第一章　矩阵

§1.1　例题

例1.1.1. 已知n维列向量α满足$\alpha^T\alpha = 1$. 设$A = I + \alpha\alpha^T, B = I - \frac{1}{2}\alpha\alpha^T$, 求证$AB = BA = I$.

证　设$C = \alpha\alpha^T$, 有A, B为C的矩阵多项式, 所以$AB = BA$. 由$\alpha^T\alpha = 1$有

$$C^2 = \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = \alpha\alpha^T.$$

因此

$$AB = (I + C)(I - \frac{1}{2}C) = I + C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C^2 = I + C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C = I.$$

例1.1.2. n阶方阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 主对角线上元素之和称为矩阵A 的迹, 记为$\mathrm{tr}A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. 设$A, B$分别为$m \times n$与$n \times m$矩阵, 证明$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

证 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ &\quad + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} \\ &\quad \cdots \\ &\quad + a_{m1}b_{1m} + a_{m2}b_{2m} + \cdots + a_{mn}b_{nm} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ij}. \end{aligned}$$

同理可得$\mathrm{tr}(BA) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij}$.

由于$\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij}$, 可得$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

注 设α, β是n维列向量, 则$\mathrm{tr}(\alpha\beta^T) = \beta^T\alpha$.

例1.1.3. 设$A, B, A + B$为可逆矩阵, 求证$A^{-1} + B^{-1}$可逆.

解 对矩阵$A^{-1}+B^{-1}$变形, 有

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(I+AB^{-1})=A^{-1}(B+A)B^{-1},$$

由条件$A^{-1},B^{-1},A+B$可逆, 而可逆矩阵的乘积为可逆矩阵, 所以$A^{-1}+B^{-1}$可逆.

注 本例采用的方法称为"和化积"方法: 把矩阵和式表达式转化为矩阵乘积表达式.

例1.1.4. *设A,B分别是$m\times n$与$n\times m$ 矩阵, 若I_m-AB 可逆, 求证I_n-BA 可逆.*

解 假设I_n-BA不可逆, 则存在非零n维列向量x_0使得$(I_n-BA)x_0=\mathbf{0}$,即$BAx_0=x_0$. 设$Ax_0=y_0$, 由$x_0\neq\mathbf{0}$及$BAx_0=x_0$, 知$y_0\neq\mathbf{0}$, 且$ABAx_0=Ax_0$, 即$ABy_0=y_0$. 由此得$(I_n-AB)y_0=\mathbf{0}$, 由I_n-AB可逆得$y_0=\mathbf{0}$, 矛盾. 所以I_n-BA 可逆.

例1.1.5. *设A 为$m\times n$实矩阵, 且$Ax=\mathbf{b}$ 有唯一解. 证明A^TA可逆, 且$Ax=\mathbf{b}$ 的解为*

$$x=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}.$$

解 由$Ax=\mathbf{b}$ 有唯一解知$Ax=\mathbf{0}$ 只有零解. 下面采用反证法.

如果A^TA不可逆, 则存在非零实向量x_0使得$A^TAx_0=\mathbf{0}$, 等式两边乘上x_0^T得

$$x_0^TA^TAx_0=\mathbf{0}.$$

设$Ax_0=y_0$, 由上式得$y_0^Ty_0=0$, 又y_0是实向量, 得$y_0=\mathbf{0}$, 即$Ax_0=\mathbf{0}$, 由$Ax=\mathbf{0}$ 只有零解知$x_0=\mathbf{0}$, 矛盾. 于是A^TA可逆.

由$Ax=\mathbf{b}$得

$$A^TAx=A^T\mathbf{b},$$

因此有

$$x=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}.$$

注 利用线性方程组结论可以证明, 对任意实$m\times n$矩阵A有$r(A^TA)=r(A)$, 本例只证明在$r(A)=n$时结论.

例1.1.6. *设A是n阶方阵, 且$A^2-A-2I=\mathbf{0}$, 求证$r(A-2I)+r(A+I)=n$.*

证 方法一 由$A^2-A-2I=\mathbf{0}$, 得

$$(A-2I)(A+I)=\mathbf{0},$$

由此得

$$r(A-I)+r(A+I)\leq n.$$

又因为

$$r(A+I)+r(A-2I)\geq r(A+I+2I-A)=r(3I)=n.$$

所以 $r(A+I)+r(A-2I)=n$.

方法二

$$\begin{pmatrix} A+I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A-2I \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} A+I & \mathbf{0} \\ A+I & A-2I \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{pmatrix} A+I & \mathbf{0} \\ 3I & A-2I \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_1-\frac{1}{3}(A+I)r_2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{3}(A-2I)(A+I) \\ 3I & A-2I \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{3}(A-2I)c_1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3I & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中用到$(A-2I)(A+I)=\mathbf{0}$. 根据等价矩阵具有相同秩得

$$r(A-2I)+r(A+I)=r\begin{pmatrix} A+I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A-2I \end{pmatrix}=n.$$

例1.1.7. 设A是$(n\geq 2)$阶方阵, A^*是A的伴随阵. 证明:

(1) $r(A^*)=n$的充要条件是$r(A)=n$;

(2) $r(A^*)=1$的充要条件是$r(A)=n-1$;

(3) $r(A^*)=0$的充要条件是$r(A)<n-1$.

证 (1) 由于$|A^*|=|A|^{n-1}$, 因此A可逆的充分必要条件是A^*可逆. 而A可逆的充分必要条件是$r(A)=n$, 由此可证得结论.

(2), (3) 在A不可逆时有$AA^*=|A|I=\mathbf{0}$, 所以

$$r(A)+r(A^*)\leq n.$$

当$r(A)=n-1$时, A存在$n-1$阶非零子式, 由此有$A^*\neq\mathbf{0}$, 得$1\leq r(A^*)\leq n-r(A)=1$, 所以此时有$r(A^*)=1$;

当$r(A)<n-1$时, A所有$n-1$阶子式都为零, 由此有$A^*=\mathbf{0}$, 得$r(A^*)=0$.

由此得证(2), (3).

例1.1.8. 设A为$m\times n$矩阵, b为m维列向量. 若对任意的非零的n维列向量x, 恒有$Ax=b$, 求证$A=\mathbf{0}, b=\mathbf{0}$.

证 一方面, $A(e_1+e_2)=b$; 另一方面,

$$A(e_1+e_2)=Ae_1+Ae_2=b+b=2b.$$

于是$2b=b$. 从而$b=\mathbf{0}$. 又$Ae_i=\alpha_i=\mathbf{0}$, α_i为A的第i列, $i=1,\cdots,n$. 故$A=\mathbf{0}$.

例1.1.9. 设$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 则$A$为反对称矩阵的充要条件为对任意的实$n$维列向量$x$, 恒有

$$x^TAx = 0.$$

证 先证必要性. 对任一实n维列向量x, 因$-x^TAx$是一阶方阵, 故$(-x^TAx)^T = -x^TAx$. 从而由$A^T = -A$得

$$x^TAx = x^T(-A)^Tx = -(x^TAx)^T = -x^TAx.$$

于是$2x^TAx = 0$, 即$x^TAx = 0$.

再证充分性. 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$, 若对任意的实n维列向量x, 有$x^TAx = 0$, 则

$$a_{ii} = {e_i}^TAe_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

令$x = e_i + e_j$, 则

$$\begin{aligned} x^TAx &= (e_i^T + e_j^T)A(e_i + e_j) \\ &= a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} \\ &= a_{ij} + a_{ji} = 0, \end{aligned}$$

故$a_{ij} = -a_{ji}$. 于是A为反对称阵.

例1.1.10. 设A是方阵, 且$A^2 - 2A = 4I$.

(1) 求证A可逆, 并求A^{-1};

(2) 求证$A - 3I$ 可逆, 并求$(A - 3I)^{-1}$.

证 (1) 由$A^2 - 2A = 4I$, 得

$$(\frac{1}{4}(A - 2I))A = A(\frac{1}{4}(A - 2I)) = I,$$

所以A可逆, 且$A^{-1} = \frac{1}{4}(A - 2I)$.

(2) 由$A^2 - 2A = 4I$, 得$A^2 - 2A - 3I = I$. 所以

$$(A - 3I)(A + I) = (A + I)(A - 3I) = I,$$

于是$A - 3I$可逆, 且$(A - 3I)^{-1} = A + I$.

§1.2 习题中的证明题

习题1.1.17 设A为$m\times n$矩阵, 如果对于任意n维向量x都有$Ax=\mathbf{0}$, 求证$A=\mathbf{0}$.

证 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$A$的列向量组. 有

$$Ae_i=\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

又由条件有$Ae_i=\mathbf{0}\ (i=1,2,\cdots,n)$, 得$\alpha_i$都为零向量, 于是$A$是零矩阵.

习题1.1.18 设A,B为同阶对称矩阵，求证$AB+BA$是对称矩阵，$AB-BA$是反对称矩阵.

证 由条件有$A^T=A,B^T=B$. 因此

$$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T,$$

于是

$$(AB-BA)^T=BA-AB=-(AB-BA).$$

即$AB-BA$是反对称矩阵.

同理可证$AB+BA$是对称矩阵.

注 当A,B为同阶反对称矩阵, 题中结论仍然正确.

习题1.2.1 设A,B为方阵, $C=\begin{pmatrix}A & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}$. 求证

(1) C为对称(反对称)矩阵的充分必要条件是A,B为对称(反对称)矩阵;

(2) C为正交矩阵的充分必要条件是A,B为正交矩阵.

证 (1)因为

$$C^T=\begin{pmatrix}A^T & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B^T\end{pmatrix}.$$

所以$C^T=C$(或$C^T=-C$)的充分必要条件是$A^T=A,B^T=B$(或$A^T=-A,B^T=-B$), 即C为对称(反对称)矩阵的充分必要条件是A,B为对称(反对称)矩阵.

(2) 因为

$$C^TC=\begin{pmatrix}A^T & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^TA & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B^TB\end{pmatrix}.$$

又C为正交阵的充分必要条件是$C^TC=I$, 因此C为正交阵的充分必要条件是

$$A^TA=I,B^TB=I,$$

即C为正交矩阵充分必要条件是A,B为正交矩阵.

习题1.2.2 称复方阵A为Hermite阵(H-阵), 如果$\overline{A}^T = A$. 设复方阵A分解为$A = B + \sqrt{-1}C$, 其中B, C为实方阵, 求证A为H-阵的充分必要条件是$\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$为对称矩阵.

证 根据矩阵共轭运算, 有

$$\overline{A}^T = \overline{(B+\sqrt{-1}C)}^T = (B-\sqrt{-1}C)^T = B^T - \sqrt{-1}C^T.$$

因此$\overline{A}^T = A$的充分必要条件是

$$B^T = B, C^T = -C.$$

又因为

$$\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} B^T & -C^T \\ C^T & B^T \end{pmatrix},$$

所以$\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$为对称矩阵的充分必要条件是

$$B^T = B, C^T = -C.$$

故A为H-阵的充分必要条件是$\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$为对称矩阵.

