线性代数

——冬季学期

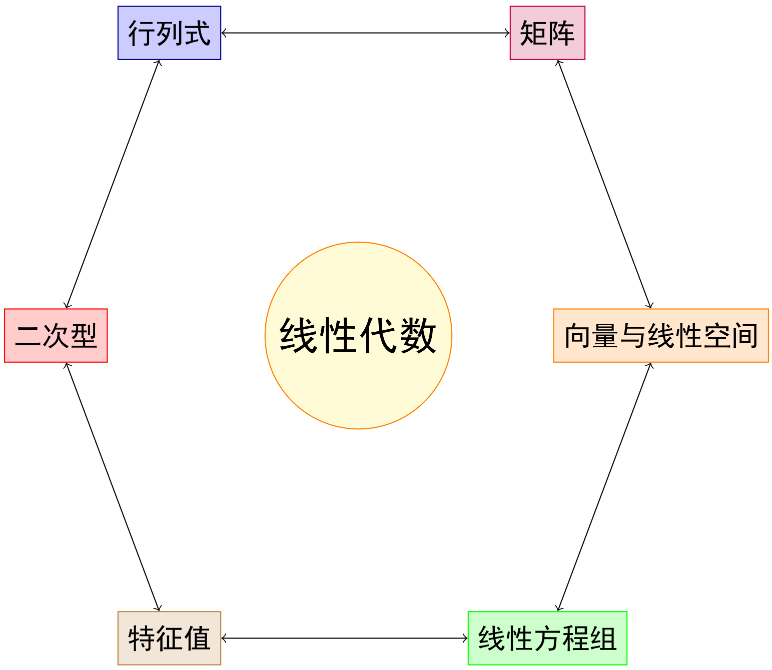
zzr

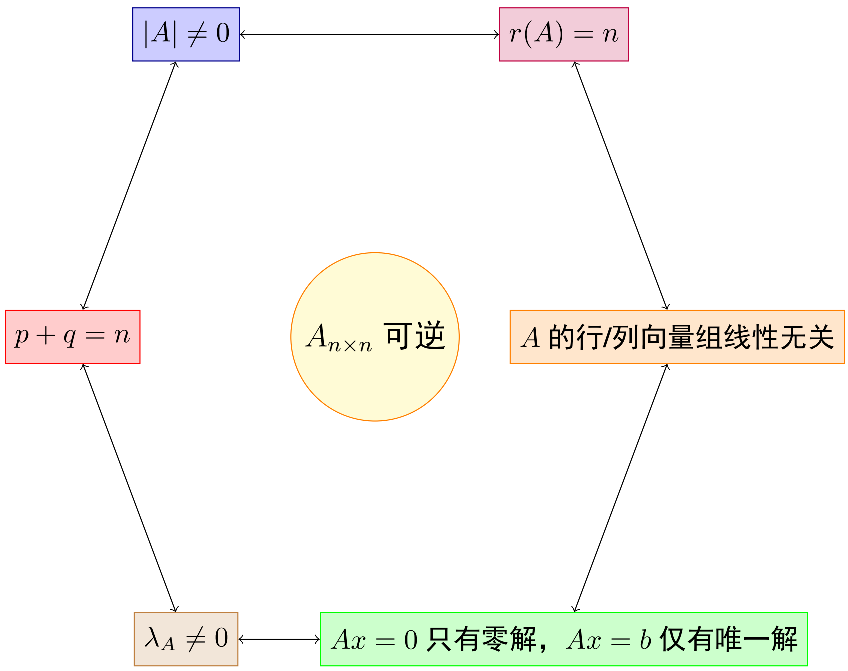
2023 年 2 月 16 日

前言

本笔记以 LaTeX 编写，仅供学习参考使用。笔记主要内容来源：豆艳萍老师的讲课笔记、王玉超老师的讲课笔记、知乎 B 站等渠道的相关知识点总结等

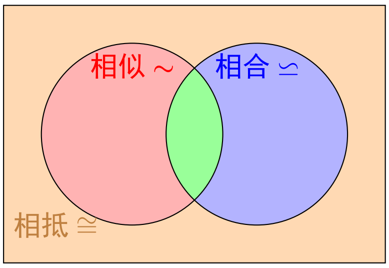
线性代数的六维一体





矩阵的三大关系

相似 $\sim$	相合 $\backsimeq$	相抵 $\cong$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
秩、迹、行列式、特征值均相同	秩、正负惯性指数相同	秩相同



zzr

2023 年 2 月 16 日

目录

第一章　矩阵

1.1　矩阵的概念与运算

1.1.1　基本概念与特殊矩阵

定义 1.1.1. 矩阵 *(matrix)*

由 $m \times n$ 个数排成的一个 m 行 n 列的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}, a_{ij} \in F$$

称为数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵，简记为 $A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 表示矩阵的第 i 行第 j 列的元素

定义 1.1.2. 特殊矩阵

(1)$n \times n$ 矩阵称为n **阶方阵**，$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ 称为**主对角元**;

(2) 所有元素都为零的矩阵称为**零矩阵**，记为 0，零矩阵同样要考虑行数与列数

(3)$1 \times n$ 矩阵称为 n 维行向量 α

(4)$m \times 1$ 矩阵称为 m 维列向量 β^T

(5) 非主对角元均为零的 n 阶方阵称为 **(主) 对角矩阵**，记为 ***diag***$(d_1, ..., d_n)$，即 $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$，其中 $d_1, ..., d_n$ 为主对角元;

(6) 非副对角元均为零的 n 阶方阵称为**副对角矩阵**，记为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $a_1, ..., a_n$ 为副对角元;

(7) 主对角元全为 1,其余元素全为零的 n 阶方阵称为 n 阶**单位矩阵**,记为 I(或 E),如 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(8) 对角矩阵中，如果 $d_i = k$，则称为**数乘矩阵**，记为 kI;

(9) 主对角元下方 (上方) 元素都为零的 n 阶方阵称为 n 阶**上 (下) 三角矩阵**;

(10) 若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 且 $a_{ij} = a_{ji}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$，则称为 n 阶**对称矩阵**，即 $A^T = A$; 单位矩阵、对角矩阵都是对称矩阵

(11) 若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 且 $a_{ij} = -a_{ji}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$，则称为 n 阶**反 (对) 称矩阵**，即 $A^T = -A$ 且反称矩阵的主对角元都为零

1.1.2 矩阵的线性运算

定义 1.1.3. 同型矩阵

两个矩阵的行数相等且列数相等时，称为同型矩阵.

定义 1.1.4. 矩阵的相等

若 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$ 且 $a_{ij} = b_{ij}(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$，则称 A 和 B 相等，记为 $A = B$

定义 1.1.5. 矩阵的加法运算

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$，称 $(a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$ 为 A 与 B 之和，记为 $A + B$

定义 1.1.6. 矩阵的负运算和减法运算

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$，称 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 A 的负矩阵，记为 $-A$.

定义矩阵的减法运算为 $A - B = A + (-B)$

定义 1.1.7. 矩阵的数乘运算

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, k$ 为数，称 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 k 的乘积或数乘，记为 kA 或 Ak

定理 1.1.8. 矩阵线性运算的性质

加法交换律:$A + B = B + A$

加法结合律:$(A + B) + C = A + (B + C)$

数乘结合律:$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

数乘分配律:$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

$0 + A = A + 0 = A, A - A = 0, 1A = A, 0A = 0$

1.1.3 矩阵的乘法运算

定义 1.1.9. 矩阵的乘法运算
设 $A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$，称 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为 A 与 B 的乘积，称为 A 左乘 B 或 B 右乘 A，其中

$$c_{ij}=(a_{i1},...,a_{is})\cdot(b_{1j},...,b_{sj})=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$$

理解 $C=AB$
c_{ij} 为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的乘积
C 第 j 列为 A 与 B 第 j 列作乘积，是 A 的列的线性组合
C 第 i 行为 A 第 i 行与 B 作乘积，是 B 的行的线性组合
C 为 A 的第 k 列与 B 的第 k 行作乘积之和

对矩阵 $A_{m\times n}$:
单独取出 A 的第 j 列，需右乘一个 n 维列向量 e_j，第 j 个元素为 1 其余为 0
单独取出 A 的第 i 行，需左乘一个 m 维行向量 ε_i，第 i 个元素为 1 其余为 0
特别地，$(\varepsilon_iA)e_j=\varepsilon_i(Ae_j)=a_{ij}$
矩阵乘法不满足交换律

定义 1.1.10. 若 $AB=BA$，则称 A 与 B 可交换 (且均为同阶方阵)

一般地
$(AB)^k\neq A^kB^k$，除非 A,B 可交换
$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$，除非 A,B 可交换
$(A+I)^2=A^2+2A+I$

定理 1.1.11. 若 A,B 可交换，则

$$(A+B)^n=\sum_{i=1}^{n}C_n^iA^iB^{n-i}$$

若 $B=I$，则 $(A+I)^n=\sum_{i=1}^{n}C_n^iA^i$

定理 1.1.12. 设 $A = \boldsymbol{diag}(a_1, ..., a_n)$，且 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$. 则与 A 可交换的矩阵是对角矩阵

矩阵乘法不满足消去律
$AB = 0$ 不能推出 $A = 0$ 或 $B = 0$
$AB = AC$ 且 $A \neq 0$ 不能推出 $B = C$

定理 1.1.13. 矩阵乘法的运算律
乘法结合律：$(AB)C = A(BC)$
乘法分配律：$A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA$
乘法和数乘分配律：$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
$AI = IA = A$
$0_{m\times s}A_{s\times n} = 0_{m\times n}, A_{s\times n}0_{n\times t} = 0_{s\times t}$

主对角矩阵的乘积仍为主对角矩阵，副对角矩阵的乘积也为主对角矩阵

1.1.4 矩阵的幂运算、转置运算与共轭运算

定义 1.1.14. 方阵的幂运算
设 A 是方阵，定义 A 的 k 次幂为

$$A^0 = I, A^k = \overbrace{AA...A}^{k个}$$

定理 1.1.15. 幂运算的性质
$A^kA^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl}$

定义 1.1.16. 矩阵的转置运算
设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$，称 $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为 A 的转置矩阵，记为 A^T

定理 1.1.17. 转置的性质
$(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(kA)^T = kA^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

$e_i^T A e_j = a_{ij}$

定义 1.1.18. 矩阵的共轭

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为复矩阵，称 $(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 为 A 的共轭矩阵，记为 $\overline{A}$

定理 1.1.19. 共轭的性质

$\overline{kA+lB} = \overline{kA} + \overline{lB}$

$\overline{AB} = \overline{A} \quad \overline{B}$

$\overline{A^T} = \overline{A}^T$

1.2 分块矩阵

定义 1.2.1. 分块矩阵

对于行数和列数较高的矩阵 A，为了简化运算，经常采用分块法. 将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵

设 A_{ij} 为 $n_i \times m_j$ 矩阵 $(1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant t)$，如果 $n\times m$ 矩阵 A 的第 $\sum_{k=1}^{i-1} n_k + 1$ 行到第 $\sum_{k=1}^{i} n_k$ 行，第 $\sum_{l=1}^{j-1} m_l + 1$ 列到第 $\sum_{l=1}^{j} m_l$ 列元素组成的矩阵 A_{ij}，即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$$

