《线性代数 A》强化训练题二解答

一、填空题

1. $\dfrac{n(n+1)}{2}$;　　2. $a_1a_2a_3a_4$;　　3. -2;　　4. $B-E$;　　5. 0;

6. $\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;　　7. -10;　　8. $2+\dfrac{1}{\lambda}$;　　9. 2^n;

10. $(1,+\infty)$.

二、单项选择题

1. B;　　2. C;　　3. A;　　4. D;　　5. C.

三、行列式计算

1. $D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$

解：$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}{\underset{r_4-r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-1&2&0&6\\1&1&0&3\\2&-1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&6\\1&1&3\\2&-1&0\end{vmatrix}\overset{c_1+2c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}3&2&6\\3&1&3\\0&-1&0\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}3&6\\3&3\end{vmatrix}=9-18=-9.$

2. $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$

解：将第 2 列到第 $n+1$ 列全部加到第 1 列，并从第 1 列中提出公因子得到

$$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix},$$

再将以上行列式第 1 列乘 $-a_j$ 加到第 $j+1$ 列 $(j=1,2,\cdots,n)$，得到

$$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & a_4-a_3 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

四、已知 $(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，且 $A^{-1}XA=A^{-1}X+E$，求 A 和 X.

解：$\left((A-E)^{-1},E\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{pmatrix}=(E,A-E),$$

$$A=(A-E)+E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix},$$

又方程可表示为 $A^{-1}X(A-E)=E$，所以

$$X=A(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\1&1&2&0\\1&1&1&2\end{pmatrix}.$$

五、讨论当 a,b 分别取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=b\\x_2+(3-a)x_3+3x_4=2\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$ 无解、有惟一解和有无穷多解，并在有无穷多解的情形下求该方程组的通解.

解：$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&b\\0&1&3-a&3&2\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&b\\0&1&3-a&3&2\\0&-1&-2&a-3&-1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&b\\0&0&1-a&1&2-b\\0&0&0&a-1&b-1\end{pmatrix},$$

当 $a\neq1$ 时，$R(A)=R(B)=4$，方程组有唯一解;

当$a=1$且$b\neq 1$时，$R(A)=3\neq R(B)=4,$ 方程组无解;

当$a=1$且$b=1$时，$R(A)=R(B)=3<4,$ 方程组有无穷多解，此时

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&-1\\0&1&2&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&2&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

通解 $\boldsymbol{x}=c(1,-2,1,0)^T+(0,-1,0,1)^T$，其中 c 是任意常数.

六、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$

(1) 求与二次型对应的实对称矩阵 A;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形.

解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3,\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix};$

(2) $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0,$$

得到 A 的特征值 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2.$

由 $A-0E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得对应 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix};$

单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix};$

由 $A-1E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得对应 $\lambda_2=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;

单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;

由 $A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得对应 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

取正交阵 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$,

在正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 下，标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$.

七、设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 是列向量组，若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 也线性无关，且内积 $[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j]=0,\ (i=1,2;\ j=3,4)$，试证明 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 一定线性无关.

证： 设 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3+k_4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}$, (*)

将 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 分别与上式作内积，结合正交性条件得到

$\left[\boldsymbol{a}_1,k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2\right]=0$ 和 $\left[\boldsymbol{a}_2,k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2\right]=0$，故

$\left\|k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2\right\|^2=\left[k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2,k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2\right]=0$，从而

$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0},$

由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$线性无关的假设推得$k_1 = k_2 = 0,$

这样，$(*)$变为$k_3\boldsymbol{a}_3 + k_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0},$

再利用$\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$线性无关推得$k_3 = k_4 = 0,$

即由$(*)$成立推得$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0,$ 故$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$线性无关.