上海大学 2016—2017 春季学期试卷 A 卷

成绩	

课程名：线性代数参考答案 课程号：01014104 学分：3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ________ 应试人学号________ 应试人所在院系________

题号	一	二	三	四
得分	15	10	63	12

得分	评卷人

一、填空题：（每题 3 分，5 题共 15 分）

1. 如果方阵的列向量组秩小于矩阵的列数，则矩阵行列式值等于 0；

2. 线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 表示，则 s,t 满足关系 $s\le t$；

3. 矩阵 A 经过初等行变换以后化为矩阵 B，则线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 与 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解空间 相同；

4. 如果 3 解方阵 A 的行列式为-1，则 $|3A^T|=-27$；

5. 设 α，β 为 3 维列向量，且

$$\alpha^T\beta=14, A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} a & 2 & 3\\ 2 & b & 6\\ 3 & 6 & c\end{pmatrix},$$

则 $\mathrm{tr}(A-I)=$ 11。

得分	评卷人

二、选择题：（只有一个选项正确，每题 2 分，5 题共 10 分）

6. 如果 n 阶方阵 A 与单位矩阵相抵，则线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$（ C ）
A. 无解　B. 有无穷多组解　C. 有唯一解　D. 可能有解，也可能无解

7. 设向量组 A,B 等价，则下列断言错误的是（ B ）
A. $r(A)=r(B)$　B. A 与 B 含有相同个数向量
C. A 可由 B 线性表示　D. B 可由 A 线性表示

8. 设方阵 A 与 B 相似，则下列断言错误的是（ D ）
A. A 与 B 行列式相等　B. A 与 B 特征多项式相同
C. A 与 B 秩相等　D. A 与 B 特征向量相同.

9. 设 A 为 $n\,(n>1)$ 阶方阵，且 $|A+I|=0$，则下列结论一定正确的是（ B ）
A. A 有特征值 1　B. A 有特征值 -1　C. $A=-I$　D. $A\ne -I$

10. 设 3 阶矩阵 A 有 3 个不同的特征值，则 $r(A^*)=$（ A ）
A. 1 或者 3　B. 1　C. 2　D. 3.

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

15 23
8 46

由 扫描全能王 扫描创建

得分	评卷人

三、计算题：(5 题共 63 分)

11.(10 分)设 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$，设 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

1) A_{ij} +2

(1)(4 分) 计算 $aA_{21}+bA_{22}+cA_{23}+dA_{24}$；

(2)(6 分) 计算 $4A_{11}+10A_{12}+7A_{13}+8A_{14}$ 值.

解 (1) 由于 $A_{21},A_{22},A_{23},A_{24}$ 为 D 的第二行代数余子式，a,b,c,d 为 D 的第一行元素 **(2 分)**

根据行列式的性质：行列式某行与另外一行代数余子式相乘其结果为 0 ，得

$$aA_{21}+bA_{22}+cA_{23}+dA_{24}=0$$ **(2 分)**

(2) $4A_{11}+10A_{12}+7A_{13}+8A_{14}=\begin{vmatrix} 4 & 10 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 2) A_{ij} +3 **(3 分)**

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$ **(3 分)**

12.(8 分)设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，计算 A^n（其中 $n>2$ 为正整数）。

$A^2=\begin{pmatrix} 4 & & \\ 4 & 4 & \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

解：设 $J=\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A=J+2I$ **(2 分)**

$A^3=\begin{pmatrix} 8 & & \\ 12 & 8 & \\ \cancel{18} & 12 & 8 \end{pmatrix}$

因为 $J^2=\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3=0$ **(2 分)**

$A^4=\begin{pmatrix} \cancel{16} & & \\ 32 & \cancel{16} & \\ 56 & 32 & \cancel{16} \end{pmatrix}$

A^2 A^3 (+4)

所以 $A^n=(J+2I)^n=2^nI^n+2^{n-1}C_n^1I^{n-1}J+2^{n-2}C_n^2I^{n-2}J^2$ **(2 分)**

$$=2^nI+n2^{n-1}J+n(n-1)2^{n-3}J^2=\begin{pmatrix} 2^n & & \\ n2^{n-1} & 2^n & \\ n2^{n-1} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$ **(2 分)**

$$=\begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 2^n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & & \\ n\cdot2^{n-1} & 0 & \\ n\cdot2^{n-1} & n2^{n-1} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \cancel{0} & & \\ 0 & 0 & \\ (n-1)n2^{n-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^n & & \\ n\cdot2^{n-1} & 2^n & \\ (n^2+3n)2^{n-3} & n\cdot2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$ $n\geq3$

$n2^{n-3}(n+3)$

13.(9 分)设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足方程 $AX=X+4I$，求 X.