则称其为矩阵 A 的分块表示

定理 1.2.2. 分块矩阵的运算

分块矩阵的加法

设矩阵 A 与 B 的行数、列数相同，采用相同的分块法，则 $A+B$ 为对应分块矩阵相加

分块矩阵的数乘

kA 为对应的分块矩阵进行数乘运算

分块矩阵的乘法

AB 相当于对应的行和列的分块矩阵左乘，同时必须满足行列关系

分块矩阵的转置

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$，则有 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}$

分块矩阵的幂运算

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，则有 $A^m=\begin{pmatrix} A_{11}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{nn}^m \end{pmatrix}$

定义 1.2.3. 设 A_i 为 i 阶方阵，如果

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

则称 A 为**准对角矩阵**，记为 $A=\boldsymbol{diag}(A_1,...,A_m)$

定理 1.2.4. 设 A_i,B_i 为 i 阶方阵，$A=\boldsymbol{diag}(A_1,...,A_m),B=\boldsymbol{diag}(B_1,...,B_m)$，则

(1)$A+B=\boldsymbol{diag}(A_1+B_1,...,A_m+B_m)$

(2)$AB=\boldsymbol{diag}(A_1B_1,...,A_mB_m)$

(3)$A^k=\boldsymbol{diag}(A_1^k,...,A_m^k)$

1.3　可逆矩阵

定义 1.3.1. 可逆矩阵

对于矩阵 A，如果有矩阵 B 使得

$$AB = BA = I$$

则称 A 可逆，否则称 A 不可逆. 称 B 为 A 的逆矩阵，记作 A^{-1}

可逆矩阵又称为**非奇异矩阵**、**非退化矩阵**

可逆矩阵一定是方阵，它的逆矩阵是同阶方阵

定理 1.3.2. 可逆矩阵的性质

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, (k \neq 0)$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

定理 1.3.3. 对角矩阵的逆

(1) 若 A 为主对角矩阵，设 $A = \textbf{\textit{diag}}(d_1, ..., d_n)$，则 $A^{-1} = \textbf{\textit{diag}}(d_1^{-1}, ..., d_n^{-1})$，即

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

(2) 若 A 为副对角矩阵，则 A^{-1} 为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1.3.4. 分块矩阵的逆

设 A,B,C 均为方阵

(1) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

定理 1.3.5. 求逆方法

(1) 高斯——若当消元法求逆

对于 n 阶可逆矩阵 A，有

$$(A, I_n) \underset{\text{化为行最简形阵}}{\longrightarrow} (I_n, A^{-1})$$

(2) 多项式除法求逆

(3) 分块矩阵求逆

例 1.3.6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}

解：(利用高斯——若当消元法)

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 1.3.7. 设方阵 A 满足 $A^2+2A-9I=0$，则 $A+4I$ 是否可逆，若可逆则求其逆

解：*(利用多项式除法求逆)* 先将矩阵方程抽象为多项式方程 $x^2+2x-9=0$，运用多项式除法，则

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x+4 & x^2+2x-9 \\ & -x^2-4x \\ \hline & -2x-9 \\ & 2x+8 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$\Rightarrow (x+4)(x-2)-1=0 \Rightarrow (A+4I)(A-2I)-I=0 \Rightarrow (A+4I)(A-2I)=I$

$$\therefore A+4I\text{可逆，且}(A+4I)^{-1}=A-2I$$

例 1.3.8. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}

解：*(分块矩阵求逆)* 对 A 分块，得

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$$

其逆矩阵为 $\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ X & C^{-1} \end{pmatrix}$，要使 $\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ X & C^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}$，则 $DB^{-1}+CX=O$

$$\therefore X=-C^{-1}DB^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ X & C^{-1} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

定理 1.3.9. 矩阵可逆的充要条件

$$n\text{ 阶方阵 } A \text{ 可逆}\begin{cases}\Leftrightarrow |A|\neq 0\\ \Leftrightarrow r(A)=n(\text{满秩})\\ \Leftrightarrow A=P_1...P_s(P_i\text{是初等矩阵})\\ \Leftrightarrow A\text{的列 (行) 向量组线性无关}\\ \Leftrightarrow \text{齐次线性方程组}Ax=0\text{只有零解}\\ \Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组}Ax=b\text{只有唯一解}\\ \Leftrightarrow A\text{的特征值}\lambda\neq 0\end{cases}$$

$$n\text{ 阶方阵 } A \text{ 奇异}\begin{cases}\Leftrightarrow |A|=0\\ \Leftrightarrow r(A)<n(\text{不满秩})\\ \Leftrightarrow A\neq P_1...P_s(P_i\text{是初等矩阵})\\ \Leftrightarrow A\text{的列 (行) 向量组线性相关}\\ \Leftrightarrow \text{齐次线性方程组}Ax=0\text{有非零解}\\ \Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组}Ax=b\text{有无穷多解}\\ \Leftrightarrow \quad A\text{的特征值}\lambda_i=0\end{cases}$$

1.4 伴随矩阵

定义 1.4.1. 伴随矩阵

设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，则 A 的伴随矩阵为

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式

定理 1.4.2. 伴随矩阵的性质

(1)$AA^*=A^*A=|A|I$

(2)$A^* = |A|A^{-1}$

(3)$|A^*| = |A|^{n-1}$

(4)$(kA)^* = k^{n-1}A^*(k \neq 0)$

(5)$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$

(6)$(A^*)^T = (A^T)^*$

(7)$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(8)$(...((A^*)^*)^*...)^*$(k 重伴随)$= |A|^{\frac{(n-1)^k-(-1)^k}{n}} \cdot A^{(-1)^k}$

(9)$(AB)^* = B^*A^*$

(10)$(A^m)^* = (A^*)^m$

(11) 二阶方阵速算：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

主对角线互换，副对角线变号

1.5　正交矩阵

定义 1.5.1. 正交矩阵

如果实方阵 A 满足

$$AA^T = A^TA = I$$

则称 A 为正交矩阵.

定理 1.5.2. 正交矩阵的性质

设 A 为 n 阶正交矩阵，则

(1)A 可逆且 $A^{-1} = A^T$;

(2)A 的行向量组和列向量组都是 R^n 的标准正交基;

(3)$|A| = \pm 1, \lambda = \pm 1$，故有保距性：$|x| = |Ax|$;

(4) 考虑线性方程组 $Ax = b$，若 A 为正交矩阵，则 $x = A^Tb$

(5) 设 $A = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$，则

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

1.6 正定矩阵

定义 1.6.1. 正定矩阵

对实对称矩阵 A，有任意非零向量 x，使得 $x^TAx > 0$，则称 A 为**正定矩阵** *(*即所有特征值都为正，所有顺序主子式都为正*);*

对实对称矩阵 A，有任意非零向量 x，使得 $x^TAx \geqslant 0$，则称 A 为**半正定矩阵** *(*即所有特征值都非负，所有顺序主子式都非负*);*

对实对称矩阵 A，有任意非零向量 x，使得 $x^TAx < 0$，则称 A 为**负定矩阵** *(*即奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正*);*

对实对称矩阵 A，有任意非零向量 x，使得 $x^TAx \leqslant 0$，则称 A 为**半负定矩阵** *(*即奇数阶顺序主子式非正，偶数阶顺序主子式为非负*);*

若实对称矩阵 A 既非正定也非负定，则称 A 为**不定矩阵** *(*即所有顺序主子式为负或者奇数阶顺序主子式为正，偶数阶顺序主子式为负*)*

定义 1.6.2. 黑塞矩阵 *(Hessian matrix)*

设 $z = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ 有连续的二阶偏导数 *(*x_i 为未知变元*)*，且 $\nabla f(M_0) = \vec{0}$，那么在 M_0 点有黑塞矩阵：

$$\mathbf{H_f}(M_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} = [f_{x_ix_j}]_{n\times n}$$

定理 1.6.3. 多元函数的极值判定

(1) 若黑塞矩阵 $(\mathbf{H_f}(M_0))$ 是正定的，则 $f(M_0)$ 是极小值

(2) 若黑塞矩阵 $(\mathbf{H_f}(M_0))$ 是负定的，则 $f(M_0)$ 是极大值

(3) 若黑塞矩阵 $(\mathbf{H_f}(M_0))$ 是不定的，则 $f(M_0)$ 不是极值

(4) 若黑塞矩阵 $(\mathbf{H_f}(M_0))$ 是半正定或半负定的，则 $f(M_0)$ 是可疑极值，需借助高阶泰勒公式判断

1.7　初等变换与初等矩阵

定义 1.7.1. 初等行变换

倍法变换：以非零数 k 乘矩阵的第 i 行，记为 $r_i \times k$

换法变换：交换矩阵的第 i 行和第 j 行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$

消法变换：矩阵的第 j 行数乘 k 加到第 i 行，记为 $r_i + kr_j$

初等列变换同理

初等行变换与初等列变换统称初等变换

1.7.1　矩阵的相抵

定义 1.7.2. 矩阵的相抵

如果矩阵 A 通过初等变换化为矩阵 B，则称 A 与 B 相抵 (等价)，记为 $A \cong B$

定理 1.7.3. 相抵的性质

设 A, B, C 为 $m \times n$ 矩阵

自反性：$A \cong A$

对称性：若 $A \cong B$，则 $B \cong A$

传递性：若 $A \cong B$，$B \cong C$，则 $A \cong C$

如果 $A \cong B$，则存在 $m(n)$ 阶可逆矩阵 $P(Q)$，使得 $PA = B(AQ = B)$

如果 $A \cong B$，则存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $PAQ = B$

定义 1.7.4. 行阶梯阵

矩阵的零行在矩阵的最下方，且非零行首个非零元的列标随着行标的递增而严格增大

即可画出一条阶梯线，每个台阶折线的下方全为 0，每个台阶只有一行

定义 1.7.5. 行最简形阵

在行阶梯阵的基础上，每行首个非零元都为 1，其其所在列的其余元素均为 0

定义 1.7.6. 相抵标准形

对矩阵 A，存在非负整数 r，使得 A 与 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相抵，则该矩阵称为 A 的相抵标准形.

