

《线性代数 A》强化训练题三

一、单项选择题

1. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $ACB = E$, 则必定有()
A. $ABC = E$ B. $BAC = E$ C. $CAB = E$ D. $BCA = E$
2. 设 A 为三阶方阵且 $|A| = -2$, 则 $|3(A^T)^*| = ()$
A. -108 B. -12 C. 12 D. 108
3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 存在无穷多个解, 则正确的是()
A. A 的行向量组线性相关 B. A 的行向量组线性无关
C. A 的列向量组线性相关 D. A 的列向量组线性无关
4. 设 A 为 n 阶正交阵, 且 $|A| = -1$, 则 $|A + E| = ()$
A. 1 B. -1 C. 0 D. 2
5. 对称矩阵 A ()
A. A 的特征值全部大于零时 A 正定 B. $R(A) = n$ 时 A 正定
C. A 有 n 个线性无关的特征向量时 A 正定 D. 以上结论都不对

二、填空题

6. 设 D 是一个四阶行列式, 且其第一行元素分别为 $1, 0, -1, 2$, 第三行元素的余子式分别为 $3, 6, a, 1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 A 是三阶矩阵, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 都是非齐次方程组 $Ax = b$ 的解, 且 $R(A) = 2$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是该

方程组对应的齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个解, 则方程组 $Ax = b$ 的通解为_____.

10. 当 $t =$ _____ 时, 向量组 $\alpha_1 = (2, 0, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, -2, 4)^T$, $\alpha_3 = (4, 6, 2t)^T$ 线性相关.

11. 设 $\alpha = (3, 0, 1, -4)$, $\beta = (2, 4, -1, 2)$, 则内积 $[\frac{\alpha}{\|\alpha\|}, -3\beta] =$ _____.

12. 设 A 是三阶方阵, 且 A 的特征值是 $-1, 2, 4$, 则 $A^2 + A + 2E$ 的特征值是_____.

13. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - tx_2^2 + x_3^2$, 则当 $t =$ _____ 时, f 的秩为 2.

14. 设 A 是三阶方阵, 且与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $|(-A)^{-1}| =$ _____.

15. 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 为正定二次型, 则 a 的取值范围_____.

三、简答题

16. 叙述 n 阶矩阵 A 与 B 相似的定理, 并写出 n 阶矩阵 A 与对角阵相似的充分必要条件.

17. 叙述一个向量组线性无关的定义, 并给出向量组线性无关的三种判别法.

四、计算题

18. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$$

19. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 且 A 满足 $A^*X = 4A^{-1} + 2E + 2X$, 求 X .

20. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ 的秩和一个最大无关组, 并

把其他向量用最大无关组线性表示.

21. 参数 λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 无解、有唯一解或有无穷多解? 并在

有无穷多解时求出方程组的通解.

22. 用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$ 为标准形, 并写出所用的正交变换.

五、证明题

23. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, B 为一个 3×3 矩阵, 如果 $AB = O$, 求证: B 的列向量组线性

性相关.