《线性代数 A》强化训练题二

一、填空题

1. 排列 $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$ 的逆序数为____________.

2. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ____________.

3. 若四阶行列式的第1行元素依次为 $1, 2, 3, 4$，第 2 行元素的代数余子式依次为 $x, 2, x, 1$，那么 $x =$ ____________.

4. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵，且 $|A| \neq 0$. 若 $AB - A = E$，则 $A^{-1} =$ ________________.

5. 设 A 为 n 阶方阵，若 $R(A) < n-1$，则 $R(A^*) =$ ____________.

6. 若 A 是秩为1的三阶方阵，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $AB = O$，则 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为____________.

7. 当 $a =$ ____________时，向量 $(-3, 4, a, 1)$ 与向量 $(-1, 3, 2, 5)$ 正交.

8. 可逆方阵 A 有特征值 λ，则 $A^{-1} + 2E$ 有特征值____________.

9. 如果 A 为 n 阶正交矩阵，而且 $|A| = 1$，则 $|A^T + A^*| =$ ____________.

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$，如果 A 正定，则 t 的取值范围是____________.

二、单项选择题

1. 设 A 和 B 都是 n 阶可逆矩阵，下列错误的是（　　）

A. $(A+B)^T=A^T+B^T$　　B. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

C. $|AB|=|BA|$　　D. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=0$，则 A 中（　　）

A. 任意一列向量是其余列向量的线性组合

B. 必有一列元素全为零

C. 必有一列向量是其余列向量的线性组合

D. 必有两列元素对应成比例

3. 设 0 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征值，则 $a=$（　　）

A. 3　　B. 1　　C. 0　　D. -1

4. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则（　　）

A. A 与 B 都相似于同一个对角阵

B. A 与 B 有相同的特征多项式和特征向量

C. A 与 B 有相同的特征值和特征向量

D. A 与 B 有相同的特征多项式和特征值

5. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是非齐次线性方程组，以下判断正确的是（　　）

A. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

B. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

C. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

D. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

三、行列式计算

1. $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$

四、已知$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，且$A^{-1}XA=A^{-1}X+E$，求$A$和$X$.

五、讨论当a,b分别取何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=b \\ x_2+(3-a)x_3+3x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$无解、有唯一解和有无穷多解，并在有无穷多解的情形下求该方程组的通解.

六、已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

(1) 求与二次型对应的实对称矩阵A;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形.

七、设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$是列向量组，若$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$线性无关，$\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$也线性无关，且内积

$[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j] = 0$, $(i = 1, 2;\ j = 3, 4)$, 试证明$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$一定线性无关.