习题 1.3.2 设A, B 是n阶方阵, 且A可逆, $B^2 + BA + A^2 = \mathbf{0}$, 试证$B$和$A+B$均可逆，并求$B$和$A+B$的逆阵.

证 由A可逆, 且$B^2 + BA + A^2 = \mathbf{0}$ 有

$$B(B+A)A^{-2} = -I,\ A^{-2}B(B+A) = -I.$$

于是B和$A+B$均可逆, 且

$$B^{-1} = -(B+A)A^{-2},\ (B+A)^{-1} = -A^{-2}B.$$

注 证明中用到书中第一章第四节定理1.4.2.

习题 1.3.4 设A, B是同阶正交矩阵, 求证

(1) A^{-1}是正交矩阵;

(2) 对任一正交方阵P, $P^{-1}AP$是正交矩阵;

(3) 如果$A+B$是正交阵, 则$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

证 (1) 因为

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}A = I,$$

同理可证$(A^{-1})^T A^{-1} = I$. 所以A是正交矩阵.

(2) 设A, B为正交矩阵, 则有

$$(AB)(AB)^T = (AB)(B^T A^T) = A(BB^T)A^T = AA^T = I,$$

同理可证$(AB)^T(AB) = I$, 于是正交矩阵的乘积是正交矩阵. 由于P^{-1}, P, A为正交矩阵, 所以$P^{-1}AP$是正交矩阵.

(3) 由于正交矩阵的逆阵为正交矩阵的转置, 故

$$(A+B)^{-1} = (A+B)^T = A^T + B^T = A^{-1} + B^{-1}.$$

习题 1.5.7 设A是n阶矩阵, 且$A^T = -A, r(A) = n$, 求证对任意$n \times 1$矩阵B, 均有

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} = n.$$

证 作块矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - B^T A^{-1} r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & -B^T AB \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1 A^{-1} B} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -B^T AB \end{pmatrix},$$

得

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} = r(A) + r(-B^T A^{-1} B). \tag{1.2.1}$$

又$r(A) = n$, 所以A可逆, 且

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1},$$

即A^{-1}为反对称矩阵. 注意$B^T A^{-1} B$为一阶矩阵, 于是

$$B^T A^{-1} B = (B^T A^{-1} B)^T = B^T (A^{-1})^T B = -B^T A^{-1} B,$$

得$B^T A^{-1} B = 0$. 由式(1.2.1)知

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} = r(A) = n.$$

习题 1.5.8 设A为n阶方阵, $\mathbf{b}$为n维列向量, 求证$Ax=\mathbf{b}$有唯一解的充分必要条件是A可逆.

证 当$Ax=\mathbf{b}$只有唯一解时, 知$Ax=\mathbf{0}$只有零解.

事实上如果$Ax_0=\mathbf{0}$, 且$x_0\neq\mathbf{0}$. 设$Ax=\mathbf{b}$的解为y_0, 有

$$A(x_0+y_0)=Ax_0+Ay_0=\mathbf{0}+\mathbf{b}=\mathbf{b},$$

且$x_0+y_0\neq y_0$, 与$Ax=\mathbf{b}$只有唯一解矛盾. 因此$Ax=\mathbf{0}$只有零解, 于是$r(A)=n$, 即A可逆.

反之如果A可逆, 则方程组$Ax=\mathbf{b}$只有唯一解$x=A^{-1}\mathbf{b}$.

习题 1.5.9 设A为$m\times n$矩阵, 如果$r(A)=m$, 则称其为**行满秩矩阵**; 如果$r(A)=n$, 则称其为**列满秩矩阵**. 求证

(1) A为列满秩矩阵的充分必要条件是$Ax=\mathbf{0}$只有零解;

(2) A为行满秩矩阵的充分必要条件是$yA=\mathbf{0}$只有零解.

证 (1) A为列满秩矩阵$\Leftrightarrow r(A)=n\Leftrightarrow Ax=\mathbf{0}$只有零解.

(2) A为行满秩矩阵的充分必要条件是A^T为列满秩矩阵, 由此由(1)可得结论.

习题 1.5.10 设$A_{m\times n}$为列满秩矩阵, B,C为$n\times t$矩阵, 求证$AB=AC$的充分必要条件是$B=C$.

证 方法一 由$AB=AC$有$A(B-C)=\mathbf{0}$, 得$B-C$的列向量为线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的解. 由于A为列满秩矩阵, 所以由习题1.5.9知$B-C$的列向量都为零向量, 得$B-C=\mathbf{0}$, 即$B=C$. 反之显然.

方法二 由$AB=AC$有$A(B-C)=\mathbf{0}$, 由此得$r(A)+r(B-C)\leq n$, 又因为A为列满秩矩阵, 得$r(B-C)\leq 0$, 于是$B-C=\mathbf{0}$, 即$B=C$.

当$B=C$时, 显然有$AB=AC$.

练习

1. **设n阶矩阵A满足$A^2=2A$, 求证$r(A)+r(A-2I)=n$.**

证 由$A^2-2A=\mathbf{0}$, 得

$$A(A-2I)=\mathbf{0},$$

由此得

$$r(A-2I)+r(A)\leq n.$$

又因为

$$r(A-2I)+r(A)\geq r(A-2I-A)=r(-2I)=n.$$

所以 $r(A-2I)+r(A)=n$.

2. **设A为n阶对称矩阵, 且为正交矩阵, 求证$r(A-I)+r(A+I)=n$.**

证 因为A为对称矩阵, 所以$A^T=A$. 又A为正交矩阵, 所以$A^T=A^{-1}$. 得$A=A^{-1}$, 有$A^2=I$. 于是

$$(A+I)(A-I)=\mathbf{0},$$

由此得

$$r(A+I)+r(A-I)\leq n.$$

又因为

$$r(A+I)+r(A-I)\geq r(A+I-A+I)=r(2I)=n.$$

所以 $r(A+I)+r(A-I)=n$.

3. **设A为n阶幂零矩阵, 即存在正整数k, 使得$A^k=\mathbf{0}$. 求证$A-I$可逆.**

证 因为$A^k=\mathbf{0}$, 所以$I-A^k=I$. 于是

$$(A-I)(-I-A-A^2-\cdots-A^{k-1})=I,$$

知$A-I$可逆, 且

$$(A-I)^{-1}=-(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}).$$

4. **设B为实n阶可逆矩阵, α为n维实非零向量. 如果$A=\begin{pmatrix} BB^T & \alpha \\ \alpha^T & \mathbf{0}\end{pmatrix}$, 求证$r(A)=n+1$.**

证 因为B可逆, 所以BB^T可逆. 作初等变换

$$\begin{pmatrix} BB^T & \alpha \\ \alpha^T & \mathbf{0}\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-\alpha^T(BB^T)^{-1}r_1} \begin{pmatrix} BB^T & \alpha \\ \mathbf{0} & -\alpha^T(BB^T)^{-1}\alpha\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2-c_1(BB^T)^{-1}\alpha c_1} \begin{pmatrix} BB^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\alpha^T(BB^T)^{-1}\alpha\end{pmatrix}.$$

由于初等变换不改变矩阵秩, 得

$$r(A)=r(BB^T)+r(\alpha^T(BB^T)^{-1}\alpha).$$

因为B是实可逆矩阵, α为实非零向量, 故$B^{-1}\alpha$为实非零向量, 因而有

$$\alpha^T(BB^T)^{-1}\alpha=(B^{-1}\alpha)^T(B^{-1}\alpha)>0,$$

所以$r(A)=n+1$.

5. **设$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, 其中$\alpha,\beta$是3维列向量.**

(1) 求证$r(A) \leq 2$;

(2) 若α, β线性相关, 求证$r(A) < 2$.

证 (1) 由于$r(\alpha\alpha^T) \leq r(\alpha) \leq 1$, 因此

$$r(A) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq 2.$$

(2)当α, β线性相关时, 不妨设$\alpha = k\beta$, 则

$$A = (k^2 + 1)\beta\beta^T,$$

所以$r(A) = r((k^2 + 1)\beta\beta^T) \leq 1 < 2$.

6. 设A为实反对称阵, 证明$A + I, A - I$为可逆矩阵.

证 如果$A + I$不可逆, 则存在实非零向量x_0, 使得$(A + I)x_0 = \mathbf{0}$,由此得

$$0 = x_0^T(A + I)x_0 = x_0^T A x_0 + x_0^T x_0.$$

因为A为实反对称阵, 故$x_0^T A x_0 = 0$, 于是$x_0^T x_0 = 0$. 因为x_0为实向量, 得$x_0 = \mathbf{0}$, 矛盾. 所以$A + I$可逆.

同理可证$A - I$可逆.

第二章　行列式

例2.0.1. 证明行列式$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix} = n+1.$

证　根据行列式的性质, 有

$$D_n \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_n+r_i} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}n\text{行}} D_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & & & & \\ 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = D_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$= D_{n-1} + 1 = \cdots = D_2 + (n-2) = 3 + (n-2) = n+1.$$

例2.0.2. 设$n(n>2)$阶方阵A的伴随矩阵为A^*. 证明:

(1) 若$|A|=0$,则$|A^*|=0$;　　(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$;

(3) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$;　　(4) 若A可逆, 则有$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证　(1) (反证法)假设$|A^*| \neq 0$, 则A^*可逆, 即$A^*(A^*)^{-1} = I$, 所以

$$A = AA^*(A^*)^{-1} = |A|(A^*)^{-1} = 0,$$

故$A=0$, 则$A^*=0$, 这与$|A^*|\neq 0$矛盾, 故当$|A|=0$时,有$|A^*|=0$.

(2)因为$AA^* = |A|I$, 所以

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

若$|A|\neq 0$, 则$|A^*| = |A|^{n-1}$;

若$|A|=0$, 由(1)知, $|A^*|=0$, 此时也成立$|A^*| = |A|^{n-1}$.

所以$|A^*| = |A|^{n-1}$.

(3)当$|A| \neq 0$时, A可逆, 则

$$(A^*)^* = (|A|\,A^{-1})^* = \left||A|\,A^{-1}\right|(|A|\,A^{-1})^{-1} = |A|^n\left|A^{-1}\right|\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A.$$

当$|A| = 0$时, 只需证$(A^*)^* = 0$. 首先证明$r(A^*) < n-1$.

当$A^* = \mathbf{0}$时, 有$r(A^*) = 0 < n-1$;

当$A^* \neq \mathbf{0}$时, 此说明A有$n-1$阶子矩阵可逆, 则$r(A) \leq n-1$(子矩阵秩小于等于原矩阵秩). 又$AA^* = |A|I = \mathbf{0}$知$r(A) + r(A^*) \leq n$, 所以$r(A^*) \leq 1 < n-1$. 从而A^*的所有$n-1$阶子矩阵的行列式都为零, 否则$r(A^*) \leq n-1$, 于是$(A^*)^* = 0$. 此时$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

所以$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

(4)因为A可逆, 所以$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. 即$A^* = |A|\,A^{-1}$. 所以

$$(A^*)^{-1} = (|A|\,A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A,$$

又因为

$$(A^{-1})^* = \left|A^{-1}\right|(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A,$$

所以$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

例2.0.3. 证明奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

证 设n阶反对称矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 其中$n$为奇数, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

即

$$|A| = -\left|A^T\right| = -|A|\,,\text{所以}\quad |A| = 0.$$

第三章　向量组

§3.1　例题

3.1.1　线性表示

例3.1.1. 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}(m\geq 3)$线性相关, 向量组$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关, 试讨论

(1) 向量α_1能否由$\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示?