当 $r = 0$ 时，规定上述矩阵为零矩阵

即：矩阵左上角为一个单位矩阵，其余元素均为 0

定理 1.7.7. 对任意非零矩阵 $A_{m\times n}$，可以通过有限次初等行变换化为行最简形阵; 再通过有限次初等列变换化为相抵标准形 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

定理 1.7.8. A 是 n 阶可逆矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的相抵标准形为 n 阶单位矩阵

定理 1.7.9. 任何矩阵的相抵标准形唯一

1.7.2 初等矩阵

定义 1.7.10. 初等矩阵

(1) **对换矩阵**P_{ij} : 交换 I 的第 i,j 行 *(*列*)*

如，对于三阶单位阵 I_3，则 $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) **倍乘矩阵**$P_i(k)$: I 的第 i 行 *(*列*)* 乘以非零数 k

如，对于三阶单位阵 I_3，则 $P_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) **倍加矩阵**$P_{ij}(k)$: 将 I 的 j 行的 k 倍加到第 i 行或将 I 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列

如，对于三阶单位阵 I_3，则 $P_{13}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

定理 1.7.11. 用初等矩阵 P 左乘矩阵 A，相当于对 A 作一次相应的初等行变换; 用初等矩阵 P 由右乘矩阵 A，相当于对 A 作一次相应的初等列变换 *(*左行右列*)*

1.8 矩阵的秩

定义 1.8.1. 矩阵的秩

称矩阵 A 的相抵标准形 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 中的 r 为矩阵 A 的**秩** *(rank)*，记为 $r(A)$

定义 1.8.2. 子式

在矩阵 $A_{m\times n}$ 中，任取 k 行 k 列，位于这些行和列交叉处的 n^2 个元素，不改变其原有位置而组成一个新的 k 阶行列式，称为 A 的k **阶子式**

$r(A)$ 等于矩阵 A 的最高阶非零子式的阶数

定理 1.8.3. 初等变换不改变矩阵的秩

(1)

$$A \cong B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$$

(2) 设 P, Q 为可逆矩阵，则

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$$

定理 1.8.4. 矩阵求秩

任一非零矩阵的秩等于其相抵标准形中 1 的个数，等于其行阶梯阵中非零行首个非零元的个数，等于行阶梯阵中非零行的行数

定理 1.8.5. 秩的性质

(1)$r(O) = 0 \Leftrightarrow O$ 是零矩阵

(2)$r(\alpha) = r(\alpha^T) = 1$(任何非零的行 (列) 向量的秩为 1)

(3)$0 \leqslant r(A_{m\times n}) \leqslant \boldsymbol{min}\{m, n\}$

(4)$r(A) = r(A^T)$

(5)$r(AA^T) = r(A) = r(A^TA)$

(6)$r(kA) = r(A)(k \neq 0)$

(7)$r(A + B) \leqslant r(A) + r(B)$

(8)$r(A) + r(B) - n \leqslant r(AB) \leqslant \boldsymbol{min}\{r(A), r(B)\}$

(9)$A_{m\times n}B_{n\times s} = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \leqslant n$

(10)$\boldsymbol{max}\{r(A), r(B)\} \leqslant r(A|B) \leqslant r(A) + r(B)$(任何一个矩阵的秩都大于等于其子矩阵的秩)

(11)$r(A|B) = r(B|A)$

(12)$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$

(13)$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$ (A 为 n 阶方阵)

定理 1.8.6. 秩的其他不等式 (了解)

(1)n 阶方阵 A 为**幂等矩阵** ($A^2 = A$)$\Leftrightarrow r(A) + r(I - A) = n$

(2)n 阶方阵 A 为**对合矩阵** ($A^2 = I$)$\Leftrightarrow r(I + A) + r(I - A) = n$

(3)$r(ABC) \geqslant r(AB) + r(BC) - r(B)$

(4) 若 $AB = BA = 0$，则存在正整数 m，使得 $r(A^m + B^m) = r(A^m) + r(B^m)$

(5) 若 A, B 为 n 阶方阵，则 $r(AB) - r(BA) \leqslant \frac{n}{2}$

推论 1.8.7. 秩为 *1* 的特殊矩阵

任何一个秩为 1 的矩阵都可以分解为一个列向量左乘一个行向量，即

$$r(A) = 1 \Leftrightarrow \exists\alpha, \beta, 使得 A = \alpha\beta^T$$

设 α, β 为 n 维列向量，则 $\alpha\beta^T$ 表示一个矩阵 A，$\alpha^T\beta$ 表示该矩阵 A 的迹，故

(1)$A = \alpha\beta^T$ 与 $\beta\alpha^T = A^T$ 互为转置

(2)$\boxed{\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = \textbf{tr}(A) = \textbf{tr}(A^T)}$

(3)$r(\alpha\beta^T) = r(\beta\alpha^T) \leqslant 1$(若 α, β 均为非零向量，则 $r(\alpha\beta^T) = r(\beta\alpha^T) = 1$)

(4)$\boxed{r(A) = 1 \Rightarrow A^n = [\textbf{tr}(A)]^{n-1}A}$

(5)$r(A) = 1 \Rightarrow A$的特征值$\lambda_1 = \textbf{tr}(A)$，其余特征值均为零

例 1.8.8. 设 α, β 为 3 维列向量，矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$，证明：

(1)$r(A) \leqslant 2$

(2) 若 α, β 线性相关，则 $r(A) < 2$

解：(1)$r(A) = r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leqslant r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T)$

又由于 $r(\alpha\alpha^T) \leqslant 1, r(\beta\beta^T) \leqslant 1$

$\therefore r(A) \leqslant 1 + 1 = 2$

(2) 若 α, β 线性相关，则 α, β 中存在一个向量可以由其余向量表示

不妨设 β 可由 α 表示，设 $\beta = k\alpha$，则 $A = \alpha\alpha^T + k\alpha(k\alpha)^T = (1 + k^2)\alpha\alpha^T$

于是 $r(A)=r[(1+k^2)\alpha\alpha^T]=r(\alpha\alpha^T)\leqslant 1<2$

1.9 矩阵的迹

定义 1.9.1. 矩阵的迹

设 n 阶方阵 A 的主对角元为 $a_{11},...,a_{nn}$，定义方阵 A 主对角元之和为 A 的**迹** *(trace)*，记为 ***tr****(A)*

$$\boldsymbol{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

定理 1.9.2. 迹的性质

(1) 迹等于方阵特征值之和，即 $\boldsymbol{tr}(A)=\lambda_1+...+\lambda_n$

(2) 矩阵特征值的平方和等于矩阵平方的迹，即 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\boldsymbol{tr}(A^2)$

(3)$\boldsymbol{tr}(kA)=k\boldsymbol{tr}(A)$

(4)$\boldsymbol{tr}(A+B)=\boldsymbol{tr}(A)+\boldsymbol{tr}(B)$

(5)$\boldsymbol{tr}(AB)=\boldsymbol{tr}(BA)$

(6)$\boldsymbol{tr}(A^T)=\boldsymbol{tr}(A)$

(7)$\boldsymbol{tr}(\alpha\beta^T)=\alpha^T\beta$$(\alpha,\beta$ 均为 n 维列向量*)*

第二章　行列式

2.1　行列式的概念与性质

定义 2.1.1. 行列式
与方阵 A 对应，是将 A 中元素通过某种运算法则运算后得到的一个数，记为 $|A|$ 或者 $\boldsymbol{det}(A)$

只有方阵才有行列式

定义 2.1.2. 余子式
把 n 阶行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列元素删除后，剩余的 $n-1$ 阶行列式的值，称为余子式，记为 M_{ij}. 将 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为**代数余子式**，记为 A_{ij}

定理 2.1.3. 行列式的性质
(1) 矩阵做一次换法变换，行列式的值变号一次
(2) 矩阵做一次消法变换，行列式的值不变
(3) 矩阵做一次倍法变换 *(k)*，行列式的值乘以 k 倍
(4) 矩阵有线性相关的行 *(*列*)* 向量组 *(*相同/成比例/某一行 *(*列*)* 全为 *0)*，则行列式的值为 0
(5) 矩阵数乘，行列式的值乘以 k^n 倍，即 $|kA| = k^n|A|$*(*A 为 n 阶方阵*)*
(6) 矩阵转置，行列式的值不变，即 $|A| = |A^T|$
(7) 矩阵相乘，行列式的值也相乘，即 $|AB| = |A||B|$*(*A, B 均为 n 阶方阵*)*
(8) 矩阵相加，行列式的值不一定相加，即 $|A+B| \neq |A| + |B|$
(9) 若矩阵的某一行 *(*列*)* 的元素都可以表示为两个数之和，则此行列式可以分解为两个行列式之和，即

$$|A| = |(\alpha_1, ..., \alpha_i + \beta_i, ..., \alpha_n)| = |(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)| + |(\alpha_1, ..., \beta_i, ..., \alpha_n)|$$

定理 2.1.4. 行列式展开定理

n 阶行列式 $|A|$ 等于它的任意一行 (列) 的所有元素与它们各自相应的代数余子式的乘积之和

定理 2.1.5. 代数余子式的性质

n 阶行列式 $|A|$ 的第 i 行 (列) 元素与另一 j 行 (列) 相对应的代数余子式的乘积之和为

$$\begin{cases} a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj} \\ \qquad\qquad \textbf{\textit{or}} \\ a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn} \end{cases} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ |A| & (i=j) \end{cases}$$

定理 2.1.6. 克拉默法则 *Cramer's Rule*

设 n 个方阵 n 个未知数的线性方程组为 $\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$

则其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

该方程有唯一解 $\Leftrightarrow D \neq 0$ 且其解为 $x_1=\frac{D_1}{D},\ldots,x_n=\frac{D_n}{D}$，其中 D_j 为用 $b_1,\ldots,b_n$ 代替 D 中第 j 列得到的行列式

$$\begin{cases} Ax=b\text{有唯一解} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \\ Ax=0\text{有非零解} \Leftrightarrow |A|=0 \end{cases}$$

例 2.1.7. 设 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$，求 *(1)*$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$;*(2)*$M_{31}+M_{32}+M_{33}+2M_{34}$

解：*(1)*$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

(2)$M_{31}+M_{32}+M_{33}+2M_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}=48$

2.2　行列式的计算

2.2.1　数值型行列式的计算

定理 2.2.1. 二阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

定理 2.2.2. 三阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

定理 2.2.3. 上/下/主/副三角行列式的计算

上/下/主三角行列式的值等于其主对角元的乘积

副对角行列式等于其副对角元的乘积乘以 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

定理 2.2.4. 拉普拉斯 *Laplace* 行列式

设 A 为 n 阶方阵，B 为 m 阶方阵

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

定理 2.2.5. 范德蒙德 *Vandermonde* 行列式

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

特点：*(1)* 第一行全为 *1*，第 $k(k \geqslant 3)$ 行是第二行的 $k-1$ 次方

(2) 其值为第二行元素所有后项减前项的乘积

例如 $n = 4$ 时，$V = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$

例 2.2.6. 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

解：(典型的"爪形"行列式) 用主对角元将其两边中的一边全部消为 0，形成上 (下) 三角矩阵

$$D = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12} \times 2 \times 3 \times 4 = -2$$

例 2.2.7. 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 4 & 3 & 2 & x+1 \end{vmatrix}$

解：(典型的"类爪形"行列式: 主对角线旁斜线全为 -1)

(法一) 将第 2 列的 x 倍加到第 1 列，再将第 3 列的 x^2 倍加到第 1 列......

