上海大学 2015—2016 春季学期试卷

一、 填空题：（每题 3 分，5 题共 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______________；

2. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，则 $|A+I|=$____________；

3. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性______（填相关或无关）；

4.线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\2x_1+x_2+x_3=2\\3x_1+2x_2+2x_3=3\end{cases}$ 的解向量为_______________；

5. 设 A 是三阶方阵，且 $1,3$ 是 A 的特征值，如果 A 的主对角元素之和为 6，则 A 相似于对角矩阵_____________。

二、选择题：（每题 2 分，5 题共 10 分）

6. 如果三阶行列式第一行元素为 1，2,3，而且第二行余子式是 $a,1,2$,则 $a=$ (　　)

A. -8；　　B. 8 ；　　C. -4；　　D. 4.

7. 如果 n 解方阵 A,B 可逆，则矩阵方程 $AXB=C$ 的解 $X=$（　　）

A. $A^{-1}B^{-1}C$；　　B. $A^{-1}CB^{-1}$；　　C. $CA^{-1}B^{-1}$；　　D. $B^{-1}CA^{-1}$.

8.设 A 为 n 阶矩阵，且 $r(A)=n-1$ ，α_1,α_2 是 $Ax=\mathbf{0}$ 的两个不同解向量，则 $Ax=\mathbf{0}$ 的通解为(　　)(其中 k 为任意常数)

A. $k(\alpha_1+\alpha_2)$；　　B. $k\alpha_1$；　　C. $k\alpha_2$；　　D. $k(\alpha_1-\alpha_2)$.

9.设 A 为 n $(n>1)$ 阶矩阵，如果 A 可对角化，则下列结论一定正确的是(　　)

A. 矩阵 A 有 n 个不同特征值；　　B. 矩阵 A 与单位矩阵相似；

C. A 一定没有 n 个不相同的特征值；　　D. A 有 n 个线性无关的特征向量.

10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，$A^*$ 的秩为 1，则必有（　　　）

A. $a \neq b$且$a+2b=0$；　　B. $a=b$或$a+2b=0$；

C. $a=b$或$a+2b\neq 0$；　　D. $a\neq b$且$a+2b\neq 0$.

三、计算题：（每题 10 分，5 题共 63 分）

11.(10 分)设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$，设 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

(1)(4 分) 计算 $A_{12}+4A_{22}+A_{32}+3A_{42}$；

(2)(6 分) 计算 $3A_{11}+3A_{12}+6A_{13}+4A_{14}$ 值.

12.(8 分)设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，计算 A^n (其中 n 为正整数)。

13.(10 分)设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足方程 $A^5X=15AX+4I$，求 X .

14.(12 分)求向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(1,3,4,2)^T,\alpha_3=(1,0,1,a)^T,\alpha_3=(3,7,10,10)^T$ 的秩和它的一个极大无关组，并将其它向量用此极大无关组线性表示。

15.(12 分)对于线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=-1 \\ x_1-x_2-k^2x_3=-k \end{cases}$，试讨论 k 为何值时，该方程组无解、有惟一解和有无穷多解，并在有无穷多解时，求它的通解。

16.(11 分)设二次型 $f=ax_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 对应的矩阵秩为 2，试确定参数 a 的值，并用正交变换将此二次型化为标准形(需写出正交变换及标准形)。

四、证明题：（每题 6 分，2 题共 12 分）

17.(6 分)设 A,B 为 n 阶方阵，且相似。求证 $|xI-A|=|xI-B|$.

