线性代数单元练习五（矩阵对角化）

一、单项选择题

1．已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0，± 1，则下列结论中不正确的是(　　　)

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆的　　　　　（B）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和为 0

(C) 1 和 -1 所对应的特征向量是正交的　(D) $\boldsymbol{Ax=0}$ 的基础解系由一个向量组成

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值 λ_1 与 λ_2 所对应的特征向量分别为 α_1 与 α_2，并且 $\lambda_1=-\lambda_2\neq 0$，则(　　　)

(A) $\alpha_1+\alpha_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量　　　　(B) $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

(C) $\alpha_1+\alpha_2$ 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量　　　　(D) $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $\boldsymbol{A}^3$ 的特征向量

3．设 $\boldsymbol{A,B}$ 为 n 阶矩阵，以下命题：①$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价；② $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似；③ $\boldsymbol{A,B}$ 的行向量组等价；有(　　　)

(A) ①⇒②⇒③　　　　　　（B）②⇒①⇒③

(C) ③⇒②⇒①　　　　　　(D) 以上均不对

4．设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=-3,\lambda_3=5$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应于 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 ξ_3，则 $\boldsymbol{A}^*$ 对应于特征向量 ξ_3 的特征值是(　　　　)

(A) 5　　　(B) -3　　　(C) 1　　　(D) 15

5．下列命题中正确的是(　　　　)

（A） n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价的必要条件是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

（B） n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价的充分条件是 $\boldsymbol{Ax=0}$ 与 $\boldsymbol{Bx=0}$ 同解.

（C） n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{A,B}$ 具有相同的特征值.

（D） n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是特征多项式相同.

6．设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则秩($\boldsymbol{A}$-2$\boldsymbol{E}$)与秩($\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{E}$)之和等于(　　　　)

(A) 2　　　(B) 3　　　(C) 4　　　(D) 5

7. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,-2,-1$;则矩阵 $B=(2A^*)^{-1}$ 的特征值为(　　　)

(A) $-1,-2,1$　　(B) $-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}$　　(D) $-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}$

8．$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则(　　　)不成立.

(A)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则矩阵属于特征值 λ 的特征向量也是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的属于特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量

(B) $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$ 的全部解

(C)若 $\boldsymbol{A}$ 存在特征值 λ 的 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$

(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 有相同的特征值

9． 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则(　　　　)

(A)　存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$　　　　(B)　$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

(C) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值　　　　(D) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量

二、填空题

1．已知 $\boldsymbol{A,B}$ 为三阶相似矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，行列式 $|\boldsymbol{B}|=2$，则行列式 $\begin{vmatrix}(A+E)^{-1}&O\\O&(2B)^*\end{vmatrix}=$ ___

2．设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，$\lambda_1,\lambda_2$ 所对应的特征向量分别为

$\alpha_1=(1,a,1)^T,\alpha_2=(a,a+1,1)^T$，则$\lambda_3$所对应的特征向量$\alpha_3=$______________

3．设 A 为三阶实对称矩阵，$\alpha_1=(a,-a,1)^T$是 $Ax=0$ 的解，$\alpha_2=(a,1,1-a)^T$是$(A+E)x=0$ 的解，则常数 a =_______________

4．已知三阶方阵 A 相似于 B，A 的伴随矩阵 A^* 有特征值 2，–3，–6，则$|B-E|$的值为________

5．设$A=\begin{pmatrix}5&2&-3\\4&x&-4\\6&4&-4\end{pmatrix}$相似于对角阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,则$x=$_________

6．设 A 为三阶矩阵, 已知 $Ax=0$ 有非零解,且 A 满足行列式$|A+E|=|2A+E|=0$,则行列式$|E+3A|=$________

7. 设 A 为三阶方阵，且$|A+2E|=|A+3E|=|A-4E|=0$，A^* 为 A 的伴随矩阵,则$|A^*+5E|=$_____________

8．设四阶方阵 A 满足$|A+3E|=0,AA^T=3E,|A|<0$，则方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值为_________

9．矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$的一个非零特征值为___________

10．若 3 阶矩阵 A 与 B 相似，A 的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则$\begin{vmatrix}B^{-1}-E&E\\O&A\end{vmatrix}=$________

三、计算题

1．设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$可逆，向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$是矩阵 A^* 的一个特征向量，λ是α对应的特征值，其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵． 试求 a,b 和λ的值.

