成绩	

上海大学 2015 ～2016 学年 秋 季学期试卷

课程名：线性代数(B) A 卷 参考答案 课程号：01013010 学分：3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人________ 应试人学号________ 应试人所在院系________

题号	一	二	三	四	五
得分					

得分	评卷人

一、填空题：（每小题 3 分，5 题共 15 分）

1．设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\3&2&0\end{pmatrix}$，则 $A^3=\underline{0}$；

2．设 A^* 是 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵，且 $|A|=2$，则 $|3I-2A^*A|=\underline{-1}$；

3．如果向量 $\alpha=(2,1,a)$ 可由 $(1,2,3),(4,5,1)$ 线性表示，则 $a=\underline{-5}$；

4．设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，则 $(A+I)^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\&-1&1\end{pmatrix}}$；

5． 矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的三个特征值之和为 $\underline{\quad 1\quad}$．

得分	评卷人

二、选择题：（每小题 2 分，5 题共 10 分）

6．设 A,B 是 n 阶方阵，则下列命题正确的是（ C ）

(A) $AB=BA$； (B) 如果 $AB=\mathbf{0}$，则 $A=\mathbf{0}$ 或 $B=\mathbf{0}$；

(C) $|A^TB|=|A|\cdot|B|$； (D) $(AB)^k=A^kB^k$，其中 k 为正整数．

7．设 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}a_{11}&3a_{31}+2a_{11}&a_{21}\\a_{12}&3a_{32}+2a_{12}&a_{22}\\a_{13}&3a_{33}+2a_{13}&a_{23}\end{vmatrix}=$（ C ）

(A) 6； (B) 2； (C) -3； (D) 3.

8．设 $Ax=\mathbf{b}$ 为 n 元非齐次线性方程组，且 $r(A)=n$，则下列命题正确的是（D ）．

(A) $Ax=\mathbf{b}$ 一定有无穷多组解； (B) $Ax=\mathbf{b}$ 只有唯一解；

(C) $Ax=\mathbf{b}$ 可能有无穷多组解； (D) $Ax=\mathbf{b}$ 可能只有唯一解.

9．设 A 是 3 阶实对称矩阵，则（ B ）

(A) A 不可对角化； (B) A 可以对角化；

(C) A 与单位矩阵相抵； (D) A 与单位矩阵不相抵.

10．设 A 为 3 阶矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$（ A ）．

$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=PB$

(A) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$； (C) $\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$。

$Q^{-1}AQ=(PB)^{-1}A(PB)=B^{-1}P^{-1}APB=B^{-1}\Lambda B$

$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

得分	评卷人

三、是非题：（每小题 2 分，5 题共 10 分，正确的填“√”，错误的填“×”）

11. 设矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 相抵 （√）

12. 等价的向量组具有相同个数向量. （×）

13. 行列式两行对调行列式变号. （√）

14. n 阶矩阵具有 n 个互不相同的特征值. （×）

15. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，如果 $A^TAx=0$ 只有零解，则 AA^T 可逆. （×）

$R(A^TA)=n$

得分	评卷人

四、计算题：（本大题 5 题，共 53 分）

16.（10 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$，其中 $A=\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{bmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}=|A||B|$ （2 分）

$$|A|=\begin{vmatrix} x+4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x+4 & x & 1 & 1 & 1 \\ x+4 & 1 & x & 1 & 1 \\ x+4 & 1 & 1 & x & 1 \\ x+4 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=(x-1)^4(x+4)$$

（2 分）. （2 分） （1 分）

且 $|B|=\prod_{1\le j\le i}^{4}(x_i-x_j)$，所以 $D=(x-1)^4(x+4)\prod_{1\le j\le i}^{4}(x_i-x_j)$

（2 分） （1 分）

17.（12 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，且 $AX=-3X+I$，求 X。

解 由 $AX=-3X+I$ 有 $X=(A+3I)^{-1}\cdot I=(A+3I)^{-1}$ （2 分）

且 $A+3I=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ （2 分）

由于 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ （2 分）

且 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & & \\ 1 & 3 & 4 & & 1 & \\ 2 & 4 & 7 & & & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$，即 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （3 分）

所以

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & & & \\ -1 & 3 & & & \\ & & 5 & -2 & -1 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ （2 分）

18.（9 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\2&3&2&1&2\\4&5&6&5&4\\1&2&0&-1&a\end{pmatrix}$，求 A 列向量组一个极大无关组.