(2) 向量α_m能否由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示?

解　(1) 因为向量组$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关, 故向量组$\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$也线性无关, 而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性相关, 所以向量$\alpha_1$能由$\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示.

(2) 如果向量α_m能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示, 又由(1)知向量$\alpha_1$能由$\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示, 由此可得向量$\alpha_m$能由$\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示, 从而向量组$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关, 这与已知矛盾. 所以向量$\alpha_m$不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示.

3.1.2　向量组的线性相关性

例3.1.2. 已知A是三阶矩阵, $\alpha_1\neq\mathbf{0},\alpha_2,\alpha_3$是3维向量, 满足$A\alpha_1=\alpha_1$, $A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$, $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$, 证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

解　设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\mathbf{0}, \tag{3.1.1}$$

左乘A, 得

$$x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=\mathbf{0},$$

由已知条件得

$$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+x_3(\alpha_2+\alpha_3)=\mathbf{0} \tag{3.1.2}$$

$(3.1.2)-(3.1.1)$得

$$x_2\alpha_1+x_3\alpha_2=\mathbf{0} \tag{3.1.3}$$

左乘A, 代入已知条件得

$$x_2\alpha_1+x_3(\alpha_1+\alpha_2)=\mathbf{0} \tag{3.1.4}$$

$(3.1.4)-(3.1.3)$得$x_3\alpha_1=\mathbf{0}$, 因为$\alpha_1\neq\mathbf{0}$, 则必有$x_3=0$, 代入(3.1.3)及(3.1.1)可得$x_1=x_2=x_3=0$. 所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

例3.1.3. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 证明$\beta_1=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$线性无关.

证 由题设知,

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

因表出矩阵的行列式为$\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=9\neq 0$, 所以$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$, 即$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

注 此题也可用定义证, 但上述方法更简单.

例3.1.4. 设A是$n\times m$矩阵$(n<m)$, B是$m\times n$矩阵, I是n阶单位矩阵, 已知$AB=I$, 证明B的列向量组线性无关.

证 因为$n<m$, 所以$r(B)\leq\min\{n,m\}=n$, 又因为$r(B)\geq r(AB)=r(I)=n$, 所以$r(B)=n$, 即B的行向量组线性无关.

例3.1.5. 证明β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示,则表示法唯一的充要条件是$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证 充分性. 若

$$\beta=d_1\alpha_1+\cdots+d_r\alpha_r=t_1\alpha_1+\cdots+t_r\alpha_r,$$

故有

$$(d_1-t_1)\alpha_1+\cdots+(d_r-t_r)\alpha_r=\mathbf{0}.$$

因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 所以必有$d_i-t_i=0,i=1,\cdots,r$, 即$d_i=t_i,i=1,\cdots,r$. 所以β由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示的表示法唯一.

必要性.(反证法)

假设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关, 即存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_r$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\mathbf{0},$$

又由β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示, 即

$$\beta=d_1\alpha_1+\cdots+d_r\alpha_r,$$

可得

$$\beta=\beta+\mathbf{0}=(d_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(d_r+k_r)\alpha_r,$$

因为$k_1,\cdots,k_r$是不全为零的数, 所以存在i使得$d_i\neq d_i+k_i$. 由此可得β由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示的表示法不唯一, 矛盾. 所以$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

3.1.3 极大线性无关组与向量组的秩

例3.1.6. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4, 证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为4.

解 因$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4$, 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)\geq 3$. 如果$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=3$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性相关, 即得$\alpha_5-\alpha_4$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出. 由$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$知$\alpha_4$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 于是$\alpha_5$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 这与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4矛盾, 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为4.

例3.1.7. 设向量组(I)$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$向量组(II)$:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$以及向量组(III)$:\alpha_1$, α_2, $\cdots$, α_s, β_1, β_2, $\cdots$, β_t的秩分别为r_1,r_2,r_3, 证明

$$\max(r_1,r_2)\leq r_3\leq r_1+r_2$$

证 显然$\max(r_1,r_2)\leq r_3$, 下证$r_3\leq r_1+r_2$.

不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$分别是(I)$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与(II): β_1, β_2, $\cdots$, β_t 的极大无关组, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$与(I)等价, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$与(II)等价, 从而向量组$\alpha_1$, α_2, $\cdots$, α_{r_1}, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$ 与(III)等价, 所以

$$r_3=r(\mathrm{III})=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2})\leq r_1+r_2.$$

例3.1.8. 设A,B均为$m\times n$矩阵, 证明

$$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$$

解 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 则

$$A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$$

易见向量组$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出.

不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r(A)}$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r(B)}$分别是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的极大无关组. 故$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$也可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r(A)}$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r(B)}$线性表出. 从而

$$r(A+B)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r(A)},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r(B)})\leq r(A)+r(B).$$

3.1.4 有关内积、夹角、正交的问题

例3.1.9. 设α, β 是欧氏空间中的任意向量, 证明

$$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2|\alpha|^2+2|\beta|^2$$

证 由内积性质得

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2&=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)+(\alpha-\beta,\alpha-\beta)\\&=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\&=2(\alpha,\alpha)+2(\beta,\beta)=2|\alpha|^2+2|\beta|^2\end{aligned}$$

例3.1.10. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$是$\mathbf{R}^n$中线性无关的向量组, 且$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$与$\beta_1, \beta_2$正交, 证明$\beta_1, \beta_2$线性相关.

证 方法一 由于$n+1$个n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2$线性相关, 即存在一组不全为零的数$k_1, \cdots, k_{n-1}, l_1, l_2$使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+l_1\beta_1+l_2\beta_2=\mathbf{0}$$

又$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$线性无关, 因此$l_1, l_2$必不全为零.

上式分别与β_1, β_2作内积, 得

$$k_1(\alpha_1,\beta_1)+\cdots+k_{n-1}(\alpha_{n-1},\beta_1)+l_1(\beta_1,\beta_1)+l_2(\beta_2,\beta_1)=\mathbf{0},$$

$$k_1(\alpha_1,\beta_2)+\cdots+k_{n-1}(\alpha_{n-1},\beta_2)+l_1(\beta_1,\beta_2)+l_2(\beta_2,\beta_2)=\mathbf{0},$$

由题设知,

$$l_1(\beta_1,\beta_1)+l_2(\beta_2,\beta_1)=\mathbf{0},\ l_1(\beta_1,\beta_2)+l_2(\beta_2,\beta_2)=\mathbf{0},$$

即

$$(l_1\beta_1+l_2\beta_2,\beta_1)=\mathbf{0},\ (l_1\beta_1+l_2\beta_2,\beta_2)=\mathbf{0},$$

从而有

$$(l_1\beta_1+l_2\beta_2,l_1\beta_1+l_2\beta_2)=\mathbf{0},$$

由此得$l_1\beta_1+l_2\beta_2=\mathbf{0}$, 而$l_1, l_2$不全为零, 所以$\beta_1, \beta_2$线性相关.

方法二 设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}^T\end{pmatrix}$$

是$(n-1)\times n$矩阵, 由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关, 知$r(A)=n-1$, 所以线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$的解空间的维数为1.

因向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$与$\beta_1,\beta_2$正交, 故$\beta_1,\beta_2$是$Ax=\mathbf{0}$的解, 于是$\beta_1,\beta_2$线性相关.

例3.1.11. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是n维线性空间V的一个标准正交组, 求证对于V中任意的向量α有

$$\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\alpha_i)^2\leqslant(\alpha,\alpha).$$

证 将$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$扩充为V的一个标准正交基

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n,\ m\leqslant n.$$

对于$\alpha\in V$有

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n,\ (\alpha,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

而

$$(\alpha,\alpha_i)=x_i(\alpha_i,\alpha_i)=x_i,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\alpha_i)^2=\sum_{i=1}^{m}x_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2=|\alpha|^2.$$

3.1.5 有关正交矩阵

例3.1.12. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为正交矩阵, 则

(1) 当$|A|=-1$时, $a_{ij}=A_{ij}$;

(2) 当$|A|=1$时, $a_{ij}=-A_{ij}$, 其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式.

证 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为正交矩阵, 则有

$$A^{-1}=A^T=(a_{ji})_{n\times n},$$

又

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=(\frac{1}{|A|}A_{ji})_{n\times n},$$

其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式. 所以有

(1) 当$|A|=1$时, $a_{ij}=A_{ij}$;

(2) 当$|A|=-1$时, $a_{ij}=-A_{ij}$.

例3.1.13. 设α为$\mathbf{R}^n$中单位列向量, $A=I-2\alpha\alpha^T$, 证明A为对称正交阵.

证 α为R^n中单位向量, 即$\alpha^T\alpha=1$.

$$A^T=(I-2\alpha\alpha^T)^T=I-2\alpha\alpha^T=A$$

$$A^TA=(I-2\alpha\alpha^T)^T(I-2\alpha\alpha^T)=I-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=I$$

故A为对称正交阵.

§3.2 习题中的证明题

习题 3.2.6 . 证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关.

证 方法一 因$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=\mathbf{0}$, 所以向量组线性相关.

方法二 讨论向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$的线性相关性.

由题设知,

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$与$A$的列向量组有相同的线性关系.

计算可得$|A|=1+(-1)^{s-1}$, 所以

(1) 当s为奇数时, $|A|\neq 0$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关.

(2) 当s为偶数时, $|A|=0$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关.

$s=4$, 所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关.

习题 3.2.7 . 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关, 且

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r,$$

求证$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关.

证 方法一 用习题3.2.6方法二即可证明.

方法二 由已知可得

$$\alpha_1=\beta_1,\alpha_i=\beta_i-\beta_{i-1},i=2,\cdots,r,$$

故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$等价, 于是有

$$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r$$

所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关.

习题 3.2.8 . 证明任一n维向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示的充要条件是此向量组线性无关.

证 充分性. 对任意n维向量β, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$是$n+1$个$n$维向量组, 故$\alpha_1$, α_2, $\cdots$, α_n, β 线性相关, 又已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关, 所以$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示.

必要性. **方法一** 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 因任一$n$维向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 故标准单位向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 于是存在$n$阶方阵$K$, 使得

$$(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)K,$$

即$AK=I$, 由此可知A可逆, $|A|\neq 0$, 即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

方法二 因任一n维向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 故标准单位向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 则有

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geq r(e_1,e_2,\cdots,e_n)=n,$$

又$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leq n$, 所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$, 即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

习题 3.4.6 . 设V_1,V_2都是线性空间V的子空间, 且$V_1\subseteq V_2$, 求证如果V_1的维数和V_2的维数相等, 那么$V_1=V_2$.

证 设$\dim V_1=r$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V_1$的一个基, 因$V_1\subseteq V_2$, 所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V_2$中线性无关的向量组.