2．已知 A，B 为 4 阶矩阵，若满足 $AB+2B=0$, $r(B)=2$, 且行列式$|E+A|=|2E-A|=0$，
（1）求 A 的特征值；（2）证明 A 可对角化；（3）计算行列式$|A+3E|$.

3. 已知$A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix}$，试求(1) A 特征值和对应的特征向量； (2) 求可逆阵 P，使$P^{-1}AP=\Lambda$，其中Λ为对角阵； (3) 求$A^{10}\xi$，其中$\xi=(2\quad -1)^T$及A^n.

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.

5．已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&a\\2&a&2\\a&2&2\end{pmatrix}$有重特征值(常数 $a<0$)，

(1) 求 a 的值； (2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

6．设$A=E+\alpha\beta^T$，其中$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T,\alpha^T\beta=3$，求(1) A 的特征值和特征向量；(2)$|A^*+2E|$的值.

7．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|=-1$，$\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值为 λ_0，对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

8．设 $6,3,3$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，属于 3 的特征向量为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，(1) 求属于 6 的特征向量；(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

四、证明题

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,秩 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$.
   (1) 证明 $\lambda=0$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相同的特征值;
   (2) $\boldsymbol{Ax=0}$ 与 $\boldsymbol{Bx=0}$ 的基础解系组成的向量组线性相关;
   (3) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有公共的特征向量.

2. 已知 2 维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 不是 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明：$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{Ax}$ 线性无关.

(2) 若存在线性无关的非零向量 α_1,α_2 使得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{A\alpha}_i-6\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}\ (i=1,2)$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 可否相似对角化.

3. 设 $\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=9$ 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值，其对应的特征向量依次为

$$\alpha_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\alpha_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

证明：(1) $A=3\alpha_1\alpha_1^{\ T}+6\alpha_2\alpha_2^T+9\alpha_3\alpha_3^T$，

(2) 把 $\beta=(1,2,3)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，并求 $A^n\beta$.

4. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}\neq 0$,但对某个正整数 k, 有 $A^k=0$．证明：
   (1) $|A+E|=1$；(2)$\boldsymbol{A}$ 不可能与对角矩阵相似.

5．$\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，对应特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$；证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}+(-1)^i i\boldsymbol{E}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 均不可逆，试讨论 A 是否相似于对角阵？并说明理由.

7．设 α,β 为三维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=0$，若设 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，则必有非零列向量 x 使得 $Ax=0$，并且 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

8．已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，且满足 $2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=0$，试证三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

答案与提示:

一、选择题

1. C　2. C　3. D　4. B　5. B　6. C　7. B　8. B　9. B

二、填空题

1. $\frac{64}{3}$　2. $\alpha_3 = k(1,2,1)^T$ $(k \neq 0)$　3. 1　4. 12　5. 5

6. 1　7. 231　8. 3　9. 10　10. $\frac{1}{4}$

三、计算题

1．提示： 题设已知特征向量，应想到利用定义：$A^*\alpha = \lambda\alpha$，又与伴随矩阵 A^* 相关的问题，应利用 $AA^* = |A|E$ 进行化简. $a = 2$, 当 $b = 1$ 时，$\lambda = 1$；当 $b = -2$ 时，$\lambda = 4$.

2. （1）特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$.（2）可对角化. (3) 10

3. （1）$\lambda_1 = 2, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{t} \neq 0$，取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. $\lambda_2 = 3$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{t} \neq 0$，取 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

（2）$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \Lambda$ 其中

（3）$\boldsymbol{\xi} = 5\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}^{10}\xi = \begin{bmatrix}5\cdot 2^{10} - 3^{11}\\ 5\cdot 2^{10} - 2\cdot 3^{11}\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix}2^{n+1} - 3^n & 3^n - 2^n\\ 2^{n+1} - 2\cdot 3^n & 2\cdot 3^n - 2^n\end{bmatrix}$

4. 提示： 可先求出 A^*, P^{-1}，进而确定 $B = P^{-1}A^*P$ 及 B+2E，再按通常方法确定其特征值和特征向量；或先求出 A 的特征值与特征向量，再相应地确定 A*的特征值与特征向量，最终根据 B+2E 与 A*+2E 相似求出其特征值与特征向量.B+2E 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 3$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ 时，特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1, k_2 是不全为零的任意常数.

