ 时，$f(x)$ 在这两组基下的坐标相同。 ……………2分

六、（10分）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

（1）求与二次型对应的实对称矩阵A；

（2）判定此二次型是否为正定二次型，并说明理由。

解：（1）由 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$， …..3 分

可得与此对应的实对称矩阵 A 为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$。 …………2 分

（2） A 的顺序主子式分别为 $A_1=1,A_2=1,A_3=0$。 …………………3 分

由 $A_3=0$，可知此二次型不是正定二次型。 …………………..2 分

七、（10分）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有3个线性无关的解，（1）证明系数矩阵A的秩为2；（2）求 a 、b 的值及该方程的通解。

（1） 证明：设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 个线性无关的解，则 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 线性无关，而且为对应的导出组的解 ……………………2 分

所以导出组中至少有两个线性无关的向量， …………………1 分

如果系数矩阵 A 的秩大于 2，则 $Ax=0$ 的基础解系至多含有 1 个解向量，矛盾。

故系数矩阵 A 的秩为 2。 ……………………2 分

（2）解： 由于方程组 $Ax=0$ 前两个方程系数不成比例，所以这两个方程无关，则第三个方程可由前两个方程表示。所以可得

$(a,\ 1,\ 3,\ b)=(4,\ 3,\ 5,\ -1)-2(1,\ 1,\ 1,\ 1)$。 ………………………2 分

即有 $a=2,b=-3$。

由 $\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\end{pmatrix}$，得基础解系为：$\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$

…………………………1 分

取 $x_3=x_4=0$，可得此方程组的一个特解为 $\eta_0=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$。 ………………1 分

故通解为

$x=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$， k_1,k_2 任意。 ……………………1 分

八、（10 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为线性方程组 *AX=0* 的一个基础解系，若$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$，讨论实数 t 满足什么条件时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是 *AX=0* 的一个基础解系。

证：（$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$）=（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$）$\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix}$。 ………………..2 分

显然$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$是 *AX=0* 的解。 ………………..1 分

若$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$是 *AX=0* 的一个基础解系，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$必线性无关， ………..2 分

故由（1），可得$\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix}$必是可逆矩阵。 ……2 分

因为$\begin{vmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{vmatrix}=1-t^4$， ………………..2 分

所以$t\neq 1,-1$。 ………………..1 分