上海大学 2011 ～ 2012 学年秋季学期试卷(A 卷)

成绩	

课程名： 线性代数（B） 课程号： 01013010 学分： 3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ______________ 应试人学号________________应试人所在院系______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（本大题含 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

(提示：请在每小题的空格中填上正确答案。错填或不填均无分。)

1. 设 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 为相互正交的单位向量，则内积 $\left[3\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}-\vec{\beta}\right]=$ ____________；

2. 若三阶行列式的第 1 列元素依次为 $1,2,3$，第 2 列元素的余子式依次为 $1,2,x$，则 $x=$ ____________；

3. 由三维列向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 构成矩阵 $\mathbf{A}=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ 和 $\mathbf{B}=2(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma}+\vec{\alpha})$，若行列式 $|\mathbf{A}|=1$，则行列式 $|\mathbf{B}|=$ ____________；

4. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{O}$，则 $(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}=$ ____________；

5. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{pmatrix}^{-1}=$ ________________；

6. 当 $x=$ ____________ 时，矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 的秩达到最小；

7. 设 2 是可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，那么____________是矩阵 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}^{-1}-3\mathbf{E}$ 的一个特征值；

8. 设 $\mathbf{A}$ 是三阶正交阵，则行列式 $\left||\mathbf{A}|\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^*\right|=$ ____________；

9. 设 $\mathbf{A}$ 的秩为 2，$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 是三元非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解，若 $\vec{\eta}_1=(2,1,2)^T$ 以及 $\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=(1,0,1)^T$，那么 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ ________________；

10. 设二阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 1 和 2，且 $(0,1)^T$ 和 $(1,1)^T$ 分别为对应的特征向量，则 $\mathbf{A}^n=$ ________________。

草 稿 纸

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

二、单项选择题：（本大题含 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

(提示：在每小题列出的备选项中只有一个符合题目要求，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。)

1. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则 (　　)

A. $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$　　B. $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|$

C. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$　　D. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$

2. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，则 (　　)

A. 当 $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　B. 当 $m=n$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$

C. 当 $r(\mathbf{A})=m$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　D. 当 $r(\mathbf{A})=n$ 时，$\mathbf{B}=\mathbf{C}$

3. 设非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 存在无穷多个解，则 (　　)

A. $\mathbf{A}$ 的行向量组线性相关　　B. $\mathbf{A}$ 的行向量组线性无关

C. $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关　　D. $\mathbf{A}$ 的列向量组线性无关

4. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶的正交阵，则下列结论错误的是 (　　)

A. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 为正交阵　　B. $\mathbf{AB}$ 为正交阵

C. $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ 为正交阵　　D. 当 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|<0$ 时，$|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|=0$

5. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相似，则下列结论错误的是 (　　)

A. $\mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{B}^T$ 也相似　　B. $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 有相同的特征值

C. $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都相似于相同的对角阵　　D. $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$

三、（本大题 8 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}-a & a & b & b\\ a & -a & b & b\\ b & b & -a & a\\ b & b & a & -a\end{vmatrix}$

解：

草　稿　纸

四、（本大题 10 分） 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}-\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，若 $\mathbf{X}$ 满足矩阵方程 $(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$，试求 $\mathbf{X}$ （其中矩阵 $\mathbf{C}$ 可逆，$\mathbf{E}$ 是单位矩阵）。

解：

五、（本大题 12 分） 求向量组 $\vec{a}_1=(1,1,2,3)^T$，$\vec{a}_2=(1,-1,1,1)^T$，$\vec{a}_3=(1,3,3,5)^T$，$\vec{a}_4=(4,-2,5,6)^T$ 的秩和它的一个极大无关组，并将其它向量用此极大无关组线性表示。

解：

草　　稿　　纸

六、（本大题 12 分）试讨论 k 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 无解、有惟一解或有无穷多解，并在有无穷多解的情况下求出其通解。

解：

七、（本大题 10 分）设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ 经过一正交变换化为标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$，试确定参数 a 以及所用的正交变换。

解：

八、（本大题 8 分）设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_t$ 线性无关，$\vec{\beta}$ 是非零向量且满足 $[\vec{\beta}, \vec{\alpha}_i] = 0$ $(i = 1, \cdots, t)$，试证明向量组 $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \cdots + \vec{\alpha}_t + \vec{\beta}$，$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_t$ 线性无关。

证明：

草 稿 纸