18. (6 分) 设 A,B 为 n 阶方阵，且 $r(A-B)=n-4$。如果 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足 $A\alpha_i=B\alpha_i\ (i=1,2,3,4)$，且线性无关。求证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 n 元线性方程组

$(A-B)x=\mathbf{0}$ 的基础解系

上海大学 2015—2016 春季学期试卷参考答案

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2． -1

3. 相关

4. $(1,0,0)^T$ 或者 $(1,0,0)$

5. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

6. C

7.B

8.D

9. **D**

10.A

11.解 **(1)** 由于 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$ 为 D 的第二列代数余子式，$1,4,1,3$ 为 D 的第一列元素 。

根据行列式的性质：行列式某列与另外一列代数余子式相乘其结果为 0 ， 得

$$A_{12} + 4A_{22} + A_{32} + 3A_{42} = 0$$

(2) $3A_{11} + 3A_{12} + 6A_{13} + 4A_{14} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

12. **解：**设 $J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 2 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A = J + I$

因为 $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3 = 0$

所以 $A^n = (J+I)^n = I^n + C_n^1 I^{n-1} J + C_n^2 I^{n-2} J^2$

$$=I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2=\begin{pmatrix}1&&\\n&1&\\n(n-1)&2n&1\end{pmatrix}$$

13 解：经计算有 $A^2=4I$ 所以 $A^5=16A$。

由 $A^5X=15AX+4I$ 得 $AX=4I$。

再由 $A^2=4I$，得 $A^{-1}=\frac{1}{4}A$ 。

所以 $X=A$ 。

14 解 $(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&3&0&7\\3&4&1&10\\4&2&a&10\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&-2&1\\0&1&-2&1\\0&-2&a-4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&-2&1\\0&0&a-8&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

(1)当 $a=8$ 时，

$$B\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

向量组秩为 2，极大无关组为 α_1,α_2 ，且 $\alpha_3=3\alpha_1-2\alpha_2$， $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$

(2) 当 $a\neq 8$ 时，

$$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

向量组秩为 3，极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，且 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_3$

15.解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-1\\1&-1&-k^2&-k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-3\\0&-3&-k^2-2&-k-1\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2\end{pmatrix}$$

当$k=-2$时， $2=r(\mathbf{A})\neq r(A,b)=3$，方程组无解

当$k\neq\pm2$时，方程组有唯一解

当$k=2$时， $r(\mathbf{A})=r(A,b)=2<3$，方程组有无穷多解

此时$(A,b)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

解得通解为$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

16 解：二次型矩阵$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

由假设$r(\mathbf{A})=2$，故$|\mathbf{A}|=a-1=0$，$\Rightarrow a=1$

由$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0$

得到A的三个特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$

A相应的特征向量分别为$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

取正交阵$P=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\xi}_1,\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\xi}_2,\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\xi}_3\right)$，在正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$下，二次型标准形为

$f=y_2^2+3y_3^2$

17. **证** 因为A,B相似，所以存在n阶可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$ ，于是

$$|xI-B|=|xI-P^{-1}AP|=|P^{-1}(xI-A)P|$$

$$=|P^{-1}|\cdot|xI-A|\cdot|P|=|xI-A|\cdot|P|^{-1}|P|=|xI-A|$$

18.证 由 $A\alpha_i=B\alpha_i\ (i=1,2,3,4)$ 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 n 元线性方程组 $(A-B)x=\mathbf{0}$ 的解 。又因为 $r(A-B)=n-4$，所以 $(A-B)x=\mathbf{0}$ 的基础解系所含向量个数为

$$n-(n-4)=4.$$

再由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 n 元线性方程组 $(A-B)x=\mathbf{0}$ 的基础解系 .

上海大学 2014—2015 春季学期试卷

一、填空题：（每题 3 分，5 题共 15 分）

1. 设 A 和 B 都是三阶方阵，若 $|A|=2$，$|B|=3$，则 $\left|-A^{*}B^{T}\right|=$_____；

2. 设 $\alpha=(1,2,1)^{T}$，$\beta=(1,0,-1)^{T}$，且 $A=\alpha\beta^{T}$，如果 n 为自然数，则 $|A^{n}+I|=$_____；

3. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为三维列向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性____________（填相关或无关）；

4. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ 2x_1+(1+a)x_2+ax_3=0 \end{cases}$ 有非零解的充分必要条件是 $a=$______；

