线性代数单元练习六（二次型）

一、单项选择题

1．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数为（　　　）

（A）3　　　（B）2　　　（C）1　　　（D） 0

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶实对称矩阵，满足 $A^3-A=0$，且其正、负惯性指数均为 1，则（　　　）

(A)　行列式 $|E+A|=1$　　　(B)　$2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵

(C)　秩 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$.　　　(D)　$\boldsymbol{Ax=0}$ 解空间的维数为 1

3．设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，二次型 $f(X)=X'AX$ 正定的充要条件是（　　　）

（A）|A| >0　　　（B）负惯性指数为 0

（C）A 的所有主对角线上的元素大于 0　　（D）存在可逆矩阵 C，使 $A=C^TC$

4．已知 A、B 为三阶矩阵，且有相同的特征值 0，2，2，则下列命题：①A,B 等价；② A,B 相似；③ 若 A,B 为实对称矩阵，则 A,B 合同；④ 行列式 $|A-2E|=|2E-A|$,成立的有个数为（　　　）

(A) 1 个　　　(B) 2 个　　　(C)　3 个　　　(D)　4 个

5．设 $\boldsymbol{A}$ 是任意实矩阵，那么二次型 $f(X)=X^TA^TAX$ 必是（　　　）

（A）半正定　　（B）半负定　　（C）正定　　（D）负定.

6．下列矩阵中不一定可逆的是（　　　）

(A) 正交矩阵　　(B) 正定矩阵　　(C) 伴随矩阵　　(D) 初等矩阵

7． $\boldsymbol{n}$ 阶实对称矩阵 A 与 B 合同的充分必要条件是（　　　）

(A)　$r(A)=r(B)$　　　(B)　A 与 B 的正惯性指数相等

(C)　A , B 为正定矩阵　　　(D)　A　, B 同时成立

8．实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$ 是（　　　）

(A) 正定二次型　　　(B) 半正定二次型

(C) 半负定二次型　　　(D) 不定二次型

二、填空题

1．设 A 是正、负惯性指数均为 1 的三阶实对称矩阵，且满足 $|E+A|=|E-A|=0$，则行列式 $|2E+3A|=$________________________ .

2．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2bx_2x_3$ (可通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,则 $ab^2=$____________

3．已知 $\boldsymbol{f(x)}=\boldsymbol{x}^T\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，则其规范形是___________

4．设 $\alpha=(1,2,3,4)^T,\beta=(-1,2,-2,0)^T,A=\alpha\alpha^T,f\left(X\right)=X^TAX$,那么 $f\left(\beta\right)$=______

5．设 A 为 n 阶实矩阵，且 $A^T=A^{-1}$，$|A|<0$，则行列式 $|A+E|=$ ____________

6．二次型 $f(x,y,z)=ax^2+ay^2+az^2+2xy+2yz+2xz$ 经过正交变换可化为标准型 $f=3u^2$，则 $a=$ __________

7. 设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 1，2，3，$\cdots,n$. 则当 t ________时，矩阵 $tE-A$ 为正定矩阵.

8. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & 5 & -x\\ 2 & 3x & 3 & 4\\ 1 & 2 & -x & 1\\ 2 & 5 & 2 & 5x\end{vmatrix},$$

则 $f'''(0)$=______________ .

三、计算题

1．用正交变换化二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=2\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2-4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2-4\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$ 为标准形，并指出所作的正交变换，又 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=1$ 表示什么曲面？

2．设二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=4\boldsymbol{x}_2^2-3\boldsymbol{x}_3^2+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2-4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3+8\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$ ($\boldsymbol{a}$为整数)，通过正交变换化为标准形 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}_1^2+6\boldsymbol{y}_2^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{y}_3^2$，试求(1) a,b；(2)正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；(3)试证 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*+37\boldsymbol{E}$.

3. 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=5\boldsymbol{x}_1^2+5\boldsymbol{x}_2^2+\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_3^2-2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+6\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3-6\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$ 的秩为 2，
求(1) c； (2)求正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 及标准形.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 的正惯性为 r，负惯性指数 0，求行列式 $|E+A+A^2+\cdots+A^n|$ 的值.