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 4+3x+2x^2+x^3(x+1) & 3 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+4)}(x^4+x^3+2x^2+3x+4)\cdot(-1)^3$$

$$= x^4+x^3+2x^2+3x+4$$

(法二) 直接按第 4 行展开，展开后都是上 (下) 三角行列式

$$D = -4\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (x+1)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 4+3x+2x^2+(x+1)x^3$$

$$= x^4+x^3+2x^2+3x+4$$

例 2.2.8. 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$

解：(”类爪形”行列式：两条斜线互为相反数)

将各列都加到第 1 列，再按第 1 列展开

$$D=\begin{vmatrix}10+x & 2 & 3 & 4\\ 0 & x & 0 & 0\\ 0 & -x & x & 0\\ 0 & 0 & -x & x\end{vmatrix}=(10+x)x^3$$

例 2.2.9. 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}$

解：(”类爪形”行列式：两条斜线且边角有单个元素)

直接按第 1 列展开

$$D=a\begin{vmatrix}a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & b\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a & b\end{vmatrix}=a^{n+1}+(-1)^{n+1}b^n$$

例 2.2.10. 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{vmatrix}$

解：(”三对角线型”行列式)

(法一) 将第 1 行的 $-\frac{1}{4}$ 倍加到第 2 行.....

$$D=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0\\ 0 & 0 & \frac{40}{13} & 3\\ 0 & 0 & 0 & \frac{121}{40}\end{vmatrix}=121$$

(法二)

$$D=\begin{vmatrix}0&-13&-12&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&40&39\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&-121\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=(-1)^{1+4}(-121)\cdot 1^3=121$$

例 2.2.11. 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}x&2&2&\cdots&2\\2&x&2&\cdots&2\\2&2&x&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&2&\cdots&x\end{vmatrix}$

解：(" 类对称形" 行列式)

(法一) 制造相同首元：将各列 (行) 加到第 1 列 (行)，然后提公因式，用这一列 (行) 往右 (下) 消 0

$$D=\begin{vmatrix}x+2(n-1)&2&\cdots&2\\x+2(n-1)&x&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x+2(n-1)&2&\cdots&x\end{vmatrix}=[x+2(n-1)]\begin{vmatrix}1&2&\cdots&2\\1&x&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&\cdots&x\end{vmatrix}=[x+2(n-1)]\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&x-2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&x-2\end{vmatrix}$$

$$=[x+2(n-1)](x-2)^{n-1}$$

(法二) 化为具有相反数的" 爪形"：将第 1 行的-1 倍加到其余各行

$$D=\begin{vmatrix}x&2&\cdots&2\\2-x&x-2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2-x&0&\cdots&x-2\end{vmatrix}=[x+2(n-1)]\begin{vmatrix}x+2(n-1)&2&\cdots&2\\0&x-2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x-2\end{vmatrix}=[x+2(n-1)](x-2)^{n-1}$$

(法三) 利用特征值，将行列式对应矩阵记为 A

$$A=\begin{pmatrix}x&2&\cdots&2\\2&x&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&\cdots&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\cdots&2\\\vdots&\ddots&\vdots\\2&\cdots&2\end{pmatrix}+(x-2)I\triangleq B+(x-2)I$$

由于 $r(B)=1,\lambda_B=2n,0(n-1\text{个重根})$，又 $\lambda_A=\lambda_B+(x-2)$

$$\therefore \lambda_A=2n+(x-2),x-2(n-1\text{个重根})$$

$$\therefore |A|=\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n=[2n+(x-1)](x-2)^{n-1}$$

例 2.2.12. 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}$

解：*(内部含有很多 0：拉普拉斯方向化，将 0 尽量集中在右上和左下)*

$$D\underset{c_1\leftrightarrow c_3}{=}-\begin{vmatrix}b&a&0&0\\0&0&a&b\\d&c&0&0\\a&0&c&d\end{vmatrix}\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{=}\left|\begin{array}{cc|cc}b&a&0&0\\d&c&0&0\\\hline 0&0&a&b\\a&0&c&d\end{array}\right|=\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-(ad-bc)^2$$

例 2.2.13. 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\6&5&4&3\end{vmatrix}$

解：*(内部含有 x,x^2,x^3：范德蒙德方向化)*

将第 *1* 行加到第 *4* 行

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\7&7&7&7\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=-7\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=-7(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=-84$$

2.2.2 抽象型行列式的计算

例 2.2.14. 设 $A=(a_{ij})$ 是 *3* 阶非 0 矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|A|=?$

解：$a_{ij}+A_{ij}=0\Leftrightarrow a_{ij}=-A_{ij}\Leftrightarrow A^T=-A^*$

$$\therefore |A|=|A^T|=|-A^*|=(-1)^3|A|^{3-1}=-|A|^2$$

$$\therefore |A|^2+|A|=0\Rightarrow |A|=0\text{或}-1$$

又 $a_{ij}=-A_{ij}\Rightarrow A\neq O\Rightarrow |A|\neq 0$

按第 1 行展开：$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)<0$

$\therefore |A|=-1$

例 2.2.15. 设 A,B 为三阶方阵，且 $|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=?$

解：$|A+B^{-1}|=|AI+IB^{-1}|=|ABB^{-1}+AA^{-1}B^{-1}|=|A(B+A^{-1})B^{-1}|=|A||B+A^{-1}||B^{-1}|=3$

例 2.2.16. 设四阶方阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4),B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 α,β,γ_i 为四维列向量，且 $|A|=4,|B|=1$，则 $|A+B|=?$

解：$|A+B|=|\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|=8|\alpha+\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|=8|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|+8|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|$

$=8|A|+8|B|=40$

例 2.2.17. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，若 $|A|=1$，则 $|B|=?$

解：$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\triangleq AP$

$|P|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(3-2)=2$

$\therefore |B|=|A||P|=2$

例 2.2.18. 设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的向量组，若 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2,A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$，则 $|A|=?$

解：$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\triangleq AP=PB$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，即 $|P|\neq 0$

又 $|B|=2$，由 $AP=PB\Rightarrow |A|=|B|=2$

例 2.2.19. 已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2=I,A\neq I$，则 $|A+I|=?$

解：*(法一)* 由 $(A+I)(A-I)=0\Rightarrow r(A+I)+r(A-I)\leqslant n$

又 $A\neq I$，故 $r(A-I)\geqslant 1$

$\therefore r(A+I)\leqslant n-1<n\Rightarrow |A+I|=0$

(法二) 由 $(A+I)(A-I)=0\Rightarrow A-I$ 的列向量是线性方程组 $(A+I)x=0$ 的解

又 $A\neq I$，即 $A-I\neq 0$

$\therefore (A+I)x=0$ 有非零解 $\Rightarrow |A+I|=0$

第三章　线性空间与向量

3.1　线性空间的定义与性质

3.1.1　线性空间与 n 维向量

定义 3.1.1. 线性空间

设 V 是一个非空集合，F 是一个数域，在 V 中定义了加法运算：$\forall\alpha,\beta\in V$，存在唯一的 $\gamma\in V$ 与之对应，称为 α 与 β 的和，记为 $\gamma=\alpha+\beta$; 在 V 中定义了数乘运算：F 中数 k 和 V 中元素 α，存在唯一的 $\delta\in V$ 与之对应，称为 k 与 α 的数乘，记为 $\delta=k\alpha$. 此外加法与数乘满足八条线性运算规律，则称 V 是数域 F 上的线性空间

线性空间又称向量空间 (vector space)，向量空间即向量构成的空间，需要满足一定的规则：
对加法和数乘有意义，即对线性运算有意义
线性空间的零元素、负元素唯一
R^2 中的 R 上的线性空间有三种：R^2; 过原点的直线;$\{0\}$
R^3 中的 R 上的线性空间有四种：R^3; 过原点的平面; 过原点的直线;$\{0\}$

定义 3.1.2. *n* 维向量

由 n 个数 $a_1,a_2,...,a_n$ 构成的有序数组称为向量，即 n 维向量.n 维向量写成行时为行向量，写成列时为列向量. 每个分量都为 *0* 的向量称为 0 向量

矩阵的每一行都是一个行向量，每一列都是一个列向量

3.1.2　线性空间的基与维数

定义 3.1.3. 基与维数

设 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 是 V 中的一个向量组，若满足：

(1)$\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性无关;

(2)V 中任意一个向量 α 都可由 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性表示;

则称 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 是 V 的一个基;

有限线性空间 V 的基所含向量的个数相同，我们称基所含向量的个数为 V 的维数，记为 $\boldsymbol{dim}V$

V 中任意向量 α 均可由 V 的基 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 唯一线性表示为：

$$\alpha = x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n$$

称 $x_1,...,x_n$ 为 α 在基 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 下的坐标，用 $(x_1,...,x_n)$ 或 $(x_1,...,x_n)^T$ 表示

定理 3.1.4. n 维线性空间 V 中任意 $n+1$ 个向量线性相关; 任意 n 个线性无关的向量组都可以作为 V 的一个基

定义 3.1.5. 设 $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$(1) 和 $\eta_1,...,\eta_n$(2) 是 V 的基，且

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + ... + a_{n1}\varepsilon_n \\ ...... \\ \eta_n = a_{n1}\varepsilon_1 + ... + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

称

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为由基 (1) 到基 (2) 的过渡矩阵.

$(\eta_1,...,\eta_n) = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)T$(形式上的记法)

定理 3.1.6. 设 $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$(1) 和 $\eta_1,...,\eta_n$(2) 是 V 的基，T 是由基 (1) 到基 (2) 的过渡矩阵，V 中的向量 α 在基 (1) 和基 (2) 下的坐标为

$$x = (x_1,...,x_n)^T, y = (y_1,...,y_n)^T$$

则 $x = Ty$

3.1.3 线性子空间

定义 3.1.7. 线性子空间
设 W 是数域 F 上线性空间 V 的非空子集合，如果 W 中的向量对 V 中所定义的加法和数乘运算也构成 F 上的线性空间，则称 W 为 V 的线性子空间，简称子空间.
V 和 $\{0\}$ 称为 V 的平凡子空间，其他称为 V 的真子空间

V 中的八条运算规律对 W 是成立的.
W 是 V 的非空子集，则 W 是 V 的子空间的充要条件为

$$\forall \alpha, \beta \in W, \forall k \in F, \text{有} k\alpha + \beta \in W$$

定义 3.1.8. 设 $\alpha_1, ..., \alpha_s \in V$，则 $L(\alpha_1, ..., \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + ... + k_s\alpha_s | k_1, ..., k_s \in F\}$ 是 V 的子空间，称为由 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 生成 (张成) 的子空间，称 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 为它的生成向量组.
矩阵 A 的列向量生成的子空间称为 A 的列空间

若 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 是 V 的一个基，则 $V = L(\alpha_1, ..., \alpha_n)$

定理 3.1.9. 设 (1)$\alpha_1, ..., \alpha_r$ 与 (2)$\beta_1, ..., \beta_s$ 为 V 中的两个向量组，则

$$L(\alpha_1, ..., \alpha_r) = L(\beta_1, ..., \beta_s)$$

的充要条件是 (1) 与 (2) 等价

定义 3.1.10. 向量组的秩
生成子空间 $L(\alpha_1, ..., \alpha_s)$ 的维数称为 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 的秩，记为 $r(\alpha_1, ..., \alpha_s)$

等价的向量组有相同的秩
若 $r(\alpha_1, ..., \alpha_s) = r$，则 (1)$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 中存在线性无关的向量组 (2)$\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_r}$，使得 (1) 中任意向量都可由 (2) 线性表示，即 (2) 是 $L(\alpha_1, ..., \alpha_s)$ 的一个基.

