《线性代数 D》强化训练题二

一、填空题

1．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & x & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ 是不可逆矩阵，则 $x=$________;

2． $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$，且已知 $A^6=E$，则 $A^{11}=$ ________;

3． A 是三阶方阵，其行列式 $\left|A\right|=1$， A^* 为 A 的伴随矩阵，则行列式 $\left|(2A^*)^{-1}-A\right|=$________;

4． $A=\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ 有一个特征值为 1，对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，则 $a=$________; $b=$________;

5． V 是三阶实的反对称矩阵全体构成的线性空间，则 V 的一个基是________.

二、单项选择题

1． $f(x)=\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots & x \\ x^{n-1} & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^{n-2} & 1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & 1 & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 是________次多项式;

A. $\frac{n(n+1)}{2}$　　B. $\frac{n(n-1)}{2}$　　C. n　　D. 不确定

2．已知 $\|\boldsymbol{x}\|=3$， $\|\boldsymbol{y}\|=4$，且 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 正交，则 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=$________;

A. 1　　B. 5　　C. 7　　D. 12

3. A 是 n 阶方阵，任一 n 维列向量都可由 A 的列向量组线性表示，则________;

A. A 的列向量组线性相关　　B. A 的行向量组线性相关

C. $\left|A\right|=0$　　　　　　　　D. A 的列向量组是n维向量空间的一个基

4. A 是3×2矩阵，B 是2×3矩阵，则$\left|AB\right|$________;

A. $=0$　　　　B. $\neq 0$　　　　C. 不存在　　　　D. 不能确定

5. A, B 都是n阶方阵，且 A 与 B 相似，则________.

A. A, B 必有n个线性无关的特征向量　　　　B. $R(A)=R(B)$

C. A, B 有相同的特征值和特征向量　　　　D. A, B 都可与对角阵相似

三、计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 13 & 15 & 8 \\ 2 & 9 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

四、 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $A^*X=4A^{-1}+2E+2X$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是三阶单位矩阵，求 X.

五、已知齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=0, \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4=0 \end{cases}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2$，$c_1, c_2$ 为任意常数，求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1 \end{cases}$ 的通解.

六、 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3 \quad (b>0)$，其中二次型矩阵 A 的特征值之和为1，特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求一正交变换把二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形(需写出正交变换及标准形).

七、

1．设V 是次数不超过3的实多项式全体构成的实数域上的线性空间,

$$A: 1, \ x, \ x^2, \ x^3; \quad B: 1, \ 1+x, \ 1+x+x^2, \ 1+x+x^2+x^3$$

是V 的两个基. 分别求 $f(x)=4+x+2x^2+x^3$ 在这两个基下的坐标.

2．设(x_1, x_2, x_3, x_4) 是向量$\boldsymbol{\alpha}$ 关于基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

下的坐标，(y_1, y_2, y_3, y_4) 是$\boldsymbol{\alpha}$ 关于基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标，且

$$y_1=x_1, \ y_2=x_2-x_1, \ y_3=x_3-x_2, \ y_4=x_4-x_2,$$

求基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$.

八、证明题

1．已知$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots$，$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，且已知$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，证明$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 也线性无关.

2．设$B^T=(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_m)$，且$\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_m$ 是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，P 是m 阶可逆方阵,
$(PB)^T=(\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m)$，证明$\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ 也是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.