线性代数单元练习四（线性方程组）

一、单项选择题

1．设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax=0}$ 与 $\boldsymbol{Bx=0}$ 有相同的基础解系 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则在下列方程组中以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为基础解系的是（　　　　）

(A) $\boldsymbol{(A+B)x=0}$　　(B) $\boldsymbol{ABx=0}$　　(C) $\boldsymbol{BAx=0}$　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x=0}$

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则以下命题：1）$\boldsymbol{Ax=0}$ 只有零解；2）$\boldsymbol{Ax=b}$ 有唯一解；3）$\boldsymbol{A}$ 可逆；4）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关；5）$\boldsymbol{A}$ 无零特征值，等价的有（　　　　）

(A) 2 个　　（B）3 个　　（C）4 个　　(D) 5 个

3．设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，且 $m<n$，若 A 的行向量线性无关，则（　　　）

(A) 方程组 $Ax=b$ 有无穷多组解　　(B) 方程组 $Ax=b$ 仅有唯一解

(C) 方程组 $Ax=b$ 无解　　(D) 方程组 $Ax=b$ 仅有零解

4．假设 A 为阶实矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，则对于线性方程组(I)：$\boldsymbol{Ax}=0$，和(II)：$\boldsymbol{A^TAx}=0$，必有(　　　　　　)

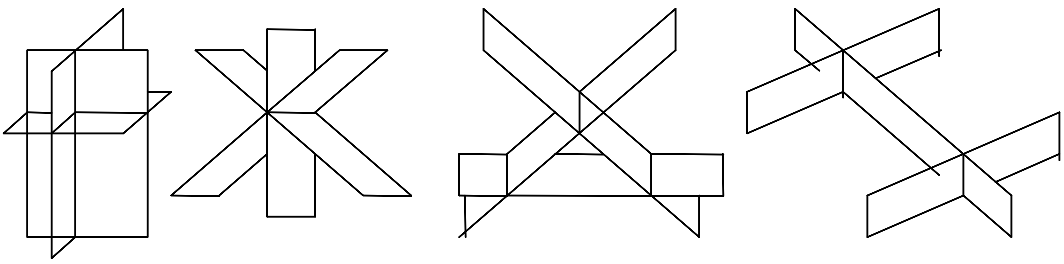
(A) (II)的解是 (I)的解，(I)的解也是 (II)的解

(B) (II)的解是 (I)的解，但(I)的解不是 (II)的解

(C) (I)的解不是 (II)的解，(II)的解也不是 (I)的解

(D) (I)的解是 (II)的解，但(II)的解不是 (I)的解

5．设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i\,(i=1,2,3)$ 它们组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为（　　　　　）.



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

6．已知 $\boldsymbol{\beta_1}$ ，$\boldsymbol{\beta_2}$ 是非齐次线性方程 $\boldsymbol{AX=b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX=0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{AX=b}$ 的通解必是（　　　）

$(A)\ k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　$(B)\ k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

$(C)\ k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　$(D)\ k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

7. 要使$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$都是线性方程组$AX=0$的解，只要系数$A$为（　　）

$(A)\begin{bmatrix}-2&1&1\end{bmatrix}$　$(B)\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$　$(C)\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$　$(D)\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$

8．非齐次线性方程组$AX=b$中未知量个数为n，方程个数为m，系数矩阵A的秩为r，则（　　）

(A) $r=m$时，方程组$AX=b$有解　(B) $r=n$时，方程组$AX=b$有唯一解

(C) $m=n$时，方程组$AX=b$有唯一解　(D) $r<n$时，方程组$AX=b$有无穷多解

二、填空题

1．已知方程组$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$无解,则$a=$_______

2．设方程$\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$有无穷多个解，则$a=$_________

3．设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=0$，元素$a_{23}$的代数余子式$A_{23}\neq 0$，则__________

为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．

4．设$\boldsymbol{A}$为四阶方阵，其列向量为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$，$\beta=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$则$AX=\beta$的通解为______________________.

5．线性方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$的基础解系含解向量的个数是__________.

6． 设有一个四元非齐次线性方程组$Ax=b$，$R(A)=2$，η_1,η_2,η_3为其解向量，且$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$,此非齐次线性方程组的通解_________________

7. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知η_1，η_2，η_3是它的三个解向量，且$\eta_1=(2,3,4,5)$，$\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)$，该方程组的全部解________

8．设γ_0是非齐次方程组 $AX=b$ 的一个解向量，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是对应的齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则$\gamma_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性__________

三、计算题

1．设$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，已知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$为四维列向量，令$\boldsymbol{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，试求$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

2．讨论并求方程组的

$$\begin{cases} ax_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=b \\ 2x_1+2x_2+bx_3=2 \end{cases}$$

解，其中 a , b 为常数.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为四维列向量组，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$. 已知方程组 $(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_1+a\alpha_2+\alpha_3)x=\alpha_4$ 有无穷多解，(1) 求 a 的值；(2) 用基础解系表示该方程组的通解.

4. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个列向量为 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\cdots,\alpha_n+\alpha_1$. 试问:当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时, 线性方程组 $\boldsymbol{Bx=0}$ 是否有非零解, 并说明理由.

5. 设方程组(I) $\begin{cases} -2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+bx_4=4 \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=c \end{cases}$ 与(II) $\begin{cases} x_1+x_4=1 \\ x_2-2x_4=2 \\ x_3+x_4=-1 \end{cases}$ 同解，试确定 a,b,c 的值.