定义 3.1.11. 行秩与列秩
设 $A \in F^{m\times n}$，称 A 的行向量组生成的子空间为 A 的行空间，记为 $\mathcal{R}(A)$，A 的行向量组的秩称为 A 的行秩; 称 A 的列向量组生成的子空间为 A 的列空间，记为 $\mathcal{C}(A)$，A 的列向量组的秩称为 A 的列秩

向量组有秩、矩阵有秩、线性空间有维数

行空间是 R^n 的子空间，列空间是 R^m 的子空间

$\mathcal{R}(A) = \mathcal{C}(A^T)$

定理 3.1.12. 初等行 (列) 变换不改变矩阵 A 的列 (行) 向量组的线性关系

定理 3.1.13. 矩阵的行秩、列秩和矩阵的秩相等

3.2 向量的线性相关性

3.2.1 向量的线性表示

定义 3.2.1. 线性组合与线性表示

设 $\alpha_1, ..., \alpha_s, \beta \in V$ 是向量，$k_1, ..., k_s \in F$ 是数，则称 $\beta = k_1\alpha_1 + ... + k_s\alpha_s$ 是 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 的一个线性组合，或称 β 可由 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性表示.

R^n 中任一 n 维列向量可由 n 维单位向量组 $e_1, ..., e_n$ 线性表示

定理 3.2.2. 向量线性表示的充要条件

$$\beta \text{ 可由 } \alpha_1, ..., \alpha_s \text{ 线性表示} \begin{cases} \Leftrightarrow \exists \text{数} k_1, ..., k_s \text{使得} k_1\alpha_1 + ... + k_s\alpha_s = \beta \\ \Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组} [\alpha_1, ..., \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \beta \text{有解} \\ \Leftrightarrow r(\alpha_1, ..., \alpha_s, \beta) = r(\alpha_1, ..., \alpha_s) \end{cases}$$

“向量能否线性表示”转化为非齐次线性方程组 $A_{n\times s}x = b$ 解的存在性问题：

$$\begin{cases} \text{不能线性表示 (无解)}: & r(A|b) \neq r(A) \\ \text{可以唯一线性表示 (有唯一解)}: & r(A|b) = r(A) = s \\ \text{可以线性表示但不唯一 (有无穷多解)}: & r(A|b) = r(A) < s \end{cases}$$

3.2.2 向量组的线性表示

定义 3.2.3. 向量组的线性表示
设 (1)$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 与 (2)$\beta_1, ..., \beta_t$ 为 V 的两个向量组，如果 (1) 中的每个向量都能由 (2) 线性表示，则称 (1) 能由 (2) 线性表示.

定理 3.2.4. 设 $A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}, C \in F^{m\times n}$，则：

$$AB = C \begin{cases} \Leftrightarrow C\text{的行向量组可由 } B \text{ 的行向量线性表示} \\ \Leftrightarrow C\text{的列向量组可由 } A \text{ 的列向量线性表示} \end{cases}$$

设 A 经过初等行 (列) 变换化为 B，则 A 的行 (列) 向量组与 B 的行 (列) 向量组等价

定理 3.2.5. 如果向量组 $\beta_1, ..., \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性表示，则 $r(\beta_1, ..., \beta_t) \leqslant r(\alpha_1, ..., \alpha_s)$

定理 3.2.6. 向量组线性表示的充要条件

$$\beta_1, ..., \beta_t \text{ 可由 } \alpha_1, ..., \alpha_s \text{ 线性表示} \begin{cases} \Leftrightarrow \exists\text{数}k_{1j}, ..., k_{sj}\text{使得}k_{1j}\alpha_1 + ... + k_{sj}\alpha_s = \beta_j (j = 1, ..., t) \\ \Leftrightarrow \text{矩阵方程}[\alpha_1, ..., \alpha_s]X = [\beta_1, ..., \beta_t]\text{有解} \\ \Leftrightarrow r(\alpha_1, ..., \alpha_s|\beta_1, ..., \beta_t) = r(\alpha_1, ..., \alpha_s) \end{cases}$$

“向量组能否线性表示”转化为矩阵方程 $AX = B$ 解的存在性问题：
$AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow r(A|B) = r(A)$

3.2.3 向量组的等价

定义 3.2.7. 向量组的等价
如果向量组 $\beta_1, ..., \beta_t$ 与 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 可以相互线性表示，则称这两个向量组等价

定理 3.2.8. 向量组等价的性质
设 A, B, C 是向量组，则
反身性：A 与 A 等价
对称性：若 A 与 B 等价，则 B 与 A 等价
传递性：若 A 与 B 等价且 B 与 C 等价，则 A 与 C 等价

定理 3.2.9. 向量组等价的条件

设 n 维向量组 $A:\alpha_1,...,\alpha_s$ 和 $B:\beta_1,...,\beta_t$

$$\underset{\text{充分条件}}{r(A)=r(B)=n} \Longrightarrow A\cong B \begin{cases} \Leftrightarrow A,B\text{可以相互线性表示} \\ \Leftrightarrow r(A)=r(B)\text{且}A\text{可以由}B\text{线性表示} \\ \Leftrightarrow r(A)=r(A|B)=r(B) \\ \Leftrightarrow \text{矩阵方程}AX=B\text{与}BX=A\text{都有解} \end{cases} \Longrightarrow \underset{\text{必要条件}}{r(A)=r(B)}$$

对比：

矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 秩相等

向量组等价 $\Rightarrow$ 秩相等

3.2.4 线性相关性的判断

定义 3.2.10. 线性相关与线性无关

设 $\alpha_1,...,\alpha_s\in V,k_1,...,k_s\in F$, 考虑

$$k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s=0$$

充要条件一 (定义)

如果存在不全为零的数 $k_1,...,k_s$ 使得等式成立，则称 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 是线性相关的;

如果要使等式成立必有 $k_1=...=k_s=0$，则称 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 是线性无关的.

定理 3.2.11. 设向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s,\beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 唯一线性表示的充要条件是 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性无关

定理 3.2.12. 充要条件二 (秩)

如果向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 的秩小于 s，则向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性相关. 若秩等于 s，则向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性无关

推论 3.2.13. 由向量组秩产生的七大判断推论

(1)n 个 n 维向量 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow|\alpha_1,...,\alpha_n|=0$

(2)$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关 *(*即向量个数大于维数则一定相关*)*

(3) 单个向量的相关性判断：α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$

(4)α_1,α_2 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2$ 成比例

(5) 向量组中有两个及以上向量成比例，则向量组必线性相关

(6) 含有零向量的向量组线性相关

(7) 向量组子集的秩 $\leqslant$ 整体的秩

三大定理

定理 3.2.14. 替换定理

若 $\alpha_1,...,\alpha_r$ 线性无关，且可由 $\beta_1,...,\beta_s$ 线性表示，则 $r\leqslant s$

推论 *1*：设 V 中向量组 $\alpha_1,...,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,...,\beta_s$ 线性表示，且 $r\leqslant s$，则 $\alpha_1,...,\alpha_r$ 线性无关

如果向量组 $\beta_1,...,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性表示，且 $t>s$，则向量组 $\beta_1,...,\beta_s$ 线性相关

推论 2：等价的线性无关向量组必含有相同个数的向量

推论 *3*：R^n 中任意 $n+1$ 个向量线性相关

定理 3.2.15. 维数定理

设向量组 $\alpha_i=(\alpha_{i1},...,\alpha_{in})^T,\beta_i=(\alpha_{i1},...,\alpha_{in},\alpha_{i(n+1)})^T,i=1,...,s$，则当 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性无关时，$\beta_1,...,\beta_s$ 也线性无关.

定理 3.2.16. 整体与部分定理

设向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性相关，则 $\alpha_1,...,\alpha_s,\alpha_{s+1},...,\alpha_{s+t}$ 线性相关

简单来说，即

多可由少表示，则多相关; 少可由多表示，则少无关

低维无关则高维无关; 高维相关则低维相关

部分相关则整体相关; 整体无关则部分无关

定理 3.2.17. 充要条件三 (线性表示)

向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性相关的充要条件是在 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 中存在一个向量 a_j 可以由其余 $s-1$ 个向量线性表示

总结

设向量组 $A:\alpha_1,...,\alpha_s$，则其**线性相关性的判定**有：

- **线性相关**
  - $\Leftrightarrow$ $\exists$不全为零的数$k_1,...,k_s$，使$k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s=0$
  - $\Leftrightarrow r(A)<s$
  - $\Leftrightarrow$ 其中存在一个向量可由其余向量线性表示
  - $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$Ax=0$有非零解
- **线性无关**
  - $\Leftrightarrow k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s=0$成立，当且仅当$k_1=...=k_s=0$
  - $\Leftrightarrow r(A)=s$
  - $\Leftrightarrow$ 其中没有任何一个向量可由其余向量线性表示
  - $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$Ax=0$只有零解

- **七大推论**
  - 向量组中向量个数大于其维数，一定线性相关
  - 向量组能组成方阵且其行列式值为零，一定线性相关
  - 向量组中有零向量，一定线性相关
  - 向量组中有两个及以上向量成比例，一定线性相关
  - 单一向量为 0，则它线性相关
  - 两个向量成比例，则它们线性相关
  - 向量组子集的秩 $\leqslant$ 整体的秩
- **三大定理**
  - **多可由少表示，则多相关；少可由多表示，则少无关**
  - **部分相关则整体相关，整体无关则部分无关**
  - **低维无关则高维无关，高维相关则低维相关**

推论 3.2.18. 已知 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，设为 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P$，则

$$\beta_1,\beta_2,\beta_3\text{线性无关}\Leftrightarrow P\text{可逆}(\text{即}|P|\neq 0, P\text{满秩})$$

例 3.2.19. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是：

$A.\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

$B.\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

C.$\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$

D.$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

解：*A:*$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\triangleq[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P,|P|=0\Rightarrow$ 线性相关

B: 对应 $|P|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow$ 线性无关　*C:* 对应 $|P|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow$ 线性无关

D: 对应 $|P|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow$ 线性无关

3.3　极大线性无关组

定义 3.3.1. 极大线性无关组

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的所有无关组中所含向量个数最多的那个 (原向量组的每个向量都可以由该部分组线性表示) 称为极大线性无关组，简称极大无关组或极大组

极大无关组可以不只一个

换句话说，极大无关组表示的是该向量组中不可替代的向量，其余向量都可以由它们线性表示

极大无关组的个数即为这个向量组的秩

推论 3.3.2. 极大无关组与向量组等价的关系

(1) 任何一个向量组与其自身的极大无关组等价

(2) 同一向量组的任意两个极大无关组等价

(3) 等价的向量组的极大无关组也等价

定理 3.3.3. 求极大线性无关组

(1) 将向量组所有向量以列向量的形式排成矩阵

(2) 对矩阵进行初等行变换化为行阶梯阵

(3) 从行阶梯的每一个台阶上取一个向量组合在一起即为极大无关组 (保证台阶上的元素非零)

(4) 将行阶梯阵化为行最简形阵，即可用极大无关组线性表示其余向量

定理 3.3.4. 生成子空间基与维数的求法

(1) 将向量组按列向量写成矩阵*;*

(2) 用矩阵的初等行变换将其化为行阶梯矩阵*;*

(3) 行阶梯阵非零行的行数即为空间的维数*;*

(4) 行阶梯阵每个非零行的首个非零元所在列称为**主列**，列指标可记为 $i_1, ..., i_r$，则 $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_r}$ 为空间的一个基，也是该向量组的一个极大线性无关组*;*