解：因为 $(A-I)X=4I$ **(3 分)**

且有 $(A-I)^2=4I$ 初等变换 **(4 分)**

得 $X=A-I$ **(2 分)**

由 扫描全能王 扫描创建

14. (12 分)设 a 为常数，求向量组

$$\alpha_1=(1,1,1,2)^T,\alpha_2=(2,3,1,3)^T,\alpha_3=(3,5,a,4)^T,\alpha_4=(0,1,-1,-1)^T$$

的秩和它的一个极大无关组，并将其它向量用此极大无关组线性表示。

解 $(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\1&3&5&1\\1&1&a&-1\\2&3&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&-1\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&1\\0&0&a-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$ 5 (6 分)

(1) 当 $a=1$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ (1 分)

向量组秩为 2，极大无关组为 α_1,α_2 (1 分)

且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2$ (2 分)

$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ $\alpha_4=\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$

$\alpha_2=\frac{2}{3}\alpha_3-\frac{1}{3}\alpha_4$ $\alpha_1=\frac{1}{3}\alpha_3-\frac{2}{3}\alpha_4$

(1) 当 $a\neq1$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，(1 分)

$\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_4$ $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_4$

向量组秩为 2 3 极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (1 分)

$\alpha_2=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_4$

且 $\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2$ (1分)

$\alpha_4=-\frac{3}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$

15. (12 分) 设 a 为常数，求线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=1\\x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\5x_1+7x_2+8x_3+9x_4=-1\\2x_1+x_2+x_3+ax_4=-4\end{cases}$ 通解。 $|A|=2-a$

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&2&1&1\\1&1&1&1&-1\\5&7&8&9&-1\\2&1&1&a&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1&1\\0&-1&-1&0&-2\\0&-3&-2&4&-6\\0&-3&-3&a-2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1&1\\0&1&1&0&2\\0&0&1&4&0\\0&0&0&a-2&0\end{pmatrix}=B$

(1 分) (2 分) (2 分) 5

当 $a=2$ 时，$r(A)=r(A,b)=3$，方程组有无穷多组解 (1 分)

$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-3\\0&1&0&-4&2\\0&0&1&4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ (1 分)

解得通解为

$x=c\begin{pmatrix}-1\\4\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\-10\\12\\-3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-4\\6\\-4\\1\end{pmatrix}$ 6 $\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\\-1\end{pmatrix}$ (2 分)

当 $a\neq2$ 时，$r(A)=r(A,b)=4$，方程组有唯一解 (1 分)

$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$ (1 分)

3

解得通解为

$x=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ (1 分)

由 扫描全能王 扫描创建

16.(12 分) 设 a,b 为实数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ 相似，求矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

解 因为 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ 相似，所以有 $a+b\overset{+1}{+}4=8, ab\overset{+1}{-}1=3$，解得 $a=b=\overset{+1+1}{2}$ (4 分)

且 A 的特征值为 1、3、4 (1 分)

解 $(A-\mathbf{I})x=\mathbf{0}$，$(A-3\mathbf{I})x=\mathbf{0},(A-4\mathbf{I})x=\mathbf{0}$ 得到 A 属于 1，3，4 的特征向量

$\xi_1=(1,-1,0)^T$，$\xi_2=(1,1,\overset{-2}{0})^T$，$\xi_3=(0,0,1)^T$ (6 分)

取 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ (1 分)

得分	评卷人

四、证明题：(每题 6 分，2 题共 12 分)

(17)(6 分) 设 k 为大于零的正整数，A 为 $2k+1$ 阶方阵，如果 $A^3=0$，求证 $r(A^2)\le k$.

证 因为 $A^2\cdot A=A^3=0$，所以

1′

$$r(A^2)+r(A)\le n=2k+1 \quad (3\text{ 分})$$

2′

又因为 $r(A^2)\le r(A)$，则

$$2r(A^2)\le r(A^2)+r(A)\le n=2k+1, \quad (2\text{ 分})$$

得

$$r(A^2)\le\frac{2k+1}{2}\le k. \quad (1\text{ 分})$$

18.(6 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为四维实列向量组，且都为非零向量. 如果

$$\alpha_i^T\alpha_j=0(i\ne j;i,j=1,2,3,4).$$

求证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

证 如果

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0 \quad (2\text{ 分})$$

则有

$$\alpha_1^T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4)=k_1\alpha_1^T\alpha_1+\alpha_1^T\alpha_2+\alpha_1^T\alpha_3+\alpha_1^T\alpha_4=0. \quad (2\text{ 分})$$

由条件 $\alpha_i^T\alpha_j=0(i\ne j;i,j=1,2,3,4)$ 有 $k_1\alpha_1^T\alpha_1=0$. 因为 $\alpha_1\ne0$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为实列向量，知 $\alpha_1^T\alpha_1\ne0$，得 $k_1=0$，同理 $k_2=k_3=k_4=0$，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. (2 分)

由 扫描全能王 扫描创建