《线性代数 A》强化训练题一解答

一、填充题

1. 负;　　2. -15;　　3. $\dfrac{1}{k^n m}$;　　4. $-\dfrac{1}{c}A-\dfrac{b}{c}E$;　　5. 2^{n-1};　　6. 1, 1, 0.

二、是非题

1. Y;　　2. N;　　3. Y;　　4. Y;　　5. Y.

三、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，求 $|B|$.

解：由于 $AA^*=A^*A=|A|E$，且易知 $|A|=3$，用 A 右乘矩阵方程的两端，有

$$3AB=6B+A,\ 即\ 3(A-2E)B=A,$$

所以

$$3^3|A-2E||B|=|A|=3,$$

又因为 $|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$，故 $|B|=\dfrac{1}{9}$.

四、证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，并求其逆矩阵.

解: 对 A 做如下分块 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，

其中

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因 $|A|=|A_1||A_2|=1\times3=3\neq0$，因此 A 可逆.

A_1, A_2 的逆矩阵分别为

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix};\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以 A 的逆阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

五、设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$， $B=P^{-1}AP$，其中 P 为3阶可逆矩阵，求 $B^{2004}-2A^2$.

解： 因为

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

从而

$$A^{2004}=(A^4)^{501}=E,$$

则由 $B=P^{-1}AP$ 有

$$B^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A(PP^{-1})AP=P^{-1}A^2P,$$

因此

$$B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P=P^{-1}EP=E,$$

故

$$B^{2004}-2A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

六、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用极大无关组线性表示.

解: 首先，对 A 作行初等变换化为行最简形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知秩 $r(A)=3$, 因此列向量组的极大无关组含有 3 个向量.

而三个非零行的非零首元在 $1, 2, 4$ 列，也即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大无关组. 由 A 的行最简形矩阵，有

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4.$$

七、λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2. \end{cases}$

(1) 有惟一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解，并求解.

解: 方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}; \quad B=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right),$$

$$|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

(1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，$|A| \neq 0$, $R(A)=R(B)=3$,

所以方程组有惟一解

$$x_1=\frac{-\lambda-1}{\lambda+2}, \quad x_2=\frac{1}{\lambda+2}, \quad x_3=\frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda+2)}.$$

(2) 当 $\lambda=-2$ 时,

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -3 & 6\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),$$

$R(A)=2\neq R(B)=3$, 所以方程组无解.

(3) 当 $\lambda=1$ 时,

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

$R(A)=R(B)=1<3$, 方程组有无穷解.

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_2-x_3+1,\\ x_2=x_2,\\ x_3=x_{3.}\end{cases}$$

所以得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\in\mathrm{R}.$$

八、试求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$, 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形.

解: $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$,

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)=0,\ 得 \lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4,$$

$\lambda_1=-2$ 时, $A-\lambda E=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $\quad\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\quad\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$,

$\lambda_2=1$时，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$，

$\lambda_3=4$时，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$，

$$P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

作正交变换$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$，则 $f=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$.

九、 设λ_1,λ_2是n阶矩阵A的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$分别是$A$的属于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，证明$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$不是$A$的特征向量.

证：假设$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是$A$的属于特征值$\lambda$的特征向量，则

$$A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda\boldsymbol{\alpha}_2,$$

又

$$A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=A\boldsymbol{\alpha}_1+A\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

于是有

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},$$

由于$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，故$\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$，从而$\lambda_1=\lambda_2$，与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾.

故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$不是$A$的特征向量.

十、设$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$，且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性无关.

证：设$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$，将$\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,\cdots,r)$的表示式代入，即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r)=\mathbf{0},$$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+x_3+\cdots+x_r)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，故有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 0, \\ \qquad x_2 + \cdots + x_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_r = 0. \end{cases}$$

显然，$x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$，故$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$线性无关.