(5) 将行阶梯阵化为行最简形阵后，自由列可用主列线性表示

3.4　欧氏空间

定义 3.4.1. 向量的内积与性质

$\forall \alpha, \beta \in V$，有唯一确定的实数 (α, β) 与之对应，且有：

对称性：$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$*;*

线性性：$(k_1\alpha + k_2\beta, \gamma) = k_1(\alpha, \gamma) + k_2(\beta, \gamma), \forall k_1, k_2 \in R$*;*

正定性：$(\alpha, \alpha) \geqslant 0$，当且仅当 $\alpha = 0$ 时等号成立*;*

则称 (α, β) 是 V 的内积*.* 定义了内积的 V 称为欧氏空间

在 R^n 中，对任意的 $\alpha = (a_1, ..., a_n)^T, \beta = (b_1, ..., b_n)^T$，规定

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = \alpha^T\beta$$

定理 3.4.2. 设 α, β, γ 是欧氏空间 V 中任意向量，$k \in R$，则

$(0, \beta) = 0$

$(\gamma, \alpha + \beta) = (\gamma, \alpha) + (\gamma, \beta)$

$(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$

定义 3.4.3. 向量的长度与夹角

$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 称为欧氏空间 V 中向量 α 的长度，记为 $|\alpha|$

长度为 *1* 的向量称为单位向量

对非零向量 α，$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 是单位向量 *(*单位化*)*

在欧氏空间 V 中任意两个非零向量 α, β 的夹角为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}, 0 \leqslant \langle \alpha, \beta \rangle \leqslant \pi$$

定理 3.4.4. 柯西——布涅柯夫斯基不等式
设 V 是欧氏空间，$\forall \alpha, \beta \in V$，有

$$|(\alpha, \beta)| \leqslant |\alpha||\beta|$$

且等号成立当且仅当 α, β 线性相关.

定理 3.4.5. 设 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 是欧氏空间 V 的两两正交的非零向量组，则 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性无关

定义 3.4.6. 设 V 是欧氏空间，对 $\alpha, \beta \in V$，如果 $(\alpha, \beta) = 0$，则称 α 与 β 正交或垂直，记为 $\alpha \perp \beta$
零向量与任何向量正交
在 n 维欧氏空间 V 中，由 n 个两两正交的 (非零) 向量组成的基称为正交基; 由单位向量组成的正交基称为标准正交基

定理 3.4.7. $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ 是标准正交基的充要条件是

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

定理 3.4.8. 格莱姆——施密特正交化
设 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 是 V 的一个基，令
$\beta_1 = \alpha_1$
$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 ......$
$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - ... - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1}$
$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, ..., \gamma_n = \frac{\beta_n}{|\beta_n|}$ 是 V 的一个标准正交基

3.5 *线性变换

定义 3.5.1. 线性变换

设 $A \in F^{n\times n}$，定义 F^n 到自身的一个映射 $\sigma : \sigma(\alpha) = A\alpha$，则 σ 是线性的，即对任意的向量 $\alpha, \beta \in F^n, k \in F$，有

$$\sigma(\alpha+\beta) = A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$$

$$\sigma(k\alpha) = A(k\alpha) = k(A\alpha) = k\sigma(\alpha)$$

称 σ 是 F^n 上的线性变换

第四章　线性方程组

4.1　线性方程组解的结构

定义 4.1.1. 对于 m 个含有 n 个变量的方程组成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为方程组的**系数矩阵**，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为未知列向量，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 为常数列向量，则可表示为 $Ax = b$，将 $\overline{A} = (A|b)$ 称为**增广矩阵**.

$b \neq 0$ 时，称 $\boxed{Ax = b}$ 为**非齐次线性方程组**，$\boxed{Ax = 0}$ 为**齐次线性方程组**，并称为 $Ax = b$ 的**导出组**

如果方程组 $Ax = b$ 有解，则称它是**相容的**，否则是**不相容的**

考虑转置，则 $x^T A^T = b^T$

定义 4.1.2. 设 $A \in R^{m\times n}$，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的所有解的集合，即 $\{x \in R^n | Ax = 0\}$，称为 A 的零空间，记为 $N(A)$. 而 $\{x \in R^m | xA = 0\}$，称为 A 的左零空间，记为 $N(A^T)$

齐次线性方程组的所有解是第二种构造子空间的方法 (第一种是生成子空间)

A 的列空间 $\mathcal{C}(A)$ 是 R^m 的子空间

A 的行空间 $\mathcal{R}(A)$ 是 R^n 的子空间

A 的零空间 $N(A)$ 是 R^n 的子空间

A 的左零空间 $N(A^T)$ 是 R^m 的子空间

非齐次线性方程组的解不构成线性空间

定理 4.1.3. 设 $A=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in F^{m\times n}$，则下列命题等价：

(1) $Ax=b$ 有解;

(2) b 可由 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性表示;

(3) $\alpha_1,...,\alpha_n$ 与 $\alpha_1,...,\alpha_n,b$ 等价;

(4) $r(A)=r(A,b)$(增广矩阵)

设 $A\in F^{m\times n}$ 则，

$$\begin{cases} \text{非齐次线性方程组}Ax=b & \begin{cases} r(A)=r(A|b)\Rightarrow \text{有解} \begin{cases} r(A)=r(A|b)=n\Rightarrow \text{有唯一解} \\ r(A)=r(A|b)<n\Rightarrow \text{有无穷多解} \end{cases} \\ r(A)\neq r(A|b)\Rightarrow \text{无解} \end{cases} \\ \text{齐次线性方程组}Ax=0 & \begin{cases} r(A)=n\Rightarrow \text{只有零解} \\ r(A)<n\Rightarrow \text{存在无穷 (非零) 解} \end{cases} \end{cases}$$

4.2 齐次线性方程组的解空间

由于常数项 $b=0$，故对齐次线性方程组必有 $r(A|b)=r(A)$，故 $Ax=0$ 必定相容，必有零解，故研究重点在于其是否有非零解

定理 4.2.1. 齐次线性方程组解的存在性问题

$$\mathbf{A_{s\times n}x=0\text{有非零解}\iff r(A)<n\iff A\text{的列向量线性相关}}$$

由此，有

$$\begin{cases} s<n & (\text{即方程个数<未知量个数}) \\ s=n,|A|=0 & (\text{克拉默法则}) \end{cases} \Longrightarrow Ax=0\text{必有非零解}$$

定理 4.2.2. 齐次线性方程组解的性质

(1) 若 η_1,η_2 都是 $Ax=0$ 的解，那么其任意线性组合 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 仍是其解

(2) $Ax=0$ 的所有解向量构成一个线性空间，称为 $Ax=0$ 的**解空间**S

(3) 若 $A_{s\times n},B_{n\times t}$，则

$$AB=0\Longrightarrow\begin{cases}\mathbf{r(A)+r(B)\leqslant n} \\ \boldsymbol{B}\text{的列向量是}\boldsymbol{Ax=0}\text{的解}\end{cases}$$

定义 4.2.3. 齐次线性方程组的基础解系与通解

设 $\eta_1,...,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的非零解向量，若满足

$$(1)\eta_1,...,\eta_t \text{ 线性无关}$$
$$(2)Ax=0 \text{ 的所有解向量都可由} \eta_1,...,\eta_t \text{ 线性表示}$$
$$(3)A\eta_1=0,...,A\eta_t=0$$

则称 $\eta_1,...,\eta_t$ 为 $Ax=0$ 的一个**基础解系**，也是其解空间的一组基，是其所有解向量组的一个极大无关组，故基础解系不唯一.

若 $\eta_1,...,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，则其**通解**为

$$x=k_1\eta_1+...+k_t\eta_t,\quad k_1,...,k_t \text{为任意常数}$$

只有零解的齐次线性方程组没有基础解系

定理 4.2.4. 齐次线性方程组解的结构

含有 n 个未知数的齐次线性方程组 $Ax=0$，若 $r(A)<n$(有非零解)，则

$$\boxed{r(A)+dim\mathcal{S}=n}$$

即系数矩阵的秩与解空间的维数之和为未知变元个数

则 $Ax=0$ 的基础解系含有 $n-r(A)$ 个解量 (自由变量)，也即 $Ax=0$ 有 $n-r(A)$ 个线性无关的解向量

$r(A)=r \Rightarrow$ 主变量 r 个 $\Rightarrow$ 起决定作用的方程个数为 $r \Rightarrow$ 自由变量 $n-r$ 个 $\Rightarrow n-r$ 个基础解系且线性无关

定理 4.2.5. 齐次线性方程组的求解

(**高斯消元法**) 对于齐次线性方程组 $Ax=0$ 的求解:

(1) 经过初等行变换将系数矩阵 A 化为行最简形矩阵 R

(2) 确定主列和自由列进而确定主变量和自由变量，再对自由变量分配数值

(3) 分别选取其中一个自由变量为 1 其余为 0，即将自由变量表示为单位列向量 e_i，代入解方程确定主变量的值

例 4.2.6. 求齐次线性方程组的通解 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ 3x_1+4x_2+3x_3+3x_4+x_5=0 \end{cases}$

解：*(1)* 写出系数矩阵 A，通过初等行变换化为行最简形阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 根据 $n-r(A)$ 确定基础解系的解向量个数

$$r(A)=2, n-r(A)=3 \Longrightarrow \eta_1,\eta_2,\eta_3$$

(3) 确定主变量、自由变量，给自由变量赋值

$$\eta_1=(?,?,1,0,0)^T, \eta_2=(?,?,0,1,0)^T, \eta_3=(?,?,0,0,1)^T$$

(4) 将 R 中自由列的分量拿出来取相反数，按顺序填入 η_1,η_2,η_3

$$\eta_1=(-1,0,1,0,0)^T, \eta_2=(-1,0,0,1,0)^T, \eta_3=(-3,2,0,0,1)^T$$

(5) 写出通解

$$x=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1,k_2,k_3\text{为任意常数}$$

定理 4.2.7. 设 $A\in R^{m\times n}, r(A)=r$，有

$$\boldsymbol{dim}\mathcal{C}(A)=\boldsymbol{dim}\mathcal{R}(A)=r$$

$$\boldsymbol{dim}N(A)=n-r, \boldsymbol{dim}N(A^T)=m-r$$

$\mathcal{R}(A)$ 与 $N(A)$ 中向量正交，$\mathcal{C}(A)$ 与 $N(A^T)$ 中向量正交

4.3　非齐次线性方程组的解

定理 4.3.1. 非齐次线性方程组解的存在性问题

$$A_{s\times n}x=b\text{有解}\begin{cases}\Longleftrightarrow r(A|b)=r(A)\begin{cases}=n & \text{有唯一解}\\ <n & \text{有无穷多解}\begin{cases}\text{解向量的极大组有}n-r(A)+1\text{个向量}\\ \text{即解向量组的秩为}n-r(A)+1\end{cases}\end{cases}\\ \Longleftrightarrow \text{向量}b\text{可由}A\text{的列向量组线性表示}\end{cases}$$

$A_{s\times n}x=b$ 无解 $\Longleftrightarrow r(A|b)\neq r(A)\Longleftrightarrow r(A|b)=r(A)+1$

