上海大学 2010～2011 学年冬季学期试卷（A 卷）

课程名 线性代数 D 参考答案 课程号 01014061 学分 4

题号	一	二	三	四
得分	30	12	50	8

评卷人	得分

一、填空（每题 3 分, 10 题共 30 分）

1．设三阶方阵 A 的行列式为 $|A|=2$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则行列式 $\left|(3A)^{-1}-A^*\right|=\underline{-\frac{125}{54}}$；

2．已知非零向量 β 与向量 $(1,1,-1)$ 及 $(1,-1,-1)$ 都正交，则 $\beta=$ $\underline{k(1,0,1)}$ （其中 k 为任意非零常数）；

3．非齐次方程组 $\begin{cases}2x_1+2x_2+\cdots+2x_n=m\\3x_1+3x_2+\cdots+3x_n=n\end{cases}$ 有解的充分必要条件是 $\underline{3m=2n}$；

4．设 A 为 4×3 矩阵，若方程组 $AX=0$ 以 $\eta_1=(1,0,2)$，$\eta_2=(0,1,-1)$ 为其基础解系，则矩阵 A 的秩等于___1_____；

5．设三阶可逆矩阵 A 的特征值是 1、$\frac{1}{2}$、3，则 A^{-1} 的特征值为 $\underline{1,2,\frac{1}{3}}$；

6．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=9x_1^2+12x_1x_3+8x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ 的矩阵形式为 $f(x_1,x_2,x_3)=$

$$(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}9&0&6\\0&8&2\\6&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};$$

7．设 A 为方阵，则非齐次线性方程组 $AX=\mathbf{b}$ 有唯一解的充要条件是 $\underline{|A|\neq 0}$；

8．设三阶矩阵 A 有一个特征值为 2，且 $|A|=0$ 及 A 的主对角线元素的和为 0，则 A 的其余二个特征值为__0，-2________；

9．设 $A=(\gamma_1\ \gamma_2\ \cdots\ \gamma_{n-1}\ \alpha)$, $B=(\gamma_1\ \gamma_2\ \cdots\ \gamma_{n-1}\ \beta)$ 其中 α,β，$\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}$ 是 n 维列向量，若 $|A|=a$，$|B|=b$ 则 $|A+B|=\underline{2^{n-1}(a+b)}$；

10．3 阶实反对称矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘构成一个 3 维的线性空间，它的一组基为 $\underline{E_{12}-E_{21},E_{13}-E_{31},E_{23}-E_{32}}$；

评卷人	得分

二、简答（每题 6 分，2 题共 12 分）

11．叙述向量组极大无关组与秩的定义；

12．叙述正定二次型与正定矩阵的定义，并给出判别实对称矩阵是正定矩阵的二种方法。

11 **解** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为向量组，如果 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\ (r\le n)$ 为其部分向量组，且满足

（1）$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关； （2 分）

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示 （2 分）

【或者 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意 $r+1$ 个向量（如果存在的话）线性相关.】

则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 极大无关组.

极大无关组所含向量个数称为向量组的秩. （2 分）

12 **解** 设 A 为实对称矩阵，对于任意实向量 $x_0\neq 0$，有 $x_0^TAx_0>0$，则称二次型 $f=X^TAX$ 是正定二次型，A 为正定矩阵。 （2 分）

判别方法：

定义判别法，顺序主子式都大于 0 判别法，标准形系数都大于 0 判别法，特征值都大于 0 判别法。。。（每个 2 分）

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

评卷人	得分

三、计算（每题 10 分，5 题共 50 分）

13 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a \\ b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & \cdots & a & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ b & a & \cdots & b & b & b \\ a & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}_{n\times n}$ 的值。

解 1）$D \overset{c_n+c_{n-1}+\cdots+c_1}{======} \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a+(n-1)b \\ b & b & \cdots & b & a & a+(n-1)b \\ b & b & \cdots & a & b & a+(n-1)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ b & a & \cdots & b & b & a+(n-1)b \\ a & b & \cdots & b & b & a+(n-1)b \end{vmatrix}$ （5 分）

每行减去第一行，得

$$D=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a+(n-1)b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ （4 分）

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$ （1 分）

14 已知 $A+E=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$,且 $XA=-6X+3E$. 求 X.。

解 由 $XA=-6X+3E$ 知 $X=3(A+6E)^{-1}$ （4 分）

由已知 $A+E=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$，得 $A+6E=3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ （2 分）

所以 $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ -1 & 1 & 0 & \\ & -1 & 1 & 0 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$ （4 分）

15 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{bmatrix}$ 行向量组线性相关，求 a,b 以及线性方程组

$$A[x_1,x_2,x_3,x_4]^T=[-1,-1,1]^T$$

的解.