又因$\dim V_2=\dim V_1=r$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V_2$的一个基, 所以$V_1=V_2$.

习题 3.6.5 . 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是欧氏空间$\mathbf{R}^n$的一个基, 证明

(1) 如果$\beta\in\mathbf{R}^n$, 且$(\beta,\alpha_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$, 那么$\beta=\mathbf{0}$.

(2) 如果$\beta_1,\beta_2\in\mathbf{R}^n$, 对任一$\alpha\in R^n$, 有$(\beta_1,\alpha)=(\beta_2,\alpha)$, 那么$\beta_1=\beta_2$.

证 (1) 因$\beta\in\mathbf{R}^n$, 则$\beta=\sum_{j=1}^n k_j\alpha_j$, 对任意$i$, 有

$$(\beta,\alpha_i)=(\sum_{j=1}^n k_j\alpha_j,\alpha_i)=k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$$

因$(\alpha_i,\alpha_i)>0$, 则必有$k_i=0$, 由i的任意性得$\beta=\mathbf{0}$.

(2) 取$\alpha=\beta_1-\beta_2$, 由$(\beta_1,\alpha)=(\beta_2,\alpha)$, 得$(\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_2)=0$, 所以$\beta_1-\beta_2=\mathbf{0}$, 即$\beta_1=\beta_2$.

习题 3.6.7 . n阶实对称矩阵A满足$A^2+4A+3I=\mathbf{0}$, 求证$A+2I$是正交阵.

证 显然实矩阵$A+2I$是对称矩阵.

又$(A+2I)^T(A+2I)=(A+2I)(A+2I)=A^2+4A+4I=I$, 所以$A+2I$是正交阵.

习题 3.7.5 . 设σ是n维线性空间V上的线性变换, 如果$\sigma^{n-1}(\xi)\neq\mathbf{0}$, 但$\sigma^n(\xi)=\mathbf{0}$.

(1) 求证$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$是$V$的一个基.

(2) 求σ在此基下的矩阵.

证 (1) 若

$$k\xi+k_1\sigma(\xi)+\cdots+k_{n-1}\sigma^{n-1}(\xi)=\mathbf{0}, \tag{3.2.1}$$

两边作用σ^{n-1}, 由$\sigma^n(\xi)=\mathbf{0}$, 得$k\sigma^{n-1}(\xi)=\mathbf{0}$. 由于$\sigma^{n-1}(\xi)\neq\mathbf{0}$, 故$k=0$, 于是(3.2.1)变为

$$k_1\sigma(\xi)+\cdots+k_{n-1}\sigma^{n-1}(\xi)=\mathbf{0}.$$

用σ^{n-2}作用上式得$k_1\sigma^{n-1}(\xi)=\mathbf{0}$, 则$k_1=0$. 同理可证,

$$k_2=k_3=\cdots=k_{n-1}=0,$$

故$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$线性无关, 从而是$V$的一个基.

(2) 因

$$\sigma(\sigma^i(\xi))=\sigma^{i+1}(\xi),(i=0,1\cdots,n-1)$$

且$\sigma^n(\xi)=0$. 故σ在基$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}.$$

总习题 4 .设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ (I);$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ (II); $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ (III), 若$r(\mathrm{I})=3,r(\mathrm{II})=4$, 求证$r(\mathrm{III})=4$.

证 详细证明见本章例3.1.6.

总习题 5 .设n维向量α_1,α_2线性无关, 且α_3,α_4线性无关, 若α_1,α_2与α_3,α_4正交, 求证α_1, α_2, α_3, α_4线性无关.

证 用施密特正交化方法, 由α_1,α_2可得两两正交的单位向量组β_1,β_2, 使β_1,β_2与α_1, α_2等价, 且与α_3,α_4正交. 同样, 由α_3,α_4得两两正交的单位向量组β_3,β_4, 使α_3, α_4与β_3, β_4等价, 且与α_1,α_2正交, 因此β_1,β_2与β_3,β_4正交. 即$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$是两两正交的单位向量组, 且与$\alpha_1$, α_2, α_3, α_4等价.

所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=4$, 即$\alpha_1$, α_2, α_3, α_4线性无关.

总习题 6 .设A是$n\times m$矩阵, B是$m\times n$矩阵, I是n阶单位矩阵, 若$AB=I$, 求证A的行向量组线性无关.

证 要证A的行向量组线性无关, 即证$r(A)=n$.

因$r(A)\le\min\{n,m\}\le n$, 又因$r(A)\ge r(AB)=r(I)=n$, 故$r(A)=n$.

总习题 7 .设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\in\mathbf{R}^{n\times r}$, 且$r(A)=r$, 若$\beta\in\mathbf{R}^n$是$A^Tx=\mathbf{0}$的非零解, 求证$\alpha_1$, α_2, $\cdots,\alpha_r,\beta$线性无关.

证 假设α_1, α_2, $\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关, 则

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{pmatrix},$$

因$A^T\beta=\mathbf{0}$, 则$\beta^T\beta=(k_1,k_2,\cdots,k_r)A^T\beta=\mathbf{0}$, 因$\beta$是实向量, 所以$\beta=\mathbf{0}$, 与已知$\beta$非零矛盾.

练习

1. 求证如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}\tag{3.2.5}$$

的解全是方程

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$$

的解, 则$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$**可由**

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ \ i=1,\cdots,s$$

线性表出.

证 设

$$A=(a_{ij})_{s\times n},\quad B=\begin{pmatrix}A\\\beta\end{pmatrix},$$

其中$\beta=(b_1,\cdots,b_n)$. 再设$Ax=\mathbf{0}$的解空间为$W_1,Bx=\mathbf{0}$的解空间为W_2, 则$W_2\subseteq W_1$. 又$Ax=\mathbf{0}$的解都是$\beta x=\mathbf{0}$的解, 故$W_1\subseteq W_2$, 从而$W_1=W_2$, 于是$r(A)=r(B)$, 故β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出.

2. 证明n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix}\neq 0.$$

证 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是$|A|\neq 0$.
又由

$$A^TA=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix},$$

所以有

$$D=|A^TA|=|A^T||A|=|A|^2$$

这说明$|A|\neq 0$与$D\neq 0$等价, 由此得出$D\neq 0$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件.

3. 设α为n维非零实的列向量, 证明$A=I-\dfrac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T$为正交阵.

证 因为A是实矩阵, 且

$$A^T=(I-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T)^T=I^T-\frac{2}{\alpha^T\alpha}(\alpha\alpha^T)^T=I-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T,$$

$$\begin{aligned} A^TA&=(I-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T)(I-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T) \\ &=I-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T+\frac{4}{(\alpha^T\alpha)^2}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\ &=I \end{aligned}$$

所以A为正交阵.

4. 设α 是n维欧氏空间V中的一个非零向量, V中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$满足

$$(\alpha_i,\alpha)>0,\ i=1,\cdots,n$$
$$(\alpha_i,\alpha_j)\leq 0,\ i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n,$$

证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

证 假若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关, 则存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$$

不妨设$k_1,\cdots,k_r>0$, $k_{r+1},\cdots,k_n<0$ (向量组可重新编号). 令

$$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=-(k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\alpha_n)$$

$$(\beta,\beta)=(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i,-\sum_{j=r+1}^{n}k_j\alpha_j)=-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}k_ik_j(\alpha_i,\alpha_j)\le 0,$$

又$(\beta,\beta)\ge 0$, 故有$\beta=\mathbf{0}$. 所以$(\beta,\alpha)=0$. 但

$$(\beta,\alpha)=(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i,\alpha)=\sum_{i=1}^{r}k_i(\alpha_i,\alpha)>0,$$

产生矛盾, 假设不成立.

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的一个基础解系, 证明:$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是该方程组的一个基础解系.

证 由齐次方程组解的性质知, $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$都是方程组的解, 故只需证这三个解线性无关.

设有数k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=\mathbf{0},$$

即有

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=\mathbf{0}.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 所以有

$$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$$

解得只有零解$k_1=k_2=k_3=0$, 即得证$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关, 所以是$Ax=\mathbf{0}$的一个基础解系.

6. 设A,B是正交阵, 且$|A|+|B|=0$, 证明$|A+B|=0$.

证 由题设知, $\dfrac{|A|}{|B|}=-1$, 因B是正交阵, 故B可逆且B^{-1}也是正交阵, 所以AB^{-1}也是正交阵. 由

$$|AB^{-1}|=\frac{|A|}{|B|}=-1$$

知, -1是AB^{-1}的特征值, 故有

$$|-I-AB^{-1}|=0.$$

又$|-I-AB^{-1}|=|-B-A||B^{-1}|=(-1)^n|B^{-1}||A+B|=0$, 因$|B^{-1}|\neq 0$, 所以$|A+B|=0$.

7. 设$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$,并且

$$A^{s-1}\neq 0,\ 1\leqslant s\leqslant n,$$

但$A^s=\mathbf{0}$,求证在$\mathbf{R}^n$中存在非零列向量α,使得$\alpha, A\alpha,\cdots,A^{s-1}\alpha$线性无关.

证 因为$A^{s-1}\neq \mathbf{0}$, 故至少有标准单位向量e_i, 使得

$$A^{s-1}e_i\neq \mathbf{0};$$

否则, 设

$$A^{s-1}e_j=\mathbf{0},\ j=1,\cdots,n,$$

则

$$A^{s-1}(e_1,\cdots,e_n)=(A^{s-1}e_1,\cdots,A^{s-1}e_n)=\mathbf{0},$$

即$A^{s-1}=\mathbf{0}$, 矛盾. 令$\alpha=e_i$, 即有$A^{s-1}\alpha\neq\mathbf{0}$.

下证α使得$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{s-1}\alpha$线性无关. 令

$$k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{s-1}A^{s-1}\alpha=\mathbf{0}, \tag{3.2.2}$$

式(3.2.2)两边同乘以A^{s-1}, 并注意到$A^s=\mathbf{0}$得$k_0A^{s-1}\alpha=\mathbf{0}$. 由$A^{s-1}\alpha\neq\mathbf{0}$可知$k_0=0$, 从而式(3.2.2) 变为

$$k_1A\alpha+\cdots+k_{s-1}A^{s-1}\alpha=\mathbf{0}.$$

再将上式两边同乘以A^{s-2}可得$k_1=0$. 同理有

$$k_2=\cdots=k_{s-1}=0,$$

所以$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{s-1}\alpha$线性无关.

8. 设$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$是方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系, 将之扩充为$\mathbf{R}^n$的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 令$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$, 证明$AB$的列向量组线性无关.

证

$$AB=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_r)$$

如果$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_r$线性相关, 则

(1) 当$r=1$时, 由题设知$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$Ax=\mathbf{0}$的基础解系, 由假设$A\alpha_1$线性相关, 可得$A\alpha_1=\mathbf{0}$, 即$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是$Ax=\mathbf{0}$ 的线性无关的解, 故而基础解系所含向量的个数$\geq n$, 矛盾. 所以$A\alpha_1$线性相关.

