进阶题

1 矩阵

1、设$A=\begin{pmatrix}6&3&0\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&-1\end{pmatrix}$, 求$X$使$AX=2X+B$.

2、设n阶矩阵A, B满足$A+B=AB$, 且

$$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&1&4\end{pmatrix},$$

求A.

3、设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$矩阵$X$, 满足$8X=-A^*X+2A^{-1}B$, 其中$A^*$是$A$的伴随矩阵, 求矩阵$X$.

4、$A=\begin{pmatrix}-2&9&5\\-1&4&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^k$.

5、设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

6、设$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&-1\\4&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&A_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&A_2\\A_3&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$, 且$A_1, A_2, A_3$可逆. 求$A^{-1}, B^{-1}$.

7、已知n阶方阵A满足$A^2-2A-3I=\mathbf{0}$.
(1) 求$A^{-1}, (A-3I)^{-1}$;
(2) A^2-A+nI(n 是整数)什么时候可逆, 如果可逆, 求其逆.

8、讨论矩阵A, AA^T的秩, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ & \cdots & \cdots & \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}.$$

9、求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -10 & 10 & -1 \\ 3 & 2 & a+1 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{pmatrix}$的秩.

10、设A是n阶方阵, 且$A^2 - A - 2I = \mathbf{0}$, 求证$r(A-2I) + r(A+I) = n$.

11、设A为$n \times n$实矩阵, 证明: $r(A) = r(A^TA) = r(AA^T)$.

12、设$A, B, A+B$为可逆矩阵, 求证$A^{-1}+B^{-1}$可逆.

13、设A是$(n \geq 2)$阶方阵, A^*是A的伴随阵. 证明:
(1) $r(A^*)=n$的充要条件是$r(A)=n$;
(2) $r(A^*)=1$的充要条件是$r(A)=n-1$;
(3) $r(A^*)=0$的充要条件是$r(A)<n-1$.

14、设A是方阵, 且$A^2-2A=4I$.
(1) 求证A可逆, 并求A^{-1};
(2) 求证$A-3I$ 可逆, 并求$(A-3I)^{-1}$.

2 行列式

1、已知4阶行列式D中第三列元素依次为$-1,\ 2,\ 0,\ 1$, 它们的余子式依次为$5,\ 3,\ -7,\ 4$, 求D的值.

2、已知

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

求$A_{41}+A_{42}+A_{43}$和$A_{44}+A_{45}$, 其中$A_{4j}\ (j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$为元素$a_{4j}$的代数余子式.

3、设A为3阶矩阵，且$|A| = -2$，令$A = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，其中$a_j\ (j = 1,\ 2,\ 3)$为A的列向量. 求

(1) $|a_1,\ 2a_2,\ a_3|$；

(2) $|a_3 - 2a_1,\ 3a_2,\ a_1|$.

4、已知三阶方阵A的特征值为$1, 2, 3$，求$|A|$，$\left|A^2 + 2A + 3I\right|$.

5、计算$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

6、计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

7、计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}.$$

8、计算n阶三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_n.$$

3 向量

1、已知向量组

$$\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\ \alpha_2=(2,7,1,3)^T,$$

$$\alpha_3=(0,1,-1,a)^T,\ \beta=(3,10,b,4)^T,$$

(1) a,b取何值时, 向量β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?
(2) a,b取何值时, 向量β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？并写出此表达式.

2、设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}(m\geq 3)$线性相关, 向量组$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关, 试讨论
(1) 向量α_1能否由$\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示?
(2) 向量α_m能否由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示?

3、判断R^3中的以下向量组是否等价:

$$\alpha_1=(1,2,3),\ \alpha_2=(1,0,2),$$

$$\beta_1=(3,4,8),\ \beta_2=(2,2,5),\ \beta_3=(0,2,1).$$

4、设$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(1,3,t)^T$
(1) t为何值时, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关？
(2) t为何值时, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关？
(3) 当向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关时, 将$\alpha_3$表示为$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合.

5、设A是4×3矩阵, B是3×3矩阵, 且有$AB=\mathbf{0}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

判断B的列向量组的线性相关性.