定理 4.3.2. 非齐次线性方程组解的性质

(1) 设 α_1,α_2 都是 $Ax=b$ 的解，则 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解，$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$ 是 $Ax=b$ 的解

(2) 设 α 是 $Ax=b$ 的特解，η 是 $Ax=0$ 的解，则 $\eta+\alpha$ 是 $Ax=b$ 的解

定义 4.3.3. 非齐次线性方程组的特解与通解

设 α 为 $Ax=b$ 的**特解**，$\eta_1,...,\eta_t$ 是其导出组 $Ax=0$ 的**基础解系**，则其**通解**为

$$x=\alpha+k_1\eta_1+...+k_t\eta_t,\quad k_1,...,k_t\text{为任意常数}$$

定理 4.3.4. 非齐次线性方程组的求解

*(***高斯消元法***)* 对于非齐次线性方程组 $Ax=b$：

(1) 经过初等行变换将 $(A|b)$ 化为行阶梯阵，验证非齐次线性方程组 $Ax=b$ 是否有解

(2) 再化为行最简形阵，令所有自由变量为零，求解主变量得到特解 x_p(实际即为矩阵的最后一列)

(3) 再求解导出组 $Ax=0$ 的通解 (注意此时是对系数矩阵而非增广矩阵进行求解)

则 $Ax=b$ 的通解为特解加上 $Ax=0$ 的通解

定理 4.3.5. 非齐次线性方程组 $Ax=b,A\in F^{m\times n},r(A)=r$，则 r,m,n 有如下关系：

$$r\leqslant m,r\leqslant n$$

(1) 假设列满秩：

$r=n\leqslant m\Leftrightarrow$ 有 n 个主变量，0 个自由变量，A 的零空间 $N(A)=\{0\}$，$Ax=b$ 可能无解，或者有唯一解 (特解)

(2) 假设行满秩：

$r=m\leqslant n \Leftrightarrow$ 有 m 个主变量，$n-m$ 个自由变量，$Ax=b$ 总是有解，有唯一解 (特解)($n=m$) 或无穷多解 ($n>m$)

(3) 假设全满秩：

$r=m=n \Leftrightarrow Ax=b$ 总有唯一解

r,m,n 的关系	**$\mathbf{A_{m\times n}}$ 的行最简形阵 R**	**Ax=b 解的情况**
$r=m=n$	$R=I$	唯一解
$r=n<m$	$R=\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$ 可能混搭	无解或唯一解
$r=m<n$	$R=(I,F)$	无穷多解
$r<m, r<n$	$R=\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可能混搭	无解或无穷多解

定理 4.3.6. 设 $A\in F^{m\times n}$，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解.

若 $\beta_1,...,\beta_{\ell+1}$ 是 $Ax=b$ 的线性无关的解，则 $\beta_2-\beta_1,...,\beta_{\ell+1}-\beta_1$ 是 $Ax=0$ 的线性无关的解;

若 $\alpha_1,...,\alpha_\ell$ 是 $Ax=0$ 的线性无关的解，β 是 $Ax=b$ 的特解，则 $\beta,\beta+\alpha_1,...,\beta+\alpha_\ell$ 是 $Ax=b$ 的线性无关的解

4.4 矩阵方程的解

定理 4.4.1. 矩阵方程的求解

对矩阵方程 $AX=B$，有

(1) 若 A 为方阵且可逆，则 $X=A^{-1}B$

(2) 若 A 不是方阵或不可逆，记 $B=(b_1,...,b_m), X=(x_1,...,x_n)$，求解矩阵方程 $AX=B$ 本质上是求解 m 个非齐次线性方程组 $Ax_1=b_1,...,Ax_m=b_m$. 得到各方程组的解后拼起来便是 $AX=B$ 的解 $X=(x_1,...,x_n)$

定理 4.4.2. 矩阵方程解的存在性问题

$$\text{矩阵方程}AX=B\text{有解} \iff r(A|B)=r(A) \iff \boldsymbol{B} \text{ 的列向量组可以由 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量组线性表示}$$

4.5 线性方程组的同解与公共解

定义 4.5.1. 公共解与同解

(1) 对于方程组 *(1)* 和 *(2)*，若 α 既是 *(1)* 的解，又是 *(2)* 的解，则称 α 是方程组 *(1)* 和 *(2)* 的**公共解**

(2) 对于方程组 *(1)* 和 *(2)*，若 α 是 *(1)* 的解，则 α 必定是 *(2)* 的解；反之若 α 是 *(2)* 的解，则 α 必定是 *(1)* 的解，则称方程组 *(1)* 和 *(2)* **同解**

定理 4.5.2. 同解的性质

$$(1)Ax=0\text{与}Bx=0\text{同解}\Longrightarrow r(A)=r(B)$$

$$(2)AA^Tx=0\text{与}Ax=0\text{同解}$$

定理 4.5.3. 求公共解

设两个齐次线性方程组为 $Ax=0,Bx=0$，求其公共解

(1) 给定具体的两个方程组，联立两个方程组构成 $Cx=0$ 求解

(2) 给定两个方程组的基础解系假设分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2，则设其公共解为 γ，则

$$\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-y_1\beta_1-y_2\beta_2(x_i,y_i\text{不全为零})$$

$$\therefore[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\y_1\\y_2\end{bmatrix}=0(*)$$

最后化为解齐次方程组 $(*)$，得到解后，将 x_i 或 y_i 代回便可得公共解

4.6 线性方程组的几何应用

定义 4.6.1. 空间解析几何与线性方程组

三维空间中有三个平面 $\pi_i : a_i x + b_i y + c_i z = d_i (i = 1, 2, 3)$，由这三个方程组成非齐次线性方程组 $Ax = b$.

(1) 系数矩阵 A 的每一行 (a_i, b_i, c_i) 为对应平面 π_i 的法向量.

当两个平面平行时，法向量平行，也即两个法向量线性相关;

当两个平面相交时，法向量不平行，也即两个法向量线性无关;

(2) 与 $Ax = b$ 对应的导出组 $Ax = 0$ 代表的三个平面 $\pi_i' : a_i x + b_i y + c_i z = 0 (i = 1, 2, 3)$ 与原来三个平面 π_i 的关系：平移 π_i 使其经过原点 $(0, 0, 0)$，便得到 π_i'

定理 4.6.2. 根据线性方程组解的存在性判断三平面的空间位置

$$r(A|b) = r(A) \begin{cases} = 3 & \text{有唯一解}\quad, 0\text{ 个自由变量} \Longrightarrow \text{交于一点} \\ = 2 & \text{有无穷多解}, 1\text{ 个自由变量} \Longrightarrow \text{交于一条线} \\ = 1 & \text{有无穷多解}, 2\text{ 个自由变量} \Longrightarrow \text{交于一个面 (即重合)} \end{cases}$$

$$r(A|b) = r(A) + 1 \neq r(A) \Longrightarrow \text{无解} \Longrightarrow \text{无公共点}$$

$r(A\|b)$	$r(A)$	π_i'	π_i
2	1	重合	$\begin{cases}\text{两两平行} \\ \text{两个重合，并与另外一个平行}\end{cases}$
3	2	交于一条线	$\begin{cases}\text{两两相交} \\ \text{两个重合，并与另外一个相交}\end{cases}$

第五章　相似与特征值

5.1　矩阵的特征值与特征向量

定义 5.1.1. 特征值与特征向量
设 $A \in F^{n\times n}$，如果存在数 $\lambda \in F$ 和非零向量 $\alpha \in F^n$，使得

$$A\alpha = \lambda\alpha(\alpha \neq 0)$$

则称 λ 为 A 的一个特征值，α 为 A 的属于 λ 的一个特征向量

特征值可以为零，但特征向量不能为零向量
一个特征值必有无穷多个特征向量，一个特征向量只属于一个特征值

定理 5.1.2. 代数学基本定理： *任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根 $(n \geqslant 1)$*
n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根 (重根按重数计算)

定义 5.1.3. 特征多项式与特征方程
对于 $A\alpha = \lambda\alpha$，移项得到 $(\lambda I - A)\alpha = 0$，方程有非零解当且仅当 $\lambda I - A$ 不可逆，即 $|\lambda I - A| = 0$，
$|\lambda I - A|$ 称为 A 的**特征多项式**，记为 $f_A(\lambda)$，$f_A(\lambda) = 0$ 称为 A 的**特征方程**;
则 $f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}...(\lambda - \lambda_s)^{k_s}$，其中 $k_1 + ... + k_s = n$(k_i 为 λ_i 的重数)

定理 5.1.4. 特征值与特征向量计算
(1) 计算 $f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$ 的解 $\lambda_i(i = 1, ..., n)$;
(2) 对每个 λ_i，求齐次线性方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 的基础解系 $\xi_1, ..., \xi_s$，则 $k_1\xi_1 + ... + k_s\xi_s$($k_1, ..., k_s$ 不全为零) 是 A 的属于 λ_i 的全部无关特征向量

特征值与特征向量性质

定理 5.1.5. 设 $A=(a_{ij})_n$ 的特征值为 $\lambda_1,...,\lambda_n$，则

$$\begin{cases}\lambda_1+...+\lambda_n=\boldsymbol{tr}(A)\\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot...\cdot\lambda_n=|A|\end{cases}$$

n 阶方阵 A 可逆的充要条件为 0 不是 A 的特征值

定理 5.1.6. 上、下、主三角矩阵的特征值就是主对角元

$$\lambda=a_{11},...,a_{nn}$$

定理 5.1.7. n 阶方阵 A 的 $r(A)=1\Longrightarrow\lambda_1=\boldsymbol{tr}(A),\lambda_2,...,\lambda_n=0(n-1\text{个重根})$

定理 5.1.8. n 阶方阵 A 与 A^T 的特征值相同

定理 5.1.9. 设 λ 是 n 阶方阵 A 的特征值，则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值

定理 5.1.10. 设 λ 是 n 阶方阵 A 的特征值，x 为 A 的属于 λ 的特征向量，则 λ^2 是 A^2 的特征值，x 为 A^2 的属于 λ^2 的特征向量

一般地，若 $\phi(x)\in F[x]$，则 $\phi(\lambda)$ 是 $\phi(A)$ 的特征值

定理 5.1.11. 设 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&...&A_{1p}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&...&A_{pp}\end{pmatrix}$，其中 A_{ii} 为 n 阶方阵，则 A_{ii} 的特征值也是 A 的特征值，且 A_{ii} 的所有特征值即为 A 的全部特征值

定理 5.1.12. 设 $\xi_1,...,\xi_m(m\leqslant n)$ 是 n 阶方阵 A 的属于互异特征值 $\lambda_1,...,\lambda_m$ 的特征向量，则 $\xi_1,...,\xi_m$ 线性无关;

n 阶方阵不一定有 n 个线性无关的特征向量

定理 5.1.13. 如果实矩阵是对称的，特征值为实数; 如果实矩阵是反对称的，特征值为纯虚数.

