上海大学 2011 ～ 2012 学年秋季学期试卷(A 卷)

成绩	

课程名： 线性代数（A） 课程号： 01013009 学分： 3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ______ 应试人学号 ______ 应试人所在院系 ______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（本大题含 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

(提示：请在每小题的空格中填上正确答案。错填或不填均无分。**)**

1. 由三维列向量 $\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$ 构成矩阵 $\mathbf{A}=(\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma)$ 和 $\mathbf{B}=(2\vec\alpha+\vec\beta,\vec\gamma,3\vec\beta)$，若行列式 $|\mathbf{A}|=1$，则行列式 $|\mathbf{B}|=$ ______；

2. 若三阶行列式的第 1 列元素依次为 $1,2,3$，第 3 列元素的代数余子式依次为 $-1,2,x$，则 $x=$ ______；

3. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{CA}$，则 $\mathbf{B}$ 一定是 ______ 阶矩阵；

4. 当 $x=$ ______ 时，矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 的秩达到最小；

5. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-3\mathbf{E}=\mathbf{O}$，则 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}=$ ______；

6. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&2&2\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $(\mathbf{A}^*)^{-1}=$ ______；

7. 设向量组 $(1,2,3)$，$(3,-1,2)$，$(2,3,k)$ 线性相关，则 $k=$ ______；

8. 设非零向量 $\vec\alpha$ 和 $\vec\beta$ 正交，则内积 $\left[4\vec\alpha,6\vec\beta+\dfrac{\vec\alpha}{2\|\vec\alpha\|^2}\right]=$ ______；

9. 设 1 和 2 是二阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，则行列式 $|\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}^{-1}+3\mathbf{E}|=$ ______；

10. 设 $\mathbf{A}$ 的秩为 2，$\vec\eta_1,\vec\eta_2,\vec\eta_3$ 是三元非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\vec x=\vec b$ 的三个解，若 $\vec\eta_1=(2,1,2)^T$ 以及 $\vec\eta_2+\vec\eta_3=(1,0,1)^T$，那么 $\mathbf{A}\vec x=\vec b$ 的通解 $\vec x=$ ______。

草 稿 纸

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

二、单项选择题：（本大题含 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）
(提示：在每小题列出的备选项中只有一个符合题目要求，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。)

1. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则下列结论错误的是 （ ）

A. $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$　　B. $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|$

C. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{T}=\mathbf{A}^{T}+\mathbf{B}^{T}$　　D. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$

2. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，若 $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{B}\\\mathbf{A}&\mathbf{O}\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{C}^{-1}=$ （ ）

A. $\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{B}^{-1}\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{A}^{-1}\\\mathbf{B}^{-1}&\mathbf{O}\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{B}^{-1}\\\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{A}^{-1}\end{pmatrix}$

3. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}$ 是非零矩阵，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，则 （ ）

A. $r(\mathbf{B})=3$　　B. $r(\mathbf{B})=2$

C. $r(\mathbf{B})=1$　　D. $r(\mathbf{B})$ 的值不确定

4. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶的正交阵，则下列结论错误的是 （ ）

A. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 为正交阵　　B. $\mathbf{AB}$ 为正交阵

C. $\mathbf{A}^{T}\mathbf{B}^{T}$ 为正交阵　　D. 当 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|<0$ 时，$|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|=0$

5. n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是 （ ）

A. $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵　　B. $\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵

C. $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量　　D. $\mathbf{A}$ 有 n 个不同特征值

三、（本大题 8 分） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&3&-2\\2&3&-2&3\\3&-2&3&2\\-2&3&2&3\end{vmatrix}$

解：

草　稿　纸

四、（本大题 10 分） 已知 $\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\4&0&0&0\\4&4&0&0\\4&4&4&0\end{pmatrix}$，且 $\mathbf{X}$ 满足矩阵方程 $\mathbf{XA}=2(\mathbf{E}-\mathbf{X})$，

试求 $\mathbf{X}$ （其中 $\mathbf{E}$ 是单位矩阵）。

解：

五、（本大题 12 分） 求向量组 $\vec{a}_1=(1,1,2,3)^T$，$\vec{a}_2=(1,-1,1,1)^T$，$\vec{a}_3=(1,3,3,5)^T$，

$\vec{a}_4=(4,-2,5,6)^T$ 的秩和它的一个极大无关组，并将其它向量用此极大无关组线性表示。

解：

草 稿 纸

六、（本大题 12 分） 试讨论 k 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 无解、有惟一解或有无穷多解，并在有无穷多解的情况下求出其通解。

解：

七、（本大题 10 分） 设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ 经过一正交变换化为标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$，试确定参数 a 以及所用的正交变换。

解：

八、（本大题 8 分） 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性无关，向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5$ 线性相关，试证明向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4 - \vec{\alpha}_5$ 线性无关。

证明：

草　稿　纸