5. 设 A 是三阶方阵，且 $1,3$ 是 A 的特征值，如果 A 的行列式等于 12，则 A 相似于对角矩阵________

二、选择题：（每题 2 分，7 题共 14 分）

6. 设 A,B,C 为 n 阶方阵，则下列结论正确的是 (　　)

A. 若 $AC=BC$，则 $A=B$　　　　**B.** $AB=\mathbf{0}$，则 $A=\mathbf{0}$ 或者 $B=\mathbf{0}$

C. $(AB)^{T}=A^{T}B^{T}$　　　　**D.** 若 A,B 可逆，则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

7. 设 A、B、C 均为 n 阶矩阵，若 $ACB=I$，则必定有（　　）

A. $ABC=I$　　**B.** $BAC=I$　　**C.** $CAB=I$　　**D.** $BCA=I$

8. 设三阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的行列式 $|A|=-2$，则 $\left|(\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_2+\alpha_1)\right|=$ (　)

A. -2　　**B.** -8　　**C.** 2　　**D.** 8

9. 设 α_0 是非齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{b}$ 的解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系，则 $Ax=\mathbf{b}$ 的通解为 (　　)

A. $k_0\alpha_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$，其中 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为任意数；

B. $k_1(\alpha_0-\alpha_1)+k_2(\alpha_0-\alpha_2)+\cdots+k_r(\alpha_0-\alpha_r)$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为任意数；

C. $\alpha_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为任意数；

D. $k_0\alpha_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$，其中 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为任意数，且 $k_0+k_1+\cdots+k_r=1$.

10. 设 A,B 为 n 阶矩阵，则下面结论正确的是(　　)

A. 如果 A 与 B 有相同的特征多项式，则 A 与 B 相似；

B. 如果 A 与 B 有相同的特征值，则 A 与 B 相似；

C. A 与 B 相似的充分必要条件是它们有相同的特征多项式.

D. 如果 A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征多项式；

11. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$B$ 是非零矩阵，若 $AB=\mathbf{0}$，则（　　）

A. $r(B)=3$　　**B.** $r(B)=2$　　**C.** $r(B)=1$　　**D.** $r(B)$ 的值不确定

12. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & ab+2\\ 2 & a+4 & 2\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则(　　)

A. $a=b=0$　　**B.** $a\neq 0,b=0$　　**C.** $a=0,b\neq 0$　　**D.** $a\neq 0,b\neq 0$

三、计算题：（每题 10 分，5 题共 59 分）

13.（10 分） 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$，设 $A_{11},A_{12},A_{13},A_{14}$ 为其第一行代数余子式。

(1)（4 分） 说明 $2A_{11}+3A_{12}+A_{13}+A_{14}=0$ 的理由。

(2)（6 分） 计算 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 值.

14.（12 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足方程 $AX=9I+A$，求 X 。

15.（12 分）求向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,2,1)^T,\alpha_3=(2,3,3,2)^T,\alpha_4=(5,7,a,5)^T$ 的秩和它的一个极大无关组，并将其它向量用此极大无关组线性表示。

16.（12 分）对于线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2-2x_3=1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-1\\ x_1+x_2+k^2x_3=k\end{cases}$，试讨论 k 为何值时，该方程组无解、有惟一解和有无穷多解，并在有无穷多解时，求它的通解。

17.（13 分）设二次型 $f=2x_1^2+ax_2^2+x_3^2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 对应的矩阵秩为 2，试确定参数 a 的值，并用正交变换将此二次型化为标准形(需写出正交变换及标准形)。

四、证明题：（每题 6 分，2 题共 12 分）

18.（**6 分**）如果两个线性方程组满足:第一个方程组的解都是第二个方程组解，反之亦然. 则称两个方程组同解.

现设 A 为 n 阶实矩阵，求证 $Ax=\mathbf{0}$ 与 $A^TAx=\mathbf{0}$ 同解. 由此证明 $r(A^TA)=r(A)$.

