上海大学 2009 ～ 2010 春季学期试卷解答及评分标准

课程名：线性代数（B） 课程号：01013010 学分：3

一. 填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

1. 设 A 和 B 都是3阶方阵，若 $|A| = 8$，$|B| = 2$，则 $\left|-2A^{-1}B^T\right| =$ ____-2____。

2. 若4阶行列式的第1行元素依次为 $-1, 0, 2, a$，第4行元素的余子式依次为 $5, 10, 4, -1$，则 $a =$ ___-3____。

3. 当 a 和 b 满足___$a + b \neq 0$___时， 向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1,1,1)^T$，$\vec{\alpha}_2 = (a, 0, b)^T$，$\vec{\alpha}_3 = (1, 2, 3)^T$ 线性无关。

4. 设 A 为4阶方阵，且 $R(A) = 2$，则 $R(A^*) =$ _____0____。

5. 设 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 均是方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解，若 $k\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ 也是 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解，则 $k =$ ____-1____。

6. 当 $a =$ ___-5______时，向量 $(-3, 4, a, 1)$ 与向量 $(-1, 3, 4, 5)$ 正交。

7. 设 A 是 3 阶方阵，若 $1, -1$ 是 A 的特征值，且 A 与对角阵 $diag\ (1, t, 2)$ 相似，则 $t =$ ____-1_____。

8. 已知 A 为 n 阶方阵，其每行元素的和均为 a，则 A 有一个特征值_____a_____

   和一个特征向量_____$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$_____。

9. 当 t 的取值范围是____$(1, +\infty)$_____时，二次型 $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + tx_2^2 + x_3^2$ 正定。

二. 单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。在每小题的四个选项中仅有一个正确，请将正确的选项编号填在括号内）

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times m$ 矩阵，则 ……………………（ B ）

   A. 当 $m > n$ 时，必有 $|AB| \neq 0$； B. 当 $m > n$ 时，必有 $|AB| = 0$；

   C. 当 $m < n$ 时，必有 $|AB| \neq 0$； D. 当 $m < n$ 时，必有 $|AB| = 0$.

2. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵，下列正确的是 ……………………（ C ）

   A. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$； B. $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$；

   C. 若 $|AB| = 0$，则 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$； D. $(AB)^T = A^T B^T$.

3. 设 A 和 B 都是 n 阶非零方阵，且 $AB = O$， 则 A 的秩必 ……………………（ B ）

   A. 等于 n； B. 小于 n； C. 大于 n； D. 不能确定。

4. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 ……………………（ D ）

   A. A 与 B 都相似于同一个对角阵； B. A 与 B 有相同的特征多项式和特征向量；

   C. A 与 B 有相同的特征值和特征向量； D. A 与 B 有相同的特征多项式和特征值。

5. 对于 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$，以下命题中，正确的是 ……………………（ C ）

   A. 若 A 的列向量组线性无关，则 $Ax = 0$ 有非零解；

   B. 若 A 的行向量组线性无关，则 $Ax = 0$ 有非零解；

   C. 若 A 的列向量组线性相关，则 $Ax = 0$ 有非零解；

   D. 若 A 的行向量组线性相关，则 $Ax = 0$ 有非零解。

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

三．（**8 分**）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$

解： 将第 2 列到第 4 列全部加到第 1 列 ……………………………3 分

并从第 1 列中提出公因子 x 得到

$$D=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$ ……………………………1 分

再将以上行列式第 1 列分别加到第 2, 4 列，以及第 1 列乘 -1 加到第 3 列，得到

$$D=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=x^4$$ ……………………………3+1 分

四．（**12 分**）求解矩阵方程 $3A^*XA=16XA+E$，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。

解： $|A|=16$，$A^*=|A|A^{-1}=16A^{-1}$， ……………………………2 分

方程变为 $16A^{-1}(3E-A)XA=E$， 从而 $X=16^{-1}(3E-A)^{-1}$。 ……………2+1 分

由于 $3E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$， ……………………………1 分

$$(3E-A,E)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right),$$ ……………1+4 分