解

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\2&3&2&1&2\\4&5&6&5&4\\1&2&0&-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&1&-2&-3&0\\0&1&-2&-3&0\\0&1&-2&-3&a-1\end{pmatrix}$$ （2 分）

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&1&-2&-3&0\\0&0&0&0&a-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ （2 分）

当 $a=1$，列极大无关组是第 1、2 列； （2 分）

当 $a\neq1$，列极大无关组是第 1、2、5 列 （3 分）

19.（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&7&2\\1&3&a\end{pmatrix}$，且非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\alpha_0=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，求 $Ax=b$ 通解.

解 因为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&7&2\\1&3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&a\end{pmatrix}$$ （3 分）

当 $a=0$ 时，有 $A\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ （2 分）

所以 $Ax=0$ 通解为 $x=k\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ （1 分）

则 $Ax=b$ 通解为 $x=k\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ （1 分）

当 $a\neq0$ 时，$|A|\neq0$，则方程组有唯一解 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ （3 分）

20.（12 分）判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}$ 是否可以对角化，若可以对角化，将 A 对角化，且求相似变换矩阵 P。

解 由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-3\\-1&\lambda-2&-4\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$。 （3 分）

当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(I-A)X=\mathbf{0}$，得一个特征向量（基础解系）$\xi_1=(-1,1,0)^T$； （2 分）

当 $\lambda_2=2$ 时，解 $(I-A)X=\mathbf{0}$，得一个特征向量（基础解系）$\xi_2=(-4,-3,1)^T$； （2 分）

当 $\lambda_3=3$ 时，解 $(I-A)X=\mathbf{0}$，得一个特征向量（基础解系）$\xi_3=(1,1,0)^T$； （2 分）

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，即 A 有三个线性无关的特征向量，因此 A 可对角化。 （1 分）

记

$$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}-1&-4&1\\1&-3&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda。$$ （2 分）

得分	评卷人

五、证明题：（2 题，每题 6 分共 12 分）

21.（6 分） 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^3=\mathbf{0}$，求证 $A+I$ 为可逆矩阵。

证 因为 $A^3=\mathbf{0}$，所以 $A^3+I=I$ （2 分）

又因为 $A^3+I=(A+I)(A^2-A+I)$ （2 分）

知 $(A+I)(A^2-A+I)=I$，得 $A+I$ 为可逆矩阵 （2 分）

22.（6 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是 3 维非零列向量，A 为 3 阶矩阵，如果

$$A\alpha_1=\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+2\alpha_2, A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,$$

求证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

证 由条件有

$A\alpha_2=A(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1)=(\alpha_1+2\alpha_2)-\alpha_1=2\alpha_2$ （2 分）

$A\alpha_3=A((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_2))=(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)-(\alpha_1+2\alpha_2)=3\alpha_3$ （2 分）

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 A 的互不相同特征值下的特征向量，因此线性无关 （2 分）

证：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 有非零解 k_1,k_2,k_3

即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 不妨设 $\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

~~$A\alpha_3=3\alpha_3=3l_1\alpha_1+3l_2\alpha_2$~~

$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=A(\alpha_1+\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)$

$=A((1+l_1)\alpha_1+(1+l_2)\alpha_2)=\alpha_1+2\alpha_2+3(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)$

$=(1+l_1)\alpha_1+2(1+l_2)\alpha_2=(3l_1+1)\alpha_1+(3l_2+2)\alpha_2$

即 $2l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=0$ [illegible] $\alpha_1\ \alpha_2$

$0\ 0\ \neq 0$ $\alpha_1\ \alpha_2$ 相关 α_2 [illegible] α_1