6、已知A是三阶矩阵, $\alpha_1 \neq \mathbf{0}, \alpha_2, \alpha_3$是3维向量, 满足$A\alpha_1 = \alpha_1$, $A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 证明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关

7、已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 证明$\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$也线性无关.

8、设A是$n \times m$矩阵$(n < m)$, B是$m \times n$矩阵, I是n阶单位矩阵, 已知$AB = I$, 证明B的列向量组线性无关.

9、已知向量组

$$\alpha_1=(1,0,-1,1),\ \alpha_2=(2,1,-2,0),$$

$$\alpha_3=(-2,-1,0,1),\ \alpha_4=(0,-1,2,1)$$

(1) 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩;
(2) 求该向量组的一个极大无关组,并用之表示其余向量.

10、设4维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,若方程组$Ax=\mathbf{0}$的通解为$x=k(1,0,1,0)^T$, 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组.

11、设$\alpha_1=(a,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,1+a,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,2+a,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,3+a)^T$. 问$a$为何值时, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3,\alpha_4$线性相关, 并在此时求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组.

12、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4, 证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为4.

13、在欧氏空间$\mathbf{R}^4$中，已知$\alpha = (1,-2,-1,3)$与$\beta = (3,-1,-2,-1)$，求α与β的夹角.

14、设α, β 是欧氏空间中的任意向量, 证明

$$|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$$

15、设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$是$\mathbf{R}^n$中线性无关的向量组, 且$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$与$\beta_1, \beta_2$ 正交, 证明β_1, β_2线性相关.

16、求齐次线性方程组$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$的解空间的一个标准正交基.

17、设A是正交阵, 且$|A| = -1$, 求$|A+I|$.

4 线性方程组

1、设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的秩为n, 求齐次线性方程组$Bx=\mathbf{0}$的一个基础解系, 其中$B=(a_{ij})_{r\times n}$ $(r<n)$是A的前r行构成的矩阵, x为n维列向量.

2、问a, b为何值时线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并求有无穷多解时的通解.

3、设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$为正交阵, 且$a_{ij}=A_{ij}, a_{22}=-1$, 求$Ax=(0,-1,0)^T$的解.

4、设4×3矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 且$Ax=\beta$的通解为$x=k\xi+\xi_0$, 其中$\xi=(1,2,-1)^T$, $\xi_0=(2,1,-2)^T$, 若$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha_3)$, 求$By=\alpha_1-\alpha_2$的解.

5、设$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$是三元非齐次线性方程组$Ax=\beta$的解, $r(A)=1$且$\gamma_1+\gamma_2=(1,0,0)^T$, $\gamma_2+\gamma_3=(1,1,0)^T$, $\gamma_1+\gamma_3=(1,1,1)^T$, 求方程组$Ax=\beta$的通解.

6、设有两个4元齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases};(II)\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

(1) 求线性方程组(I)的基础解系;
(2) 试问方程组(I)和(II)是否有非零的公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解.

7、设A是一个$m\times n$矩阵, 求证存在非零的$n\times s$矩阵B,使得$AB=0$的充要条件是$r(A)<n$.

8、设A为$n\times n$实矩阵, 证明: $r(A)=r(A^TA)=r(AA^T)$.

回到首页
标题页
第 15 页 共 17 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

5 对角化

1、已知三阶方阵A的特征值为$1, 2, 3$, 求A^{-1}, $A^2+2A+3I$的特征值.

2、求一个正交矩阵P, 使P^TAP为对角矩阵, 其中

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}.$$

3、已知$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$,求一个正交矩阵$Q$, 使$Q^TA^{-1}Q$为对角矩阵,

4、已知$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, 求$A^{10}$.

5、设三阶方阵A满足$Aa_i = ia_i (i = 1, 2, 3)$，且$a_1 = (1, 2, 2)^T$，$a_2 = (2, -2, 1)^T$, $a_3 = (-2, -1, 2)^T$, 求矩阵A.

6、设三阶实对称矩阵A的特征值为$6, 3, 3$, 对应特征值6的特征向量为$\xi_1 = (1, 1, 1)^T$, 求矩阵A^k.

7、已知$A \sim B$, 求x, y的值, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{pmatrix}.$$

8、设n阶矩阵A满足$A^2 = A$, 证明

(1) A的特征值只能是1或0;

(2) $A + I$可逆.