(2) 当$r > 1$时, 由假设$A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_r$线性相关知, 其中至少有一个向量可由其余向量线性表出, 不妨设

$$A\alpha_1 = k_2 A\alpha_2 + \cdots + k_r A\alpha_r,$$

故

$$A(\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_r\alpha_r) = \mathbf{0},$$

这说明$\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_r\alpha_r$是$Ax = \mathbf{0}$的解, 因此有

$$\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_r\alpha_r = k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \cdots + k_n\alpha_n,$$

即

$$1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_r\alpha_r - k_{r+1}\alpha_{r+1} - k_{r+2}\alpha_{r+2} - \cdots - k_n\alpha_n = \mathbf{0},$$

由此可得$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关, 与已知条件矛盾.

所以$A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_r$线性无关.

第四章　线性方程组

§4.1　例题

例4.1.1. 证明线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_1 = a_3 \end{cases}$有解的充分必要条件为$a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

证　对线性方程组的增广矩阵$(A, \mathbf{b})$作初等行变换化为行阶梯形:

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & a_2 \\ -1 & 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_1 + a_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 + a_1 + a_3 \end{pmatrix},$$

故线性方程组有解$\Leftrightarrow r(A) = r(A, \mathbf{b}) \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

例4.1.2. 设A是一个$m \times n$矩阵, 求证存在非零的$n \times s$矩阵B, 使得$AB = \mathbf{0}$的充要条件是$r(A) < n$.

证　必要性. 由$AB = \mathbf{0}$知B的列向量组是$Ax = \mathbf{0}$的解, 因$B \neq \mathbf{0}$, 所以$Ax = \mathbf{0}$有非零解, 故$r(A) < n$.

充分性. 因为$r(A) < n$, 故$Ax = \mathbf{0}$有非零解x_0, 设

$$x_0 = (x_1, \cdots, x_n)^T \neq \mathbf{0}.$$

取

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

则$B \neq \mathbf{0}$且$AB = \mathbf{0}$.

例4.1.3. 设整系数线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{3.1.3}$$

对任意的$b_1, \cdots, b_n$均有整数解, 证明其系数行列式必为± 1.

证 令$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, 对$\mathbf{b}$依次取单位矩阵的各列$e_1,e_2,\cdots,e_n$, 所得的解依次为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 令

$$D=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),$$

则$AD=I$, 故$|A||D|=1$, 又因A,D均为整数矩阵, 从而有$|A|$与$|D|$均为整数, 所以$|A|=1$或-1.

例4.1.4. 设$\mathbf{0}\neq\mathbf{b}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$, $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$且$r(A)=r$, 若$\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}$为$Ax=\mathbf{b}$的解向量组的一个极大线性无关组, 求证

$$\beta_2-\beta_1,\beta_3-\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}-\beta_1$$

为其导出组的基础解系.

证 显然, $\beta_2-\beta_1,\beta_3-\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}-\beta_1$为$Ax=\mathbf{0}$的解向量. 若

$$\sum_{i=2}^{n-r+1}k_i(\beta_i-\beta_1)=\mathbf{0},$$

则

$$-\sum_{i=2}^{n-r+1}k_i\beta_1+\sum_{i=2}^{n-r+1}k_i\beta_i=\mathbf{0},$$

又$\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}$为$Ax=\mathbf{b}$的解向量组的一个极大线性无关组, 故

$$k_i=0\quad(i=2,3,\cdots,n-r+1).$$

所以$\beta_2-\beta_1,\beta_3-\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}-\beta_1$线性无关. 又$r(A)=r$, 故$\beta_2-\beta_1,\beta_3-\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}-\beta_1$是$Ax=\mathbf{0}$的基础解系.

例4.1.5. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0\end{cases}\tag{4.1.1}$$

的系数矩阵为$A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$, M_i是A划去第i列剩下的$(n-1)\times(n-1)$矩阵的行列式. 求证

(1) $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)^T$是(4.1.1)的一个解;

(2) 若$r(A)=n-1$, 则(4.1.1)的解都是$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)^T$的倍数.

证 (1)易知

$$0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}=a_{11}M_1-a_{12}M_2+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_n.$$

又

$$a_{k1}M_1-a_{k2}M_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_{kn}M_n=0,\ k=2,\cdots,n-1.$$

这就说明

$$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$$

是(4.1.1)的一个解.

(2) 若$r(A)=n-1$, 则(4.1.1)的基础解系含一个线性无关的解向量. 又

$$\beta=(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$$

是(4.1.1)的解向量且非零. 事实上, 由$r(A)=n-1$知, A中至少有一个$n-1$阶子式不为零, 故β是(4.1.1)的一个基础解系, 从而(4.1.1)的解空间为$L(\beta)$, 即(4.1.1)的解都是β的倍数.

例4.1.6. 设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的$s$个解, $k_1,k_2,\cdots,k_s$为实数. 证明:

(1) 当$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$时, $x_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$是$Ax=\mathbf{b}$的解;

(2) 当$k_1+k_2+\cdots+k_s=0$时, $x_1=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$是$Ax=\mathbf{0}$的解.

证 设$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$, 则有

$$Ax=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\mathbf{b},$$

从而有

(1)当$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$时, $x_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$满足$Ax_0=\mathbf{b}$, 即$x_0$为$Ax=\mathbf{b}$的解;

(2)当$k_1+k_2+\cdots+k_s=0$时, $x_1=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$满足$Ax_1=\mathbf{0}$, 即$x_1$为$Ax=\mathbf{0}$的解.

例4.1.7. 设x为n维列向量, 证明线性方程组$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$有公共非零解的充要条件是$r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}<n$.

证 方程组$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$有公共非零解$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=\mathbf{0}$有非零解, 而$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=\mathbf{0}$有非零解当且仅当系数矩阵的秩小于未知量个数$n$, 即$r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} < n$.

例4.1.8. *设齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$和$Bx=\mathbf{0}$, 其中A,B分别为$s\times n$和$m\times n$矩阵, 则*

(1) *若$Ax=\mathbf{0}$的解都是$Bx=\mathbf{0}$的解, 则$r(A)\geqslant r(B)$;*

(2) *若$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$同解, 则$r(A)=r(B)$;*

(3) *若$Ax=\mathbf{0}$的解都是$Bx=\mathbf{0}$的解, 并且$r(A)=r(B)$, 则$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$同解.*

证 设W_1与W_2分别为$Ax=\mathbf{0}$和$Bx=\mathbf{0}$的解空间, 则

$$\dim W_1=n-r(A),\dim W_2=n-r(B). \tag{4.1.2}$$

(1) 由假设知$W_1\subseteq W_2$, 则$\dim W_1\leqslant \dim W_2$. 由式(4.1.2)可得$r(A)\geqslant r(B)$.

(2) 由于$W_1=W_2$, 则由式(4.1.2)即得$r(A)=r(B)$.

(3) 由于$W_1\subseteq W_2$, 又由式(4.1.2)可知$\dim W_1=\dim W_2$, 从而$W_1=W_2$, 即$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$同解.

例4.1.9. *设A为$m\times n$实矩阵, 证明: $r(A)=r(A^TA)=r(AA^T)$.*

证 (1) 只需证齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$与$A^TAx=\mathbf{0}$同解. 显然, $Ax=\mathbf{0}$的解必为$A^TAx=\mathbf{0}$的解.

设x_0为$A^TAx=\mathbf{0}$的任意一个实解, 则$x_0^TA^TAx_0=0$, 即

$$(Ax_0)^T(Ax_0)=0. \tag{4.1.3}$$

由于A为实方阵, 故Ax_0为n维实向量, 从而由(4.1.3)式成立得$Ax_0=\mathbf{0}$. 这就说明$A^TAx=\mathbf{0}$的解必为$Ax=\mathbf{0}$的解. 综上, 于是有$r(A)=r(A^TA)$, 故有

$$r(A^T)=r((A^T)^TA^T)=r(AA^T),$$

所以

$$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T).$$

例4.1.10. *设$A\in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m\geq n$, 若方程组$Ax=\mathbf{b}$有唯一解, 证明A^TA可逆且唯一解为$x=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$.*

证 因方程组$Ax=\mathbf{b}$有唯一解, 故有$r(A)=n$, 所以$r(A^TA)=n$, 即A^TA可逆. 设$Ax=\mathbf{b}$的唯一解为x_0, 则有$(A^TA)x_0=A^T\mathbf{b}$, 由A^TA可逆, 得$x_0=(A^TA)^{-1}\mathbf{b}$, 得证.

§4.2 习题中的证明题

习题 4.2.2 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的基础解系, 向量$\beta$不是$Ax=\mathbf{0}$的解, 证明向量组$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_s$线性无关.

证 设存在一组数$k_0,k_1,\cdots,k_s$使得

$$k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_s(\beta+\alpha_s)=\mathbf{0},$$

即

$$(k_0+k_1+\cdots+k_s)\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}. \tag{4.2.1}$$

等式两边同时左乘矩阵A,由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的解, 得

$$A((k_0+k_1+\cdots+k_s)\beta)=\mathbf{0}.$$

由向量β不是$Ax=\mathbf{0}$的解知,

$$k_0+k_1+\cdots+k_s=0, \tag{4.2.2}$$

代入(4.2.1)有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0},$$

再由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性无关性得$k_1=\cdots=k_s=0$, 又由(4.2.2)知

$$k_0=k_1=\cdots=k_s=0,$$

从而得证向量组$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_s$线性无关.

习题 4.3.4 设η_0为非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的一个特解, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为其导出组$Ax=\mathbf{0}$的基础解系, 证明$\eta_0,\eta_0+\alpha_1,\eta_0+\alpha_2,\cdots,\eta_0+\alpha_s$是$Ax=\mathbf{b}$的所有解向量的一个极大线性无关组.

证 设η是方程组$Ax=\mathbf{b}$的任一解, 则

$$\begin{aligned}\eta&=\eta_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\\&=(1-k_1-k_2-\cdots-k_s)\eta_0+k_1(\eta_0+\alpha_1)+k_2(\eta_0+\alpha_2)+\cdots+k_s(\eta_0+\alpha_s).\end{aligned}$$

即η可由$\eta_0,\eta_0+\alpha_1,\eta_0+\alpha_2,\cdots,\eta_0+\alpha_s$线性表出.

下证$\eta_0,\eta_0+\alpha_1,\eta_0+\alpha_2,\cdots,\eta_0+\alpha_s$线性无关.

设有数$k_0,k_1,\cdots,k_s$, 使得

$$k_0\eta_0+k_1(\eta_0+\alpha_1)+k_2(\eta_0+\alpha_2)+\cdots+k_s(\eta_0+\alpha_s)=\mathbf{0},$$

则

$$(k_0+k_1+\cdots+k_s)\eta_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0},$$

如果$k_0+k_1+\cdots+k_s\neq 0$, 则η_0可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出, 即$\eta_0$是导出组的解, 这与$\eta_0$是$Ax=\mathbf{b}$的解矛盾. 故

$$k_0+k_1+\cdots+k_s=0, \tag{4.2.3}$$

因而有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0},$$

又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 故$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$, 由式(4.2.3)得$k_0=0$. 所以$\eta_0,\eta_0+\alpha_1,\eta_0+\alpha_2,\cdots,\eta_0+\alpha_s$是方程组的所有解向量的一个极大线性无关组.

