《线性代数 D》强化训练题二解答

一、填空题

1．$\dfrac{11}{3}$；　　2．$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$；　　3．$-\dfrac{1}{8}$；　　4．$1,\quad 0$；

5．$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

二、单项选择题

1．D；　2．B；　3．D；　4．A；　5．B；

三、计算下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 13 & 15 & 8 \\ 2 & 9 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

解：$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 17 & 7 \\ 2 & 9 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 7 \\ 9 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9/2 & 10 & 7 \\ -11 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -9/2 & 10 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = 265.$

四、 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $A^*X = 4A^{-1} + 2E + 2X$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是三阶单位矩阵，求 X.

解：$AA^*X - 2AX = 4E + 2A, \quad (|A|E - 2A)X = 4E + 2A,$

因为 $|A| = 8$，所以 $|A|E - 2A = 8E - 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$

则 $(|A|E-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&0\\0&4&2\\0&0&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}&\frac{1}{16}\\0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$,

故 $X=(|A|E-2A)^{-1}(4E+2A)$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}&\frac{1}{16}\\0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-2&0\\0&8&-2\\0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3/2&3/4\\0&2&-3/2\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

五、已知齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=0\\ax_1+x_2+3x_3-bx_4=0\end{cases}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2$， c_1,c_2 为任意常数，求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1\end{cases}$ 的通解.

解：由条件知齐次方程组的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&-b\end{pmatrix}$ 的秩为 2，

而 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&-b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&1-a&3-a&-b-a\end{pmatrix}$,

则 $\frac{1-a}{-1}=\frac{3-a}{1}=\frac{-b-a}{-5}$， 即 $a=2,\ b=3;$

此时非齐次方程组的增广矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

则非齐次方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$，其中 $k_1,\ k_2$ 为任意常数.

六、 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0)$, 其中二次型矩阵 A 的特征值之和为1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求一正交变换把二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形(需写出正交变换及标准形).

解：(1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1$,

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a - 2b^2 = -12,$$

解得 $a = 1, b = 2$.

(2) 由 $\left| A - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+3) = 0$,

得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = -3$.

对于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

故相应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (2, 0, 1)^T$,

规范正交化 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 得 $\boldsymbol{p}_1 = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{p}_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})^T$,

对于特征值 $\lambda_3 = -3, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

故相应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 0, -2)^T$,

单位化得 $\boldsymbol{p}_3 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})^T$,

令 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

则 P 即为所求矩阵，所求变换为 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$,

相应的二次型的标准形为 $f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

七、

1．设 V 是次数不超过 3 的实多项式全体构成的实数域上的线性空间,

$$A:\ 1,\ x,\ x^2,\ x^3;\quad B:\ 1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3$$

是 V 的两个基. 分别求 $f(x)=4+x+2x^2+x^3$ 在这两个基下的坐标.

解： $(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$f(x)=4+x+2x^2+x^3=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则 $f(x)$ 在这两个基下的坐标分别为 $(4,1,2,1)^T$ 和 $(3,-1,1,1)^T$.

2．设(x_1,x_2,x_3,x_4)是向量$\boldsymbol{\alpha}$关于基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

下的坐标，(y_1,y_2,y_3,y_4)是$\boldsymbol{\alpha}$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标，且

$$y_1=x_1,\ y_2=x_2-x_1,\ y_3=x_3-x_2,\ y_4=x_4-x_2,$$

求基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$.

解：$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$,

且$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$,

所以$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)B$,

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&1&1&2\\1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\4&4&1&2\\3&2&1&1\end{pmatrix}.$$

即$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$.

八、证明题

1．已知$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，且已知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$也线性无关.

证：$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&1&\dots&1\\0&0&1&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)A,$

因为$\left|A\right|=1\neq 0$，所以A可逆,

则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$具有相同的秩,

又$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关，故其秩为$n$,

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的秩也为$n$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$也线性无关.

2．设$B^T=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m)$，且$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，$P$是$m$阶可逆方阵，$(PB)^T=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m)$，证明$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$也是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

证：$(\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\eta}_m)=(PB)^T=B^TP^T=(\boldsymbol{\xi}_1,\dots,\boldsymbol{\xi}_m)P^T$,

由P可逆知$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$与$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m$秩相等,

因为$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，所以$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中含有$m$个解向量,

且$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m$线性无关，其秩为$m$,

故$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$的秩也为$m$，则$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$也线性无关,

且$A(\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\eta}_m)=A(\boldsymbol{\xi}_1,\dots,\boldsymbol{\xi}_m)P^T=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\eta}_m$均为$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解向量,

所以$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$也是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系.