上海大学 2016～2017 学年冬季学期试卷 A 卷

成绩	

课程名：线性代数 参考 答案 课程号：01014104 学分：3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ________ 应试人学号 ________ 应试人所在院系 ________

题号	一	二	三	四
得分	10	18	60	12

得分	评卷人

一、选择题：（每题 2 分，5 题共 10 分）

1．设 A,B 是 n 阶方阵，下列命题正确的是(D)

(A) 如果 A,B 相抵，则 A,B 相似　　(B) 如果 A,B 相似，则 A,B 合同

(C) 如果 A,B 合同，则 A,B 相似　　(D)如果 A,B 相似，则 A,B 相抵

2．下列命题正确的是(C)

(A) 矩阵乘法满足消去律；　　(B) 矩阵乘法满足交换律；

(C) 可逆矩阵行列式不为 0；　　(D) 矩阵的伴随矩阵可逆.

3．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 n 维列向量 $b\neq \mathbf{0}$，下列结论正确的是(A)

(A) $r(A,b)=r(A)<n$ 时，线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多组解；

(B) $r(A,b)=m$ 时，线性方程组 $Ax=b$ 有解；

(C) 如果 $Ax=b$ 有解，则 $r(A,b)<n$；

(D) 如果 $Ax=b$ 有解，则 $r(A,b)=m$.

4．设 α,β 是矩阵 A 的两个不同特征值下的特征向量，则下列结论正确的是(B 或D

(A) $\alpha+\beta$ 是 A 的特征向量；　　(B) α,β 线性无关；

(C) α,β 线性相关；　　(D) α,β 正交.

5．两个 $n(n>1)$ 阶实对称矩阵 A,B 相似的充分必要条件是 (D)

(A) A,B 有相同的特征多项式　　(B) A,B 有相同的行列式

(C) A,B 有相同的特征值　　(D) 存在正交矩阵 P 使得 $PAP^T=B$.

得分	评卷人

二、填空题：（每题 3 分，6 题共 18 分）

6．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}-5&2&0\\3&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$；

7．设 A 为 4 阶矩阵，特征值为 $1,1,2,2$，则 $|A^2+A|=$ __144__；

8．已 A,B,C 为 n 阶矩阵，且 $A\neq\pm I$，如果 $B=2I-AB, C=2A-CA$，则 $C+B=\underline{2I}$；

9.已知 $A=\begin{pmatrix}1&4&-2\\2&5&1\\3&1&3\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 为 $|A|$ 的代数余子式，则 $-2A_{12}+A_{22}+3A_{32}=$ ___0___；

10．如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 都是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 $k_1+k_2+\cdots+k_s=\underline{1}$；

11．设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，则 A 的伴随矩阵 A^* 与对角矩阵 $\underline{\begin{bmatrix}6&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}}$ 相似.

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

得分	评卷人

三、计算题：（6题，共60分）

12.(7分) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&4&5\\1&5&10&17\\1&9&28&65\end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&4&5\\1&5&10&17\\1&9&28&65\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&3&4\\0&4&9&16\\0&8&27&64\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4\\4&9&16\\8&27&64\end{vmatrix}=24\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}=48$$

（3分）（1分）（2分）（1分）

13.（6分）计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}x_1+1&x_1+2&x_1+3&\cdots&x_1+n\\x_2+1&x_2+2&x_2+3&\cdots&x_2+n\\x_3+1&x_3+2&x_3+3&\cdots&x_3+n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_n+1&x_n+2&x_n+3&\cdots&x_n+n\end{vmatrix}$.

n=1 1'

解 当 $n=2$ 时 $D=\begin{vmatrix}x_1+1&x_1+2\\x_2+1&x_2+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+1&1\\x_2+1&1\end{vmatrix}=x_1-x_2$ （1分）

当 $n>2$ 时，

$$D=\begin{vmatrix}x_1+1&1&2&\cdots&n-1\\x_2+1&1&2&\cdots&n-1\\x_3+1&1&2&\cdots&n-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_n+1&1&2&\cdots&n-1\end{vmatrix}=0$$ （4分）

14.（10分）设 $A=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\1&5&0&0\\1&2&3&2\\1&3&1&5\end{pmatrix}$ 满足关系式 $AB=I+2B$，求矩阵 B.

解 根据条件有 $B=(A-2I)^{-1}$ （2分）

$(A-2I)B=I$

由于 $A-2I=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\1&2&1&2\\1&3&1&3\end{pmatrix}$ （2分）

得 $B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\1&2&1&2\\1&3&1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\\-\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}&\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}$ （4分）

又因为 $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$ （1分）

所以 $B=B=\begin{pmatrix}3&-2&0&0\\-1&1&0&0\\-3&2&3&-2\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ （1分）

$(A-2I,\ I)\xrightarrow{1'}\dashrightarrow{}^{1'}(\ I,\qquad)$ 2' 1'

$\therefore B=$ 1'

15.(12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&5\\1&2&a&4\\1&0&1&a\end{pmatrix}$，求 A 的列向量组的一个极大线性无关组，且将其他列向量用此极大线性无关组线性表示。