习题 4.3.5 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的解, 证明$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ (其中$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$)也是$Ax=\mathbf{b}$的解.

证 此题证明参见例4.1.6.

总习题3 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1, \end{cases}$$

有3个线性无关的解,

(1) 证明方程组系数矩阵的秩是2;

(2) 确定a,b的值并求方程组的通解.

证 (1) 显然方程组的系数矩阵A中有2阶非零子式, 故$r(A)\geq 2$. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是方程组3个线性无关的解, 则$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$是其导出组的解. 若

$$\sum_{i=2}^{3}k_i(\alpha_i-\alpha_1)=\mathbf{0},$$

则

$$-\sum_{i=2}^{3}k_i\beta_1+\sum_{i=2}^{3}k_i\beta_i=\mathbf{0},$$

故

$$k_i=0\quad(i=2,3).$$

所以$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$线性无关, 即导出组的基础解系至少含2个向量. 因此$r(A)\geq 4-2=2$, 所以$r(A)=2$.

(2)对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & 1+a \end{pmatrix},$$

因方程组有解且$r(A)=2$, 所以

$$\frac{-1}{1-a}=\frac{1}{3-a}=\frac{-5}{b-a}=\frac{3}{1+a}$$

解得$a=2,b=-3$.

此时增广矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1=-2x_3+4x_4+2 \\ x_2=x_3-5x_4-3 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases},$$

故方程组的通解为

$$x=(2,-3,0,0)^T+k_1(-2,1,0,0)^T+k_2(4,-5,0,0)^T.$$

其中k_1,k_2为任意常数.

总习题4 已知n元齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的系数行列式$|A|=0$, 且A中元素a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq 0$, 证明$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^T$是此线性方程组的一个基础解系.

证 由$|A|=0,A_{ij}\neq 0$知,$r(A)=n-1$, 故$Ax=\mathbf{0}$的基础解系中只含有一个向量, 又$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^T\neq\mathbf{0}$,故只需证明$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^T$是方程组的解即得证.

由伴随矩阵A^*的定义及$AA^*=|A|I$知,

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=|A|=0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{ij}=0,k\neq i,$$

即$A(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^T=\mathbf{0}$, 得证.

总习题5 设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ i=1,2,\cdots,s$, 求证对任意$b_1,b_2,\cdots,b_s$, 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s, \end{cases}$$

都有解的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

证 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

则方程组可表为$Ax=\mathbf{b}$.

充分性. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 则

$$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s,$$

因$r(A)\le r(A,\mathbf{b})\le s$, 故$r(A,\mathbf{b})=s=r(A)$. 所以对任意$b_1,b_2,\cdots,b_s$, 线性方程组都有解.

必要性. 已知对任意s维列向量$\mathbf{b}$, 线性方程组$Ax=\mathbf{b}$都有解, 即$\mathbf{b}$可由A的列向量组线性表出. 因此s维标准单位向量组$e_1,e_2,\cdots,e_s$可由A的列向量组线性表出. 故$s=r(e_1,e_2,\cdots,e_s)\le A$的列向量组的秩$=r(A)\le s$, 即$r(A)=s$, 因此$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(A)=s$, 所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

练习

1. 设A为$m\times n$矩阵, $r(A)=r$, 且$b_1,b_2,...,b_m$是m个不全为零的数, 如果有矩阵B满足

$$AB=\begin{pmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_m & b_m & \cdots & b_m \end{pmatrix},$$

证明:$r(B)\le n-r+1$.

证 设$\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_m)^T$, 建立非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$. 由$r(A)=r$知, 线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的解向量组的秩为$n-r+1$. 又由$AB=(\mathbf{b},\mathbf{b},...,\mathbf{b})$知, B的列向量都是$Ax=\mathbf{b}$的解向量, 所以

$$r(B)=B\text{的列向量组的秩}\le n-r+1.$$

2. 设η^*是非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的一个解, $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r}$是对应的齐次方程组的一个基础解系. 证明: (1) $\eta^*,\xi_1,...,\xi_{n-r}$线性无关; (2) $\eta^*,\eta^*+\xi_1,...,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

证 (1)用反证法. 若$\eta^*,\xi_1,...,\xi_{n-r}$线性相关, 则由于$\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r}$线性无关, 故$\eta^*$可由$\xi_1,...,\xi_{n-r}$线性表出, 即$\eta^*$是对应齐次线性方程组的解, 这与题设矛盾,

故$\eta^*,\xi_1,...,\xi_{n-r}$线性无关.

(2)用反证法. 若$\eta^*,\eta^*+\xi_1,...,\eta^*+\xi_{n-r}$线性相关, 则存在$n-r+1$个不全为零的数$k_0,k_1,...,k_{n-r}$使得

$$k_0\eta^*+k_1(\eta^*+\xi_1)+...+k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=\mathbf{0},$$

这样就得到

$$(k_0+k_1+...+k_{n-r})\eta^*+k_1\xi_1+...+k_{n-r}\xi_{n-r}=\mathbf{0},$$

由(1)已知$\eta^*,\xi_1,...,\xi_{n-r}$线性无关, 从而有$k_0=k_1=...=k_{n-r}=0$, 这与假设$k_0,k_1,...,k_{n-r}$不全为零矛盾, 故$\eta^*,\eta^*+\xi_1,...,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

3. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{4.2.4}$$

的系数矩阵A的秩等于矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩, 求证线性方程组(4.2.4)有解.

证 令$\mathbf{b}=(b_1,\cdots,b_n)^T$, 则由

$$r(A)\leqslant r(A,\mathbf{b})\leqslant r(B)=r(A)$$

知$r(A,\mathbf{b})=r(A)$, 故(4.2.4)有解.

4. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

证明：

(1) 若$Ay=\mathbf{b}$有解, 则$A^Tx=\mathbf{0}$的任一解必满足方程

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=0.$$

(2)$Ay=\mathbf{b}$有解的充要条件是

$$\begin{pmatrix} A^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.2.5}$$

无解(其中$\mathbf{0}$是$n\times 1$矩阵).

证

(1) 因$Ay=\mathbf{b}$有解, 所以存在$\mathbf{y}$, 使得$\mathbf{b}^T=y^TA^T$, 对$A^Tx=\mathbf{0}$的任一解x, 有

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=\mathbf{b}^Tx=y^TA^Tx=y^T\mathbf{0}=0$$

(2) 必要性. 由

$$\begin{pmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

知

$$r\begin{pmatrix} A^T\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T\ 1 \end{pmatrix}=r(A^T)+1.$$

已知$A\mathbf{y}=\mathbf{b}$有解, 即$r(A)=r(A,\mathbf{b})$, 从而$r(A^T)=r\begin{pmatrix} A^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix}$. 所以

$$r\begin{pmatrix} A^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} A^T\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T\ 1 \end{pmatrix}.$$

即(4.2.5)无解.

充分性. 已知(4.2.5)无解, 即

$$r\begin{pmatrix} A^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix}<r\begin{pmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T & 1 \end{pmatrix}=r(A^T)+1$$

因

$$r(A^T)\le r\begin{pmatrix} A^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix}<r(A^T)+1,$$

所以

$$r\begin{pmatrix} A^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix}=r(A^T),$$

即$r(A,\mathbf{b})=r(A)$, 所以$A\mathbf{y}=\mathbf{b}$有解.

5. 设$A\in\mathbf{R}^{n\times s}$, $n\leq s$, 证明: $r(A)=n\Leftrightarrow$ 对于任意$m\times n$矩阵B, 若$BA=\mathbf{0}$, 则$B=\mathbf{0}$.

证($\Leftarrow$) (反证法)若$r(A)<n$, 则方程组

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)A=\mathbf{0}$$

有非零解β, 即$\beta A=\mathbf{0}$, 但$\beta\neq\mathbf{0}$, 这与已知条件矛盾, 故$r(A)=n$.

($\Rightarrow$) 设

$$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}.$$

若$BA=\mathbf{0}$, 则$\beta_iA=\mathbf{0}$, $i=1,\cdots,m$. 由$r(A)=n$知齐次线性方程组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)A=\mathbf{0}$只有零解. 于是$\beta_i=\mathbf{0}$, $i=1,\cdots,m$, 即$B=\mathbf{0}$.

6. 设A是$m\times n$非零实矩阵, $\mathbf{b}$是$m\times 1$实矩阵, 求证线性方程组$A^TAx=A^T\mathbf{b}$一定有解.

证 因为

$$r(A^TA)=r(A),$$

$$r(A^TA)\leqslant r(A^TA,A^T\mathbf{b})=r(A^T(A,\mathbf{b}))\leqslant r(A^T),$$

所以$r(A^TA,A^T\mathbf{b})=r(A^TA)$, 故所给方程组有解.

第五章　矩阵的相似与相合

§5.1　例题

例5.1.1. 设A为n阶幂零矩阵. 证明A的特征值为零.

证　设λ为A的任一特征值, $x \neq \mathbf{0}$为相应的特征向量, 则$Ax = \lambda x$. 由此知, 存在自然数k使得$\lambda^k x = A^k x = \mathbf{0}$. 因为$x \neq \mathbf{0}$, 得$\lambda = 0$.

例5.1.2. 设A为n阶方阵. 证明A的特征多项式中的常数项等于$(-1)^n|A|$.

证　设A的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n.$$

则

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2(0)^2 + \cdots + a_n(0)^n \\ &= f_A(0) \\ &= |0I - A| \\ &= (-1)^n|A|. \end{aligned}$$

例5.1.3. 设μ不是n阶矩阵A的特征值. 证明向量x是A的一个特征向量当且仅当x是$(A-\mu I)^{-1}$的一个特征向量.

证　设向量x是A的相应于特征值λ的一个特征向量, 则$Ax = \lambda x$当且仅当

$$(A - \mu I)x = (\lambda - \mu)x.$$

因为μ不是A的特征值, 所以$(A-\mu I)$可逆, 于是$(A-\mu I)x = (\lambda-\mu)x$等价于

$$(A - \mu I)^{-1}x = \frac{1}{\lambda - \mu}x.$$

说明向量x是A的一个特征向量当且仅当x是$(A-\mu I)^{-1}$的一个特征向量.

例5.1.4. 设λ为n阶正交矩阵A的一个特征值. 证明$\frac{1}{\lambda}$也是A的一个特征值.

证　因为A为正交矩阵, 所以$A^TA = I$, 由此得$|A| = \pm 1$. 说明矩阵A非奇异, 故$\lambda \neq 0$. 设λ为n阶正交矩阵A的一个特征值, $x \neq \mathbf{0}$ 是相应的特征向量, 则

$$x = Ix = A^TAx = \lambda A^Tx$$

即有$A^Tx = \frac{1}{\lambda}x$. 说明$\frac{1}{\lambda}$ 是矩阵A^T的特征值, 但A 与A^T有相同的特征值, 故$\frac{1}{\lambda}$也是A的特征值.

例5.1.5. 证明:

(1) 若$\lambda \neq 0$ 是矩阵A的一个特征值, 则$\frac{1}{\lambda}|A|$是A^*的特征值;

(2) 若v 是矩阵A的一个特征向量, 则v也是A^*的特征向量.