所以 $X=16^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ………1 分

五．（**12 分**）求向量组 $\vec{a}_1=(1,2,5)^T,\vec{a}_2=(0,2,-1)^T,\vec{a}_3=(-1,4,2)^T,\vec{a}_4=(0,3,-2)^T$ 的秩和它的一个极大无关组，并将其它向量用此极大无关组线性表示。

解： 记 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3-5r_1 \\ \sim \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ ………………3 分

$$\begin{matrix} r_2\leftrightarrow r_3 \\ r_3+2r_2 \\ \sim \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 20 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} r_2-2r_3 \\ r_2\times(-1) \\ r_3\times(-1) \\ \sim \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 1 \end{pmatrix}$$ ………………3 分

秩 $R(a_1,a_2,a_3,a_4)=3$， ………………2 分

极大无关组为 a_1,a_2,a_4 ………………2 分

$\vec{a}_3=-\vec{a}_1+33\vec{a}_2-20\vec{a}_4$ ………………2 分

六．（14 分） 讨论当 a,b 分别取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b \\ x_2 + (3-a)x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$ 无解、有唯一解和有无穷多解，并在有无穷多解的情形下求该方程组的通解。

解： $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b \\ 0 & 1 & 3-a & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b \\ 0 & 1 & 3-a & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{pmatrix}$ ……4 分

当 $a=1$ 且 $b \neq 1$ 时, $3 = R(A) \neq R(B) = 4$，方程组无解；……………………2 分

当 $a \neq 1$ 时，$R(A) = R(B) = 4$，方程组有唯一解；……………………2 分

当 $a=1$ 且 $b=1$ 时，$R(A) = R(B) = 3 < 4$，方程组有无穷多解，此时 ……………2 分

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ………………2 分

通解 $\vec{x} = c(1,-2,1,0)^T + (0,-1,0,1)$，其中 c 是任意常数。……………………2 分

七．（14 分） 用正交变换化二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$ 为标准形，并写出所用的正交变换。

解： 二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ………………2 分

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ ………………1 分

$= \lambda(\lambda-2)^2 = 0$

得到 A 的特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ …………3 分

由 $A - 0E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得对应 λ_1 的 $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ……………2 分

由 $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得对应 λ_2, λ_3 的 $\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ……2 分

标准形为： $f = 2y_2^2 + 2y_3^2$ ………………2 分

正交变换为： $x = Qy$, 其中 $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ………………2 分

八．证明题（10 分） 设λ_1,λ_2是A的两个不同特征值，$\vec{x}_1,\vec{x}_2$是A的对应于λ_1的两个线性无关的特征向量，而$\vec{x}_3,\vec{x}_4$是A的对应于λ_2的两个线性无关的特征向量。试证明$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4$线性无关。

证明： 考虑 $k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+k_3\vec{x}_3+k_4\vec{x}_4=\vec{0}$ （*） …………2 分

用A左乘（*），并利用特征值特征向量定义所满足的关系得到

$\lambda_1(k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2)+\lambda_2(k_3\vec{x}_3+k_4\vec{x}_4)=\vec{0}$ （**） …………2 分

综合（*）（**）有 $\left(k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2,k_3\vec{x}_3+k_4\vec{x}_4\right)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\1&\lambda_2\end{pmatrix}=\left(\vec{0},\vec{0}\right)$， …………2 分

注意到λ_1,λ_2互不相同时，$\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\1&\lambda_2\end{pmatrix}$可逆，在上式两端右乘$\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\1&\lambda_2\end{pmatrix}^{-1}$

得到 $\left(k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2,k_3\vec{x}_3+k_4\vec{x}_4\right)=\left(\vec{0},\vec{0}\right)$， …………2 分

即$k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2=\vec{0}$ 以及 $k_3\vec{x}_3+k_4\vec{x}_4=\vec{0}$，分别利用$\vec{x}_1,\vec{x}_2$以及 $\vec{x}_3,\vec{x}_4$线性无关推得

$k_1=k_2=0$和 $k_3=k_4=0$，这就证明了$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4$线性无关。 …………2 分