矩阵 $\boldsymbol{A}$	$f(A)$	$kA+I$	A^k	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值 $\boldsymbol{\lambda}$	$f(\lambda)$	$k\lambda+1$	λ^k	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$

5.2 矩阵的相似

定义 5.2.1. 矩阵的相似

设 $A, B \in F^{n\times n}$，如果存在可逆阵 $C \in F^{n\times n}$，使得

$$B = C^{-1}AC$$

则称 A 与 B 相似，记为 $A \sim B$，C 称为把 B 变成 A 的相似变换矩阵

$A^n = C^{-1}B^nC$

定理 5.2.2. 相似的性质

(1) 反身性：$A \sim A$

(2) 对称性：$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

(3) 传递性：$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

(4)

$$A \sim B \Rightarrow \begin{cases} f(A) \sim f(B) \\ A^T \sim B^T \\ A^{-1} \sim B^{-1} \end{cases}$$

(5) 四大必要条件

$$A \sim B \Rightarrow \begin{cases} |A| = |B| \\ r(A) = r(B) \\ \boldsymbol{tr}(A) = \boldsymbol{tr}(B) \\ |\lambda I - A| = |\lambda I - B| (\text{即}\lambda_A = \lambda_B) \end{cases}$$

即使四大必要条件全部满足，也无法推出相似

(6)

$$\begin{cases} A \sim \Lambda, B \sim \Lambda, \lambda_A = \lambda_B \\ A, B\text{都为实对称矩阵，且}\lambda_A = \lambda_B \end{cases} \Longrightarrow A \sim B$$

相似必相抵，相抵未必相似

5.3 矩阵的对角化

定义 5.3.1. 如果矩阵 $A \in F^{n\times n}$ 和对角矩阵 Λ 相似，即存在可逆矩阵 $P \in F^n$，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$，则称矩阵 A 是可对角化的，记为 $A \sim \Lambda$

$A^k = P\Lambda^k P^{-1}$
当所有 $|\lambda_i| < 1, k \to +\infty, A^k \to 0$

若 A 相似变换为三角形矩阵或对角矩阵，就可以方便求出 A 的特征值;
有相同的特征多项式不一定相似

定理 5.3.2. 相似对角化的条件
(1)n 阶方阵 $A \sim \Lambda \iff A$ 有 n 个线性无关的特征向量
(2)n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值 $\Longrightarrow A \sim \Lambda$
(3)n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是对 A 的每个特征值 λ_i，有

$$n - r(\lambda_i I - A) = s_i$$

其中 s_i 为 λ_i 的 *(*代数*)* 重数. 该特征值对应的特征向量所构成空间的维数，称为几何重数. 该条件是指每个特征值的代数重数等于几何重数

定理 5.3.3. 对方阵进行相似对角化的方法
(1) 求 n 阶方阵 A 的特征值 λ_i 和特征向量 η_i
(2) 令 $P = (\eta_1, ..., \eta_n), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$

定理 5.3.4. 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个不同特征值，$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 与 $\beta_1, ..., \beta_t$ 分别为 A 的属于 λ_1 与 λ_2 的线性无关的特征向量，则 $\alpha_1, ..., \alpha_s, \beta_1, ..., \beta_t$ 线性无关
不同特征值的特征向量线性无关
k 重特征值最多有 k 个线性无关的特征向量

定理 5.3.5. 判断方阵能否进行相似对角化

(1) 求出 n 阶方阵 A 的所有特征值 λ_i

(2) 对每个重根，将特征矩阵 $(\lambda_i I - A)$ 利用初等行变换化为行阶梯形 *(*单根不用管*)*

(3) 若每个重根都满足 $n - r(\lambda_i - A) = s_i$(即化为行阶梯形后有 s_i 个零行)，则 $A \sim \Lambda$

推论 5.3.6. 若 n 阶方阵 A 有 n 个相同的特征值，即 $\lambda = \lambda_1 = ... = \lambda_n$($n$ 个重根)，则

$$A \sim \Lambda \Longleftrightarrow A = \lambda I$$

5.4　实对称矩阵的对角化

定义 5.4.1. 实对称矩阵

设 $A \in R^{n\times n}$，且满足 $A^T = A$，则称 A 为**实对称矩阵**

定理 5.4.2. 实对称矩阵的性质

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数

(2) 属于实对称矩阵的不同特征值的特征向量彼此正交 *(*正交一定线性无关*)*

(3) 任意 n 阶实对称矩阵 A 一定可正交对角化，即有正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$$

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵

A 与 Λ 既相似又相合

定理 5.4.3. 正交对角化

对实对称矩阵 A，求正交矩阵 Q 使得 $Q^TAQ = \Lambda$:

(1) 求出 A 的全部互异特征值 λ_i

(2) 对 λ_i，求属于 λ_i 的线性无关的特征向量，即 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 的一个基础解系 $\xi_{i1}, ..., \xi_{ik_i}$;

(3) 将 $\xi_{i1}, ..., \xi_{ik_i}$ 单位正交化 *(*格莱姆——施密特正交化*)*，最后可得到 n 个两两正交的单位特征向量 $\eta_1, ..., \eta_n$;

(4) 令 $Q = (\eta_1, ..., \eta_n)$，则有 $Q^TAQ = \Lambda$

第六章　相合与二次型

6.1　二次型与标准形

定义 6.1.1. 二次型

关于变量 $x_1, ..., x_n$ 的实二次齐次多项式

$$f(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + ... + a_{nn}x_n^2$$

即

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

称为 n 元实二次型，简称**二次型**.

我们有 $f(x_1, ..., x_n) = x^TAx$，其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$，且 $a_{ij} = a_{ji}$(即 A 为实对称矩阵).

称 A 为二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 的矩阵，A 的秩为二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 的秩

二次型与实对称矩阵是一一对应的 (与一般矩阵不是)，如

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 经过可逆线性变换 $x = Cy$ 可化为变量为 $y_1, ..., y_n$ 的二次型

定义 6.1.2. 二次型的标准形

对于二次型 $f(x)$，如果存在可逆线性变换将 $f(x)$ 化为只含有平方项的二次型，则称化简后的二次型为 f 的**标准形**

标准形的二次型矩阵是对角矩阵

二次型的标准形不唯一

定理 6.1.3. 主轴定理 (谱定理)

设 A 是 n 阶实对称矩阵，则存在一个正交变换 $x = Qy$(Q 为正交矩阵)，使得二次型 x^TAx 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值

定理 6.1.4. 化二次型为标准形

正交变换法

(1) 写出二次型矩阵 A

(2) 对 A 进行正交对角化，求出正交矩阵 Q

(3) 经坐标变换 $x = Qy$，得 $x^TAx = y^T\Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$

配方法

(1) 含平方项：

(2) 不含平方项：

6.2 矩阵的相合

定义 6.2.1. 矩阵的相合

设 A 和 B 为 n 阶实矩阵，若存在实可逆矩阵 P 使得

$$B = P^TAP$$

则称矩阵 A 与 B 相合 (合同)，记为 $A \simeq B$

定理 6.2.2. 相合的性质

(1) 自反性：$A \simeq A$

(2) 对称性：若 $A \simeq B$，则 $B \simeq A$

(3) 传递性：若 $A \simeq B, B \simeq C$，则 $A \simeq C$

若 $A \simeq B$，则 $r(A) = r(B)$

若 $A \simeq B$，则 $A^T = A \Leftrightarrow B^T = B$

若 $A \simeq B$ 且 A, B 可逆，则 $A^{-1} \simeq B^{-1}$

若 $A \simeq B$，则 $A^T \simeq B^T$

三种矩阵关系：

相合：A 和 B 为同阶实方阵，存在实可逆 P，$B = P^T AP$

相抵：A 和 B 为同型矩阵，存在可逆 P, Q，$B = PAQ$

相似：A 和 B 为同阶方阵，存在可逆 P，$B = P^{-1}AP$

相似一定相抵，相合一定相抵

定理 6.2.3. 相合的判断条件

(1) 设 A, B 均为实对称矩阵，则

$$A \simeq B \iff A\text{与}B\text{的正负惯性指数相同}$$

(2) 设 A, B 均为实对称矩阵，则

$$\begin{cases} \lambda_A = \lambda_B \\ A \sim B \end{cases} \Longrightarrow A \simeq B$$

定理 6.2.4. 任一 n 阶实对称矩阵 A 相合于

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $q = r(A) - p$，且 p 由 A 唯一确定，分别称 p, q 为 A 的正惯性指数和负惯性指数

6.3　正定二次型与规范形

定义 6.3.1. 二次型的规范形

对于二次型 $f(x)$ 的标准形中，若平方项系数仅有 $1, -1, 0$，即

$$y^T \Lambda y = y_1^2 + ... + y_p^2 - y_{p+1}^2 - ... - y_{p+q}^2$$

称为实二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 的**规范形**

p 等于正特征值个数，q 等于负特征值个数

二次型的规范形唯一

定理 6.3.2. 惯性定理

实二次型的规范形是唯一的

在实二次型 $f(x_1,...,x_n)$ 的规范形中，系数为 1，-1 的平方项的项数 p,q 分别称为 $f(x_1,...,x_n)$ 的正惯性指数和负惯性指数，正负惯性指数的差为二次型的符号差

n 元二次型 x^TAx 的正、负惯性指数分别为 A 的正、负特征值个数

定义 6.3.3. 正定二次型

设 n 元实二次型 $f(x_1,...,x_n)=x^TAx$，若对于任意一组不全为零的实数 $c_1,...,c_n$，均有

$$f(c_1,...,c_n)>0$$

则称 $f(x_1,...,x_n)$ 是正定的，矩阵 A 称为正定矩阵

坐标变换不会改变正定性

定义 6.3.4. 顺序主子式

设 A 是 n 阶方阵，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，称 $\Delta_k=\left|A\begin{pmatrix}1,...,k\\1,...,k\end{pmatrix}\right|$ 为 A 的 k 阶**顺序主子式**

如，$\Delta_1=a_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},...,\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

定理 6.3.5. 正定的条件

设 A 为 n 阶实对称矩阵，则

$$A\text{正定}\begin{cases} \Longleftrightarrow \forall x\neq 0, x^TAx>0 \\ \Longleftrightarrow x^TAx\text{的标准形中平方项系数全为正} \\ \Longleftrightarrow A\text{的正惯性指数}p=n \\ \Longleftrightarrow A\text{的特征值全为正}\lambda_i>0 \\ \Longleftrightarrow A\simeq I \\ \Longleftrightarrow A\text{的所有顺序主子式全为正} \\ \Longleftrightarrow \text{存在 } n \text{ 阶可逆实矩阵}P,\text{使得}A=PP^T \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{主对角元}a_{ii}>0\Longrightarrow \boldsymbol{tr}(A)>0 \\ |A|>0 \\ r(A)=n \end{cases}$$

推论 6.3.6. 设 $A_{m\times n}$，则

(1)A^TA 正定$\Longleftrightarrow r(A)=n$

(2)$r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)$

(3)$AA^T=O$ 或 $A^TA=O \Longleftrightarrow A=O$

(4)A^TA 的特征值 $\lambda\geqslant 0$

6.4　二次型与空间解析几何

定义 6.4.1. 二次型与二次曲面

令三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=k$(k 为常数)，则 $f(x_1,x_2,x_3)=k$ 在空间解析几何中为一个二次曲面的方程. 对二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 进行坐标变换，相当于对这个二次曲面变换坐标系. 将二次型化为标准形，相当于转化为标准方程. 故判断二次型是什么曲面，就是将其化为标准形，看其系数情况进行判断