证 (1) 设$Av = \lambda v,\ \ v \neq \mathbf{0}$, 则$A^*Av = \lambda A^*v$, 即$|A|v = \lambda A^*v$, 或$A^*v = \frac{1}{\lambda}|A|v$.

(2) 设$Av = \lambda v,\ \ v \neq \mathbf{0}$, 若$\lambda \neq 0$, 则由(1)知$v$也是$A^*$的特征向量; 现设$\lambda = 0$, 此时$Av = \mathbf{0}$. 若$r(A) \leq n-2$, 则$A^* = \mathbf{0}$, v是A^*的特征向量; 若$r(A) = n-1$, 则$Ax = \mathbf{0}$的解空间的维数为1, 因此v是此解空间的一个基. 另一方面, 我们有$A(A^*v) = \mathbf{0}$, 即A^*v是$Ax = \mathbf{0}$的一个解, 因此有数μ, 使得$A^*v = \alpha v$, 即v是A^*的特征向量.

注 (2)中用到的伴随矩阵的性质, 参见习题2.3.9.

例5.1.6. 若n阶矩阵A满足$A^2 = A$, 则称A为幂等矩阵. 证明幂等矩阵一定可以对角化.

证 只需证明A有n个线性无关的特征向量.

设λ是A的一个特征值, x是相应的特征向量. 则由$A^2 = A$得$\lambda^2 x = \lambda x$. 由于特征向量非零, 因此$\lambda^2 = \lambda$. 因此, 幂等矩阵的特征值只能为0或1.

设$r(A) = r$, 不妨设$r < n$. 则$Ax = \mathbf{0}$有$n-r$个线性无关的特征向量. 由此知, 0是A的一个特征值, 它对应有$n-r$个线性无关的特征向量. 又利用幂等矩阵的定义得, $A(I-A) = \mathbf{0}$, 因此$r(A) + r(I-A) \leq n$.

另一方面, $n = r(I) = r(I - A + A) \leq r(A) + r(I-A)$, 因此$r(I-A) = n - r$, 由此得$(I-A)x = \mathbf{0}$有$r$个线性无关的特征向量. 说明1是$A$ 一个特征值, 它对应有r个线性无关的特征向量.即A有n个线性无关的特征向量,知A可以对角化.

若$r = n$, 有上面的分析易知, $r(I-A) = 0$. 由此知A是单位矩阵, 因此A可以对角化.

例5.1.7. 证明实矩阵的复特征值共轭成对出现.

证 设A为实矩阵, x 是A相应于特征值λ的特征向量. 则$Ax = \lambda x$. 于是,

$$A\overline{x} = \overline{A}\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

说明$\overline{\lambda}$是A的特征值, 且$\overline{x}$是A的相应于$\overline{\lambda}$的特征向量.

例5.1.8. 设n阶矩阵A非奇异, α, β 为n维列向量. 证明

(1) $\det(I + \alpha\beta^T) = 1 + \beta^T\alpha$,

(2) $\det(A + \alpha\beta^T) = \det(A)(1 + \beta^T A^{-1}\alpha)$,

(3) 设$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$是矩阵$A$ 的特征值, 且α 是A的相应于λ_k 的特征向量, 则对任意n维列向量β, $A + \alpha\beta^T$的特征值为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + \beta^T\alpha, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n\}$.

证 (1) 对恒等式

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I+\alpha\beta^T & \alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \alpha \\ \mathbf{0} & 1+\beta^T\alpha \end{pmatrix}$$

两边取行列式, 即得结果.

(2) 注意到$A+\alpha\beta^T = A(I+A^{-1}\alpha\beta^T)$, 利用(1)即得.

(3) 利用(2), 我们有$A+\alpha\beta^T$的特征多项式为

$$\begin{aligned}
&\det(A+\alpha\beta^T-\lambda I) = \det(A-\lambda I+\alpha\beta^T) \\
&= \det(A-\lambda I)(1+\beta^T(A-\lambda I)^{-1}\alpha) \\
&= \left(\pm\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)\right)(1+\frac{\beta^T\alpha}{\lambda_k-\lambda}) \\
&= \left(\pm\prod_{i\neq k}(\lambda_i-\lambda)\right)(\lambda_k+\beta^T\alpha-\lambda)
\end{aligned}$$

由此即知, $A+\alpha\beta^T$的特征值为$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k+\beta^T\alpha,\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_n\}$.

例5.1.9. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是n阶矩阵A的$r(r>1)$个互异特征值, ξ_{i_1}, ξ_{i_2}, $\cdots$, $\xi_{i_{m_i}}$是对应于λ_i 的线性无关的特征向量, $i=1,2,\cdots,r$. 证明由这些特征向量构成的向量组$\xi_{1_1},\xi_{1_2},\cdots,\xi_{1_{m_1}},\cdots,\xi_{r_1},\xi_{r_2},\cdots,\xi_{r_{m_r}}$ 线性无关.

证 设

$$\sum_{i=1}^{r}(k_{i_1}\xi_{i_1}+k_{i_2}\xi_{i_2}+\cdots+k_{i_{m_i}}\xi_{i_{m_i}}) = \mathbf{0}.$$

由于$\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_{m_i}}$是对应于$\lambda_i$ 的特征向量, 所以,

$$y_i = k_{i_1}\xi_{i_1}+k_{i_2}\xi_{i_2}+\cdots+k_{i_{m_i}}\xi_{i_{m_i}}$$

也是A对应于λ_i 的特征向量. 由定理**??**可知,

$$y_i=\mathbf{0},\ i=1,2,\cdots,r.$$

又$\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_{m_i}}$ 线性无关, 故

$$k_{i_1}=0,k_{i_2}=0,\cdots,k_{i_{m_i}}=0,\ i=1,2,\cdots,r.$$

即$\xi_{1_1},\xi_{1_2},\cdots,\xi_{1_{m_1}},\cdots,\xi_{r_1},\xi_{r_2},\cdots,\xi_{r_{m_r}}$ 线性无关.

注 本结果是教材定理5.1.1的进一步深化. 利用此结果及例5.1.10, 可以证明教材定理5.2.2.

例5.1.10. 设λ_0是n阶方阵A的一个特征值, 则特征多项式$f_A(\lambda)$中一定包含因子$(\lambda-\lambda_0)$. $f_A(\lambda)$中因子$(\lambda-\lambda_0)$的最高阶数称为λ_0的代数重数, 简称重数, 记为$a_A(\lambda_0)$. 齐次线性方程组$(\lambda_0 I-A)x=\mathbf{0}$ 的解空间的维数, 称为λ_0的几何重数, 记为$g_A(\lambda_0)$. 证明$g_A(\lambda_0)\le a_A(\lambda_0)$.

证 记$k=g_A(\lambda_0)$, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I-A)x=\mathbf{0}$ 的解空间的一组基. 则存在$n-k$ 个向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-k}$ 使得$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-k}\}$ 构成空间C^n的一组基. 定义矩阵S为

$$S=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-k})=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,R)$$

其中R 为由向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-k}$ 构成的$n\times(n-k)$ 矩阵. 由S的构造知, S 是非奇异的. 于是由相似矩阵具有相同的特征多项式, 我们有$f_A(\lambda)=f_{S^{-1}AS}(\lambda)$. 其次,

$$\begin{aligned}&(e_1,e_2.\cdots,e_n)=I_n\\&=S^{-1}S\\&=S^{-1}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,R)\\&=(S^{-1}\xi_1,S^{-1}\xi_2,\cdots,S^{-1}\xi_k,S^{-1}R)\end{aligned}$$

因此有$S^{-1}\xi_i=e_i$, $1\le i\le k$. 于是,

$$\begin{aligned}&S^{-1}AS=S^{-1}A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,R)\\&=S^{-1}(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_k,AR)\\&=S^{-1}(\lambda_0\xi_1,\lambda_0\xi_2,\cdots,\lambda_0\xi_k,AR)\\&=(\lambda_0S^{-1}\xi_1,\lambda_0S^{-1}\xi_2,\cdots,\lambda_0S^{-1}\xi_k,S^{-1}AR)\\&=(\lambda_0e_1,\lambda_0e_2,\cdots,\lambda_0e_k,S^{-1}AR)\end{aligned}$$

令T 为由$S^{-1}AR$的最后$n-k$行构成的$n-k$阶方阵, 则由$S^{-1}AS$ 的结构可得$f_A(\lambda)=f_{S^{-1}AS}(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^kf_T(\lambda)$. 由此可得$g_A(\lambda_0)\le a_A(\lambda_0)$.

§5.2 习题中的证明题

习题5.1.7. 设

$$T=\begin{pmatrix}A&B\\\mathbf{0}&C\end{pmatrix},$$

其中A与C都是方阵. 证明A与C的特征值就是T的特征值.

证 由分块矩阵行列式的性质知,

$$|\lambda I-T|=|\lambda I-A||\lambda I-C|.$$

由此可知, 若λ 是A的特征值, 则$|\lambda I-A|=0$, 从而$|\lambda I-T|=0$, 即λ 也是T的特征值. 同理, C的特征值也是T的特征值.

习题5.1.8. 设n阶矩阵A满足$A^2=A$, 证明

(1) A的特征值只能是1或0;

(2) $A+I$可逆.

证 (1) 参见例5.1.6.

(2) 由(1), $A+I$的特征值只能是1或2, 因此, $A+I$可逆.

习题5.1.9. 设λ_1,λ_2是n阶矩阵A的两个不同的特征值, ξ_1,ξ_2分别是A的属于λ_1, λ_2的特征向量, 证明$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量.

证 用反证法. 设$\xi_1+\xi_2$是A的属于λ的特征向量, 则$A(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)$. 由题意, $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$, $A\xi_2=\lambda_2\xi_2$. 因此我们有$(\lambda-\lambda_1)\xi_1+(\lambda-\lambda_2)\xi_2=\mathbf{0}$. 由于属于不同特征值的特征向量线性无关, 我们有$\lambda-\lambda_1=0$, 且$\lambda-\lambda_2=0$. 这与λ_1,λ_2是n阶矩阵A的两个不同的特征值矛盾.

习题5.2.4. 三阶方阵A的行列式$|A|=-1$, 且三维向量ξ_1,ξ_2 是齐次线性方程组$(A-I)x=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 证明A可对角化.

证 由于向量ξ_1,ξ_2 是齐次线性方程组$(A-I)x=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 所以ξ_1,ξ_2 线性无关, 且ξ_1,ξ_2是A的属于$\lambda=1$的特征向量. 同时可知, A至少有两个特征值是1. 而三阶方阵A的行列式$|A|=-1$, 所以A的三个特征值是$1,1,-1$. 另外, A的属于$\lambda=-1$的特征向量与ξ_1,ξ_2线性无关, 由此知三阶方阵A有三个线性无关的特征向量, 所以A可对角化.