5. 已知二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)^2+(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3)^2+(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1)^2$

(1)用配方法将二次型化成标准形，求所用的标准变换。

(2) 用正交变换法将二次型化为标准形，并求所做的正交变换。

6. 给出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所满足的关系式，使下面的二次型正定。

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$

7. 设 $\alpha_1=(a,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,b,1)^T$，$\alpha_3=(0,0,c)^T$，与 $\beta_1=(-1,-1,x)^T$，$\beta_2=(y,-1,1)^T$，$\beta_3=(-1,z,1)^T$，且由基底 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基底 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$，求：(1) a,b,c 与 x,y,z；(2) 求由基底 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基底 β_1,β_2,β_3 的坐标变换公式；(3)求 $\alpha=(2,0,0)^T$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标。

三、 证明题

1. 设 A 为 n 阶正定阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为非零的 n 维向量，且

$$\alpha_i^T A\alpha_j = 0(i\neq j, i, j = 1,2,3,4),$$

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

2．设 A,B 都是 n 阶正定矩阵，其中 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$, 令 $c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$，对应矩阵为 $C=(c_{ij})$，试证 $f=x^TCx$ 为正定二次型.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

4．设 A，B 均为 n 阶方阵，A 的 n 个互异特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$B$ 的 n 个互异特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，且 λ_i 的属于 A 的特征向量均为 μ_i 的属于 B 的特征向量，证明：$AB=BA$.

5．已知 A 为 n 阶方阵，若 $A-E$ 正定，则 A 也正定.

答案与提示:

一、选择题

1．B　2.　B　3．D　4.　C　5．A　6.　C　7．D　8．A

二、填空题

1.　-10　2．18　3.　$\boldsymbol{y}_1^2-\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_3^2$　4．9

5．0　6.　1　7.　$t>n$　8.　$-36.$

三、计算题

1．解：$\lambda_1=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,-2]^T$；$\lambda_2=-2$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,2]^T$；$\lambda_3=4$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,-2,1]^T$。$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，

$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}_1^2-2\boldsymbol{y}_2^2+4\boldsymbol{y}_3^2=1$，单叶双曲面。

2. （1）$a=2$，$b=-6$；（2）$Q=\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$正交阵。

（3）提示：B 的特征值全为正数。

3.（1）c=3；（2）$Q=\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$正交阵。$f(x_1,x_2,x_3)=4y_2^2+9y_3^2$。

$B=3(E-\frac{A^*}{|A|})^{-1}$.

4. $\left|E+A+A^2+\cdots+A^n\right|=(1+n)^r$.

5. 提示：（1）$\begin{cases} x_1-x_2=y_1 \\ x_2-x_3=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1+\frac{y_2}{2}=z_1 \\ y_2=z_2 \\ y_3=z_3 \end{cases}$

即 $x=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ $z=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}z$,

这时，$f(x_1,x_2,x_3)=2z_1^2+\frac{3}{2}z_2^2$

（2）$\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=3$，对应的线性无关特征向量为

$\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$,

正交变换 $x=Qy$，这时 $f=x^TAx=3y_2^2+3y_3^2$

6. 显然 $f\geq 0$，且 $f=0$ 当且仅当

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0 \\ x_2 + a_2 x_3 = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = 0 \\ x_n + a_n x_1 = 0 \end{cases}$$。

而此方程组仅有零解当且仅当行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以当且仅当 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \neq (-1)^n$ 时 f 正定。

7. 提示：$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3]$=$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{Q}$。

（1）$\boldsymbol{a} = 1, \boldsymbol{b} = -2, \boldsymbol{c} = -\frac{1}{2}, \boldsymbol{x} = -1, \boldsymbol{y} = 1, \boldsymbol{z} = -5$。

（2）$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}]\boldsymbol{y}$。

（3）（2，1，6）。提示：$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ 求解

四、证明题

1. 用定义证明，分别在 $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{k}_4\boldsymbol{\alpha}_4 = 0$ 的两边左乘

$\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\alpha}_4^T\boldsymbol{A}$ 来确定 $\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{K}_4 = 0$。

2. **提示：**由 $\boldsymbol{B}$ 正定可得存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{b}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_{ki}\boldsymbol{p}_{kj}$，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_{ij}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{b}_{ij}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_{ki}\boldsymbol{p}_{kj})\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p}_{ki}\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{p}_{kj}\boldsymbol{x}_j)\right] = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}(\boldsymbol{p}_{ki}\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{p}_{kj}\boldsymbol{x}_j))$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{p}_{k1}\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{kn}\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k1}\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{p}_{k2}\boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{kn}\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

由 $\forall x \neq 0$ 知 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \neq 0$（否则与 $\boldsymbol{P}$ 可逆矛盾）。由 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$>0，即 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型。

3. **提示：** $\boldsymbol{B}^T = (\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T = \lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \lambda > 0, \boldsymbol{x} \neq 0$，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) > 0$，故 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。

4. 提示：设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的特征向量，由于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$互异，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关。

$$\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{AP}\begin{bmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{BP}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{BAP},$$

故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

5. 略