上海大学 2011 ～ 2012 秋季学期试卷解答及评分标准(A 卷)

课程名：线性代数（A） 课程号：01013009 学分：3

一、填空题：（本大题含 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

(提示：请在每小题的空格中填上正确答案。错填或不填均无分。)

1. 由三维列向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 构成矩阵 $\mathbf{A}=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ 和 $\mathbf{B}=(2\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma},3\vec{\beta})$，若行列式 $|\mathbf{A}|=1$，则行列式 $|\mathbf{B}|=$ __-6__；

2. 若三阶行列式的第 1 列元素依次为 $1,2,3$，第 3 列元素的代数余子式依次为 $-1,2,x$，则 $x=$ __-1__；

3. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{CA}$，则 $\mathbf{B}$ 一定是__n__阶矩阵；

4. 当 $x=$ __3__ 时，矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 的秩达到最小；

5. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-3\mathbf{E}=\mathbf{O}$，则 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}=$ __$\mathbf{A}+2\mathbf{E}$__；

6. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&2&2\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $(\mathbf{A}^*)^{-1}=$ __$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$__；

7. 设向量组 $(1,2,3)$，$(3,-1,2)$，$(2,3,k)$ 线性相关，则 $k=$ __5__；

8. 设非零向量 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 正交，则内积 $\left[4\vec{\alpha},6\vec{\beta}+\dfrac{\vec{\alpha}}{2\|\vec{\alpha}\|^2}\right]=$ __2__；

9. 设1和2是二阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，则行列式 $|\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}^{-1}+3\mathbf{E}|=$ __12__；

10. 设 $\mathbf{A}$ 的秩为 2，$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 是三元非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解，若 $\vec{\eta}_1=(2,1,2)^T$ 以及 $\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=(1,0,1)^T$，那么 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ __$c(3,2,3)^T+(2,1,2)^T$__。

二、单项选择题：（本大题含 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

(提示：在每小题列出的备选项中只有一个符合题目要求，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。)

1. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则下列结论错误的是 （ D ）

   A. $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$　B. $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|$

   C. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$　D. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$

2. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，若 $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{B}\\\mathbf{A}&\mathbf{O}\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{C}^{-1}=$ （ B ）

   A. $\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{B}^{-1}\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{A}^{-1}\\\mathbf{B}^{-1}&\mathbf{O}\end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{B}^{-1}\\\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{A}^{-1}\end{pmatrix}$

3. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}$ 是非零矩阵，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，则 （ C ）

   A. $r(\mathbf{B})=3$　B. $r(\mathbf{B})=2$

   C. $r(\mathbf{B})=1$　D. $r(\mathbf{B})$ 的值不确定

4. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶的正交阵，则下列结论错误的是 （ A ）

   A. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 为正交阵　B. $\mathbf{AB}$ 为正交阵

   C. $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ 为正交阵　D. 当 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|<0$ 时，$|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|=0$

5. n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是 （ C ）

   A. $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵　B. $\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵

   C. $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量　D. $\mathbf{A}$ 有 n 个不同特征值

三、（本大题 8 分） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解： $D=\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 2+1+2 分

$=6\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix}=6\cdot(-4)(-1)^3\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=-24^2=-576$ 2+1 分

四、（本大题 10 分） 已知 $\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$，且 $\mathbf{X}$ 满足矩阵方程 $\mathbf{XA}=2(\mathbf{E}-\mathbf{X})$，试求 $\mathbf{X}$ （其中 $\mathbf{E}$ 是单位矩阵）。

解： 矩阵方程相当于 $\mathbf{X}(\mathbf{A}+2\mathbf{E})=2\mathbf{E}$，即 $\mathbf{X}=2(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$， 2 分

由于 $\mathbf{A}+2\mathbf{E}=\mathbf{A}-2\mathbf{E}+4\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，故 $\mathbf{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ 2 分

利用 $\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$， 4 分

推得 $\mathbf{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2 分

五、（本大题 12 分） 求向量组 $\vec{a}_1=(1,1,2,3)^T$，$\vec{a}_2=(1,-1,1,1)^T$，$\vec{a}_3=(1,3,3,5)^T$，$\vec{a}_4=(4,-2,5,6)^T$ 的秩和它的一个极大无关组，并将其它向量用此极大无关组线性表示。

解： 对下列矩阵进行初等行变换：

$\mathbf{A}=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2+2 分

故向量组的秩 $r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=2$，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 构成了它的一个极大无关组， 2+2 分

继续初等行变换可进一步得到 $\mathbf{A}$ 的行最简形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

从而 $\begin{cases} \vec{\alpha}_3=2\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2 \\ \vec{\alpha}_4=\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2 \end{cases}$ 2+2 分

六、（本大题 12 分） 试讨论 k 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 无解、有惟一解或有无穷多解，并在有无穷多解的情况下求出其通解。

解： $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & k-2 & 0 \\ 0 & 1-2k & 1-k & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-k/2 & 0 \\ 0 & 0 & k(3/2-k) & k \end{pmatrix}$ 2+2+2 分

当 $k = \dfrac{3}{2}$ 时，$2 = r(\mathbf{A}) \neq r(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$，方程组无解 1 分

当 $k \neq \dfrac{3}{2}$ 且 $k \neq 0$ 时，$r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$，方程组有惟一解 1 分

当 $k = 0$ 时，$r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 < 3$，方程组有无穷多解 1 分

此时 $\tilde{\mathbf{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 分

七、（本大题 10 分） 设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ 经过一正交变换化为标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$，试确定参数 a 以及所用的正交变换。

解： 二次型矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2 分

在正交变换下二次型标准形的系数 $0,1,2$ 是 $\mathbf{A}$ 的三个特征值 2 分

故 $|\mathbf{A}| = 0$，又直接计算得 $|\mathbf{A}| = -a^2$，$\Rightarrow$ 参数 $a = 0$ 1 分

依次求 $(\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$, $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$, $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$ 的非零解

得到 $\mathbf{A}$ 相应于特征值 $0,1,2$ 的特征向量 $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 分

故所述正交变换为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，其中正交阵 $\mathbf{P} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\xi}_3\right)$ 2 分

八、（本大题 8 分） 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性无关，向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5$ 线性相关，试证明向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4 - \vec{\alpha}_5$ 线性无关。

证明： 考虑 $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + k_3\vec{\alpha}_3 + k_4(\vec{\alpha}_4 - \vec{\alpha}_5) = \vec{0}$ （*） 2 分

由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性无关 $\Rightarrow$ 其部分组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 也线性无关 1 分

结合向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}_5$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示

即存在常数 c_1, c_2, c_3，使 $\vec{\alpha}_5 = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + c_3\vec{\alpha}_3$ 2 分

将其带入（*），并整理得

$(k_1 - c_1k_4)\vec{\alpha}_1 + (k_2 - c_2k_4)\vec{\alpha}_2 + (k_3 - c_3k_4)\vec{\alpha}_3 + k_4\vec{\alpha}_4 = \vec{0}$ 1 分

由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性无关 $\Rightarrow$ $k_1 - c_1k_4 = k_2 - c_2k_4 = k_3 - c_3k_4 = k_4 = 0$

$\Rightarrow$ $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，根据定义向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4 - \vec{\alpha}_5$ 线性无关。 2 分