5+3+3+1

解：$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&5\\1&2&a&4\\1&0&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{2'}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&-3&-3\\0&0&a-3&0\\0&-2&-2&a-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&a-3&0\\0&0&0&a-2\end{pmatrix}$

(3 分) 2′ ~~(3 分)~~

(1)当 $a=3$ 时： 1′

$A\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&a-3&0\\0&0&0&a-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-3&0&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ (1分)

第 1、2、4 列可以取为列向量组极大无关组，且第三列与第一列相等. (2 分)

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$

(2)当 $a=2$ 时： $A\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ (1) (2 分)

此时第 1、2、3 列向量为列向量组极大无关组，且有

$$(4,5,4,2)^T=2(1,2,1,1)^T+(2,1,2,0)^T+0(3,3,2,1)^T \quad (1\text{ 分})$$

$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$

(3) $a\neq2$ 且 $a\neq3$.

$|A|=$

16.(13 分) 如果线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+3x_2+2x_3+3x_4=1\\3x_1+5x_2+4x_3+a^2x_4=a+3\end{cases}$ 有无穷多组解，求 a 及所有解.

解 对其增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\2&3&2&3&1\\3&5&4&a^2&a+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&-1&-2&1&1\\0&-1&-2&a^2-3&a+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&1&2&-1&-1\\0&0&0&a^2-4&a+2\end{pmatrix}$$

~~(2 分)~~ ~~(2 分)~~

~~当 $a=2$ 时，系数矩阵秩为 2，增广矩阵秩为 3，无解；~~ (2 分)

当 $a=-2$ 时，系数矩阵与增广矩阵秩为 2，有无穷多组解. (2 分)

此时

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&1&2&-1&-1\\0&0&0&a^2-4&a+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&1&2&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&3&2\\0&1&2&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

~~(2 分)~~

求得通解为

$\xi=k_1(2,-2,1,0)^T+k_2(-3,1,0,1)^T+(2,-1,0,0)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数. (3 分)

当 $a\neq2$ 且 $a\neq-2$ 时 $r(A)=r(A\bar{b})=3<4$ 有无穷多解.

通解. $x=k\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2a-7}{a-2}\\3-\frac{9}{a-2}\\\frac{9}{a-2}\end{pmatrix}$

17. **(12 分)** 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 的行列式为54，求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解 由于 $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 的行列式为54，经计算 $a=4$ （2 分）

$|\lambda I-A|=0$

因为 $\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&-1\\-1&\lambda-4&-1\\-1&-1&\lambda-4\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix}\lambda-6&-1&-1\\\lambda-6&\lambda-4&-1\\\lambda-6&-1&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-6&-1&-1\\0&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-6)(\lambda-3)^2$

得到 A 的特征值 $\lambda_1=3,\lambda_2=3,\lambda_3=6$ （3 分）

分别解 $(A-3I)x=0$，$(A-6I)x=0$ 得到 A 属于 λ_1，λ_2，λ_3 的

特征向量 $\xi_1=(1,-1,0)^T$，$\xi_2=(1,0,-1)^T$，$\xi_3=(1,1,1)^T$ （3 分）

1′ 1′ 1′

正交单位化有 $\beta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T,\beta_2=\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2)^T,\beta_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)^T$ （3 分）

1+1 1′

取正交阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

则有 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵 （1 分）

注： P 可以与答案形式不一样。

得分	评卷人

四、证明题：（每题 6 分，2 题共 12 分）

18.（6 分）设 3 阶非零矩阵 A 满足 $A^2=0$，求证 $r(A)=1$.

证 因为 $A^2=0$，$\because$ 1′ 所以 $r(A)+r(A)\le 3$，2′ 即 $r(A)\le\frac{3}{2}$ $r(A)\le 1$ （3 分）

又因为 A 非零，所以 $r(A)>0$ $(r(A)\geq 1)$ （2 分）

得 $r(A)=1$ $r(A)\le 1$. （1 分）

19.（6 分）设 A 是正交矩阵，且非零列向量 α,β 满足 $A\alpha=\alpha, A\beta=-\beta$，求证 $\alpha^T\beta=0$.

证 因为 A 是正交矩阵，所以 A 可逆，且 $A^T=A^{-1}$ ~~（1 分）~~ $AA^T=I$. （2分）

因为 $A\beta=-\beta$，所以 $A^T\beta=A^{-1}\beta=-\beta$ （2 分）

则 $\alpha^TA^T\beta=-\alpha^T\beta$，而 $\alpha^TA^T\beta=(A\alpha)^T\beta=\alpha^T\beta$ （2 分）

所以 $\alpha^T\beta=-\alpha^T\beta$，得 $\alpha^T\beta=0$ （1 分）

$\alpha^T\beta=(A\alpha)^T(-A\beta)=-\alpha^T(A^TA)\beta=-\alpha^T\beta$

2′ 1′

$\therefore \alpha^T\beta=0$ 1′