上海大学 2009 ～ 2010 春季学期试卷解答及评分标准

课程名： 线性代数（A） 课程号： 01014009 学分： 3

一．填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

1． 排列 $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$ 的逆序数为 $\underline{\quad\dfrac{n(n+1)}{2}\quad}$。

2． 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\quad a_1a_2a_3a_4 \quad}$。

3． 若 4 阶行列式的第 1 行元素依次为 $1,2,3,4$，第 2 行元素的代数余子式依次为 $x,2,x,1$，那么 $x = \underline{\quad -2 \quad}$。

4． 设 A 和 B 都是 n 阶方阵，且 $|A| \neq 0$。若 $AB - A = E$，则 $A^{-1} = \underline{\quad B-E \quad}$。

5． 设 A 为 n 阶方阵，若 $R(A) < n-1$，则 $R(A^*) = \underline{\quad 0 \quad}$。

6． 若 A 是秩为 1 的 3 阶方阵，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $AB = O$，则 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的通解为

$\underline{\quad \vec{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad}$。

7． 当 $a = \underline{\quad -10 \quad}$ 时，向量 $(-3,4,a,1)$ 与向量 $(-1,3,2,5)$ 正交。

8． 可逆方阵 A 有特征值 λ，则 $A^{-1} + 2E$ 有特征值 $\underline{\quad \lambda^{-1} + 2 \quad}$。

9． 如果 A 为 n 阶正交矩阵，而且 $|A| = 1$，则 $|A^T + A^*| = \underline{\quad 2^n \quad}$。

10． 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$，如果 A 正定，则 t 的取值范围是 $\underline{\quad (1,+\infty) \quad}$。

二．单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。在每小题的四个选项中仅有一个正确，请将正确的选项编号填在括号内）

1． 设 A 和 B 都是 n 阶可逆矩阵，下列错误的是 ………………………………………… （ B ）

A. $(A+B)^T = A^T + B^T$； B. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$；

C. $|AB| = |BA|$ ； D. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2． 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A| = 0$，则 A 中 ………………………………………… （ C ）

A． 任意一列向量是其余列向量的线性组合； B． 必有一列元素全为零；

C． 必有一列向量是其余列向量的线性组合； D． 必有两列元素对应成比例。

3． 设 0 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征值，则 $a =$ ………………………………… （ A ）

A. 3； B. 1； C. 0； D. -1.

4． 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 ……………………………………………………… （ D ）

A. A 与 B 都相似于同一个对角阵； B. A 与 B 有相同的特征多项式和特征向量；

C. A 与 B 有相同的特征值和特征向量； D. A 与 B 有相同的特征多项式和特征值。

5． 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，$A\vec{x} = \vec{b}$ 是非齐次线性方程组，以下判断正确的是 ………（ C ）

A. $A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解，则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解； B. $A\vec{x} = \vec{0}$ 有非零解，则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解；

C. $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解，则 $A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解； D. $A\vec{x} = \vec{b}$ 无解，则 $A\vec{x} = 0$ 只有零解。

三. 行列式计算（本大题共 2 题，每小题 8 分，共 16 分）

1. $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解： $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ………………………………3 分

$=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ………………………………3 分

$\overset{c_1+2c_2}{====}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-9$ ………………………………2 分

2. $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$

解： 将第 2 列到第 $n+1$ 列全部加到第1列 ………………………………3 分
并从第1列中提出公因子得到

$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$, ………………………………1 分

再将以上行列式第1列乘$-a_j$加到第 $j+1$ 列， $j=1,\cdots n$， ………………………………2 分

得到下三角行列式，由此求出 $D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ ………………………………2 分

四.（12 分）已知$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，且 $A^{-1}XA=A^{-1}X+E$，求 A 和 X 。

解： $\left((A-E)^{-1},E\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ………………………………2 分

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=(E,A-E)$ ………………………………2 分

$A=(A-E)+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ………………………………2 分

又方程可表示为 $A^{-1}X(A-E)=E$， ………………………………2 分

所以 $X=A(A-E)^{-1}$ ………………………………2 分

$=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ………………………2 分

五．（14 分） 讨论当 a,b 分别取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b \\ x_2 + (3-a)x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$ 无解、有唯一解和有无穷多解，并在有无穷多解的情形下求该方程组的通解。

解： $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b \\ 0 & 1 & 3-a & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b \\ 0 & 1 & 3-a & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{pmatrix}$ ……4 分

当 $a=1$ 且 $b \neq 1$ 时, $3 = R(A) \neq R(B) = 4$，方程组无解； ……………………2 分

当 $a \neq 1$ 时，$R(A) = R(B) = 4$，方程组有唯一解； ……………………2 分

当 $a=1$ 且 $b=1$ 时， $R(A) = R(B) = 3 < 4$，方程组有无穷多解，此时 ………………2 分

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ …………………2 分

通解 $\vec{x} = c(1,-2,1,0)^T + (0,-1,0,1)$，其中 c 是任意常数。 ……………………2 分

六．（15 分） 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

（1）**（4 分）** 求与二次型对应的实对称矩阵 A；

（2）**（11 分）** 用正交变换将二次型化为标准形。

解：（1） $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$， ……………………2 分

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ……………………2 分

（2） $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ ……1 分

$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$ 得到 A 的特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ ……3 分

由 $A - 0E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得对应 λ_1 的 $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ……1 分

由 $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得对应 λ_2 的 $\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ……1 分

由 $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得对应 λ_3 的 $\vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ……1 分

取正交阵 $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\xi}_3\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ……2 分

在正交变换 $\vec{x} = P\vec{y}$ 下，标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$ ……2 分

七．证明题（8 分）设$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$是列向量组，若$\vec{a}_1, \vec{a}_2$线性无关，$\vec{a}_3, \vec{a}_4$也线性无关，且内积$[\vec{a}_i, \vec{a}_j] = 0 \quad (i = 1, 2;\ j = 3,\ 4)$，试证明$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$一定线性无关。

证明： 考虑 $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 + k_4\vec{a}_4 = \vec{0}$ （*） ………………………………2 分

将$\vec{a}_1, \vec{a}_2$分别与上式作内积，结合正交性条件

得到$[\vec{a}_1, k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2] = 0$和$[\vec{a}_2, k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2] = 0$， ………………………………2 分

故$\|k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2\|^2 = [k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2, k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2] = 0$，

从而$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 = \vec{0}$， ………………………………2 分

由$\vec{a}_1, \vec{a}_2$线性无关的假设推得$k_1 = k_2 = 0$， ………………………………1 分

这样，（*）变为$k_3\vec{a}_3 + k_4\vec{a}_4 = \vec{0}$，

再利用$\vec{a}_3, \vec{a}_4$线性无关推得$k_3 = k_4 = 0$， ………………………………1 分

即由（*）成立推得$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，故$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$线性无关。