6．已知三阶矩阵 $B\neq O$，且 B 的每一个列向量都是以下方程组的解，

$$\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ 2x_1+x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3=0 \\ 5x_1-x_2+(\lambda-1)x_3=0 \end{cases}$$

(1)求 λ 的值；（2）证明：$|B|=0$.

三、 证明题

1. 设 η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解，A 为 $m\times n$ 阵，ξ 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个非零解，证明：(1)向量组 $\eta_1,\eta_1-\eta_2$ 线性无关；(2)若 $r(A)=n-1$，则 ξ 可由 η_1,η_2 表出.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 证明: $m>n$ 时, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{ABx=0}$ 必有非零解.

3. 方程组(I) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{m1}y_m=b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 有解的充要条件是齐次方程组

(II) $\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0 \end{cases}$ 的每个解 $[c_1,c_2,\cdots,c_m]^T$，都有 $\sum_{i=1}^{m}c_ib_i=0$.

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解，即 $A\beta\neq 0$. 试证明：向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

5. 设 A 是 n 阶方阵，试证 r（A^{n}）=r（A^{n+1}）.

6. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，向量 β 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，向量 γ 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 证

明 s+1 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta+\gamma$必然线性无关.

答案与提示:

一、选择题

1． D 2. D 3. A 4. A 5. B 6. B 7．A 8．A

二、填空题

1．-1 2. -2 3. $\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \end{pmatrix}$ 4. $(0,1,1,1)^T + k(2,1,0,-1)^T$，$k$为任意常数；

5. $n-1$ 6. $Ax=b$的通解为$x = k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数

7. $\eta = k\eta_0 + \eta_1 = (2-3k, 3-4k, 4-5k, 5-6k)$ 8. 无关

三、计算题

1．通解为 $y = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数 .

2.

(1) 当$a \neq -1$，$b \neq -2$时，方程组有唯一解，

$$x_1 = \frac{b+1}{a+1},\quad x_2 = -\frac{ab^2+b-2a}{(a+1)(b+2)},\quad x_3 = \frac{2(b+1)(a-1)}{(a+1)(b+2)}.$$

(2) 当$a=-1$，$b \neq -1$时，方程组无解.

(3) 当$a=-1$，$b=-1$时，方程组有无穷多解：$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(4) 当$a \neq 1$，$b=-2$时，方程组无解.

(5) 当$a=1$，$b=-2$时，方程组有无穷多解：$x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 通解为 $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. 当 n 为偶数时, Bx=0 有非零解: $x_1 = -x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n = 1$; 当 n 为奇数时,Bx=0 只有零解.

5. $\boldsymbol{a}=-1, \boldsymbol{b}=-2, \boldsymbol{c}=4$. 提示：将（Ⅱ）的通解代入（Ⅰ）.

6. （1）$\lambda=-3$；（2）提示：反证法.

四、证明题

1．提示：（1）用定义证明；（2）由$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}-1$，知$\boldsymbol{Ax}=0$的解空间维数 dim$N(A)$=1，而$\boldsymbol{\xi}$与$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$为$\boldsymbol{Ax}=0$的解，故$\boldsymbol{\xi}$与$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$对应成比例

2. 略

3. **提示："必要性"**. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 为(Ⅰ)的解，即 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为（Ⅱ）的解，即 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{A\beta})=(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}=0$ 成立.

"充分性". $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=0$ 的每组解必满足 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}=0$，则可证 $\begin{cases}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=0\\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}=0\end{cases}$ 与 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=0$ 同解，即 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出.

4. 略

5. 证：我们通过证明 $A^n x=0$与$A^{n+1}x=0$ 是同解方程组来说明问题. 显然，$A^n x=0$的解都是$A^{n+1}x=0$的解，下证 $A^{n+1}x=0$的解x是$A^n x=0$的解. 否则，即若 $A^n x\neq 0$，考虑向量组 $x, Ax, A^2x,\ldots,A^{n-1}x, A^n x$,若

$$k_0x+k_1Ax+k_2A^2x+\ldots+k_{n-1}A^{n-1}x+k_nA^nx=0 \quad (*)$$

在上式两边左乘 A^n，利用 $A^{n+1}x=A^{n+2}x=\ldots=A^{2n}x=0$,得$k_0A^nx=0$，而 $A^nx\neq 0$，故必有 k_0=0，此时，(*）式变为

$$k_1Ax+k_2A^2x+\ldots+k_{n-1}A^{n-1}x+k_nA^nx=0,$$

再用 $A^{n-1}x$ 左乘上式两端，必得 $k_1=0$，依次类推，最终必有 $k_0=k_1=k_2=\ldots=k_{n-1}=k_n=0$，这说明 n+1 个向量 $x, Ax, A^2x,\ldots,A^{n-1}x, A^n x$ 是线性无关的，而这显然与"n+1 个 n 维向量必线性相关"矛盾，故说明假设错误，即只有 $A^n x=0$.

综合上述，知 $A^n x=0$与$A^{n+1}x=0$ 同解，进而有 $r(A^n)=r(A^{n+1})$.

6. 证 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s+k(\beta+\gamma)=0$，

则 $k=0$，否则 γ 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$ 线性表出，而向量 β 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出，$\therefore\gamma$ 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出，与题设矛盾. $\therefore k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，$\therefore k_1=k_2=\ldots=k_s=0$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\ \beta+\gamma$ 必然线性无关.