习题5.2.5. 设矩阵A与B相似, 矩阵C与D相似. 证明

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}.$$

证 矩阵A与B相似, 则存在矩阵P使得$P^{-1}AP=B$. 矩阵C与D相似, 则存在矩阵Q使得$Q^{-1}CQ=D$. 令

$$T=\begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix},$$

则

$$T^{-1}\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}.$$

总习题10. 设矩阵A是一个实对称矩阵, 其特征值为

$$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n.$$

证明

$$\lambda_1 = \min_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx},\quad \lambda_n = \max_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}.$$

证 矩阵A是实对称矩阵, 其特征值为

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n.$$

则存在正交矩阵P使得$A = P^T\Lambda P$, 其中

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

于是对任意$x \neq \mathbf{0}$, 令$y = Px$, 则$y \neq \mathbf{0}$, 且有

$$\frac{x^TAx}{x^Tx} = \frac{y^T\Lambda y}{y^Ty} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

因此

$$\lambda_1 \le \frac{x^TAx}{x^Tx} \le \lambda_n.$$

又若取$x = P^Te_1$, 有$\frac{x^TAx}{x^Tx} = \lambda_1$, 取$x = P^Te_n$, 有$\frac{x^TAx}{x^Tx} = \lambda_n$, 其中,

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T,\ e_n = (0, \cdots, 0, 1)^T.$$

于是

$$\lambda_1 = \min_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx},\quad \lambda_n = \max_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}.$$

总习题11. 已知n阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} b & a & & & \\ c & b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & b & a \\ & & & c & b \end{pmatrix},\quad ac > 0$$

证明A相似于对称矩阵:

$$S = \begin{pmatrix} b & \sqrt{ac} & & & \\ \sqrt{ac} & b & \sqrt{ac} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{ac} & b & \sqrt{ac} \\ & & & \sqrt{ac} & b \end{pmatrix}.$$

证 记
$$P = \operatorname{diag}\left(1, \sqrt{\frac{c}{a}}, \cdots, \left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^{n-1}\right).$$
则容易验证$P^{-1}AP = S$. 即A相似于对称矩阵S.

练习

1.求证实对称矩阵A的特征值都是实数.

证 设$A\alpha = \lambda\alpha, \lambda \in \mathbf{C}, \alpha \in \mathbf{C}^n$, 且$\alpha$非零, 有
$$\overline{\alpha}^T A\alpha = \lambda\overline{\alpha}^T \alpha.$$
由于$\overline{\alpha}^T A\alpha = (\overline{\overline{A}^T \alpha})^T \alpha$, 且$A$是实对称矩阵, 所以
$$\lambda\overline{\alpha}^T \alpha = \overline{\alpha}^T A\alpha = (\overline{A\alpha})^T \alpha = \overline{\lambda\alpha}^T \alpha = \overline{\lambda}\overline{\alpha}^T \alpha.$$
得$(\overline{\lambda} - \lambda)\overline{\alpha}^T \alpha = 0$. 因为$\alpha \neq 0$, 所以$\alpha^T \alpha \neq 0$, 有$\overline{\lambda} = \lambda$, 即$\lambda$为实数,得证.

总练习

1.(6分)设α为n维实列向量, 且$\alpha^T\alpha=2$, 求证$A=I-\alpha\alpha^T$为正交矩阵.

证 因为

$$\begin{aligned}AA^T&=(I-\alpha\alpha^T)(I-\alpha\alpha^T)^T=(I-\alpha\alpha^T)(I-\alpha\alpha^T)\\&=I-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T\\&=I-2\alpha\alpha^T+2\alpha\alpha^T=I.\end{aligned}$$

所以A为正交矩阵.

2.(6分)设A为复方阵，如果$A=-\overline{A^T}$, 则称A为反厄米特矩阵. 求证反厄米特矩阵A的特征值都是纯虚数或者零.

证 设$A\alpha=\lambda\alpha,\lambda\in\mathbf{C},\alpha\in\mathbf{C}^n$, 且$\alpha$非零, 有

$$\overline{\alpha}^TA\alpha=\lambda\overline{\alpha}^T\alpha.$$

由于$\overline{\alpha}^TA\alpha=(\overline{\overline{A}^T\alpha})^T\alpha$, 且$A$是反厄米特矩阵, 所以

$$\lambda\overline{\alpha}^T\alpha=\overline{\alpha}^TA\alpha=(\overline{-A\alpha})^T\alpha=-\overline{\lambda\alpha}^T\alpha=-\overline{\lambda}\overline{\alpha}^T\alpha.$$

得$(\overline{\lambda}+\lambda)\overline{\alpha}^T\alpha=0$. 因为$\alpha\neq0$, 所以$\alpha^T\alpha\neq0$, 有$\overline{\lambda}=-\lambda$, 即$\lambda$为纯虚数或者零,得证.

3.(6分)设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2k-1},\alpha_{2k}$ 线性无关.

(1) (3分)求证向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k},\alpha_{2k}+\alpha_1$线性相关;

(2) (3分)求证$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k},\alpha_{2k}+\alpha_1)=2k-1$.

证 (1)因为$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+(\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k})-(\alpha_{2k}+\alpha_1)=\mathbf{0}$, 所以根据线性相关定义知$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k},\alpha_{2k}+\alpha_1$ 线性相关.

(2) 如果

$$l_1(\alpha_1+\alpha_2)+l_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+l_{2k-1}(\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k})=\mathbf{0},$$

其中$l_1,l_2,\cdots,l_{2k-1}$是数. 可得

$$l_1\alpha_1+(l_1+l_2)\alpha_2+\cdots+(l_{2k-2}+l_{2k-1})\alpha_{2k-1}+l_{2k-1}\alpha_{2k}=\mathbf{0},$$

根据条件$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2k-1},\alpha_{2k}$线性无关得

$$l_1=l_1+l_2=\cdots=l_{2k-2}+l_{2k-1}=l_{2k-1}=0,$$

于是所有$l_i=0$, 得$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}$ 线性无关, 从而

$$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k},\alpha_{2k}+\alpha_1)=2k-1.$$

4.(6分) 设A, B为n阶正交矩阵,且$|A| = -|B|$, 求证$|A+B| = 0$.

证 由条件$|A| = -|B|$有$|A|\cdot|B^{-1}| = -1$, 又B为正交矩阵, 所以$|B^{-1}| = |B^T| = |B|$. 于是$|AB| = |A|\cdot|B| = -1$. 因为

$$|A+B| = |A(B^{-1}+A^{-1})B| = |A|\cdot|B|\cdot|B^{-1}+A^{-1}|,$$

且$A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T$,从而

$$|A+B| = |AB|\cdot|A^T+B^T| = -|(A+B)^T| = -|A+B|.$$

由此有$|A+B| = 0$.

5.(6分) 设α, β是三维列向量, 且$A = \alpha\alpha^T - \beta\beta^T$.

(1)(3分)求证$r(A) \leq 2$;

(2)(3分)若α, β线性相关，求证$r(A) < 2$.

证 (1) 首先有$r(\alpha\alpha^T), r(\beta\beta^T) \leq 1$, 所以

$$r(A) = r(\alpha\alpha^T - \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq 2.$$

(2) 不妨设$\alpha = k\beta$, 则有$A = (k^2-1)\beta\beta^T$, 所以

$$r(A) = r((k^2-1)\beta\beta^T) \leq 1 < 2.$$

6.(6分) 设A为3阶矩阵, α_1, α_2为A的分别属于特征值$-1, 1$的特征向量, 向量α_3满足$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1)(3分)求证$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关;

(2)(3分)令$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求$P^{-1}AP$.

证 (1) 如果

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}(\text{其中}k_1, k_2\text{是数}), \qquad (1)$$

则有

$$\begin{aligned} A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) &= k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 \\ &= -k_1\alpha_1 + (k_2+k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

即有

$$-k_1\alpha_1 + (k_2+k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \qquad (2)$$

同理可得

$$k_1\alpha_1 + (k_2+2k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

注意α_1,α_2为不同特征值下特征向量, 所以线性无关, 从而$\alpha_3\neq\mathbf{0}$. 式(3)减去式(1)得$2k_3\alpha_2=\mathbf{0}$, 得$k_3=0$, 同理可得$k_1=k_2=0$, 由此知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(2)根据

$$A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$$

得$AP=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 所以有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

7.(6分) 设A为n阶对称矩阵, 如果$A+I$为正交矩阵, 求证$r(A)+r(A+2I)=n$.

证 (1) 因为$A+I$为n阶正交对称矩阵, 所以$A+I=(A+I)^T=(A+I)^{-1}$, 得$(A+I)^2=I$, 由此有$A(A+2I)=\mathbf{0}$. 根据第一章内容可证结论.

8.(6分) 设n元非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$满足$r(A)=r(A,\mathbf{b})=n-2$, 且α,β,γ为线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的线性无关解,求证$x=\alpha+k_1(\alpha-r)+k_2(\beta-\gamma)(k_1,k_2$为任意常数)为方程组$Ax=\mathbf{b}$的通解。

证 因为α,β,γ是线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的解，所以

$$\alpha-r,\quad \beta-\gamma,$$

是$Ax=\mathbf{0}$的解. 又α,β,γ线性无关，则$\alpha-r,\beta-\gamma$线性无关, 这是因为, 如果有数k_1,k_2使

$$k_1(\alpha-r)+k_2(\beta-\gamma)=\mathbf{0},$$

则有

$$k_1\alpha+k_2\beta+(-k_1-k_2)\gamma=\mathbf{0}.$$

由于α,β,γ线性无关，可知$k_1=k_2=-(k_1+k_2)=0$,即$\alpha-r,\beta-\gamma$线线性无关. 另一方面，由$r(A)=r(A,\mathbf{b})=n-2$可知，$Ax=\mathbf{0}$基础解系含有$n-(n-2)=2$ 个向量，因此$\alpha-r,\beta-\gamma$是$Ax=\mathbf{0}$的基础解系，从而$Ax=\mathbf{b}$的通解为

$$\alpha+k_1(\alpha-r)+k_2(\beta-\gamma)(k_1,k_2\text{为任意常数}).$$

9.(6分)设α为n维实列向量, 且$\alpha^T\alpha=k$, 试确定k为何值时矩阵$A=I+\alpha\alpha^T$为正交矩阵.

解 因为

$$AA^T=(I+\alpha\alpha^T)(I+\alpha\alpha^T)^T=(I+\alpha\alpha^T)(I+\alpha\alpha^T)$$

$$\begin{aligned}&=I+2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T\\&=I-2\alpha\alpha^T+k\alpha\alpha^T=I+(k-2)\alpha\alpha^T.\end{aligned}$$

而A为正交矩阵的充分必要条件是$AA^T=I$, 得A为正交矩阵的充分必要条件为$k-2=0$，即$k=2$.

10.(6分)设β是线性方程组$Ax=\mathbf{b}(\mathbf{b}\neq\mathbf{0})$的一个解, $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的基础解系. 求证$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性无关.

证 由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的基础解系, 因此$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$线性无关. 如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性相关, 则$\beta$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$线性表示, 从而$\beta$为齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的解, 得$A\beta=\mathbf{0}$, 与$\beta$是线性方程组$Ax=\mathbf{b}(\mathbf{b}\neq\mathbf{0})$的一个解矛盾. 于是$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性无关.