《线性代数 D》强化训练题三解答

一、填空题

1. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -5 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1/8\end{pmatrix}$;　　2. $-\dfrac{1}{2}$;　　3. $r_1 \le r_2$;　　4. $3,0,8$;　　5. $k>5$

二、单项选择题

1. D;　　2. C;　　3. A;　　4. D;　　5. C

三、计算题

1. 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$，求元素 a,b 的代数余子式的值.

解：元素 a 的代数余子式的值为

$$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 10 & 20\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 6 & 16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 16\end{vmatrix}=16-12=4;$$

元素 b 的代数余子式的值为

$$(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 10 & 20\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 9 & 19\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 9 & 19\end{vmatrix}=-(38-27)=-11.$$

2. 计算行列式的值

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解: 第$n+1$列乘以1加到第n列，第n列乘以1加到第$n-1$列，$\cdots$，第2列乘以1加到第1列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(n+1)\cdot(-1)^{(n+1)+1}\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n.$$

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

求 (1) AB; (2) $|AB|$; (3) B^{-1}; (4) 满足$BX=A$的矩阵X.

解: (1) $AB=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $|AB|=24$;

(3) $B^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

(4) $X=B^{-1}A=\begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & 0 & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. 问 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=-5 \\ x_1+3x_2-x_3=\lambda \\ -7x_1-11x_2+9x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 有解，无解，有解时求全部解.

解：$(A\,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & \lambda \\ -7 & -11 & 9 & \lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & \lambda \\ 0 & -5 & -1 & -5-2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2+3\lambda-10 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & \lambda \\ 0 & -5 & -1 & -5-2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+5)(\lambda-2) \end{pmatrix}$,

当 $\lambda\neq 2$ 且 $\lambda\neq -5$ 时，$R(A)=2\neq R(A\,\boldsymbol{b})=3$, 无解;

当 $\lambda=2$ 时,

$(A\,\boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 11 \\ 0 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$R(A)=2=R(A\,\boldsymbol{b})$, 有解，通解 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$;

当 $\lambda=-5$ 时,

$$(A\,\boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R(A)=2=R(A\,\boldsymbol{b})$，有解，通解 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

四、简答题

1. 设 A, B 均为 n 阶对称阵，问 AB 是否也是对称阵？你能否给出 AB 也是对称阵的充要条件.

解: 不一定. 充要条件是 $AB=BA$.

2. 问空间 R^3 中的平面 $2x-3y+z=0$ 是否构成 R^3 中的子空间？若是，求该子空间的基与维数，若不是，则说出理由.

解: 是. $\dim V=2$，基为 $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

五、已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3 \quad (a>0)$ 可通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

1. 写出二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3 \ (a>0)$ 的矩阵 A 和标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$ 的矩阵 B;

2. 由 A 与 B 的关系求 A 的特征值和参数 a 的值;

3. 求正交变换矩阵 P.

解: 1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. 因为 A 与 B 相似，所以 A 与 B 的行列式相等且有相同的特征值，故

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$，即 $2(9-a^2)=10$，所以 $a=2$.

且由于 B 的特征值为 $1, 2, 5$，所以 A 的特征值也为 $1, 2, 5$.

3. $\lambda_1 = 1$ 时，$A-1E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

正交化得 $\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$；

$\lambda_2 = 2$ 时，$A-2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

正交化得 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$；

$\lambda_3 = 5$ 时，$A-5E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

正交化得 $\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

所以正交变换矩阵 $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

六、证明题

1. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性空间$V$的一个基，设

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+7\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是$V$的一个基，并求基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

证：$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&-1\end{pmatrix}$,

因为$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&-1\end{vmatrix}\neq 0$，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也线性无关，则也是$V$的一个基. 显然过渡矩阵就是$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&-1\end{pmatrix}$.

2. 设n阶非零矩阵A_1, A_2满足$A_i^2=A_i\ (i=1,2)$，且$A_2A_1=O$,

(1) 证明：$A_i\ (i=1,2)$的特征值λ不是0就是1.

(2) 证明：A_1属于$\lambda=1$的特征向量$\boldsymbol{x}$就是A_2属于$\lambda=0$的特征向量.

(3) $\boldsymbol{x}_i$分别是A_i属于$\lambda=1$的特征向量$(i=1,2)$，证明$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$线性无关.

证： (1) 因为$A_i^2\boldsymbol{x}=A_i(A_i\boldsymbol{x})=A_i(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A_i\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$，又因为$A_i^2\boldsymbol{x}=A_i\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$,

所以$\lambda^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即$(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以$\lambda^2-\lambda=0$，则$\lambda=0$或$\lambda=1$.

(2) 设A_1属于$\lambda=1$的特征向量为$\boldsymbol{x}$，则

$A_1\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，左乘$A_2$得$A_2(A_1\boldsymbol{x})=A_2\boldsymbol{x}$，而$A_2(A_1\boldsymbol{x})=(A_2A_1)\boldsymbol{x}=O\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

所以$A_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{x}$，则$\boldsymbol{x}$也是$A_2$属于$\lambda=0$的特征向量.

(3) 设$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$，左乘$A_2$得$k_1A_2\boldsymbol{x}_1+k_2A_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$,

因为$A_1\boldsymbol{x}_1=1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_1$，$A_2\boldsymbol{x}_2=1\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_2$，由(2)知$A_2\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$，所以$k_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$,

而$\boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_2=0$，此时$k_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$，又$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_1=0$,

因此$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$线性无关.