上海大学 2017～2018 学年 秋 季学期试卷

成绩	

课程名：线性代数(B)A 卷参考答案 课程号：01013010 学分：3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ______ 应试人学号 ______ 应试人所在院系 ______

题号	一	二	三	四	五
得分					

得分	评卷人

一、填空题：（每小题 3 分，5 题共 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，则 $A^{*3}-3A^{*2}=$ $\underline{\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix}}$；

2. 设 3 阶实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\5&a&8\end{pmatrix}$，且线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，则 $a=\underline{7}$；

3. 如果 A 为 3 阶反对称矩阵，且 α 为 3 维单位列向量，则 $\alpha^T(A+I)\alpha=\underline{1}$； $\alpha^T\alpha$, $|\alpha|^2$

4. 设向量组 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 线性无关，则 $r(\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\delta,\delta+\alpha)=\underline{3}$；

5. 设 3 维列向量组 α,β,γ 线性无关，且 3 阶实矩阵 A 满足

$$A\alpha=\alpha, A\beta=\alpha+2\beta, A\gamma=\alpha+\beta+3\gamma$$

则 $|A|=$ $\underline{\quad 6 \quad}$.

得分	评卷人

二、选择题：（每小题 3 分，5 题共 15 分）

6. 设 A,B 是同阶方阵，则 A,B 相抵充分必要条件是(A)

(A) A,B 秩相同 (B) 线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

(C) $|A|=|B|$ (D) $r(A^2)=r(B^2)$

7. 下列命题正确的是(C)

(A) 矩阵乘法满足交换律；

(B) 行列式 D 为零充分必要条件是 D 有两行必成比例；

(C) 向量组线性相关的充分必要条件是其秩小于向量组中向量个数；

(D) n 阶实矩阵 A 相似于对角矩阵的充分必要条件是 A 含有 n 个不同特征值.

8. 设 A 为 n 阶实矩阵，则 A 可逆的充分必要条件是（A）.

(A) $r(A)=n$ (B) 线性方程组 $Ax=0$ 有非零解；

(C) $|A|=0$ (D) A 为单位矩阵.

9. 设 $A_{2\times3}B_{3\times2}=I_2$ (2 阶单位矩阵)，则下列结论正确的是 (D).

(A) $B_{3\times2}A_{2\times3}=I_3$ (B) $r(B_{3\times2})=r(A_{2\times3})=3$

(C) $|B_{3\times2}A_{2\times3}|\neq0$ (D) $r(B_{3\times2})=r(A_{2\times3})=2$

10. 设 3 阶实矩阵 A 满足 $A^2=I$，则(D).

(A) $A=-I$ (B) $A=I$

(C) $|A|=1$ (D) $r(A+I)+r(A-I)=3$

得分	评卷人

三、计算题：（本大题 7 题，共 58 分）

11. (5 分) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&2&1\\2&3&3&2\\1&2&3&3\\2&3&5&5\end{vmatrix}$。 其他方法 +3 +1 +1

解 $D=\begin{vmatrix}1&2&2&1\\2&3&3&2\\1&2&3&3\\2&3&5&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2&1\\2&3&3&2\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}^2=1$

（3 分）　　（2 分）

12. (5 分) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&-1\\1&4&9&1\\1&8&27&-1\end{vmatrix}$。

解 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&-1\\1&4&9&1\\1&8&27&-1\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(-1-1)(3-2)(-1-2)(-1-3)=-48$

（4 分）　　（1 分）

其他方法 +3，+2，+1

13. (10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&1\\2&5&1\end{pmatrix}$，且 $AX=I+A^2$，求 X。

法二：$|A|=-1$ (+1)　　$A^*=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&-1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ (+2)

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ (+2)

解 由 $AX=I+A^2$ 有 $X=A^{-1}+A$ （3 分）

且 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&&\\1&3&1&&1&\\2&5&1&&&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-3&1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$，即 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\-1&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$ （5 分）

+2　　+2　　+1

所以

$X=A^{-1}+A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\0&4&1\\3&6&0\end{pmatrix}$ （2 分）

14. (9 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$，计算 $A^2,A^3,(A+I)^n(n>3)$.

解 $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ （4 分）

所有 $(A+I)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA^iI^{n-i}=I+C_n^1A+C_n^2A^2$，

$$=\begin{pmatrix}1-n&n&\frac{n(n+3)}{2}\\-n&1+n&\frac{n(n+5)}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

法二：$A+I=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ +1 （3 分）

$(A+I)^2=\begin{pmatrix}-1&2&5\\-2&3&7\\0&0&1\end{pmatrix}$ +1

$(A+I)^3=\begin{pmatrix}-3&3&9\\-2&4&12\\0&0&1\end{pmatrix}$ +1 （2 分）

$\therefore (A+I)^n=$ +1

证明 +1

由 扫描全能王 扫描创建

15．(8 分)设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&4&3\\2&4&3&7&5\\4&8&5&14&5\\1&2&2&a&2\end{pmatrix}$，求 A 列向量组一个极大无关组.