解 因为 $[1,1,1,1],[4,3,5,-1],[a,1,3,b]$ 线性相关，所以可得

$$[a,1,3,b]=[4,3,5,-1]-2[1,1,1,1]$$

即有 $a=2$，$b=-3$, （4 分）

由于 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ （4 分）

得线性方程组解为：

$$x=k_1[-2,1,1,0]^T+k_2[4,-5,0,1]^T+[2,-3,0,0]^T$$ （2 分）

16 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=11x_1^2+14x_1x_2+14x_1x_3+ax_2^2+14x_2x_3+11x_3^2$。且其对应的实对称矩阵 A 的主对角线元素之和是 33.

1）求正交变换 $X=PY$ 将二次型化为标准形;

2) 求实对称矩阵 B，使得 $B^2=A$。

解：1）二次型对应的矩阵为 $\begin{bmatrix}11 & 7 & 7\\ 7 & a & 7\\ 7 & 7 & 11\end{bmatrix}$，由对角线元素之和是 33，知道 $a=11$，

所以 $A=\begin{bmatrix}11 & 7 & 7\\ 7 & 11 & 7\\ 7 & 7 & 11\end{bmatrix}$ （2 分）

又 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-11 & -7 & -7\\ -7 & \lambda-11 & -7\\ -7 & -7 & \lambda-11\end{vmatrix}=(\lambda-25)(\lambda-4)^2$，所以特征值为 $25,4,4$ （2 分）

当 $\lambda=4$ 时，$(4E-A)X=0$ 基础解系为

$\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$ （1 分）

正交化为 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T,\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T$ （1 分）

当 $\lambda=25$ 时，$(25E-A)X=0$ 基础解系为 $\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ （1 分）

所以 $P=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ （1 分）

2） 因为 $P'AP=\mathrm{diag}[4,4,25]=(\mathrm{diag}[2,2,5])^2$，所以有

$$A=(P\mathrm{diag}[2,2,5]P')^2=B^2$$

即取 $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ （2 分）

17 设 V 是次数不超过 3 次的多项式全体构成的线性空间，$A:1,x,x^2,x^3$ 是 V 的一组基

（1）证明 $B:1,2+x,3+2x+x^2,4+3x+2x^2+x^3$ 也是 V 的一组基;

（2） 求基 A 到基 B 的过渡矩阵;

（3） 分别求 $f(x)=10+6x+3x^2+x^3$ 在这两组基下的坐标。

解：（1）因为

$$B:[1,2+x,3+2x+x^2,4+3x+2x^2+x^3]=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ （2 分）

由于 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 可逆，所以 $B:1,2+x,3+2x+x^2,4+3x+2x^2+x^3$ 也是 V 的一组基 （1 分）

（2）基 A 到基 B 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ （2 分）

（3） $f(x)=10+6x+3x^2+x^3=[1,x,x^2,x^3][10,6,3,1]^T$

$$=[1,2+x,3+2x+x^2,4+3x+2x^2+x^3]\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}10\\ 6\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=[1,2+x,3+2x+x^2,4+3x+2x^2+x^3]\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$ （2 分）

所以 $f(x)$ 在第二组基下坐标向量是 $[1,1,1,1]^T$ （2 分）

由上又知，在第一组基下坐标向量是 $[10,6,3,1]^T$ （1 分）

评卷人	得分

四、证明（每题 8 分，1 题共 8 分）

18 设 A, B 是 $2n+1$ 阶正交矩阵（其中 n 是正整数），满足 $|A|=|B|$。

（1）求证 AB 是正交矩阵；

（2）求证 $|A-B|=0$.

证明 （1）因为 $(AB)(AB)^T = ABB^T A^T = AEA^T = E$ （2 分）

所以 AB 是正交矩阵 （1 分）

（2）由 $|A|=|B|=\pm 1$，所以 $|A||B|=1$ （1 分）

又因为

$|A-B|=|B^T||A-B||A^T|=|B^T AA^T - B^T BA^T|=|B^T - A^T|$ （2 分）

$=|B-A|=(-1)^{2n+1}|A-B|=-|A-B|$ （1 分）

所以 $|A-B|=0$. （1 分）