当 $\lambda_3 = 3$ 时，特征向量为 $k_3P^{-1}\eta_3 = k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k_3 是不为零的任意常数.

5. (1) $a = -1$. A 的特征值为 3，3，–3.(2) $P = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & -3\end{pmatrix}$.

6. （1）$\boldsymbol{\alpha\beta}^T$ 的特征值为 n-1 个 0，1 个 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$=3.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,\cdots,1,4$，分别对应的线性无关的特征向量为

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{b}_2\\ \boldsymbol{b}_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\boldsymbol{b}_3\\ 0\\ \boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix}-\boldsymbol{b}_n\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_3\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$$

（2）$\left|\boldsymbol{A}^{*}+2\boldsymbol{E}\right|=3\cdot 6^{n-1}$.

7. $\boldsymbol{a}=2,\boldsymbol{b}=-3,\boldsymbol{c}=2,\lambda_0=1$. 提示：$\boldsymbol{A}^{*}$的特征值有 1 个为$\lambda_0$，则$\boldsymbol{A}$有 1 个特征值为$-\dfrac{1}{\lambda_0}$，由$\boldsymbol{A\alpha}=-\dfrac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}$求得.

8. （1）$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}\neq 0$.（2）$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda$. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}4&-1&1\\-1&4&-1\\1&-1&4\end{bmatrix}$

四、证明题

1．略

2．略

3．证 (1) 令$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\Rightarrow P^{-1}=P^T$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&6&\\&&9\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A=P\begin{bmatrix}3&&\\&6&\\&&9\end{bmatrix}P^T$$

$$\Rightarrow A=P\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}P^T+P\begin{bmatrix}0&&\\&6&\\&&0\end{bmatrix}P^T+P\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{bmatrix}P^T$$

$$\Rightarrow A=3\alpha_1\alpha_1^{\ T}+6\alpha_2\alpha_2^T+9\alpha_3\alpha_3^T$$

（2）令$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3\Rightarrow x_1=1,x_2=3,x_3=2$，

于是有 $\beta=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，从而

$$A^n\beta=A^n\alpha_1+3A^n\alpha_2+2A^n\alpha_3=\lambda_1^n\alpha_1+3\lambda_2^n\alpha_2+2\lambda_3^n\alpha_3$$
$$=3^n\alpha_1+3\cdot 6^n\alpha_2+2\cdot 9^n\alpha_3.$$

4．(1) $\boldsymbol{A}$的特征值只能为 0.故行列式$|A+E|=1$.

(2) $\boldsymbol{A}$不能与对角阵相似.

5．提示：用定义证明，其中$\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{i}=1,2,3)$.

6．提示：$\boldsymbol{A}$有n个互不相等的特征值.

7．提示：由$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$为正交的非零向量，故$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$必线性无关．而$\boldsymbol{r}\begin{bmatrix}\alpha^T\\\beta^T\end{bmatrix}=2<3$，故$\begin{bmatrix}\alpha^T\\\beta^T\end{bmatrix}x=0$有非零解$\boldsymbol{x}$，则

$\boldsymbol{Ax}=(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\boldsymbol{x}=\alpha\alpha^T\boldsymbol{x}+\beta\beta^T\boldsymbol{x}=0$. 由于$\boldsymbol{A}\alpha=\alpha,\boldsymbol{A}\beta=\beta,\boldsymbol{Ax}=0$，故令$\boldsymbol{P}=[\alpha,\beta,\boldsymbol{x}]$可逆，使

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$成立.

8．提示：$\boldsymbol{A}\left[\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, \boldsymbol{A}^2\alpha\right]=\left[\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, \boldsymbol{A}^2\alpha\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，而矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$的三个特征值为 1，-1，2 互不相同，必可对角化，即$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\Lambda$．令$Q=\left[\alpha, A\alpha, A^2\alpha\right]$可逆，

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}，(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P})=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$