解

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&4&3\\2&4&3&7&5\\4&8&5&14&5\\1&2&2&a&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4&3\\0&0&1&-1&-1\\0&0&1&-2&-7\\0&0&1&a-4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4&3\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&-1&-6\\0&0&0&a-3&0\end{pmatrix}$$

（2 分）　（2 分）

当 $a\neq3$ 时，有 $\begin{pmatrix}1&2&1&4&3\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&-1&-6\\0&0&0&a-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4&3\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ （2 分）

所以列极大无关组可以取第 1、3、4、5 列； （1 分）

当 $a=3$ 时，列极大无关组可以取第 1、3、4 列 （1 分）

16．(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&2&3&4\\3&4&7&6\end{pmatrix}$，$b=(1,1,a)^T$，求解线性方程组 $Ax=b$.

解 因为

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&1\\1&2&3&4&1\\3&4&7&6&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&1\\0&1&1&3&0\\0&1&1&3&a-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&1\\0&1&1&3&0\\0&0&0&0&a-3\end{array}\right)$$ （4 分）

如果 $a\neq3$，则 $r(A)=2<r(A,b)=3$，此时方程组有无解； （2 分）

当 $a=3$，$(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&-2&1\\0&1&1&3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$ （2 分）

所以 $Ax=0$ 通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$ （1 分）

$Ax=b$ 通解为 $x^*=k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ （1 分）

17．(11 分)设a,b为常数，且$b<0$，如果矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&b\\2&1&4\\a&0&2\end{pmatrix}$的行列式$|A|=-6$。求相似变换矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵。

解 因为 $-6=|A|=\begin{vmatrix}1&2&b\\2&1&4\\a&0&2\end{vmatrix}=-6-\underset{+2}{a(b-8)}$，由$b<0$，解得$\underset{+1}{a=0}$ (3 分)

由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-b\\-2&\lambda-1&-4\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$ +2

求得A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$。+1 (3 分)

当$\lambda_1=-1$时，解$(-I-A)X=\mathbf{0}$，得基础解系$\xi_1=(1,-1,0)^T$； (1 分)

当$\lambda_2=2$时，解$(2I-A)X=\mathbf{0}$，得基础解系$\xi_2=(8+b,4+2b,-3)^T$； (2 分)

当$\lambda_3=3$时，解$(3I-A)X=\mathbf{0}$，得基础解系$\xi_3=(1,1,0)^T$； (1 分)

记

$$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}1&8+b&1\\-1&4+2b&1\\0&-3&0\end{bmatrix},\ \Lambda=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

一定要写!

则

$P^{-1}AP=\Lambda$。 (1 分)

得分	评卷人

五、证明题：（2 题，每题 6 分共 12 分）

18.(6 分) 设 3 阶实对称矩阵A满足$A^3=I$，求证$A=I$。

证 设λ为A的特征值，则由条件知λ为实数，且满足
$\exists\alpha\neq\vec{0}$ 使 $A\alpha=\lambda\alpha$ (1′)
$A^3\alpha=\lambda^3\alpha=\alpha$ (1′) ∴ $\lambda^3=1$ (1′)

所以$\lambda=1$，且由A为实对称矩阵，存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=I$ 1′ 1′ (2 分)

得$A=I$。1′ (1 分)

法二：$A^3=I$
∴ $(A-I)(A^2+A+I)=0$ (+1)
设λ是A的特征值
则 $\lambda^3=1$ λ是实数
⇒ λ=1 (+3)
∴ A^2+A+I 的特征值为3 非0 (+1)
A^2+A+I 可逆 (+1)
$A-I=0$

法三：A是实对称阵 故可相似对角化 (+2)
即∃可逆阵P使 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}a&&\\&b&\\&&c\end{pmatrix}$ a,b,c为实数
$A=P\Lambda P^{-1}$ $A^3=P\Lambda^3P^{-1}=I$ (+2)
∴ $\Lambda^3=I$
⇒ $a^3=b^3=c^3=1$ ⇒ $a=b=c=1$ (+1)
∴ $\Lambda=I$
$A=PIP^{-1}=I$ (+1)

19.(6 分) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为 3 维列向量，如果

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3,\beta_2=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2-6\alpha_3,$$

线性无关.求证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

证 因为

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\-3&1&-6\end{pmatrix}$$ (2 分)

又因为$\begin{vmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\-3&1&-6\end{vmatrix}=2\neq0$ (1 分)

所以$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\-3&1&-6\end{pmatrix}^{-1}$ (1 分)

由β_1,β_2,β_3线性无关知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关 (2 分)