19.（**6 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，若 $\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$ 也是 $Ax=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，其中 t 为实数。求证 $t\neq 1,-1$.

上海大学 2014—2015 春季学期试卷参考答案

1. -12
2. 1
3. 相关
4. 0 或者 1
5. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

6.D

7.B

8.**A**

9. C

10. D

11.C

12. B

13.解(1) 由于 $A_{11},A_{12},A_{13},A_{14}$ 为 D 的第一行代数余子式，$2,3,1,1$ 为 D 的第二行元素。

根据行列式的性质：行列式某行与另外一行代数余子式相乘其结果为 0，得

$$2A_{11}+3A_{12}+A_{13}+A_{14}=0$$

(2) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3$$

14.解**解**：原矩阵方程可化为 $X=9A^{-1}+I$。

方法一：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 9 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -18 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 18 & -18 & 9 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&9&0&0\\0&-3&-6&-18&9&0\\0&0&9&18&-18&9\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&5&4&-2\\0&-3&0&-6&-3&6\\0&0&1&2&-2&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&9&0&0\\0&-3&-6&-18&9&0\\0&0&9&18&-18&9\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&2\\0&1&0&2&1&-2\\0&0&1&2&-2&1\end{array}\right)$$

故$9A^{-1}=A$，因此有 $X=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}$ 。

方法二 因为$A^2=9I$，所以$9A^{-1}=A$

所以，有 $X=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}$

方法三 利用伴随矩阵计算出$9A^{-1}=A$ ，所以，有 $X=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}$.

15. **解** $(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&2&3&7\\1&2&3&a\\1&1&2&5\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&5\\0&1&1&2\\0&1&1&a-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&5\\0&1&1&2\\0&0&0&a-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

(1) 当 $a=7$ 时， $B\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，向量组秩为 2， 极大无关组为 α_1,α_2，且

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$， $\alpha_4=3\alpha_1+2\alpha_2$ ；

(2)当 $a\neq7$ 时， $B\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ，向量组秩为 3，极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，且

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$.

16. **解**：$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & k^2 & k\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 6 & -3\\ 0 & 3 & k^2+2 & k-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & k^2-4 & k+2\end{pmatrix}$$

当 $k=2$ 时，$2=r(\mathbf{A})\neq r(A,b)=3$，方程组无解

当 $k\neq\pm2$ 时，方程组有唯一解

当 $k=-2$ 时，$r(\mathbf{A})=r(A,b)=2<3$，方程组有无穷多解

此时 $(A,b)\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

17. **解**：二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & a & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

由假设 $r(\mathbf{A})=2$，故 $|\mathbf{A}|=2a-2-a=0$，$\Rightarrow a=2$

由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$,

得到 A 的三个特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

A 相应的特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

取正交阵 $P=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\xi_1,\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2,\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_3\right)$，在正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 下，二次型标准

形 $f=2y_2^2+3y_3^2$ 。

18. **证** 如果 x_0 是 $Ax=\mathbf{0}$ 的解，即 $Ax_0=\mathbf{0}$，则有 $A^TAx_0=\mathbf{0}$，所以 x_0 是 $A^TAx=\mathbf{0}$ 的解.

如果 x_0 是 $A^TAx=\mathbf{0}$ 的实解，则有 $A^TAx_0=\mathbf{0}$,得 ${x_0}^TA^TAx_0=\mathbf{0}$，即 $(Ax_0)^TAx_0=\mathbf{0}$.又因为 Ax_0 为实向量，所以 $Ax_0=\mathbf{0}$,由此，根据基础解系性质，有 $n-r(A^TA)=n-r(A)$，得 $r(A^TA)=r(A)$.

19. **证** $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix}$

如果是 $Ax=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，则 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 必线性无关，

故由上知 $\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵。

所以 $\begin{vmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{vmatrix}=1-t^4\neq0$，即 $t\neq1,-1$。