《线性代数 A》强化训练题一

一、填空题

1. 在六阶行列式$\left|a_{ij}\right|$中，此项“$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$”的符号为__________号.

2. 已知4阶行列式D中第3列元素依次是$-1,\ 2,\ 0,\ 1,$ 它们的余子式依次是$5,\ 3,$ $-7,\ 4,$ 则$D=$__________.

3. 若n阶方阵A可逆，且行列式$|A|=m,$ 数$k\neq 0,$ 则行列式$\left|(kA)^{-1}\right|=$_________.

4. 设方阵A满足方程$A^2+bA+cE=O\ \ (c\neq 0),$ 则$A^{-1}=$___________.

5. 若A为n阶可逆矩阵且$|A|=2,$ A^*为其伴随矩阵，则$\left|A^*\right|=$___________.

6. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$ 则A的全部特征值为____________.

二、是非题 (用 Y/N 选答)

1. 若向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关(　　　).

2. 设矩阵A, B, C满足$AB=CB,$ 则$A=C$ (　　　).

3. 对任意$m\times n$矩阵A，则AA^T和A^TA均为对称矩阵(　　　).

4. n阶非零矩阵A, B满足$AB=O,$ 则秩$r(A)<n$ (　　　).

5. 正交变换保持向量的内积和长度不变(　　　).

三、设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$ 矩阵B满足$ABA^*=2BA^*+E,$ 其中A^*为A的伴随矩阵，E是单位矩阵，求$|B|$.

四、证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，并求其逆矩阵.

五、设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为3阶可逆矩阵，求 $B^{2004}-2A^2$.

六、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用极大无关组线性表示.

七、λ 取何值时，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$

(1) 有惟一解； (2) 无解； (3) 有无穷多解，并求解.

八、试求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$，把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形.

九、 设 λ_1,λ_2 是 n 阶矩阵 A 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 A 的属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 A 的特征向量.

十、设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$，且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.